Alkalmazott Matematikai Lapok **24** (2007), 99-115.

DISZKTRÉT DINAMIKUS RENDSZEREK ÉS KÁOSZ

KOLUMBÁN JÓZSEF ÉS SOÓS ANNA

Kulcsszavak: diszkrét dinamikus rendszer, fraktál, káosz, invariáns halmaz.
AMS2000: 37E15, 37F10

E cikk célja a diszkrét dinamikus rendszerek elmélete néhány alapfogalmának – köztük a káosznak – bemutatása. A fogalmak ismertetése után a káosz három tulajdonságát szemléltetjük a sátorfüggvény és komplex dinamikus rendszerek esetén.

1. Alapfogalmak

Értelmezzük a diszkrét dinamikus rendszer fogalmát és bemutatjuk alapvető tulajdonságait.

Legyen X a valós számok vagy a komplex számok valamely nem üres részhalmaza a szokásos d eukleidészi távolsággal. Az $f : X \to X$ folytonos függvényt az (X, d) metrikus téren értelmezett **diszkrét dinamikus rendszernek** nevezzük és $[X, f]$-fel jelöljük. A diszkrét dinamikus rendszerben egy $x_0 \in X$ pont **pályája** az az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, melyet a következő rekurzív képlettel értelmezünk:

$$x_0,\, x_1 := f(x_0),\, x_2 := f(x_1),\, ...,\, x_n := f(x_{n-1}), ...$$

vagy másképpen írva,

$$x_n = f^n(x_0),$$

ahol f^n az f függvény n. iteráltja.

Az $x \in X$ pont az $[X, f]$ diszkrét dinamikus rendszer **periodikus pontja**, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $f^n(x) = x$. Az n számot az x **periódusának** nevezzük. Azonnal belátható, ha n periódusa x-nek, akkor annak bármely többszöröse is periódusa lesz x-nek. A legkisebb periódust az x **főperiódusának** nevezzük.

Az $x \in X$ pontot az f **fixpontjának** nevezzük, ha $f(x) = x$. Minden fixpont periodikus, 1 periódussal.

Közismert, hogy ha az $f : [a, b] \to [a, b]$ folytonos függvény, akkor létezik fixpontja. Fixpontok létezésére vonatkozik a Banach-féle kontrakciós tétel is.

Az f függvény **kontrakció**, ha létezik olyan $\alpha \in]0,1[$, amelyre

$$d(f(x),f(y)) \leq \alpha d(x,y), \text{ minden } x,y \in X \text{ esetén.}$$

1.1. TÉTEL. *(Banach-féle fixpont tétel speciális esete) Tételezzük fel, hogy X zárt halmaz és $f : X \to X$ kontrakció. Ekkor f-nek egyetlen fixpontja van. Mi több, minden $x_0 \in X$ pályája ehhez a fixponthoz konvergál.*

Valójában fixpontok létezéséhez elegendő egyetlen pálya konvergenciája is.

1.2. TÉTEL. *Legyen x^* az $[X,f]$ diszkrét dinamikus rendszerben valamely x_0 pont pályájának határértéke. Ha f folytonos függvény, akkor x^* fixpont.*

Bizonyítás. Értelmezés szerint $x_n = f(x_{n-1})$. Térjünk határértékre az egyenlőség mindkét oldalán és használjuk fel az f folytonosságát. Ekkor $x^* = f(x^*)$. □

A periodikus pontok létezésével kapcsolatban megemlítjük Sharkovsky [14] híres tételét.

1.3. TÉTEL. *A természetes számok halmazában értelmezzük a következő rendezési relációt:*

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \ldots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \succ \ldots \succ 2^2\cdot 3 \succ 2^2\cdot 5 \succ 2^2\cdot 7 \succ \ldots$$

$$\ldots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2 \succ 1.$$

Tételezzük fel, hogy $[a,b] \subset \mathbb{R}$ adott intervallum, $f : [a,b] \to [a,b]$ folytonos függvény és létezik n főperiódusú pont. Ekkor $n \succ m$ szükséges és elégséges ahhoz, hogy létezzen m periódusú pont is.

Ebből a tételből következik, hogy ha van 3 főperiódusú pont, akkor van akárhány periódusú is.

A [6] dolgozatban a Sharkovsky tétel újabb bizonyítását találjuk.

Az $x^* \in X$ periodikus pont, melynek legkisebb periódusa k, **vonzó**, ha létezik az x^*-nak olyan V környezete, amelyre minden $x \in V$ esetén az $[X,f^k]$ rendszerben az y-ból induló pálya határértéke x^*. A legnagyobb ilyen V környezetet az x periodikus pont **vonzási tartományának** nevezzük. Az x^* pontot **taszító periodikus pontnak** nevezzük, ha létezik x^*-nek olyan V környezete, hogy bármely $x \in V$ esetén van olyan $x = x_0, x_{-1}, x_{-2}, \ldots, x_{-n}, \ldots$ sorozat, amelynek x^* határértéke és $x_{-n} = f^k(x_{-n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Az x^* pont **semleges**, ha se nem vonzó, se nem taszító.

Abban az esetben, ha $X \subset \mathbb{R}$ intervallum, és az f folytonosan deriválható függvény, a periodikus pontok természetét a derivált segítségével is vizsgálhatjuk.

1.4. TÉTEL. *Legyen x^* egy $k \in \mathbb{N}$ periódusú pont. Ha $\left|\left(f^k\right)'(x^*)\right| < 1$, akkor x^* vonzó, ha $\left|\left(f^k\right)'(x^*)\right| > 1$, akkor x^* taszító.*

Bizonyítás. A bizonyítást $k = 1$ esetén végezzük el, de hasonlóan végezhető nagyobb k esetén is. Az f' folytonosságából következik, hogy $|f'(x^*)| < 1$ akkor és csak akkor igaz, ha létezik $\epsilon > 0$ és $0 < \alpha < 1$ szám, amelyre $|f'(x)| < \alpha$ minden $x \in U =]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$ esetén. Azt kell bizonyítani, hogy $f^n(x) \to x^*$ minden $x \in U$ esetén. Alkalmazzuk az

$$(f^n)'(x) = f'\left(f^{n-1}(x)\right) \cdot \cdots \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

láncszabállyal kombinált középérték tételt és felhasználjuk, hogy x^* fixpont. Ezért létezik x és x^* között olyan ξ pont, amelyre

$$|f^n(x) - x^*| = |f^n(x) - f^n(x^*)| = |f'(\xi)|^n |x - x^*| \leq \alpha^n.$$

A második állítás igazolása hasonlóan történik. □

Ha $\left|\left(f^k\right)'(x^*)\right| = 1$, akkor az x^*-ot **neutrális** periodikus pontnak szokás nevezni. Egy neutrális pont lehet vonzó, taszító vagy semleges.

