

## HÁLÓNÉLKÜLI MÓDSZEREK ÉS ALKALMAZÁSUK A STOKES-PROBLÉMÁRA

GÁSPÁR CSABA

A cikkben a kétdimenziós időfüggetlen Stokes-egyenletrendszer egy lehetséges numerikus megoldását vázoljuk. A módszer az ismert Uzawa-algoritmuson alapuló nyomáskorrekciós módszer hálómentes (rácsmentes) változata: a nyomáskorrekciós módszerben fellépő Poisson-egyenleteket hálómentes módszerrel oldjuk meg. Így az áramlási tartományt sem véges elemekkel, sem végesdifferenciás rácshálózattal diszkretizálni nem szükséges. Az alkalmazott sémák a radiális bázisfüggvények módszerének lokális változatából adódnak. A kapott módszer számításigénye viszonylag csekély, és a módszer könnyen multigrid környezetbe ágyazható. A módszert egy egyszerű numerikus tesztfeladaton keresztül szemléltetjük.

### 1. A Stokes-egyenletek

Az összenyomhatatlan folyadék mozgását matematikailag a következő differenciálegyenlet-rendszer írja le (*Navier–Stokes-egyenletek*):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (\text{folytonossági egyenlet}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{a} \quad (\text{momentumegyenletek}),$$

ahol  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  a sebesség (vektor),  $p$  a nyomás (skalár),  $\rho$  a folyadék sűrűsége, melyről feltesszük, hogy térben és időben változatlan,  $\nu$  pedig a kinematikai viszkozitás, melyet szintén konstansnak tekintünk. Más szóval, a sűrűség és viszkozitás helyi és időbeli változásaitól eltekintünk. Az (1) egyenletben  $\nabla$  a nabla operátort jelöli  $\left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\right)$ ,  $\Delta$  pedig a Laplace-operátort  $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ . A momentumegyenletek jobb oldalán álló a vektorfüggvény a külső erők által létrehozott gyorsulást írja le.

Ha időben változatlan (permanens) folyamatokkal foglalkozunk, akkor a fenti egyenletekben az idő szerinti deriváltak mind 0-val egyenlők.

Az (1) egyenlet speciális esete, amikor az  $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  konvektív deriváltakat elhanyagoljuk. Ez *lassú áramlások* és/vagy *nagy viszkozitás* mellett tehető meg.

Az áramlást ekkor a *Stokes-egyenletek* írják le:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{u} &= \mathbf{a}, \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

A (2) egyenletek *lineáris* differenciálegyenletek, míg az (1) egyenletek nemlineárisak. Mind elméleti, mind numerikus szempontból a (2) egyenletek linearitása igen nagy előnyt jelent: ezenfelül az (1) egyenletre léteznek olyan iterációs módszerek, melyek minden lépésében egy-egy (2) típusú lineáris egyenletet kell megoldani.

### 1.1. A peremfeltételek problémája

Más peremfeltételt kell megadni a sebességkomponensek, és mást a nyomás esetén; továbbá a perem egyes részein is változik a peremfeltétel jellege. A peremet bontunk három különböző, nem feltétlen összefüggő részre: beáramlási perem, kiáramlási perem, szilárd perem (fal). Az egyes részekben a következő adatokat szokás peremfeltételként megadni:

*Beáramlási perem:* Itt mindhárom sebességkomponenst ( $u, v, w$ ) meg kell adni, míg a  $p$  nyomásra nézve semmilyen előírást nem teszünk. A gyakorlatban általában a belépő *vízhozamot* ismerjük (egységnyi idő alatt beáramló vízmennyiség), a sebességkomponensek eloszlását a beáramlási perem mentén nem. Külön feladat tehát a sebességeloszlás előállítása az adott hozam mellett. Legegyszerűbb esetben konstans nagyságú, a beáramlási felületre merőleges (normális) irányú sebességet írunk elő: ez a valóságot csak durván írja le, mivel nem veszi figyelembe a falsűrűlódás okozta sebességsökkenést. Finomabb modellezés tehető adott (pl. kvadrátikus) sebességprofil meghatározásával. Ez azonban bonyolultabb alakú felületnél nem túl egyszerű, de jelentős hatása csak a beáramlási perem közvetlen környezetében van.

*Szilárd perem (fal):* Itt a normális irányú sebességkomponens mindenképp zérus (mivel a falon keresztül nincs áramlás), a tangenciális komponensre pedig az alábbi előírások valamelyikét tesszük:

- *Csúszó perem:* a tangenciális irányú sebességkomponensek normális irányú deriváltja zérus.
- *Tapadó perem:* a tangenciális irányú sebességkomponensek zérussal egyenlők.
- *Félig tapadó perem:* az előbbi kettő közti átmenet: matematikailag ez a tangenciális sebességkomponensekre nézve egy harmadfajú peremfeltételt jelent.

Technikailag a legegyszerűbben a tapadó perem modellezhető. A nyomásra peremfeltételt itt sem adunk.

*Kiáramlási perem:* Itt a nyomásértéket szokás megadni. A sebességkomponenseket nem írjuk elő, de feltesszük, hogy a sebességkomponensek normális (kilépő) irányban nem változnak, tehát normális irányú deriváltjuk zérus. Egy másik lehetőség, hogy a kiáramlási perem mentén (éppúgy, mint a beáramlási perem mentén) a nyomásra nem adunk peremfeltételt, a sebességkomponenseket pedig explicite előírjuk. Ha azonban a kiáramlási perem nem összefüggő, akkor sokszor nem ismerjük a kilépő sebességeket még közelítően sem: a feladat részben épp az lehet, hogy a kilépő hozam milyen arányban oszlik meg az egyes kiáramlási peremdarabok között.

