

A REZGŐ HÚR IRÁNYÍTÁSA

HORVÁTH MIKLÓS

Két belső pontban erőhatásnak alávetett, a végpontokban rögzített, kezdetben nyugalmi állapotban lévő húr lehetséges mozgásállapotait vizsgáljuk. Ismert, hogy a véges idő alatt elérhető összes mozgásállapot előáll (elegendően nagy) rögzített idő alatt is. Jelen dolgozatban megkeressük a minimális időt, amely alatt a húr az összes lehetséges mozgásállapotba átvihető. Megmutatjuk, hogy a kérdés egyszerű szerkezetű, soronként legfeljebb 4 nem-nulla elemet tartalmazó mátrixok rangjának vizsgálatára vezethető vissza. A dolgozat 3. részében megfogalmazott nyitott kérdés vizsgálatához a középiskolai ismeretanyag is elegendő.

1. Bevezetés

Tekintsük a következő egyenletet:

$$y_{tt}(x, t) = y_{xx}(x, t) + \delta(x - a_1)u_1(t) + \delta(x - a_2)u_2(t), \quad (1)$$

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Itt $y(x, t)$ jelöli a $[0, 1]$ szakaszon kifeszített húr x pontjának a nyugalmi állapotból (azaz $y = 0$ -ból) való transzverzális kitérését a t időpontban. A $0 < a_1 < a_2 < 1$ belső pontokban irányítjuk a húrt a négyzetesen integrálható valós $u_1(t)$, $u_2(t) \in L_2(0, T)$ függvényekkel. A húr két végpontja rögzített, tehát

$$y(0, t) = y(1, t) = 0. \quad (2)$$

A megfigyelés kezdeti $t = 0$ pillanatában a húr nyugalomban van, azaz minden pontjának pozíciója és sebessége is nulla:

$$y(x, 0) = y_t(x, 0) = 0. \quad (3)$$

A $T > 0$ idő alatt elérhető mozgásállapotok halmaza

$$R(T) = \{(y(\cdot, T), y_t(\cdot, T)) | u_1, u_2 \in L_2(0, T)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy az $R(T)$ halmaz T függvényében monoton nő, hiszen ha $t = 0$ -tól egy adott értékig az u_1, u_2 irányi társ nulla, akkor a húr nyugalomban marad, és ezután (időeltolódással) bármely kisebb T -hez tartozó mozgásállapot elérhető. Joó István [6] dolgozatában többek között igazolta, hogy ha a_1 és a_2 racionális, azaz

$$a_1 = \frac{p_1}{q}, \quad a_2 = \frac{p_2}{q}, \quad (p_1, p_2, q) = 1,$$

tehát p_1, p_2 és q legnagyobb közös osztója 1, akkor $2(q-1)/q \leq T_1 < T_2$ esetén $R(T_1) = R(T_2)$. Jelen dolgozat célja a legkisebb olyan T_0 megadása, amelyre $T_0 \leq T_1 < T_2$ esetén $R(T_1) = R(T_2)$. Ezt a minimális elérési időt jellemezzük lineáris algebrai eszközökkel.

A kérdéssel kapcsolatos korábbi kutatások között először említsük meg a Joó [5] dolgozatot, melynek egyik eredménye szerint ha csak egy belső pontban irányítjuk a húr, akkor a minimális elérési idő $T_0 = 2$ irracionális pont esetén, és $T_0 = 2(q-1)/q$, ha p/q -ban irányítunk, ahol $(p, q) = 1$. Castro [2] egyetlen mozgó pontban vizsgálta a húr irányítását. Több szerző vizsgálta a végpont(ok)ban irányított húr mozgásállapotait. Hansen és Zuazua [3] két darabból összetett húr vizsgált, ahol az illesztési pont nyugalmi helyzetből való kitérése az irányítás. Il'in és Moiseev [4] az egyik végpontban a kitérési sebességgel irányított húr vizsgálták, és megkeresték a minimális normájú kontrollt. Végül megemlítsük Avdonin és Edward [1] dolgozatát, ahol véges sok belső pontban a húrhoz tömegpontokat ragasztunk, és az egyik végpont kitérése az irányítás. Többek között megmutatják, hogy elég hosszú idő alatt minden, megfelelő függvénytérbe tartozó mozgásállapot elérhető.

A dolgozat felépítése a következő. A fenti, részben heurisztikus problémafelvetés pontos megfogalmazását és ekvivalens átalakításait adjuk meg a 2. részben. Ez nagyrészt a [6] cikkben is megtalálható anyag, melyet a könnyebb olvashatóság érdekében itt is áttekintünk. A 3. rész tartalmazza az új eredményeket, azaz T_0 jellemzését lineáris algebrai eszközökkel, továbbá diszkutáljuk a T_0 -ra adható explicit képleteket, megfogalmazva nyitott kérdéseket is.

2. A feladat pontos megfogalmazása és ekvivalens átalakításai

Az (1) másodrendű differenciálegyenlet Dirac-deltákat is tartalmaz, tehát közönséges értelemben y legfeljebb elsőrendű differenciálhatóságát várjuk. Legyen $z(x, t)$ egy tetszőleges függvény a

$$\begin{aligned} z(x, t) \in C^2([0, 1] \times [0, T]), \quad z(x, T) = z_t(x, T) = 0, \\ z(0, t) = z(1, t) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

tulajdonságokkal. Szorozzuk be az (1) egyenletet z -vel, és integráljunk $0 \leq x \leq 1$ -ben és $0 \leq t \leq T$ -ben is. Formálisan kétszeres parciális integrálást alkalmazva

az egyik, illetve másik változóban a kilépő tagok eltűnnek az y -ra és z -re kirótt kezdeti- és peremfeltételek miatt, ezért a következő egyenlet adódik:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^T y(x, t) [z_{tt}(x, t) - z_{xx}(x, t)] dt dx \\ &= \int_0^T [z(a_1, t)u_1(t) + z(a_2, t)u_2(t)] dt. \end{aligned} \quad (5)$$

Mivel ez az egyenlet nem igényli y simaságát, és implicit módon tartalmazza az y -ra kirótt kezdeti- és peremfeltételeket is, kézenfekvő az alábbi értelmezés:

2.1. Definíció. Az (1), (2), (3) rendszer megoldásán olyan $y \in L_2([0, 1] \times [0, T])$ függvényt értünk, mely tetszőleges, a (4) kikötéseket kielégítő $z(x, t)$ függvény esetén eleget tesz az (5) egyenletnek.