2. Az exponenciális függvény dinamikája

Első példaként tekintsük az exponenciális függvényt. Legyen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := a^x,\ \text{ahol } a > 0.$$

A pályát az a paraméter függvényében fogjuk tanulmányozni.

2.1. TÉTEL.

(1) Ha $a > e^{\frac{1}{e}}$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ pályája szigorúan növekvő és $+\infty$-hez tart.

(2) Ha $a = e^{\frac{1}{e}}$, akkor e az egyetlen fixpontja az $[X, f]$ diszkrét dinamikus rendszernek és ez közömbös. Ha $x_0 \leq e$, akkor a pályája növekvő és e-hez tart, ha $x_0 > e$, akkor a pályája szintén növekvő és $+\infty$-hez tart.

(3) Ha $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, akkor két fixpont létezik, x_b és x_j, $x_b < e < x_j$. Az x_b vonzó, x_j pedig taszító fixpont. Ha $x_0 \leq x_b$, akkor pályája növekvő és x_b-hez tart, ha $x_b < x_0 < x_j$, akkor pedig csökkenő és szintén x_b-hez tart. Ha $x_0 = x_j$ akkor a pálya állandó, ha $x_0 > x_j$, akkor a pálya szigorúan növekvő és $+\infty$-hez tart.

(4) Ha $a = 1$, akkor minden pont pályája állandó.

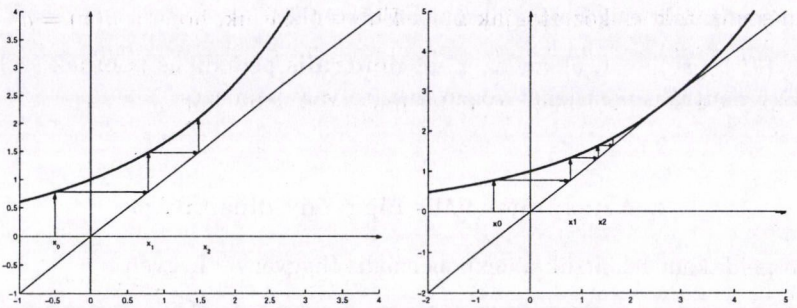
(5) Ha $e^{-e} \leq a < 1$, akkor egyetlen x^* fixpont van, és minden pont pályája ehhez tart. A pálya páros indexű és páratlan indexű tagok sorozatára bomlik, az egyik növekvő, a másik csökkenő.

Ha $e^{-e} = a$, akkor $x^* = \frac{1}{e}$, és ez neutrális.

(6) Ha $0 < a < e^{-e}$, akkor egyetlen x^* fixpont van, és ez taszító. A pálya páros indexű és páratlan indexű tagok sorozatára bomlik, ezek konvergensek, de határértékük különböző. Pontosabban, ha $g(x) = a^{a^x}$, akkor g-nek három

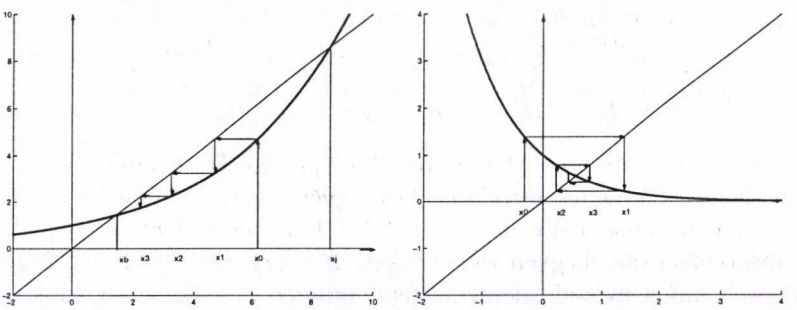
fixpontja van: $x < x^* < y$. *Ha* $x_0 < x$, *akkor az* (x_{2n}) *szigorúan növekvő sorozat és határértéke* x, *az* (x_{2n+1}) *sorozat szigorúan csökkenő és határértéke* y. *Ha* $x_0 = x$, *akkor mindkét részsorozat állandó,* $x_{2n} = x$, $x_{2n+1} = y$. *Ha* $x < x_0 < x^*$, *akkor az* (x_{2n}) *szigorúan csökkenő sorozat és határértéke* x, *az* (x_{2n+1}) *sorozat szigorúan növekvő és határértéke* y. *Az* $y > x_0 > x^*$ *és* $x_0 > y$ *esetek az előbbiek duálisai.*

Bizonyítás. Igazoltuk, hogy ha egy pálya konvergens, akkor a határérték fixpont, tehát megoldása az $a^x = x$ egyenletnek. Ez egyenértékű a $\ln a = \frac{\ln x}{x}$ egyenlet megoldásával. Ábrázoljuk a $\varphi(x) := \frac{\ln x}{x}$ függvényt. Ennek maximuma $\frac{1}{e}$, és azt e-ben éri el. Ha $\ln a > \frac{1}{e}$, akkor nincs fixpont, ellenkező esetben van.



a) b)

1. ábra. $f(x) = a^x$, **a)** $a > e^{\frac{1}{e}}$ **b)** $a = e^{\frac{1}{e}}$



a) b)

2. ábra. $f(x) = a^x$, **a)** $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ **b)** $0 < a < 1$

(1) Ha $\ln a > \frac{1}{e}$, azaz $a > e^{\frac{1}{e}}$, akkor az f grafikonja az első szögfelező fölött van, ezért $x_0 \in \mathbb{R}$ pályája szigorúan növekvő, és fixpont nincs, tehát a határérték végtelen (1.a ábra).