A későbbiekben a *kétdimenziós*, stacionárius, külső erőhatásoktól mentes Stokes-féle áramlásokkal foglalkozunk. A megfelelő egyenletek alakja a szokásos primitív változókkal így a következő:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \nu \Delta u &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \nu \Delta v &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}\tag{3}$$

Az  $\Omega$  áramlási tartomány teljes  $\Gamma$  peremén az  $u, v$  sebességkomponenseket írjuk elő. A  $p$  nyomásra nézve azt a globális feltételt írjuk elő, hogy a teljes áramlási tartományon vett integrálja zérussal legyen egyenlő. Ismeretes, hogy ha  $\Omega$  korlátos és szakaszonként sima, akkor ennek a problémának a  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$  függvényterben létezik éspedig egyetlen (általánosított) megoldása, feltéve, hogy az  $u, v$ -re tett peremfeltételek a  $H^{1/2}(\Gamma)$  függvényterbe tartoznak, és kielégítik a folytonossági egyenletből következő  $\int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0$  feltételt. A megoldás egyúttal minimalizálja a

$$\int_{\Omega} \left( \|\text{grad } u\|^2 + \|\text{grad } v\|^2 \right) d\Omega$$

kvadrátikus funkcionált az adott peremfeltétel és a  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  feltétel mellett: a Lagrange-multiplikátor épp a  $p$  nyomás. A továbbiakban a megoldhatósági kérdésekkel nem foglalkozunk.

## 2. A nyomáskorrekciós módszer

A (3) Stokes-egyenletek analitikus megoldása általában – egészen ritka speciális esetektől eltekintve – reménytelen, így valamilyen numerikus módszert kell alkalmazni. A Stokes-egyenletekre több jól működő numerikus megoldási módszer ismeretes. Itt a klasszikus *Uzawa-algoritmust* alkalmazzuk, mely az  $(u, v, p)$

függvényhármast az alábbi rekurzióval közelíti:

$$\begin{aligned}\Delta u_{k+1} &= \frac{1}{\nu\rho} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial x}, \\ \Delta v_{k+1} &= \frac{1}{\nu\rho} \cdot \frac{\partial p_k}{\partial y}, \\ p_{k+1} &:= p_k - \omega\nu\rho \cdot \left( \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{k+1}}{\partial y} \right),\end{aligned}\tag{4}$$

ahol az első két Poisson-egyenlethez Dirichlet-peremfeltételt csatolunk az adott peremértékekkel. Ismeretes, hogy minden, elég kis  $\omega > 0$  iterációs paraméter mellett az iteráció a (3) Stokes-egyenlet (az adott peremfeltétel mellett érvényes) megoldásához konvergál.

Az algoritmus lényege tehát, hogy a Stokes-egyenletek megoldását Poisson-egyenletek sorozatának megoldására vezeti vissza.

Az Uzawa-algoritmus gyakorlati alkalmazásakor (4) első két Poisson-egyenletét nem szükséges pontosan megoldani, elég néhány (alul)relaxálási lépést alkalmazni (valamilyen diszkretizálási technika után). Így kapjuk az *egyszerű nyomáskorrekciós módszert*:

- Alkalmazzunk néhány (alul)relaxálást a diszkretizált momentumegyenletekre:

$$\Delta u = \frac{1}{\nu\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \Delta v = \frac{1}{\nu\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}.$$

- Korrigáljuk a nyomást a számított divergenciával:

$$p := p - \omega\nu\rho \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

ahol  $\omega > 0$  egy elegendően kicsi iterációs paraméter, és ismételjük az eljárást az előző ponttól.

Kihaszználhatjuk, hogy a pontos  $p$  nyomásfüggvény (a (3) egyenletek egyszerű következményeképp) az áramlási tartományban maga is kielégíti a Laplace-egyenletet (pontos peremfeltételek megadása azonban általában nem lehetséges). Így nyerjük a *simított nyomáskorrekciós módszert*. Itt az egyszerű nyomáskorrekció két lépése kiegészül még egy lépéssel:

- Alkalmazzunk néhány (alul)relaxálást a  $\Delta p = 0$  egyenlet diszkrét megfelelőjére (az előző lépésben kapott nyomásból kiindulva), és módosítsuk a nyomást egy konstans hozzáadásával úgy, hogy a nyomás  $\Omega$ -n vett integrálja 0 legyen:

$$p := p - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p \, d\Omega$$

(ahol  $|\Omega|$  jelöli az tartomány területét).