A változók szétválasztásának ismert módszerét alkalmazzuk: a

$$z(x, t) = \sin(n\pi x) \cdot b(t), \quad b \in C^2([0, T]), \quad b(T) = b'(T) = 0$$

függvényt helyettesítjük (5)-be. A következő állítás adódik:

2.1. TÉTEL. (Joó [6]) Az (1), (2), (3) rendszernek létezik pontosan egy, a 2.1. Definíció szerinti $y \in L_2([0, 1] \times [0, T])$ megoldása. A megoldás szinuszos sorfejtése az x változóban

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(n\pi x), \quad (6)$$

ahol az együtthatók

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \int_0^t \frac{\sin(n\pi(t - \tau))}{n\pi} g_n(\tau) d\tau, \\ g_n(t) &= 2[\sin(n\pi a_1)u_1(t) + \sin(n\pi a_2)u_2(t)]. \end{aligned} \quad (7)$$

A sor bármelyik változóban egyszer tagonként differenciálható:

$$\begin{aligned} y_t(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(t) \sin(n\pi x), \\ y_x(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n\pi c_n(t) \cos(n\pi x). \end{aligned}$$

Mindhárom sorfejtés konvergens $L_2([0, 1] \times [0, T])$ -ben és bármely rögzített t esetén $L_2([0, 1])$ -ben is. Végül az $y(x, t)$ megoldás benne van a $H^1([0, 1] \times [0, T])$ Szoboljev-térben.

A tétel bizonyítása megtalálható [6]-ban, azt nem ismételjük itt meg, de néhány megjegyzést teszünk. A (7) képletet deriválva kapjuk, hogy

$$c'_n(t) = \int_0^t \cos(n\pi(t-\tau))g_n(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Innen először is látszik, hogy $c_n(0) = c'_n(0) = 0$, ahonnan (3) következik. A (8) képlet azt is mutatja, hogy c'_n is abszolút folytonos, a második derivált L_2 -ben van, és $c''_n = n^2\pi^2 c_n + g_n$ teljesül majdnem minden $t \in [0, 1]$ -re. Ez az egyenlet (formálisan) az (1) képlettel ekvivalens. Ugyancsak a (7) formula szerint

$$|c_n(t)| \leq \frac{2}{n\pi} \left[\left| \int_0^t \sin(n\pi\tau)u_1(t-\tau) d\tau \right| + \left| \int_0^t \sin(n\pi\tau)u_2(t-\tau) d\tau \right| \right],$$

ahonnan a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség alkalmazásával látható, hogy $\sum_n |c_n|$ egyenletesen korlátos t -ben, és emiatt a (6) sor abszolút és egyenletesen konvergens $[0, 1] \times [0, T]$ -n. Ebből pedig következik, hogy y egy folytonos függvény, amely nulla a húr végpontjaiban.

A sorfejtések miatt az $R(T)$ halmazok növekedése helyett vizsgálhatjuk az összes lehetséges c_n, c'_n együttható-sorozatok halmazának növekedését is. Ez az ötlet a következő állításhoz vezet:

2.1. LEMMA. ([6]) Legyen

$$\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} \sin(n\pi a_1) \\ \sin(n\pi a_2) \end{pmatrix} e^{\pm i n \pi t} : n \geq 1 \right\},$$

és jelölje $B(T)$ a Λ halmaz momentumterét a két komponensű komplex L_2 térben, azaz

$$B(T) = \left\{ \left\langle \begin{pmatrix} \sin(n\pi a_1) \\ \sin(n\pi a_2) \end{pmatrix} e^{\pm i n \pi t}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle_{n=1}^{\infty} \left| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in L_2(0, T; \mathbb{C}^2) \right. \right\}.$$

A $B(T)$ momentumtér növekszik T -ben, és $B(T_1) = B(T_2)$ pontosan akkor, ha $R(T_1) = R(T_2)$.

Bizonyítás. Először is vegyük észre, hogy

$$c'_n(T) \pm i n \pi c_n(T) = \int_0^T e^{\pm i n \pi t} g_n(t) dt, \\ g_n(t) = 2[\sin(n\pi a_1)u_1(t) + \sin(n\pi a_2)u_2(t)].$$

Két valós sorozat, c_n és c'_n helyett egyetlen komplex sorozatból, $c'_n(T) + i n \pi c_n(T)$ -ből is rekonstruálhatók az $y(\cdot, T)$, $y_t(\cdot, T)$ függvények. A fenti képlet szerint ilyenkor csak $n \geq 1$ jelenik meg az exponenciális függvény kitevőjében. Ha erről áttérünk a komplex L_2 tér momentumterére, akkor minden nemnulla index megjelenik

a kitevőben. A

$$\begin{aligned}
 & (c'_n(T) + in\pi c_n(T)) + \overline{(c'_n(T) - in\pi c_n(T))} \\
 &= 4 \int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} \sin(n\pi a_1) \\ \sin(n\pi a_2) \end{pmatrix} e^{in\pi t}, \begin{pmatrix} \Re v_1 \\ \Re v_2 \end{pmatrix} \right\rangle dt, \\
 & (c'_n(T) + in\pi c_n(T)) - \overline{(c'_n(T) - in\pi c_n(T))} \\
 &= 4i \int_0^T \left\langle \begin{pmatrix} \sin(n\pi a_1) \\ \sin(n\pi a_2) \end{pmatrix} e^{in\pi t}, \begin{pmatrix} \Im v_1 \\ \Im v_2 \end{pmatrix} \right\rangle dt
 \end{aligned}$$

képletek azt mutatják, hogy a komplex L_2 és a valós L_2 fenti momentumterei egymásból rekonstruálhatók, és az egyik pontosan akkor bővül, amikor a másik. Ezzel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Érdekes itt megjegyezni, hogy mivel a $2^{-1/2}e^{in\pi t}$ függvények ortonormált bázist alkotnak $L_2(0, 2; \mathbb{C})$ -ben, ezért $T \geq 2$ -re a $B(T)$ momentumtér az $n \neq kq$ koordinátákon vett teljes komplex ℓ_2 tér lesz. Emiatt a minimális elérési idő az a legkisebb $T_0 \leq 2$ érték lesz, amely fölött $B(T)$ az $n \neq kq$ koordinátákon vett teljes komplex ℓ_2 teret kiadja.