(2) Ha $\ln a = \frac{1}{e}$, az f grafikonja (e, e) pontban érinti az első szögfelezőt és a grafikon a szögfelező fölött helyezkedik el. Ebből következik az állítás (1.b ábra).

(3) Ha $0 < \ln a < \frac{1}{e}$, akkor az $y = \ln a$ a φ grafikonját két pontban metszi; a baloldali x koordinátája legyen x_b, a jobboldalié x_j. Az f grafikonja az első szögfelezőt az (x_b, a^{x_b}), illetve az (x_j, a^{x_j}) pontban metszi. Ha $x < e$, akkor $0 < f'(x) < 1$, ha $x > e$, akkor $f'(x) > 1$, tehát x_b vonzó, x_j pedig taszító (2.a ábra).

(4) Ha $a = 1$, akkor $f(x) = 1$, így $x = 1$ az egyetlen fixpont.

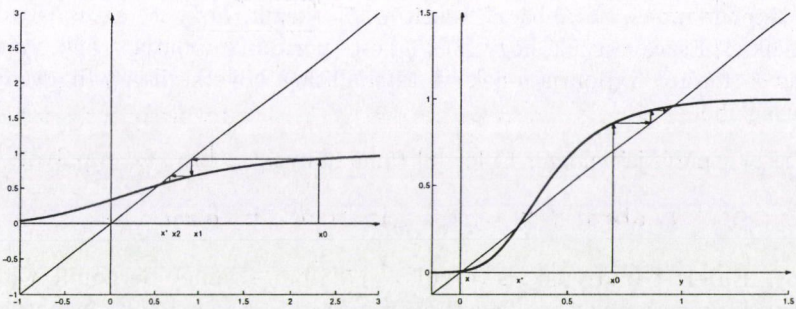
Ha $a < 1$, egyetlen x^* fixpont van, mert az $y = \ln a$ egyenletű egyenes a φ grafikonját egyetlen pontban metszi (2.b ábra).

(5) Ha $e^{-e} \leq a < 1$, akkor

$$x_0, x_2, ..., x_{2n}, ... \text{ és } x_1, x_3, ..., x_{2n+1}, ...$$

monoton sorozatok, és közrefogják x^*-t. Ehhez belátjuk, hogy a $g(x) = a^{a^x}$ függvény növekvő, $g(x) > x$, ha $x < x^*$ és $g(x) < x$, ha $x > x^*$. Valóban,

$$g'(x) = a^x a^{a^x} (\ln a)^2 > 0, \text{ a } \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0, \lim_{x \to \infty} g(x) = 1.$$



a) b)

3. ábra. $g(x) = a^{a^x}$, **a)** $1 > a > e^{-e}$ **b)** $0 < a < e^{-e}$

Mivel $g''(x) = (\ln a)^3 a^x a^{a^x} (1 + a^x \ln a)$, a g függvénynek egyetlen inflexiós pontja van minden $a > 0$ esetén; ettől balra a függvény konvex, jobbra pedig konkáv. Még azt kell belátnunk, hogy ha $e^{-e} \leq a < 1$, akkor a $g(x) = x$ egyenletnek egyetlen megoldása van. Legyen $\psi(x) := \frac{\ln x}{a^x}$. A $\psi'(x) = a^{-x} \left[-\ln a \ln x + \frac{1}{x} \right] \geq 0$ egyenlőtlenség akkor és csak akkor áll fenn minden $x > 0$ esetén, ha $a \geq e^{-e}$. Figyelembe véve, hogy f-nek minden fixpontja fixpontja g-nek is, és g-nek csak egy van, következik, hogy x_{2n} és x_{2n+1} határértéke x^* (3.a ábra).

(6) Ha $0 < a < e^{-e}$, akkor $f'(x^*) < -1$. Indukcióval igazolható, hogy $x_0 = 1$ esetén

$$a = x_1 < x_3 < ... < x_{2n+1} < ... < x_{2n} < ... < x_2 < 1,$$
$$a^{x_{2n}} = x_{2n+1} \text{ és } a^{x_{2n-1}} = x_{2n}.$$

Legyen

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{2n+1} \text{ és } y = \lim_{n\to\infty} x_{2n}.$$

Ekkor

$$x \le y,\ a^y = x \text{ és } a^x = y.$$

Innen

$$x \ln x = y \ln y.$$

Mivel a $h(x) = x \ln x$ képlettel értelmezett függvénynek $\frac{1}{e}$ minimumpontja és ez a függvény szigorúan konvex, az előbbi egyenletnek legfeljebb két megoldása van. Kimutatjuk, hogy $x < y$ (3.b ábra). Valóban, ha $x = y$, akkor $x = x^*$, mert x^* egyértelmű. De ekkor $g'(x) = x^2(\ln a)^2 = (\ln x)^2 > 1$, ami ellentmond annak, hogy az $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat szigorúan növekvő és x-hez tart. Ebből következik, hogy $x < y$. A

$$\frac{\ln x}{y} = \frac{\ln y}{x} = \frac{\ln x^*}{x^*} = \ln a$$

egyenlőség alapján mindkettő különbözik x^*-tól. Mivel x, x^*, és y fixpontjai g-nek és több fixpont nincs, továbbá x^* taszító, következik, hogy x^* az x és y között helyezkedik el. Észrevesszük, hogy x és y kettő periódusú pontja f-nek. Az x és y vonzó, az x^* taszító fixpontja g-nek. A tétel állítása következik a g függvény fenti tulajdonságaiból. □

Az $x_0 = a$ pályáját először Euler [8] tanulmányozta, ezért ezt a pályát, vagyis az

$$a,\ a^a,\ a^{a^a},\ \ldots$$

sorozatot, **Euler toronynak** nevezzük. 1728-ban Daniel Bernoulli Christian Goldbergnek címzett levelében felveti azon x és y, $x \neq y$, számok meghatározásának kérdését, amelyek teljesítik az $x^y = y^x$ feltételt. Egy ilyen számpárt **Bernoulli párosnak** nevezünk. Bernoulli azt írta a levélben, hogy egyetlen eset van, amikor ezek a számok egészek ($x = 2, y = 4$), de végtelen sok racionális megoldás létezik. Azt is megjegyezte, hogy vannak irracionális megoldások is, anélkül, hogy ezekről részletesen írt volna. Euler megjegyzi, hogy az

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ és } y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

racionális megoldásai a Bernoulli feladatnak, minden $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén.