Az iteráció minden lépésében tehát Poisson-egyenleteket szükséges közelítően megoldani. Numerikus szempontból fontos, hogy a Poisson-egyenletmegoldó algoritmus, ill. az azt közelítő relaxáció műveletigénye minél kevesebb legyen. Mindezekelőtt azonban a szóban forgó Poisson-egyenleteket diszkretizálni szükséges. Ennek szokásos és általánosan használt módja valamilyen (derékszögű vagy görbevonalú) rácsháló, és azon véges differenciasémák konstruálása; vagy pedig az áramlási tartomány végeselemes felbontása, és végeselem-technika alkalmazása. Az előbbi megközelítésben elterjedt az eltolt hálós (*staggered grid*) diszkretizáció [14], amikor a sebességkomponenseket és a nyomásokat más-más pontokban diszkretizáljuk (éspedig a sebességkomponenseket az egyes cellák élközeppontjaihoz, míg a nyomást a cellaközéppontokhoz rendeljük). A második megközelítésben ügyelni kell arra, hogy a sebességeket és a nyomást más-más módon kell közelíteni: csak ún. *stabil térpárok* jöhetnek számításba, melyek kielégítik a diszkrét inf-sup-feltételt [1], [15]. Mindkét megközelítés közös problémája azonban, hogy még a diszkrét egyenletek konstrukciója előtt derékszögű vagy görbevonalú rácsot, ill. végeselemhálót kell generálni. Nagyméretű és/vagy háromdimenziós probléma esetén ezek a feladatok az eredeti problémával összevethető bonyolultságúak, és speciális szoftverek nélkül alig megoldhatók. Jelen munkában a közelmúltban dinamikus fejlődésnek indult *hálónélküli* (meshfree, meshless) megközelítést alkalmazzuk, mely sem rács, sem háló generálását nem igényli, csak egy (a tartományban és annak peremén) kellően sűrű ponthalmaz generálását követeli meg: e ponthalmaznak azonban semmiféle struktúrával nem kell rendelkeznie.

### 3. Poisson-egyenletek hálónélküli megoldása

A hálónélküli módszerek konstrukciójának közös alapja valamilyen *szórt pontú interpoláció* alkalmazása. Először tehát röviden összefoglaljuk az idevonatkozó legfőbb fogalmakat. Végig kétdimenziós problémákat vizsgálunk azzal a megjegyzéssel, hogy az itt bemutatott módszerek értelemszerűen általánosíthatók három- vagy akár magasabb dimenziós problémákra is.

#### 3.1. Szórt alappontú interpoláció

Legyen  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^2$  korlátos tartomány, legyenek  $x_1, x_2, \dots, x_N \in \Omega_0$  adott, páronként különböző pontok, melyeken semmiféle (rács- vagy háló-) struktúrát nem tételezünk fel. Legyenek végül  $f_1, f_2, \dots, f_N \in \mathbb{R}$  adott számok. Keressünk olyan, minél simább  $f : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, mely kielégíti az

$$f(x_k) = f_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (5)$$

interpolációs feltételeket.

Nyilvánvaló, hogy a probléma ebben a megfogalmazásban alulhatározott, úgyhogy az interpolációs  $f$  függvényre további feltételeket kell tenni.

3.1. *Példa.* Defináljuk az  $f$  interpolációs függvényt az alábbi súlyozott átlaggal (*inverz távolságok módszere* vagy *Shepard-módszer*):

$$f(x) := \frac{\sum_{j=1}^N f_j \cdot w_j(x)}{\sum_{j=1}^N w_j(x)},$$

ahol  $x \in \mathbf{R}^2$  és  $w_j(x) := \frac{1}{\|x - x_j\|^2}$  (itt  $\|\cdot\|$  jelöli az euklideszi normát). Ez a formula akkor értelmes, ha  $x \neq x_k$  semelyik  $k = 1, 2, \dots, N$  indexre: ehelyett legyen  $f(x_k) := f_k$  az alappontokban. Ismert, hogy  $f$  folytonos  $\mathbf{R}^2$ -n (sőt, folytonosan differenciálható), de az alappontokban mindkét parciális derivált eltűnik, ami az interpoláció pontosságát rontja.

A módszer realizálása (ellentétben a következőként mutatott módszerekkel) egyenletmegoldást nem igényel, műveletigénye minden egyes kiértékelés esetén  $O(N)$ . A módszer numerikusan stabil, az alappontoktól nagy távolságra az interpolált (helyesebben: extrapolált) érték közelítően az alapponti értékek egyszerű szám-tani átlaga. Jól alkalmazható pl. elliptikus egyenletek helyfüggő paramétereinek közelítésére (pl. hővezetési tényező, szivárgási tényező, vezetőképesség, mederfenék-szintek stb.). Csekély pontossága miatt azonban hálómentes módszerek konstrukcióiban nem alkalmazzák.

Jelenleg a többdimenziós interpolációs problémák megoldásának valószínűleg a legnépszerűbb módszercsaládja a *radiális bázisfüggvények módszere* (RBF-módszer, [6], [7]). Ebben a megközelítésben, ha adottak az  $f_1, f_2, \dots, f_N \in \mathbf{R}$  függvényértékek az  $x_1, x_2, \dots, x_N \in \Omega_0$  interpolációs alappontokban, akkor az  $f$  interpolációs függvényt az alábbi alakban keressük:

$$f(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j(x - x_j), \quad (6)$$

ahol  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N$  adott radiális (körszimmetrikus) bázisfüggvények, azaz a  $\Phi_j(x)$  függvényértékek csak az  $\|x\|$  (euklideszi) normától függnak. Az ismeretlen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  együtthatók pedig az *interpolációs egyenletekből* határozhatók meg:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j(x_k - x_j) = f_k \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

feltéve, hogy ennek az egyenletrendszernek egyáltalán van megoldása (ez nem mindig teljesül [12]).