3. A minimális elérési idő jellemzése

A továbbiakban szükségünk lesz az alábbi fogalomra.

3.1. Definíció. Azt mondjuk, hogy a H Hilbert-térben a $H_1, \dots, H_N$ alterek erősen függetlenek, ha van olyan $0 < c$ konstans, hogy bármely $h_i \in H_i$ vektorokra

$$\|h_1 + \dots + h_N\| \geq c(\|h_1\| + \dots + \|h_N\|). \quad (9)$$

Ez valóban erősebb a lineáris függetlenségnél, mert (9) miatt $h_1 + \dots + h_N = 0$ -ból $h_1 = \dots = h_N = 0$ következik. Heurisztikusan a fogalom azt jelenti, hogy bármelyik altér pozitív szöget zár be a többi altér összegével, vagyis nincsenek bennük „majdnem párhuzamos” vektorok. Nyilván feltehető (és a nemtriviális esetekben szükségszerű), hogy $c < 1$. Az is világos, hogy ha $H_1, \dots, H_N$ erősen független, akkor H_1 és $H_2 + \dots + H_N$ is erősen független, hiszen

$$\|h_1 + (h_2 + \dots + h_N)\| \geq c(\|h_1\| + \dots + \|h_N\|) \geq c(\|h_1\| + (\|h_2 + \dots + h_N\|)).$$

3.1. LEMMA. Ha H_1 és H_2 erősen független zárt alterek H -ban, akkor

a)

$$\|p_2^\perp h_1\| \geq c\|h_1\| \quad \forall h_1 \in H_1, \quad \|p_1^\perp h_2\| \geq c\|h_2\| \quad \forall h_2 \in H_2$$

ahol $p_i^\perp$ a H_i ortokomplementer alterére, $H_i^\perp$ -re való merőleges vetítés, és c az erős függetlenség definíciójában szereplő konstans.

b) Van olyan $0 < \delta < 1$ szám, mégpedig $\delta = \sqrt{1 - c^2}$, hogy

$$\|p_2 h_1\| \leq \delta \|h_1\| \quad \forall h_1 \in H_1, \quad \|p_1 h_2\| \leq \delta \|h_2\| \quad \forall h_2 \in H_2,$$

ahol p_i a H_i -re való merőleges vetítés.

c) Ha H_1 és H_2 erősen független, nem feltétlenül zárt alterek H -ban, akkor $H_1^\perp + H_2^\perp = H$.

Bizonyítás. a)-t és b)-t elég csak az egyik szereposztásban igazolni. $p_2^\perp h_1 = h_1 - p_2 h_1$ miatt $\|p_2^\perp h_1\| \geq c(\|h_1\| + \|p_2 h_1\|) \geq c\|h_1\|$ bizonyítja a)-t. Mivel $\|h_1\|^2 = \|p_2 h_1\|^2 + \|p_2^\perp h_1\|^2 \geq \|p_2 h_1\|^2 + c^2 \|h_1\|^2$, ezért $\|p_2 h_1\|^2 \leq (1 - c^2) \|h_1\|^2$, ami bizonyítja b)-t. A c)-ben feltehető, hogy a H_1, H_2 alterek zártak, mert $\overline{H_i}^\perp = H_i^\perp$, és a definícióból láthatóan a $\overline{H_1}, \overline{H_2}$ alterek is erősen függetlenek. Legyen $h \in H$ tetszőleges vektor. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy

$$\begin{aligned} h &= p_1(p_2 p_1)^n h + p_1^\perp (h + p_2 p_1 h + \cdots + (p_2 p_1)^n h) \\ &\quad + p_2^\perp (p_1 h + \cdots + p_1(p_2 p_1)^{n-1} h). \end{aligned} \quad (10)$$

Valóban, $n = 0$ -ra $h = p_1 h + p_1^\perp h$, másrészt

$$\begin{aligned} p_1(p_2 p_1)^n h &= (p_2 p_1)^{n+1} h + p_2^\perp p_1(p_2 p_1)^n h \\ &= p_1(p_2 p_1)^{n+1} h + p_1^\perp (p_2 p_1)^{n+1} h + p_2^\perp p_1(p_2 p_1)^n h. \end{aligned}$$

A b)-beli becslések miatt (10) jobboldalán az első összeadandó normában 0-hoz tart, a másik két összeadandóban pedig a véges összegek normában konvergálnak, ezért limeszben kapjuk a

$$h = p_1^\perp h^* + p_2^\perp h^{**}, \quad h^* = \sum_{n=0}^{\infty} (p_2 p_1)^n h, \quad h^{**} = p_1 \sum_{n=0}^{\infty} (p_2 p_1)^n h$$

előállítás, amely bizonyítja c)-t is. □

A momentumterek vizsgálatához szükségünk lesz a következő állításra:

3.2. LEMMA. Legyen $W_i, i = 1, \dots, N$ véges sok erősen független zárt altér a H Hilbert-térben és legyen p_i a W_i -re való merőleges vetítés. Akkor tetszőleges $h_i \in W_i$ vektorokhoz megadható olyan $h \in H$ vektor, hogy $p_i h = h_i, i = 1, \dots, N$.

Bizonyítás. Mivel W_i és $\text{Lin}(W_j, j \neq i)$ erősen függetlenek, az előző lemma c) pontja szerint minden i -re

$$H = W_i^\perp + (\text{Lin}(W_j, j \neq i))^\perp = W_i^\perp + \bigcap_{j \neq i} W_j^\perp.$$

Ennek megfelelően minden h_i -nek létezik egy $h_i = h_i^* + h_i^{**}, h_i^* \in W_i^\perp, h_i^{**} \in \bigcap_{j \neq i} W_j^\perp$ felbontása. Nyilván $p_i h_i^* = 0$ és $p_i h_j^{**} = 0$, ha $i \neq j$. Ezért $h_i = p_i h_i = p_i h_i^{**}$, és akkor $h = \sum_j h_j^{**}$ választással $p_i h = p_i h_i^{**} = h_i$. □