Flechsenhaar [10] igazolta, hogy más racionális megoldás nincs. Erre vonatkozóan az olvasó talál információkat a [11] és [4] dolgozatban is. Vegyük észre, hogy ha $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ és az exponenciális függvény két fixpontja x és y, akkor az x és y Bernoulli párost képez. Ezek szerint $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ esetén az exponenciális függvény x_b és x_j fixpontja Bernoulli párost képez, és ezen kívül más valós Bernoulli páros nincs.

A Bernoulli páros hasonlóan, $0 < a < e^{-e}$ esetén létezik olyan (x, y) számpár, amelyre $x \neq y$ és $x^x = y^y$. Egy ilyen számpárt **Euler párosnak** nevezünk. Az előbbi tétel bizonyításából következik, hogy ezek g-nek fixpontjai. Könnyen igazolható, hogy (x, y) akkor és csak akkor Euler páros, ha $\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right)$ Bernoulli páros.

Goldbach Bernoullihoz küldött levelében a Bernoulli párosok egy parametrikus ábrázolását adta. Ha (x, y) egy ilyen páros és $y > x$, akkor létezik olyan $s > 1$, hogy $y = sx$. Ekkor $x^{sx} = (sx)^x$, vagyis $x^s = sx$, tehát

$$x = s^{\frac{1}{s-1}}, \; y = s^{\frac{s}{s-1}}.$$

Ehhez hasonlóan, az Euler párosok parametrikus alakja a következő:

$$x = s^{\frac{s}{1-s}}, \; y = s^{\frac{1}{1-s}}, \; s > 1.$$

Ezekről a kérdésekről további információkat [1], [7] és [12] dolgozatban olvashatunk.

3. A káosz

Az $A \subseteq X$ nem üres halmazt az $[X, f]$ diszkrét dinamikus rendszer **invariáns halmazának** nevezzük, ha $f(A) = A$, ahol $f(A) := \{y \in X | \exists x \in A : f(x) = y\}$. Minden fixpontból képzett halmaz invariáns halmaz. Az A invariáns halmazt a diszkrét dinamikus rendszer **attraktorának** nevezzük, ha létezik olyan A-t tartalmazó V nyílt halmaz, hogy bármely $x \in V$ esetén $f^k(x)$-nek az A-tól mért távolsága, vagyis,

$$\sup \left\{ \min \left\{ d\left(f^k(v), a\right) \mid a \in A \right\} \mid v \in V \right\}$$

nullához tart, ha k végtelenbe tart. A legnagyobb ilyen V halmazt az A **vonzási tartományának** nevezzük. Például, vonzó fixpontból képzett halmaz attraktor. A taszító fixpont fogalmának általánosításaként, hasonló módon értelmezzük a taszító invariáns halmaz fogalmát is.

Az $[X, f]$ invariáns halmazai gyakran fraktálhalmazok.

Azt mondjuk, hogy f **kaotikusan viselkedik** az A invariáns halmazon, ha a következő három tulajdonság teljesül:

(i) Létezik olyan $x_0 \in A$, amelynek pályája A-ban sűrű, vagyis A minden elemét tetszőleges pontossággal megközelíti.

(ii) Az A-beli periodikus pontok halmaza A-ban sűrű .

(iii) A pálya viselkedése érzékeny a kezdeti feltételekre, vagyis létezik olyan $\delta > 0$, hogy adott $x \in A$ esetén létezik A-ban x-hez tetszőlegesen közeli y pont és $k \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $d\left(f^k(x), f^k(y)\right) \geq \delta$. Más szóval, ha a pontok közelednek, a pályák nem feltétlenül közelednek minden határon túl.

A káosz fogalmának értelmezése Devaney [5] művében szerepel először. Utólag Banks és társai [2]-ben kimutatták, hogy a (iii) tulajdonság az első kettő következménye.

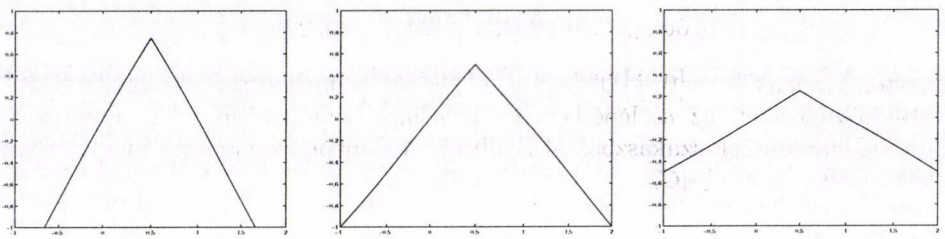
Számítógép segítségével a diszkrét dinamikus rendszerek attraktorait könnyen megjeleníthetjük. Ha adott x kezdőpontra ábrázoljuk az $f^k(x)$ iteráltakat, például $k \geq 100$ esetén, a kapott ábra megközelíti az attraktort, legalábbis szemmel a kapott ponthalmazt nem tudjuk megkülönböztetni az attraktortól.

4. A sátorfüggvény dinamikája

Második példánk legyen a sátorfüggvény. Ha $\lambda > 0$, legyen $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_\lambda(x) := \begin{cases} \lambda x, & \text{ha } x \leq \frac{1}{2} \\ \lambda - \lambda x, & \text{ha } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

A pályák és az invariáns halmaz tanulmányozását a λ paraméter függvényében végezzük.



a) b) c)

4. ábra. A sátor függvény **a)** $\lambda = \frac{3}{2}$ **b)** $\lambda = 1$ **c)** $\lambda = \frac{1}{2}$

1) Tekintsük először azt az esetet, amikor $\lambda < 1$. A sátor teteje az első szögfelező alatt helyezkedik el. Az x_0-ból az x_1 -et úgy származtatjuk, hogy az $(x_0, f(x_0))$ ponton át húzott vízszintes egyenessel metszük az első szögfelezőt és a metszéspontot vetítjük a vízszintes tengelyre. Ha a szerkesztést az $(x_1, f(x_1))$ pontból megismételjük, az x_2-t kapjuk. Hasonlóan szerkesztjük meg a következő pontokat. Ebben az esetben minden x_0 valós szám pályája konvergens és határértéke 0. Az $A = \{0\}$ invariáns halmaz attraktor, mert az $\mathbb{R}$ minden elemét magához vonzza. (4.c ábra)

2) Ha $\lambda = 1$, akkor minden $x \leq \frac{1}{2}$ fixpontja f-nek. Ezért $A =]-\infty, \frac{1}{2}]$ vonzó invariáns halmaz (4.b ábra).