A  $\Phi_j(x)$  radiális bázisfüggvények alkalmas megválasztásával sokféle konkrét módszerhez jutunk. A leggyakrabban használatos módszerek a következők (a radiális bázisfüggvényeket polárkoordinátákban megadva):

- *Multikvadrikus módszer* (method of multiquadrics, MQ-módszer [8]):

$$\Phi_j(r) := \sqrt{r^2 + c_j^2},$$

ahol a  $c_1, c_2, \dots, c_N$  számok alkalmasan választott skálázó paraméterek. Egy lehetséges megválasztásuk:

$$c_k := \min_{j \neq k} \|x_k - x_j\|.$$

- *Vékony lemez módszer* (thin plate splines, TPS-módszer [2]):

$$\Phi_j(r) := r^2 \cdot \log r$$

minden  $j = 1, 2, \dots, N$  indexre.

- *Gauss-függvények*:

$$\Phi_j(r) := e^{-c_j^2 r^2}$$

( $c_1, c_2, \dots, c_N$  itt is skálázó konstansok).

- Néha használatos még az alábbi radiális bázisfüggvény is (a perem-integrál-egyenlet módszer duális reciprocitási módszerének nevezett technikában alkalmazták előszeretettel [13]):

$$\Phi_j(r) := 1 + |r|$$

minden  $j = 1, 2, \dots, N$  indexre.

Néha a (6) formula jobb oldalát kiegészítjük még néhány további taggal, tipikusan alacsony fokszámú polinomokkal:

$$f(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j(x - x_j) + \sum_{j=1}^M a_j p_j(x)$$

Ez esetben a (7) rendszer további egyenletekkel egészül ki (ortogonalitási feltételek):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j(x_k - x_j) + \sum_{j=1}^M a_j p_j(x_k) &= f_k \quad (k = 1, 2, \dots, N), \\ \sum_{j=1}^N \alpha_j p_k(x_j) &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, M). \end{aligned}$$

A fenti radiális bázisfüggvények közös jellemzője, hogy bár a (7) interpolációs egyenletrendszer általában megoldható, de a rendszer numerikus szempontból nagyon kedvezőtlen. Miután e bázisfüggvények tartója nem korlátos, a rendszer mátrixa teljesen kitöltött mátrix, sokszor nonszimmetrikus és általában rosszul kondicionált: a kondíciós szám tetszőlegesen nagy lehet, ha az interpolációs alappontok közt vannak egymáshoz közel eső pontok is. Ezért (7) megoldására általában – jobb híján – Gauss-eliminációt használnak: ennek műveletigénye  $O(N^3)$ , ami

megengedhetetlenül nagygyá válik, ha az alappontok  $N$  száma nagy (a jelenlegi gyakorlatban:  $N$  meghaladja az ezres nagyságrendet). Ez a fenti módszerek alapvető hátránya, jóllehet, a módszerek interpolációs tulajdonságai nagyon jók: megmutatható, hogy az MQ-módszer (elég sima függvények esetén) *exponenciálisan* konvergál [11]. Hasonló eredmény érvényes a Gauss-függvényeken alapuló interpolációra is (míg a TPS-módszer konvergenciasebbsége ennél alacsonyabb).

### 3.2. A radiális bázisfüggvények módszerére épülő hálónélküli módszerek

Modellfeladatként tekintsük a kétdimenziós Poisson-egyenletet Dirichlet-peremfeltétellel ellátva:

$$\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban} \quad u|_{\partial\Omega} = u_0. \quad (8)$$

Legyenek az  $x_1, x_2, \dots, x_M$  pontok az  $\Omega$  tartományon, az  $x_{M+1}, x_{M+2}, \dots, x_{M+N}$  pontok pedig a  $\partial\Omega$  peremen elhelyezve.

Aszerint, hogy magát az  $u$  megoldást vagy az  $f$  jobb oldalt approximáljuk RBF-módszerrel, a (8)-ra alkalmazott rácsnélküli RBF-módszerek két csoportra oszthatók:

1. *Kansa módszere* [9], [10]: Ekkor közvetlenül az  $u$  megoldást approximáljuk:

$$u(x) := \sum_{j=1}^{M+N} \alpha_j \Phi_j(x - x_j) \quad (9)$$

alakban, ahol  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{M+N}$  adott radiális bázisfüggvények, az  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{M+N}$  együtthatók egyelőre ismeretlenek. Feltéve, hogy nemcsak (9) jobb oldalán álló kifejezés approximálja jól  $u$ -t, hanem annak Laplace-értékei is  $\Delta u$ -t, az ismeretlen együtthatókra az alábbi rendszert nyerjük:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{M+N} \alpha_j \Delta \Phi_j(x - x_j) &= f(x_k) & (k = 1, 2, \dots, M), \\ \sum_{j=1}^{M+N} \alpha_j \Phi_j(x - x_j) &= u_0(x_k) & (k = M + 1, M + 2, \dots, M + N). \end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer – nagy  $M$  és  $N$  esetén – épp olyan rossz numerikus tulajdonságokkal rendelkezik, mint a korábban bemutatott RBF-interpolációs módszerekkel kapcsolatos egyenletrendszer: a mátrix nagyméretű, általában teljesen kitöltött, sokszor nonszimmetrikus és rosszul kondicionált.