Látható, hogy a Λ rendszerben a $(\sin(n\pi a_1), \sin(n\pi a_2))^T$ vektorok párhuzamosak, ha $n = \pm(2kq + j)$ vagy $n = \pm(2kq + 2q - j)$ alakú egy rögzített $1 \leq j \leq q - 1$ mellett. Jelöljük V_j -vel a

$$\Lambda_j = \left\{ e^{i(2kq \pm j)\pi t} | k \in \mathbb{Z} \right\}$$

rendszer által kifeszített zárt alteret az $L_2(0, T; \mathbb{C})$ térben. Végül legyen

$$W_j = \begin{pmatrix} \sin(j\pi p_1/q) \\ \sin(j\pi p_2/q) \end{pmatrix} V_j.$$

3.3. LEMMA. *A Λ_j rendszer momentumtere az $L_2(0, T; \mathbb{C})$ térben a komplex ℓ_2 tér, ha $T \geq 2/q$, és ℓ_2 valódi részhalmaza, ha $T < 2/q$.*

Bizonyítás. Bár a hasonló állításokat a Riesz-bázisok elméletének felhasználásával szokás bizonyítani, mi inkább egy elemi indoklást mutatunk. Legyen $f \in L_2(0, 2/q; \mathbb{C})$, és legyen $f_0 = f|_{(0, 1/q)}$, $f_1(t) = f(t + 1/q)$. Akkor az f momentumait megadó integrál

$$\begin{aligned} \int_0^{2/q} e^{i(2kq \pm j)\pi t} f(t) dt &= \int_0^{1/q} e^{i2kq\pi t} g_{\pm}(t) dt, \\ g_{\pm}(t) &= e^{\pm ij\pi t} [f_0(t) + e^{\pm ij\pi/q} f_1(t)]. \end{aligned}$$

Az $e^{i2kq\pi t}$ rendszer konstans normájú ortogonális bázis $L_2(0, 1/q; \mathbb{C})$ -ben, ezért pontosan akkor kapjuk a teljes ℓ_2 momentumteret, ha g_+ és g_- két tetszőleges eleme lehet $L_2(0, 1/q; \mathbb{C})$ -nek. A $g_{\pm}$ függvényeket az f_0 , f_1 függvényekből kapjuk a

$$\begin{aligned} g_+ e^{-ij\pi t} &= f_0 + e^{ij\pi/q} f_1, \\ g_- e^{ij\pi t} &= f_0 + e^{-ij\pi/q} f_1 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerrel. Mivel $T = 2/q$ esetén (f_0, f_1) tetszőleges L_2 -beli pár lehet, és az egyenletrendszer megoldása bármely L_2 -beli (g_+, g_-) pár esetén egy L_2 -beli (f_0, f_1) pár, ezért ilyenkor a momentumtér a teljes ℓ_2 . Emiatt nyilván maximális a momentumtér $T > 2/q$ -ra is. Ha viszont $T < 2/q$, akkor f_1 már nem választható tetszőlegesen, és emiatt a momentumtér is kisebb lesz. $\square$

A Λ_j által kifeszített V_j altérbeli függvények egyszerűen jellemezhetők:

3.4. LEMMA. *Legyen $T > 2/q$. Akkor*

$$\begin{aligned} V_j &= \{f \in L_2(0, T; \mathbb{C}) | \\ &\quad f(t + 2/q) = 2 \cos(\pi j/q) f(t + 1/q) - f(t) \text{ m.m. } t\text{-re}\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Ha pedig $f \in V_j$ és $k \geq 2$, akkor m.m. $t \in (0, 1/q)$ -ra

$$f(t + k/q) = \frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t + 1/q) - \frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t). \quad (12)$$

Bizonyítás. Mivel az $e^{i2k\pi qt}$ függvények által kifeszített tér az összes $1/q$ -periodikus L_2 -beli függvényből áll, ezért nyilván

$$V_j = \{e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi t} g_2 \mid g_1, g_2 \text{ } 1/q\text{-periodikus } L_2\text{-beli függvény.}\}$$

Ilyen alakban minden $L_2(0, 2/q; \mathbb{C})$ -beli függvény előáll: az előző bizonyítás jelölésével $f_0 = e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi t} g_2$, $f_1 = e^{ij\pi/q} \cdot e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi/q} \cdot e^{-ij\pi t} g_2$ befut minden L_2 -beli (f_0, f_1) párt. A

$$(z - e^{ij\pi/q})(z - e^{-ij\pi/q}) = z^2 - 2\cos(j\pi/q)z + 1$$

azonosságból következik, hogy (11) teljesül minden $e^{ij\pi t} g_1 + e^{-ij\pi t} g_2$ alakú függvényre. Ez egyúttal bizonyítja (12)-t is $k = 2$ -re. Nagyobb k esetén teljes indukciót alkalmazva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(t + (k+1)/q) &= 2\cos(j\pi/q)f(t + k/q) - f(t + (k-1)/q) \\ &= 2\cos(j\pi/q) \left[\frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 - \frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0 \right] \\ &\quad - \left[\frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 - \frac{\sin(j(k-2)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0 \right] \\ &= \frac{\sin(j(k+1)\pi/q) + \sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 \\ &\quad - \frac{\sin(jk\pi/q) + \sin(j(k-2)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0 \\ &\quad - \frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_1 + \frac{\sin(j(k-2)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_0 \\ &= \frac{\sin(j(k+1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t + 1/q) - \frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f(t). \end{aligned}$$

□

3.5. LEMMA. *Ha a W_j alterek lineárisan függetlenek valamilyen T -re $H = L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -ben, akkor erősen függetlenek is.*