3) Ha $1 < \lambda \leq 2$, akkor a sátor teteje az első szögfelező felett és az $y = 1$ egyenes alatt helyezkedik el. A grafikont az első szögfelező két pontban metszi,

tehát két fixpont van: 0 és $\frac{a}{a+1}$. Mindkét fixpont taszító. Könnyen belátható, hogy $A = [0,1]$ taszító invariáns halmaz. Mi több, ha $x_0 \in \mathbb{R} \setminus A$, akkor

$$\lim_{k\to\infty} f^k(x_0) = -\infty \quad \text{(4.a ábra)}.$$

4) Minőségileg új helyzet áll elő, ha $\lambda > 2$. Ekkor a sátor teteje az $y = 1$ egyenes felett helyezkedik el, így a $[0,1]$ intervallum nem invariáns f-re nézve.

Az invariáns halmaz tanulmányozásához szükségünk van a Cantor-halmaz meghatározására.

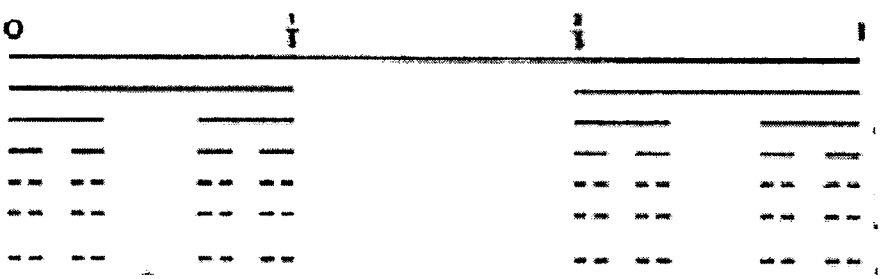
A $[0,1]$ intervallumból tekintsük azokat a valós számokat, amelyek a hármas számrendszerben az 1-es számjegy felhasználása nélkül ábrázolhatóak. Ezek alkotják a **Cantor-halmazt**:

$$C := \{0, a_1a_2...a_i... \mid a_i \in \{0,2\}\}.$$

Ha ezeket a számokat ábrázoljuk a számegyenesen, észrevesszük, hogy a vessző után akkor és csak akkor nem szerepel az 1-es számjegy, ha a szám a $[0,1]$ intervallum első, illetve a harmadik harmadában helyezkedik el. Legyen $C_1 := \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right]$. Ha a második számjegy sem 1, akkor a számok

$$0,00a_3,...,\ 0,02a_3...,\ 0,20a_3...,\ 0,22a_3...$$

alakúak. Ezek a $C_2 := \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ halmazban vannak. Folytatva a gondolatmenetet, az n. lépésben a C_n halmazt szerkesztjük meg, amelyik 2^n darab $\frac{1}{3^n}$ hosszúságú szakaszból áll (. ábra). A Cantor-halmaz ezek metszeteként jelenik meg: $C := \cap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.



5. ábra. A Cantor-halmaz megközelítése

Térjünk vissza a sátorfüggvényhez a $\lambda = 3$ paraméter esetén. Ha $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, akkor $f^n(x_0)$ határértéke $-\infty$. Ugyanez a helyzet, ha $x_0 \in \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, ugyanis ekkor

$f(x_0) > 1$. Indukcióval igazolható, hogy ha $x_0 \in \mathbb{R} \setminus C$, akkor létezik olyan $p \in \mathbb{N}$, amelyre $f^p(x_0) \in \mathbb{R} \setminus [0,1]$, tehát $f^n(x_0)$ határértéke $-\infty$.

4.1. TÉTEL. *A C (taszító) invariáns halmaz f-re nézve.*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in C$. Először igazoljuk, hogy C invariáns f-re. Valóban, ha $x \in C$, akkor ternáris ábrázolása $0, a_1 a_2 ... a_n ...$ alakú, ahol $a_n \in \{0,2\}$ minden n esetén. Két esetet különböztetünk meg. Ha $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, akkor $a_1 = 0$ és $f(x) = 3x = 0, a_2 ... a_n ...$, tehát $f(x) \in C$. Ha $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, akkor $a_1 = 2$, $1 - x = 0, 0 b_2 ... b_n ...$ és $f(x) = 3(1-x) = 0, b_2 ... b_n ...$, ahol $b_n \in \{0,2\}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Következésképpen $f(C) \subseteq C$. A fordított reláció igazolására tételezzük fel, hogy $y \in C$. Ismét két eset lehetséges. Ha $y \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$, akkor $x = \frac{y}{3}$ szintén eleme C-nek és $f(x) = y$, tehát $y \in C$. Ha $y \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, akkor $x = 1 - \frac{y}{3}$ eleme C-nek és $f(x) = y$, tehát $y \in f(C)$ ebben az esetben is. Következik, hogy $f(C) = C$.

A C taszító, mert ha $x_0 \in \mathbb{R} \setminus C$, akkor $f^n(x_0)$ határértéke $-\infty$, függetlenül attól, hogy milyen közel van x_0 a C-hez. □

A fenti bizonyításból látható, hogy ha $a_k = 0$, akkor $f^k(x) = 0, a_{k+1} a_{k+2} ...$. A fentiekhez hasonlóan igazolható, hogy ha g_1 és g_2-vel jelöljük az f leszűkítéseinek inverzét,

$$g_1(x) = \frac{x}{3}, \quad g_2(x) = 1 - \frac{x}{3},$$

akkor

$$C = g_1(C) \cup g_2(C),$$

vagyis C **önhasonló** halmaz.