2. *A partikuláris megoldások módszere:* Ekkor először (8) jobb oldalán álló  $f$  függvényt approximáljuk:

$$f(x) := \sum_{j=1}^{M+N} \alpha_j \Phi_j(x - x_j) \quad (10)$$

alakban, ahol  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{M+N}$  adott radiális bázisfüggvények, az  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{M+N}$  együtthatók egyelőre ismeretlenek. Megoldva a megfelelő

$$\sum_{j=1}^{M+N} \alpha_j \Phi_j(x_k - x_j) = f(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, M + N) \quad (11)$$

interpolációs egyenletrendszert, tekintsük az ugyanezen  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{M+N}$  együtthatókkal képzett  $v$  függvényt:

$$v(x) := \sum_{j=1}^{M+N} \alpha_j \Psi_j(x - x_j),$$

ahol  $\Psi_j$ -k olyan radiális bázisfüggvények, melyekre  $\Delta \Psi_j = \Phi_j$  teljesül. (Ilyen  $\Psi_j$  függvények általában analitikusan megadhatók  $\Phi_j$ -k ismeretében.) Akkor  $v$  (közelítő) megoldása az (8) Poisson-egyenletnek, mert:

$$\Delta v(x) := \sum_{j=1}^{M+N} \alpha_j \Delta \Psi_j(x - x_j) = \sum_{j=1}^{M+N} \alpha_j \Phi_j(x - x_j) = f(x).$$

Ennélfogva (8)  $u$  megoldása  $u = v + w$  alakban előáll, ahol  $w$  megoldása a  $\Delta w = 0$  Laplace-egyenletnek, és kielégíti a módosított

$$w|_{\partial\Omega} = u_0 - v|_{\partial\Omega}$$

peremfeltételt.

A problémát így egy *Laplace*-egyenlet Dirichlet-feladatára vezettük vissza, amely tartományon definiált függvényt már nem tartalmaz.

Megjegyezzük, hogy mind a Kansa-módszer, mind a partikuláris megoldások módszere nehézség nélkül alkalmazható általánosabb peremfeltételek mellett is.

Numerikus szempontból a partikuláris megoldások módszere sokszor előnyösebb lehet: a homogén egyenletre ui. esetleg speciális módszerek (pl. perem-integrál-egyenlet módszer) alkalmazhatók. Az így nyert diszkrétizált egyenletrendszer azonban általában a már említett rossz tulajdonságokkal rendelkezik.

### 3.3. Lokális sémák generálása a radiális bázisfüggvények módszerének alapján

A korábban említett numerikus hátrányok megkerülésének egyik lehetséges módja az, hogy a radiális bázisfüggvény-módszer helyett annak egy implicit változatát használjuk, amikor az interpolációs függvényt egy magasabbrendű parciális

differenciálegyenlet, pl. a biharmonikus egyenlet megoldásaként állítjuk elő [3]. Egy másik lehetséges technika, hogy a radiális bázisfüggvényekkel történő interpolációt csak *lokálisan* használjuk, mindig csak a szükséges kiértékelési  $x$  helynek csak egy alkalmas környezetébe eső alappontokat felhasználva [4], [5].

Az ilyen módszerek bizonyos szempontból a jól ismert véges differencia sémák általánosításainak tekinthetők. A sémák nem szabályos stencilen, hanem szabálytalanul elszórt pontokban lesznek definiálva. A lokális sémák jellegzetessége, hogy egy-egy pontban a vizsgált differenciáloperátort a *szomszédos* pontokhoz tartozó függvényértékekkel approximáljuk. Szomszédos pontokként elvben a legegyszerűbb az adott ponthoz egy adott távolságon belül elhelyezkedő pontokat tekinteni (mely távolság nem feltétlen ugyanaz minden pont esetén). Egy másik lehetőség: adott számú, a szóban forgó ponthoz legközelebbi pontok összessége. A továbbiakban feltesszük, hogy minden alappont szomszédai már definiálva vannak.

Modellfeladatként tekintsük ismét a Dirichlet-peremfeltétellel ellátott Poisson-egyenletet:

$$\Delta u = f \quad \Omega\text{-ban} \quad u|_{\partial\Omega} = u_0. \quad (12)$$

Legyen  $S := \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \bar{\Omega}$  interpolációs alappontok egy véges halmaza. Célunk a Laplace-operátor diszkretizálása ezen a ponthalmazon. Ha  $u$  egy  $\bar{\Omega}$ -n értelmezett folytonos függvény, jelölje a rövidség kedvéért  $u_k := u(x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Lokális sémák konstruálásakor a differenciáloperátort tetszőleges  $x_m$  pontbeli diszkretizációjához csak az itt és a szomszédos pontokban felvett függvényértékeket használjuk. A klasszikus Taylor-sorfejtésen alapuló technika szórt alappontrendszeren meglehetősen nehézkes, ezért a sémákat az RBF-interpoláció felhasználásával konstruáljuk.

Legyen  $x_m \in S$  tetszőleges, rögzített, centrálisnak tekintett alappont. Legyenek  $x_m$  szomszédai  $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_{N_m}^{(m)} \in S$ , melyek egymástól és  $x_m$ -től is különböznek. Jelöljön  $\tilde{u}_m$  egy, az  $x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_{N_m}^{(m)}$  alappontokra támaszkodó lokális interpolációs függvényt:

$$\tilde{u}^{(m)}(x) := \sum_{j=1}^{N_m} \alpha_j \Phi(x - x_j^{(m)}) + \sum_{j=1}^M a_j p_j(x),$$

ahol  $\Phi$  adott radiális bázisfüggvény,  $p_1, \dots, p_M$  pedig adott (alacsony fokszámú) polinomok (jellemzően az  $1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots$  formulákkal definiált kétváltozós alapolinomok közül választva). Az ismeretlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_m}, a_1, \dots, a_M$  együtthatók az interpolációs és az ortogonalitási feltételekből számíthatók:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_m} \alpha_j \Phi(x_k^{(m)} - x_j^{(m)}) + \sum_{j=1}^M a_j p_j(x_k^{(m)}) &= u^{(m)}(x_k) \quad (k = 1, 2, \dots, N_m), \\ \sum_{j=1}^{N_m} \alpha_j p_k(x_j^{(m)}) &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots, M), \end{aligned}$$