Bizonyítás. A lineáris függetlenség azt jelenti, hogy ha valamilyen $f_j \in V_j$ -vel

$$\sum_{j=1}^{q-1} F_j(t) = 0 \quad \text{m.m. } t \in (0, T)\text{-re,} \quad F_j(t) = \begin{pmatrix} \sin(j\pi p_1/q) \\ \sin(j\pi p_2/q) \end{pmatrix} f_j(t), \quad (13)$$

akkor $f_j = 0$ m.m., $j = 1, \dots, q-1$. Az előző lemma szerint az f_j -k kifejezhetők az $f_{j,0} = f_j|_{(0,1/q)}$, $f_{j,1}(t) = f_j(t + 1/q)$, $0 < t < 1/q$ függvényekkel, ezért (13)

minden $t \in (r/q, (r+1)/q)$ esetén egy egyenletpárt ad. Ha $k/q < T \leq (k+1)/q$ és $f = (f_{j,0}, f_{j,1})_{j=1}^{q-1}$, akkor a (13) egyenletrendszer $(0, T - k/q)$ -n a $Cf = 0$, $(T - k/q, 1/q)$ -n a $C^*f = 0$ alakban írható, ahol a C és C^* mátrixok t -től függetlenek (és C a C^* két sorral való bővítése). A W_j -k függetlensége miatt $Cf = 0$ -nak és $C^*f = 0$ -nak is csak $f = 0$ a megoldása, ezért van olyan $\delta > 0$, hogy

$$|Cf|^2 \geq \delta \sum_{j=1}^{q-1} (|f_{j,0}|^2 + |f_{j,1}|^2), \quad |C^*f|^2 \geq \delta \sum_{j=1}^{q-1} (|f_{j,0}|^2 + |f_{j,1}|^2).$$

Az első becslést integrálva $(0, T - k/q)$ -n, a másodikat $(T - k/q, 1/q)$ -n, majd összeadva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \left\| \sum F_j \right\|_{L_2(0,T;\mathbb{C}^2)}^2 &\geq \delta \sum \|f_j\|_{L_2(0,2/q)}^2 \geq c_1 \sum \|f_j\|_{L_2(0,T)}^2 \\ &\geq c_2 \sum \|F_j\|_{L_2(0,T)}^2 \geq \frac{c_2}{q-1} \left(\sum \|F_j\|_{L_2(0,T)} \right)^2, \end{aligned}$$

ezért az erős függetlenséget igazoltuk $c = \sqrt{c_2/(q-1)}$ konstanssal. $\square$

A minimális elérési időre a következő jellemzést adhatjuk:

3.6. LEMMA. T_0 az a legkisebb érték, amelyre a

$$W_j = \begin{pmatrix} \sin(j\pi p_1/q) \\ \sin(j\pi p_2/q) \end{pmatrix} V_j, \quad j = 1, \dots, q-1 \quad (14)$$

alterek lineárisan független rendszert alkotnak $L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -ben minden $T > T_0$ -ra.

Bizonyítás. Láttuk, hogy T_0 a legkisebb idő, amely mellett minden $T > T_0$ -ra a Λ exponenciális rendszer $L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -beli momentumtere a q -val nem osztható indexeken befutja az ℓ_2 teret. A 3.3. lemma szerint a (14) altereket kifesztő Λ -beli vektorok momentumtere ℓ_2 lesz, ha $T \geq 2/q$, és ilyenkor az alterekben vannak olyan vektorok, melyek éppen egy előírt ℓ_2 -beli momentumsorozatot adnak. Ha a (14) alterek lineárisan függetlenek valamilyen T -re, akkor a 3.5. lemma szerint erősen függetlenek is, ezért a 3.2. lemma szerint ilyen T -re a teljes Λ rendszer momentumtere is befutja ℓ_2 -t, hiszen h és $p_j h$ skaláris szorzata egy W_j -beli függvénynel ugyanaz. Tegyük fel most, hogy a W_j alterek lineárisan összefüggők. A

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} \sin(n\pi p_1/q) \\ \sin(n\pi p_2/q) \end{pmatrix} e^{in\pi t}$$

jelöléssel élve ez azt jelenti, hogy a q -val nem osztható n indexeken létezik egy nem azonosan nulla $\{c_{n,0}\} \in \ell_2$ sorozat, amelyre $\sum_n c_{n,0} \varphi_n = 0$ (és az összeg $L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -ben konvergens). Akkor viszont bármely $h \in L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -re

$$0 = \langle h, \sum_n c_{n,0} \varphi_n \rangle = \sum_n \overline{c_{n,0}} \langle h, \varphi_n \rangle,$$

azaz minden momentumsorozat merőleges $\{c_{n,0}\}$ -ra, és akkor a momentumtér nem lehet maximális. $\square$

A dolgozat fő eredményének kimondásához vezessük be a következő lineáris egyenletrendszert. Válasszunk $f_j \in V_j$ függvényeket, és vezessük be az

$$\begin{aligned} x_p &= \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p/q) f_{j,0}, \\ y_p &= \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p/q) f_{j,1} \end{aligned} \quad (15)$$

jelöléseket, ahol $f_{j,0} = f_j|_{(0,1/q)}$, $f_{j,1}(t) = f_j(t + 1/q)$, $0 < t < 1/q$. Vegyük észre, hogy az $(f_{j,0})_{j=1}^{q-1} \mapsto (x_p)_{p=1}^{q-1}$ és $(f_{j,1})_{j=1}^{q-1} \mapsto (y_p)_{p=1}^{q-1}$ hozzárendelések kölcsönösen egyértelműek. Valóban, ha

$$\sum_{j=1}^{q-1} \alpha_j \sin(j\pi p/q) = 0 \quad p = 1, \dots, q-1,$$

akkor a $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{q-1} \alpha_j \sin(jt)$ egy olyan, legfeljebb $q-1$ -edfokú trigonometrikus polinom, melynek gyöke van az összes $\pi k/q$ pontban, tehát $[0, 2\pi)$ -ben van legalább $2q-1$ gyöke, ezért $\varphi \equiv 0$, vagyis $\alpha_1 = \dots = \alpha_{q-1} = 0$.

Az alábbiakban minden egyenlet egy egyenletpárt jelent, ahol p^* helyébe minden előfordulásakor p_1 -et, illetve minden előfordulásakor p_2 -t kell helyettesíteni:

$$(A) \begin{cases} [0] & x_{p^*} = 0, \\ [1] & y_{p^*} = 0, \\ [2] & y_{p^*+1} + y_{p^*-1} = 0, \\ [k] & y_{p^*+k-1} + y_{p^*-k+1} - x_{p^*+k-2} - x_{p^*-k+2} = 0, \quad k \geq 3. \end{cases}$$

Az x_p, y_p változók definíciójából látható, hogy

$$(B) \begin{cases} x_0 = x_q = 0, \quad x_{-p} = -x_p, \quad x_{q+p} = -x_{q-p}, \\ y_0 = y_q = 0, \quad y_{-p} = -y_p, \quad y_{q+p} = -y_{q-p}. \end{cases}$$