Igazolhatjuk azt is, hogy

$$C = \cap_{n \in \mathbb{N}} f^n(I), \text{ ahol } I = [0,1].$$

4.2. TÉTEL. *f viselkedése a C halmazon kaotikus.*

Bizonyítás. Az (i) igazolásához képezzük az összes olyan véges ternáris törtet, amelyeket a 0 és 2 számjegyekkel szerkeszthetünk. Ezek a következők:

0,0	0,2						
0,00	0,02	0,20	0,22				
0,000	0,002	0,020	0,200	0,022	0,202	0,220	0,222
...	...	...	...	...	...	...	...

Legyen x_0 az a ternáris tört, amelyet úgy kapunk, hogy a 0 egészrész után a fenti táblázatban szereplő törteket a vesszők elhagyásával egymás után írjuk. Ebben az 1-es nem szerepel, tehát $x_0 \in C$. Az x_0 ábrázolásában minden, 0 és 2 számjeggyel képezhető véges sorozat szerepel, mégpedig úgy, hogy előtte egy 0 van. Legyen $x = 0, a_1 a_2 ... a_k ...$ tetszőlegesen választott tört C-ből és $\epsilon > 0$. Tekintsünk egy k

természetes számot, amelyre $1 < 3^k\epsilon$. Mivel az $a_1a_2...a_k$ véges sorozat x_0 ábrázolásában előfordul, és azt 0 előzi meg, létezik olyan q természetes szám, amelyre $f^q(x_0) = 0, a_1a_2...a_kb_{k+1}b_{k+2}...$ alakú. Következésképpen,

$$|f^q(x_0) - x| < 3^{-k} < \epsilon.$$

Ezzel igazoltuk, hogy x_0 pályája C-ben sűrű. Figyelembe véve, hogy minden k esetén $0, a_1a_2...a_{k-1}0a_1a_2...a_{k-1}0a_1a_2...a_{k-1}...$ k periódusú pont, következik, hogy a periodikus pontok halmaza sűrű C-ben.

A (iii) tulajdonság igazolásához legyen $\delta = \frac{1}{3}$. Tetszőleges k természetes szám és $x = 0, a_1a_2...a_k...$ esetén tekintsük az $y = 0, a_1a_2...a_kb_{k+1}b_{k+2}...$ Cantor-számot, ahol $b_{k+1} \neq a_{k+1}$. Ekkor

$$|x - y| < 3^{-k} \text{ és } |f^k(x) - f^k(y)| \geq \frac{1}{3}.$$

□

Igazolható, hogy minden $\lambda > 2$ esetén létezik egy Cantor-típusú invariáns halmaz, és az f viselkedése ezen szintén kaotikus. Az is bizonyítható, hogy ha $1 < \lambda \leq 2$, akkor az f a $[0, 1]$ intervallumon kaotikusan viselkedik.

5. Komplex dinamikus rendszerek

A komplex számsíkon értelmezett dinamikus rendszerek invariáns halmazai igen gyakran fraktálhalmazok. Az olyan egyszerű függvény esetén is, mint az $f(x) = x^2 + c$, ahol c konstans, bonyolult invariáns halmazokhoz jutunk (lásd a 11. Ábrát).

Tekintsük az $n \geq 2$ fokszámú $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ polinomfüggvényeket:

$$f(z) := a_0 + a_1z + ... + a_nz^n.$$

A komplex dinamikus rendszerek elmélete racionális függvények esetén is hasonló. Az f függvényhez tartozó **Julia-halmaz** a taszító periodikus pontok halmazának zárt burkolója. Ezt a halmazt $J(f)$-fel fogjuk jelölni. A Julia-halmaz kiegészítő halmazát **Fatou-halmaznak** nevezzük, és $F(f)$-fel jelöljük.

A következőkben a Julia-halmaz tulajdonságait mutatjuk be. Megmutatjuk, hogy invariáns az f-re és annak inverzére, és f a $J(f)$-n kaotikusan viselkedik.

A legegyszerűbb eset, ha $f(z) = z^2$. Ekkor $f^k(z) = z^{2^k}$. A k periódusú pontok

$$\left\{ z \in \mathbb{C} | \, z = e^{\frac{2\pi il}{(2^k-1)}}, 0 \leq l < 2^k - 2 \right\}$$

halmaz elemei. Ezek taszító pontok, mert $\left|\left(f^k\right)'(z)\right| = 2$. Tehát

$$J(f) := \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}.$$

Ebben az esetben azonnal következik, hogy

$$J(f) = f(J(f)) = f^{-1}(J(f)).$$

Ha $|z| < 1$, akkor

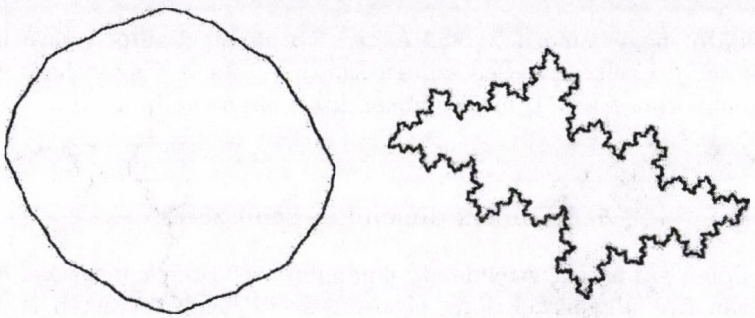
$$f^k(z) \to 0, \ (k \to \infty),$$

és ha $|z| > 1$, akkor $f^k(z) \to \infty$, de $f^k(z) \in J(f)$, ha $|z| = 1$.