vagy tömören:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

ahol  $A$  szimmetrikus mátrix,  $A_{kj} = \Phi(x_k^{(m)} - x_j^{(m)})$  ( $k, j = 1, \dots, N_m$ ),  $B_{kj} = p_j(x_k^{(m)})$  ( $k = 1, \dots, N_m$ ,  $j = 1, \dots, M$ ),  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_{N_m}) \in \mathbf{R}^{N_m}$ ,  $a := (a_1, \dots, a_M) \in \mathbf{R}^M$ . Az  $\alpha_j$  és az  $a_j$  együtthatók esetén az  $m$  indexet az egyszerűség kedvéért nem tüntettük fel.

A (13) egyenletrendszer megoldhatósága általában nem biztosított, még akkor sem, ha történetesen  $A$  pozitív definit. Ekkor ui. (13) egyértelmű megoldhatósága könnyen láthatóan azzal ekvivalens, hogy  $B$  magtere csak a zérusvektorból áll, azaz  $B$  mint lineáris operátor, kölcsönösen egyértelmű. Ez pedig  $B$  elemeinek definíciója miatt azzal ekvivalens, hogy a  $\sum_{j=1}^M a_j p_j(x)$  polinomok közül csak a zéruspolinom tűnik el mindegyik  $x_1^{(m)}, \dots, x_{N_m}^{(m)}$  alappontban. Ez az  $x_1^{(m)}, \dots, x_{N_m}^{(m)}$  pontok elhelyezkedésére ró nehezen ellenőrizhető feltételeket.

Ha a (13) rendszer történetesen minden  $x_m \in S$  centrális pont esetén megoldható, akkor a (12) Poisson-egyenlet az alábbi módon diszkretizálható. Helyezzünk el  $x_m$  körül, a fő koordinátairányokban  $x_m$ -től  $h > 0$  távolságra négy fiktív pontot  $(x_m^N, x_m^W, x_m^S, x_m^E)$ , ahol  $h$  jelöli az  $\|x_m - x_k^{(m)}\|$  ( $k = 1, 2, \dots, N_m$ ) távolságok valamilyen közepét (a későbbiekben négyzetes közepet alkalmaztunk). A (12) Poisson-egyenlet diszkretizált alakja ekkor (Seidel-iterációra alkalmas formába írva):

$$u_m := \frac{\tilde{u}^{(m)}(x_m^N) + \tilde{u}^{(m)}(x_m^W) + \tilde{u}^{(m)}(x_m^S) + \tilde{u}^{(m)}(x_m^E)}{4} - \frac{h^2 \cdot f(x_m)}{4}. \quad (14)$$

A jobb oldali első tört az  $u_k^{(m)}$  számokkal kifejezhető. Valóban, a szóban forgó tört definíció szerint:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_m} \alpha_j \frac{\Phi(x_m^N - x_j^{(m)}) + \Phi(x_m^W - x_j^{(m)}) + \Phi(x_m^S - x_j^{(m)}) + \Phi(x_m^E - x_j^{(m)})}{4} + \\ + \sum_{j=1}^M a_j \frac{p_j(x_m^N) + p_j(x_m^W) + p_j(x_m^S) + p_j(x_m^E)}{4} =: \\ =: \sum_{j=1}^{N_m} \alpha_j \beta_j + \sum_{j=1}^M a_j b_j =: \left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ b \end{pmatrix} \right\rangle, \end{aligned}$$

ahol

$$\beta_j := \frac{1}{4} \cdot \left( \Phi(x_m^N - x_j^{(m)}) + \Phi(x_m^W - x_j^{(m)}) + \Phi(x_m^S - x_j^{(m)}) + \Phi(x_m^E - x_j^{(m)}) \right) \\ (j = 1, 2, \dots, N_m),$$

és

$$b_j := \frac{1}{4} \cdot (p_j(x_m^N) + p_j(x_m^W) + p_j(x_m^S) + p_j(x_m^E)) \quad (j = 1, 2, \dots, M).$$

Mivel pedig nyilván

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix},$$

azért innen

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \beta \\ b \end{pmatrix} \right\rangle =: \left\langle \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \right\rangle,$$

ahol a  $w, v$  vektorpár megoldása az alábbi *lokális egyenletrendszernek*:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ b \end{pmatrix}. \quad (15)$$

A lokális séma konstrukciója tehát a következő algoritmussal történik. Minden  $x_m \in S$  ponthoz:

- meghatározzuk a szomszédos pontokat;
- kiszámítjuk a  $\beta$  és a  $b$  vektorokat;
- megoldjuk a (15) lokális egyenletrendszert.