Látjuk, hogy a (B) redukció figyelembe vételével az (A) egyenletrendszer az $x_1, \dots, x_{q-1}, y_1, \dots, y_{q-1}$ változókat tartalmazza. Az egyenletrendszer mátrixa egyszerű szerkezetű: soronként legfeljebb négy ± 1 elemen kívül csak nullákat tartalmaz, és a nemnulla értékek is szabályosan helyezkednek el. Heurisztikusan azt lehet mondani, hogy két $q-1$ hosszúságú diszkrét húr p_1 és p_2 pontjából egy egységnyi jel szimmetrikusan továbbterjed mindkét irányba, és (B) szerint a húr

határához érve a jel ellentétes fázisban verődik vissza. A dolgozat fő eredménye, hogy a keresett minimális elérési idő attól függ, milyen k esetén lesz az (A), (B) egyenletrendszernek csak a nullvektor a megoldása, vagyis mikor lesz az egyenletrendszer mátrixának rangja a maximális $2q - 2$:

3.1. TÉTEL. Tekintsük azt a lineáris egyenletrendszert az $x_1, \dots, x_{q-1}, y_1, \dots, y_{q-1}$ változókra, amely az (A)-beli $[0], [1], \dots, [k]$ egyenletpárokból adódik a (B) figyelembe vételével. Az a minimális T_0 elérési idő, amely fölött $R(T)$ már nem nő tovább, megadható $T_0 = (k_0 + 1)/q$ alakban, ahol k_0 a legkisebb olyan k érték, amelynél a (B) szerint módosított (A) lineáris egyenletrendszernek csak a nullvektor a megoldása. Az $R(T_0)$ halmaz már tartalmazza a húr összes, véges idő alatt elérhető mozgásállapotát.

Bizonyítás. A 3.6. lemma szerint azt kell vizsgálnunk, milyen T -re lesznek a W_j alterek lineárisan függetlenek $L_2(0, T; \mathbb{C}^2)$ -ben. Legyen tehát $f_j \in V_j$, és vizsgáljuk a

$$\sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p^*/q) f_j = 0 \text{ m.m. } p^* = \begin{cases} p_1 \\ p_2 \end{cases} \quad (16)$$

egyenletpárt. A t időt felosztva $1/q$ hosszú szakaszokra az $f_{j,0} = f_j|_{(0,1/q)}$, $f_{j,1}(t) = f_j(t + 1/q)$, $0 < t < 1/q$ jelölésekkel az alábbi egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned} x_{p^*} &= \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p^*/q) f_{j,0} = 0, \\ y_{p^*} &= \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p^*/q) f_{j,1} = 0, \end{aligned}$$

a $k \geq 2$ indexekre pedig a 3.4. lemma szerint trigonometrikus azonosságok alkalmazásával az adódik, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p^*/q) \left(\frac{\sin(jk\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_{j,1} - \frac{\sin(j(k-1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_{j,0} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\cos(j(p^* - k)\pi/q) - \cos(j(p^* + k)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_{j,1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\cos(j(p^* - k + 1)\pi/q) - \cos(j(p^* + k - 1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_{j,0}. \end{aligned} \quad (17)$$

Mivel

$$2x_p = 2 \sum_{j=1}^{q-1} \sin(j\pi p/q) f_{j,0} = \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\cos(j(p-1)\pi/q) - \cos(j(p+1)\pi/q)}{\sin(j\pi/q)} f_{j,0},$$

és hasonlóan y_p -re, ezért (17) ekvivalens az

$$y_{p^*-k+1} + y_{p^*-k+3} + \cdots + y_{p^*+k-1} - (x_{p^*-k+2} + x_{p^*-k+4} + \cdots + x_{p^*+k-2}) = 0$$

egyenletpárral, ami a 2-vel kisebb k esetére felírt hasonló egyenletpár miatt ekvivalens az

$$y_{p^*-k+1} + y_{p^*+k-1} - (x_{p^*-k+2} + x_{p^*+k-2}) = 0$$

egyenletpárral. Vagyis az (A) egyenletrendszer adódik, és nyilvánvalóan a (B) azonosságok is teljesülnek. Ha $k/q < T \leq (k+1)/q$, akkor a $[0], [1], \dots, [k-1]$ egyenletek a teljes $[0, 1/q]$ szakaszon teljesülnek, $[k]$ pedig a $[0, T - k/q]$ szakaszon. Nézzük először a $k \leq k_0$, $k/q < T < (k+1)/q$ esetet. Akkor a $T - k/q < t < 1/q$ értékekre vett x_p, y_p változókra csak a $[0], [1], \dots, [k-1]$ egyenletek teljesülnek, ezért vannak olyan x_p, y_p nem mind nulla konstansok, melyek kielégítik $[0], [1], \dots, [k-1]$ -et. Legyen $0 < t < T - k/q$ -ra $f_{j,0} = f_{j,1} = 0$, $T - k/q < t < 1/q$ esetén pedig $f_{j,0}, f_{j,1}$ legyenek az x_p, y_p megoldásnak (15) szerint megfelelő nem mind nulla konstansfüggvények. Akkor a fentiek szerint megkapjuk a (16) egyenletnek egy nemtriviális megoldását, azaz a W_j alterek nem függetlenek, emiatt az $R(T)$ halmaz ilyen T -re nem maximális. Most legyen $k = k_0$, és $T = (k_0 - 1)/q$ vagy $k > k_0$. Akkor minden $0 < t < 1/q$ -hoz tartozó x_p, y_p -re teljesülnek a ((B) szerint módosított) $[0], [1], \dots, [k]$ egyenletek, vagyis csak $x_p = y_p = 0$ a megoldás, és emiatt a (16) egyenletnek csak triviális megoldása van. Ez azt jelenti, hogy a W_j alterek lineárisan függetlenek, akkor pedig a 3.6. lemma szerint bármely $T \geq (k_0 + 1)/q$ -ra az $R(T)$ halmaz maximális lesz. A bizonyítást befejeztük. $\square$

A tétel pontos leírását adja a minimális elérési időnek. A kritérium nem nagy p_1, p_2 és q értékekre papíron könnyen számolható, illetve bármely p_1, p_2, q esetén könnyen programozható a (módosított) $[0], [1], \dots, [k]$ egyenleteknek megfelelő mátrix rangjának vizsgálata. Ugyanakkor érdekes lenne egy explicit formula, mely p_1, p_2 és q függvényében megadja k_0 -t. Ez számos speciális esetben meghatározható, ezekből bemutatunk néhányat, teljes általánosságban viszont nem ismert.