Legyen $c \in \mathbb{C}$, és értelmezzük az f függvényt a következő képlettel:

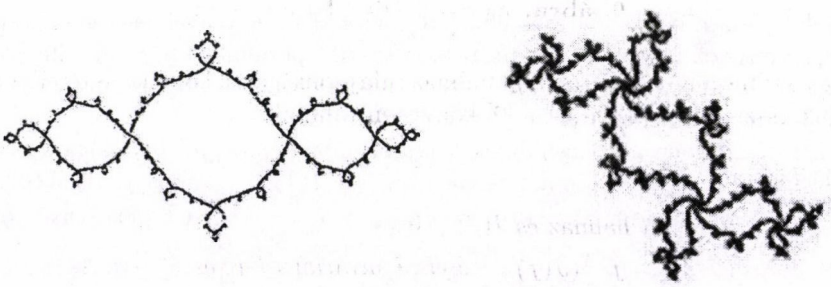
$$f(z) := z^2 + c.$$

Ekkor kis $|z|$ esetén $f^k(z) \to w$, ahol w az f 0-hoz közeli fixpontja, és $f^k(z) \to \infty$, ha z nagy. A Julia-halmaz ebben az esetben is a két vonzási tartomány határpontjainak halmaza (6. ábra).



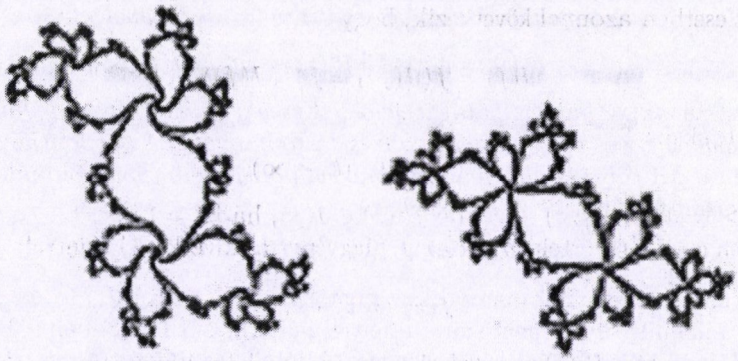
a) b)

6. ábra. a) $c = -0,1 + 0,1i$ **b)** $c = -0,5 + 0,5i$



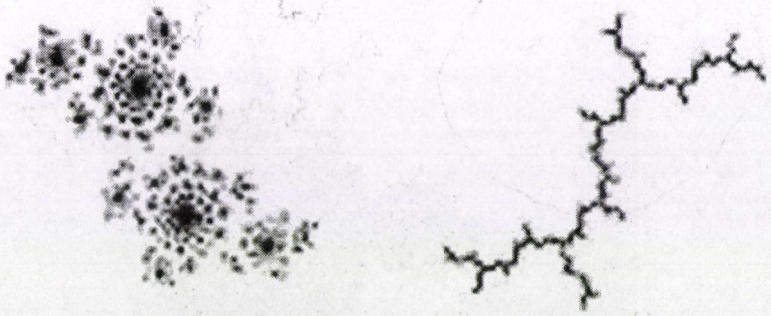
a) b)

7. ábra. a) $c = -0,1 + 0,05i$ **b)** $c = -0,2 + 0,75i$



a) b)

8. ábra. a) $c = 0,25 + 0,52i$ **b)** $c = -0,5 + 0,55i$



a) b)

9. ábra. a) $c = 0,66i$ **b)** $c = -i$

Az f polinomhoz tartozó Julia-halmaz tulajdonságait a következő tételben foglalhatjuk össze. (A bizonyítást a [9] könyvben találjuk.)

5.1. TÉTEL.

a) $J(f)$ *kompakt halmaz és* $J(f) \neq \emptyset$.

b) $J = f(J(f)) = f^{-1}(J(f))$, *vagyis* J *invariáns* f*-re és* f^{-1}*-re is.*

c) $J(f^p) = J(f)$ *minden* $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *esetén.*

d) $J(f)$ *belseje üres.*

e) $J(f)$ *perfekt halmaz (zárt és nincsenek izolált pontjai), tehát megszámlálhatatlan.*

f) Ha w vonzó fixpontja f-nek, akkor $\partial A(w) = J(f)$, ahol

$$A(w) := \{z \in \mathbb{C} |\, f^k(z) \to w, \text{ ha } k \to \infty\}$$

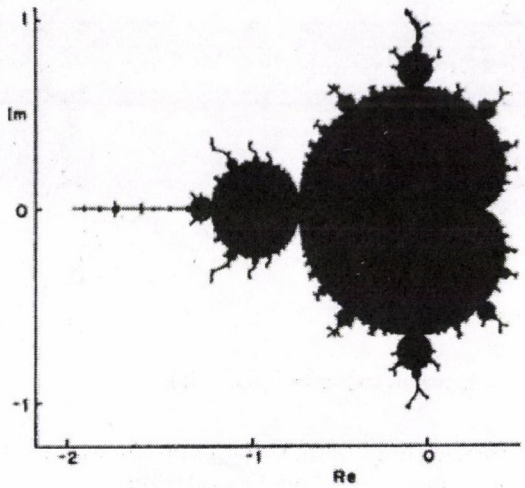
és ∂A az A halmaz határát jelöli. Ezt azt jelenti, hogy a Julia-halmaz minden egyes vonzó fixpont vonzási tartományának határpontjaival egyezik meg. Mi több, a Julia-halmaz minden pontja határpontja minden vonzási tartománynak.

g) Ha $z \in J(f)$, akkor $J(f)$ az $\cup_{k=1}^{\infty} f^{-k}(z)$ zárt burkolója.

Az értelmezés szerint a periodikus pontok halmaza sűrű $J(f)$-ben. Másrészt $J(f)$-ben találunk olyan pontokat, amelyek pályája sűrű $J(f)$-ben. Igazolható, hogy a pálya viselkedése érzékeny a kezdeti feltételekre $J(f)$-n.

A Julia-halmazokkal kapcsolatban meg kell említenünk a **Mandelbrot-halmazt** (10. ábra). Ha $f_c(z) := z^2 + c$, akkor legyen M azon c pontok halmaza, amelyekre a hozzátartozó $J(f_c)$ Julia-halmaz összefüggő:

$$M := \{c \in \mathbb{C} |\, J(f_c) \text{ összefüggő}\}.$$



10. ábra. Mandelbrot-halmaz

Az értelmezés alapján elég nehéz megjeleníteni a Mandelbrot-halmazt.

A következő tétel a Mandelbrot-halmaz olyan jellemzését adja, amely segítségével lehetővé válik a számítógépes megjelenítés.