Az így kapott  $w, v$  vektorpárból  $v$ -t később már nem használjuk;  $w$  elemeivel pedig felírhatjuk a diszkretizált Poisson-egyenletet (Seidel-iterációs formában):

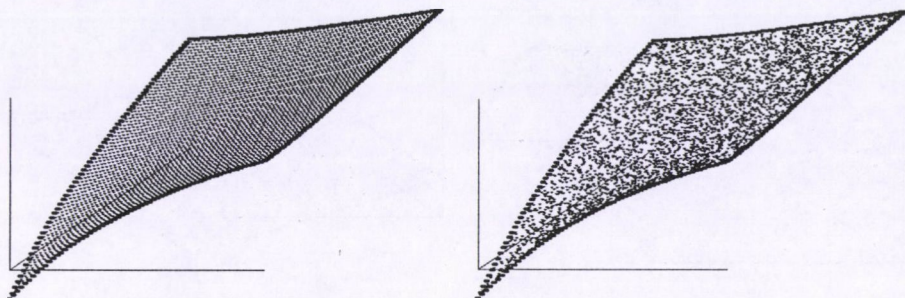
$$u_m := \sum_{j=1}^{N_m} w_j u_j^{(m)} - \frac{h^2 \cdot f(x_m)}{4}. \quad (16)$$

A  $w_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N_m$ ) együtthatókat elég a számítás elején egyszer meghatározni. A (16) Seidel-iterációt ezek után vagy önmagában használhatjuk mint a diszkretizált Poisson-egyenlet megoldási algoritmusát, vagy egy – eléggé természetes módon definiálható – multigríd környezetbe ágyazva, simító iterációként. Az iteráció során a peremfeltétel figyelembe vétele értelemszerűen, nehézség nélkül elvégezhető.

Példaként tekintsük az egységnyezetben a Laplace-egyenletet. A pontos megoldás legyen  $u(x, y) := \log((3x + 0, 5)^2 + (3y + 0, 5)^2)$ , a Dirichlet-peremfeltétel pedig ezzel konzisztens. A tesztfeladat megoldására a fentebb leírt lokális sémát alkalmaztuk  $\Phi(r) := r^2 \log r$  radiális bázisfüggvénnyel (polárkoordinátákban felírva), legfeljebb elsőfokú polinomokkal kiegészítve. A számításokat kétféle ponthalmazon hajtottuk végre: egy ekvidisztáns rácson és egy egyenletes eloszlás szerint kvázi-véletlenszerűen elszórt ponthalmazon. Az iteráció indításakor mindig zérus

| $N$ ( $M$ )                                | 256 (64) | 1024 (128) | 4096 (256) |
|--------------------------------------------|----------|------------|------------|
| Relatív $L_2$ -hiba (ekvidisztáns rács), % | 0,1157   | 0,0285     | 0,0067     |
| Relatív $L_2$ -hiba (szórt pontthalmaz), % | 0,1798   | 0,0480     | 0,0165     |

**1. táblázat.** Lokális séma alkalmazása a Laplace-egyenlet megoldására. A közelítő megoldások relatív  $L_2$ -hibái.



**1. ábra.** A Laplace-egyenlet közelítő megoldása lokális sémával. Tesztfeladat:  $u(x, y) := \log((3x + 0,5)^2 + (3y + 0,5)^2)$ .

kezdeti közelítésből indultunk ki. Három különböző alappontszám esetén a közelítések relatív  $L_2$ -hibáit az 1. táblázat mutatja ( $N$  jelöli a tartomány belsejében,  $M$  pedig a peremen elhelyezett pontok számát.) Az 1. ábrán pedig a közelítő megoldások láthatók  $N = 4096$ ,  $M = 256$  esetében. A számítások asztali számítógéppel készültek, a processzor órafrekvenciája 1,7 GHz volt. A két alacsonyabb pontszámú esetben (256, ill. 1024 belső pont) a relatív  $L_2$ -hiba 1 másodpercnél kevesebb idő alatt csökkent 1% alá, 4096 belső pont esetén kb. 9 másodperc alatt. Érdeemes megemlíteni, hogy a tapasztalati konvergenciasebesség sokkal nagyobb volt, mint a hagyományos 5-pontos differenciasémák esetében. 1024 belső pont esetében pl. ekvidisztáns rácson 140, szórt pontrendszer esetében kb. 150 iterációs lépés alatt csökkent 1% alá a relatív  $L_2$ -hiba. Ez nem meglepő, mert minden egyes ponthoz tartozó lokális sémában a figyelembe vett szomszédos pontok száma itt jóval nagyobb, jellemzően 6 és 30 között változik: ennek megfelelően viszont az iteráció fajlagos számításigénye is nagyobb.

#### 4. Numerikus eredmények

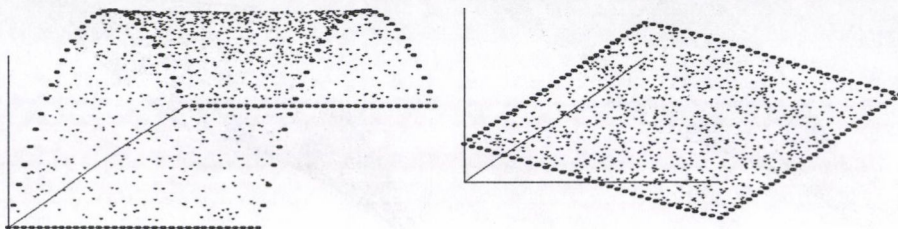
A fentebb leírt Stokes-egyenletmegoldó módszert illusztrálandó, tekintsük az alábbi tesztfeladatot. Legyen  $\Omega$  az egységnyégzet, melyben vízszintes áramlást