Vezessük be az

$$u_k = y_k - x_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

változókat. A (B) szerint

$$u_{-k} = x_{k+1} - y_k.$$

Nyilván u_k $2q$ -periodikus, de valójában $2q-2$ független új változót ad meg, melyekből az x_k, y_k változók egyértelműen kifejezhetők, és az (A) egyenletrendszer tovább egyszerűsíthető:

3.7. LEMMA. Az új u_k változókból a korábbi változók felírhatók az

$$\begin{aligned} x_k &= \sum_{j=0}^{k-1} u_{1-k+2j} = u_{k-1} + u_{k-3} + \cdots + u_{1-k}, \\ y_k &= \sum_{j=0}^{k-1} u_{2-k+2j} = u_k + u_{k-2} + \cdots + u_{2-k} \end{aligned} \quad (18)$$

alakban. Speciálisan

$$\sum_{j=0}^{q-1} u_{i+2j} = 0 \quad \forall i, \quad (19)$$

azaz a páratlan indexű u -k és a páros indexű u -k összege is 0, így valójában $2q-2$ független u_k változót definiáltunk. Az új változókkal az (A) egyenletrendszer a következő alakot ölti a p/q , $(p+s)/q$ pontpár esetén:

$$(A') \begin{cases} [0] & \sum_{j=0}^{p-1} u_{1-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p+s-1} u_{1-p-s+2j} = 0, \\ [1] & \sum_{j=0}^{p-1} u_{2-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p+s-1} u_{2-p-s+2j} = 0, \\ [2] & u_{p+1} = u_{-p+1}, \quad u_{p+s+1} = u_{-p-s+1}, \\ [k] & u_{p+k-1} = u_{-p+k-1}, \quad u_{p+s+k-1} = u_{-p-s+k-1}, \quad k \geq 3. \end{cases}$$

Bizonyítás. Definíció szerint $u_0 = -x_{-1} = x_1$ és $u_1 = y_1$. Ezzel a (18) egyenleteket $k=1$ -re megkaptuk. Nagyobb k esetén teljes indukciót alkalmazunk az $x_k = u_{1-k} + y_{k-1}$, illetve az $y_k = u_k + x_{k-1}$ formulák alapján. Így megkapjuk (18)-at, speciálisan az $x_q = y_q = 0$ egyenletek miatt (18)-ból (19) is adódik. Az (A') rendszerben [0] és [1] az $x_p = x_{p+s} = 0$ és $y_p = y_{p+s} = 0$ egyenletek (18) szerinti átírása, [k] pedig az eredeti egyenletpár $y_{p^*+k-1} - x_{p^*+k-2} = x_{p^*-k+2} - y_{p^*-k+1}$ alakra hozásából következik. $\square$

Az új (A') egyenletrendszer annyiban egyszerűbb, mint az (A), hogy a ≥ 2 indexű egyenletek két változó egyenlőségét állítják. A következőkben azt vizsgáljuk, melyik [k] esetén találjuk az első redundáns egyenletet. A [k] egyik egyenletét akkor nevezzük redundánsnak, ha kifejezhető [k] másik egyenletéből és a [0]-[k-1] egyenletekből a $2q$ -periodikusság és (19) figyelembe vételével.

3.8. LEMMA. a) Ha az (A') egyenletrendszerben $[k_1]$ egyik egyenlete redundáns, akkor a $k > k_1$ indexű egyenletpárok megfelelő egyenlete is redundáns lesz. b) Ha először $[k_1]$ -ben van redundáns egyenlet, akkor

$$T_0 \left(\frac{p}{q}, \frac{p+s}{q} \right) = \frac{2q - k_1 - 2}{q}.$$

Bizonyítás.

a) A [2] egyenletpár [0] miatt ekvivalens a $\sum_{j=0}^{p-1} u_{3-p+2j} = 0$, $\sum_{j=0}^{p+s-1} u_{3-p-s+2j} = 0$ egyenletekkel. Hasonlóan látható teljes indukcióval, hogy [k] ekvivalens a $\sum_{j=0}^{p-1} u_{k-p+2j} = 0$, $\sum_{j=0}^{p+s-1} u_{k-p-s+2j} = 0$ egyenletpárral. Vagyis ekvivalens átalakítás után [k] egyenleteit úgy kapjuk, hogy [0] egyenleteiben minden indexet megnövelünk k-val. Emiatt ha [k] egyik egyenlete kifejezhető nem későbbi indexű más egyenletekkel, akkor az indexek eltolásával kapott későbbi egyenlet is redundáns lesz. Megjegyezzük, hogy a változók indexben vett $2q$ -periodikussága és a (19) egyenletek is invariánsak az indexek eltolására.

b) Tudjuk, hogy elég nagy [k] esetén a [0]-[k] egyenletrendszernek csak a nullvektor lesz a megoldása. Az a) szerint ha k_1 az első redundáns egyenlet, akkor $k_1 \leq k \leq k_0$ -ra [k] egyik egyenlete lesz redundáns, $k > k_0$ -ra pedig mindkettő. Összesen $2q - 2$ független egyenlet kell az egyértelmű megoldhatósághoz, ebből $k_1 - 1$ -ig van $2k_1$, utána kell még $2q - 2k_1 - 2$, tehát az utolsó információt hordozó egyenlet indexe $k_0 = 2q - k_1 - 3$. Mivel tudjuk, hogy $T_0 = (k_0 + 1)/q$, a bizonyítást befejeztük. $\square$

A fenti apparátussal $s = 1$ és $s = 2$ esetére fogjuk a minimális elérési időt meghatározni.