5.2. TÉTEL.

$$M = \{c \in \mathbb{C} |\, a\ 0 \text{ pályája } f_c\text{-ben korlátos}\} = \left\{c \in \mathbb{C} |\, f_c^k(0) \not\to \infty, \text{ ha } k \to \infty\right\}.$$

Vizsgáljuk meg a Julia-halmaz alakját, ha c paraméter a komplex síkban változik.

Egy periodikus pályát **vonzónak** nevezünk, ha a megfelelő periodikus pont vonzó.

A vonzó periodikus pontok meghatározzák a $J(f_c)$ alakját. Igazolható, hogy, ha $w \neq \infty$ vonzó periodikus pont, akkor létezik olyan z kritikus pontja f_c-nek ($f_c'(z) = 0$), amelyre $f^k(z)$ a w-t tartalmazó periodikus pályához tart. Figyelembe véve, hogy 0 az egyetlen kritikus pontja f_c-nek, legfeljebb egy vonzó periodikus pálya lehet. Ha $c \notin M$ az 5.2. Tétel értelmében $f_c^k(0) \to \infty$, tehát f_c-nek nincsen periodikus pályája.

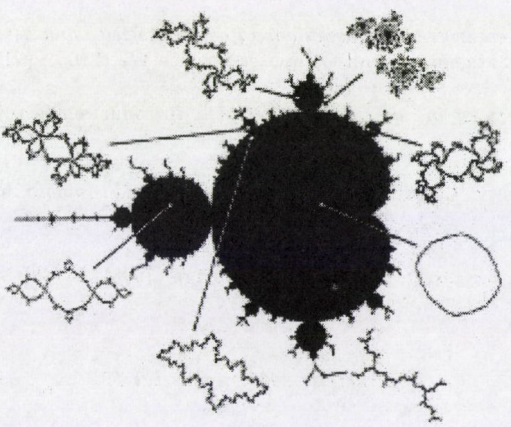
A Julia-halmazokat tanulmányozhatjuk az szerint, hogy mennyi a periódusa azoknak a pontoknak, amelyeknek pályája vonzó. Ha $c \notin M$, akkor nincs vonzó pálya, tehát $J(f_c)$ nem összefüggő. Pontosabban:

Ha $|c| > \frac{1}{4}\left(5 + 2\sqrt{6}\right)$, akkor $J(f_c)$ széteső.

Ha $|c| < \frac{1}{4}$, akkor $J(f_c)$ egyszerű zárt görbe. Ekkor c a Mandelbrot-halmaz belsejében van (7. és 8. ábra).

Ha $|c + 1| < \frac{1}{2}$, akkor létezik kettő periódusú vonzó pálya. Ekkor f_c^2 negyedfokú polinom, tehát f_c-nek két fixpontja és két 2 periódusú periodikus pontja van. Legyenek ezek w_1 és w_2. Ekkor a w_i vonzástartománya egy egyszerű zárt C_i görbe által határolt halmaz, $i \in \{1, 2\}$. A Julia-halmaz tulajdonságai alapján $C_i \subset J\left(f_c^2\right) = J(f_c)$.

Hasonlóan tanulmányozhatjuk $J(f_c)$ alakját a p periódusú vonzó pályák létezése esetén (9. ábra).



11. ábra. Julia-halmazok

A 11. ábra a Julia-halmazok alakját a c-nek a Mandelbrot halmazban elfoglalt helye szerint szemlélteti.

Hivatkozások

[1] J. ANDERSON: *Iterated exponentials.* The American Mathematical Monthly 111 (2004) **8**, (668-679.)

[2] J. BANKS – J. BROOKS – G. CAIRNS – G. DAVOS – P. STACEY: *On Devaney's Definition of Chaos.* The American Mathematical Monthly 99 (1992) **4**, (332-334.)

[3] M. F. BARNSLEY: *Fractals Everywhere.* Academic Press (1988)

[4] M. A. BENNETT: *Positive Rational Solutions to* $x^y = y^{mx}$. The American Mathematical Monthly 111 (2004) **1**, (13-21.)

[5] R. L. DEVANEY: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Addison-Wesley, (1989)

[6] R. L. DEVANEY ET AL: *Playing Cath-Up with Iterated Exponentials.* The American Mathematical Monthly 111 (2004), **8**, (704-708.)

[7] BAU-SEN DU: *A Simple Proof of Sharkovsky's Theorem.* The American Mathematical Monthly 111 (2004), **7**, (595-599.)

[8] L. EULER: *De formulis exponentialibus replicatis.* Acta Scientiarium Petropolitanae 1 (1778), (38-60.)

[9] K. J. FALCONER: *Fractal geometry.* John Wiley, (1990)

[10] A. FLECHENHAAR: *Über die Gleichung* $x^y = y^x$. Unterricht für Math. 17 (1911), (70-73.)

[11] S. HURWITZ: *On the rational solutions of* $m^n = n^m$ *with* $m \neq n$. The American Mathematical Monthly 74 (1967), (298-300.)

[12] L. LÓCZI: *Two centuries of the equations of commutativity and associativity of exponentiation.* Teaching Mathematics and Computer Science 1/2 (2003), (219-233.)

[13] J. MILNOR: *Dynamics in one complexe variable.* Introductory lectures, Vieweg, Braunschweig, (1999)

[14] A. N. SHARKOWSKY: *Coexistence of cycles of a continuous map of a line into itself.* Ukrain Mat. Zh. 16 (1964), (61-71.)

[15] T. TÉL: *A káosz természetrajza.* Természet Világa (1998), **9**, (386-388.)

(Beérkezett: 2005. augusztus 12.)

KOLUMBÁN JÓZSEF ÉS SOÓS ANNA
BABES-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM,
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR
KOLOZSVÁR
asoos@math.ubbcluj.ro

DISCRETE DYNAMICAL SYSTEMS AND CHAOS

JÓZSEF KOLUMBÁN AND ANNA SOÓS

In the last decades there has been an explosion of interest in the dynamical systems. This is due to its applications in biology, economics, engineering, physics, etc. and to the availability of powerful computers.

Our goal in this article is to illustrate by some examples (like the exponential function, tent function, and complex polynomial functions) the basic notions (as periodic point, invariant set and chaos) of discrete dynamical systems theory.