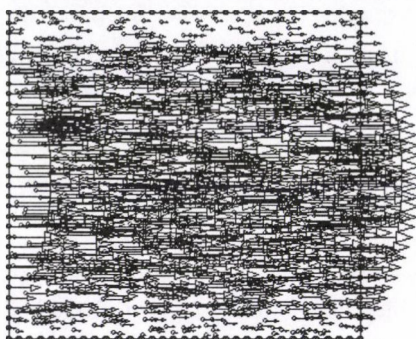
tételezünk fel kvadratikus sebességprofillal. Ekkor a pontos megoldás:

$$u(x, y) = c \cdot y(L - y), \quad v(x, y) = 0, \quad p(x, y) = c\nu\rho \cdot (L - 2x),$$

ahol  $L = 1$ ,  $c$  pedig egy  $\frac{1}{\text{m}\cdot\text{sec}}$  dimenziójú skálázó konstans. A tesztfeladatban a legegyszerűbb  $c := 1$ ,  $\nu\rho := 1$  választással élünk. A tartomány peremét 128 ponttal diszkretizáltuk, a tartomány belsejében 1024 kvázi-véletlenül elszórt pontot helyeztünk el. A Poisson-egyenleteket lokális sémákkal diszkretizáltuk. A számított  $u$  vízszintes sebességkomponens és a  $p$  nyomás a 2. ábrán, a számított sebességmező pedig a 3. ábrán látható. A sebességmező relatív  $L_2$ -hibája 0.754% volt.



2. ábra. Számított vízszintes sebességkomponensek és nyomások.



3. ábra. Számított sebességek.

*Köszönetnyilvánítás:* A szerző köszönetét fejezi ki az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok szervezetének a kutatás részbeni finanszírozásáért. A téma nyilvántartási száma: T47287.

## Hivatkozások

- [1] FORTIN, M.: *Finite element solution of the Navier-Stokes equations*. Acta Numerica (1993), pp. 239–284.
- [2] FRANKE, R.: *Scattered Data Interpolation: Test of Some Methods*. Mathematics of Computation, Vol. **38**, No. **157**, 1982.
- [3] GÁSPÁR C.: *Fast multi-level meshless methods based on the implicit use of radial basis functions*. Lecture Notes in Computational Science and Engineering (2002) Vol. **26**, pp. 143–160, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- [4] GÁSPÁR C.: *Global and Local Multi-level Meshless Schemes Based on Multi-Elliptic Interpolation*. Proceedings of ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods, held in Lisbon, Portugal, July 11–14, 2005. (ed. by V.M.A.Leitao, C.J.S.Alves, C.A.Duarte), pp. B12.1–B12.6.
- [5] GÁSPÁR C.: *Meshless Boundary Interpolation: Local and Global Multi-Level Techniques*. Advances in Boundary Element Techniques VII. Proceedings of the International Conference on Boundary Element Techniques VII, held in Paris, France, September 4–6, 2006. (ed. by B.Gatmiri, A.Sellers, M.H.Aliabadi), pp. 73–78.
- [6] GOLBERG, M.A., CHEN, C.S.: *The theory of radial basis functions applied to the BEM for inhomogeneous partial differential equations*. Boundary Element Communications, 1994, 5(2), 57–61.
- [7] GOLBERG, M.A., CHEN, C.S.: *A bibliography on radial basis function approximation*. Boundary Element Communications, 1996, 7(4), 155–163.
- [8] HARDY, R.L.: *Theory and Applications of the Multiquadric-Biharmonic Method, 20 Years of Discovery 1968–1988*. Computers Math. Applic., Vol **19**, No. **8–9**, pp. 163–208, 1990.
- [9] KANSA, E.J.: *Multiquadrics—a Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics—I. Surface Approximations and Partial Derivative Estimates*. Computers Math. Applic., Vol. **19**, No. **8/9**, pp. 127–145, 1990.
- [10] KANSA, E.J.: *Multiquadrics—a Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid Dynamics—II. Solutions to Parabolic, Hyperbolic and Elliptic Partial Differential Equations*. Computers Math. Applic., Vol. **19**, No. **8/9**, pp. 147–161, 1990.
- [11] MADYCH, W.R., NELSON, S.A.: *Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions*. II. Math. Comput., Vol. **54**, pp. 211–230, 1990.
- [12] MICCHELLI, C.A.: *Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions*. Const. Approx., Vol. **2**, pp. 11–22, 1986.
- [13] PARTRIDGE, P.W., BREBBIA, C.A.: *Computer Implementation of the BEM Dual Reciprocity Method for the Solution of general Field Equations*. Communications in Applied Numerical Methods, 1990, **6**, 83–92.
- [14] SIVALOGANATHAN, S., SHAW, G.J.: *A multigrid method for recirculating flows*. International Journal for Numerical Methods on Fluids, Vol. **8** (1988), pp. 417–440.
- [15] STOYAN, G., TAKÓ G.: *Numerikus módszerek III*. ELTE-TypoTeX, Budapest, 1997.

GÁSPÁR CSABA

Széchenyi István Egyetem

H-9026 Győr, Egyetem tér 1.

gasparcs@sze.hu

## MESHLESS METHODS WITH APPLICATION TO THE STOKES PROBLEM

CSABA GÁSPÁR

In this paper, a numerical solution technique of the two-dimensional permanent Stokes equations is presented. The proposed method is a meshless (meshfree) version of the pressure correction method based on the well-known Uzawa algorithm. The Poisson equations appearing in the pressure correction method are solved in a meshless way. Thus, the discretization of the flow domain (using either finite elements or a Cartesian or curvilinear grid) can be avoided. The applied schemes are based on the localised version of the Method of Radial Basis Functions. The computational complexity of the proposed method is relatively low, and the method can be embedded in a multi-level context in a natural way. The method is illustrated via a simple test flow problem with quadratic velocity profile.