3.9. LEMMA.

$$T_0 \left(\frac{p}{q}, \frac{p+1}{q} \right) = \max \left(\frac{2p}{q}, \frac{2q-2p-2}{q} \right).$$

Bizonyítás. Az előző lemma miatt azt kell megmutatni, hogy $2p \leq 2q - 2p - 2$ esetén az első redundáns egyenlet indexe $k_1 = 2p$. Az egyenletrendszer

$$(A') \left\{ \begin{array}{ll} [0] & \sum_{j=0}^{p-1} u_{1-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^p u_{-p+2j} = 0, \\ [1] & \sum_{j=0}^{p-1} u_{2-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^p u_{1-p+2j} = 0 \Leftrightarrow u_{-p} = 0, u_{p+1} = 0, \\ [2] & u_{p+1} = u_{-p+1}, \quad u_{p+2} = u_{-p} \Leftrightarrow u_{1-p} = 0, u_{p+2} = 0, \\ [3] & u_{p+2} = u_{-p+2}, \quad u_{p+3} = u_{-p+1} \Leftrightarrow u_{2-p} = 0, u_{p+3} = 0, \\ & \vdots \\ [2p-2] & u_{3p-3} = u_{p-3}, \quad u_{3p-2} = u_{p-4} \Leftrightarrow u_{p-3} = 0, u_{3p-2} = 0, \\ [2p-1] & u_{3p-2} = u_{p-2}, \quad u_{3p-1} = u_{p-3} \Leftrightarrow u_{p-2} = 0, u_{3p-1} = 0, \\ [2p] & u_{3p-1} = u_{p-1}, \quad u_{3p} = u_{p-2} \Leftrightarrow u_{p-1} = 0, u_{3p} = 0. \end{array} \right.$$

A [0] első egyenletére tekintettel [2p-2]-ből és a korábbi egyenletekből $u_{p-1} = 0$ következik; hasonlóan [0] második egyenletéből [2p-1] szerint $u_p = 0$. Ezért

$[2p]$ első egyenlete redundáns. Amint láttuk, a $[0]$ - $[2p-1]$ összesen $4p$ egyenletéből levezethető, hogy a $-p$ és $3p-1$ közötti indexű összes $u_k = 0$. Vagyis $4p$ egyenletből $4p$ ismeretlent meg lehet határozni, ezért ezen $4p$ egyenlet között csak akkor lehet redundáns, ha a $4p$ változó nem mind független, vagyis ha $-p + 2q - 2 \leq 3p - 1$, azaz $4p \geq 2q - 1$, tehát $2p \geq q$, de ez ellentmond a $2p \leq 2q - 2p - 2$ feltevésnek. $\square$

Az $s = 2$ esetben a következőképpen kapjuk az optimális elérési időt. Az állítást olyan alakban mondjuk ki, amely kiemeli a $p \leftrightarrow q - p - 2$ szimmetriát.

3.10. LEMMA. Legyen $T_0 = T_0(p/q, (p+2)/q)$.

- a) Ha p páros és $q - p - 2$ páratlan, akkor $T_0 = \max(2p/q, (2q - 2p - 2)/q)$.
- b) Ha p páratlan és $q - p - 2$ páros, akkor $T_0 = \max((2p + 2)/q, (2q - 2p - 4)/q)$.
- c) Ha p és $q - p - 2$ is páratlan, akkor $T_0 = \max(2p/q, (2q - 2p - 4)/q)$ ha $p \neq q - p - 2$ és $T_0 = (2p + 2)/q = (2q - 2p - 2)/q = 1$, ha $p = q - p - 2$.

Bizonyítás. Most is megkeressük az első redundáns egyenletet.

$$(A') \left\{ \begin{array}{l} [0] \sum_{j=0}^{p-1} u_{1-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p+1} u_{-1-p+2j} = 0 \Leftrightarrow u_{-p-1} + u_{p+1} = 0, \\ [1] \sum_{j=0}^{p-1} u_{2-p+2j} = 0, \quad \sum_{j=0}^{p+1} u_{-p+2j} = 0 \Leftrightarrow u_{-p} + u_{p+2} = 0, \\ [2] u_{p+1} = u_{-p+1}, \quad u_{p+3} = u_{-p-1} \Leftrightarrow u_{-p-1} + u_{1-p} = 0, \quad u_{p+3} + u_{p+1} = 0, \\ [3] u_{p+2} = u_{-p+2}, \quad u_{p+4} = u_{-p} \Leftrightarrow u_{2-p} + u_{-p} = 0, \quad u_{p+4} + u_{p+2} = 0, \\ \vdots \\ [2p-3] \Leftrightarrow u_{p-6} + u_{p-4} = 0, \quad u_{3p-2} + u_{3p-4} = 0, \\ [2p-2] \Leftrightarrow u_{p-5} + u_{p-3} = 0, \quad u_{3p-1} + u_{3p-3} = 0, \\ [2p-1] \Leftrightarrow u_{p-4} + u_{p-2} = 0, \quad u_{3p} + u_{3p-2} = 0, \\ [2p] \Leftrightarrow u_{p-3} + u_{p-1} = 0, \quad u_{3p+1} + u_{3p-1} = 0, \\ [2p+1] \Leftrightarrow u_{p-2} + u_p = 0, \quad u_{3p+2} + u_{3p} = 0, \\ [2p+2] \Leftrightarrow u_{p-1} + u_{p+1} = 0, \quad u_{3p+3} + u_{3p+1} = 0. \end{array} \right.$$

Legyen először p páros. Akkor $[0]$ illetve $[1]$ első egyenlete felírható

$$\begin{aligned} (u_{p-1} + u_{p-3}) + (u_{p-5} + u_{p-7}) + \cdots + (u_{3-p} + u_{1-p}) &= 0, \\ (u_p + u_{p-2}) + (u_{p-4} + u_{p-6}) + \cdots + (u_{4-p} + u_{2-p}) &= 0 \end{aligned}$$

alakban. Ezért a $[4], [6], \dots, [2p-4]$ egyenletekből kapjuk, hogy $u_{p-1} + u_{p-3} = 0$, emiatt $[2p]$ első egyenlete redundáns. Most nézzük csak a $[0]$ - $[2p-1]$ egyenleteket. A $[2], [4], \dots, [2p-4], [2p-2], [2p-4], [0], [2], [4], \dots, [2p-4], [2p-2]$ egyenletekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_{-p-1} &= -u_{1-p} = u_{3-p} = \cdots = u_{p-5} = -u_{p-3} = u_{p-1} = -u_{p+1} \\ &= u_{p+3} = -u_{p+5} = \cdots = -u_{3p-3} = u_{3p-1}. \end{aligned}$$

Hasonlóan a $[3], [5], \dots, [2p-3], [2p-1], [2p-3], [1], [3], \dots, [2p-5], [2p-3], [2p-1]$ egyenletekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u_{-p} &= -u_{2-p} = u_{4-p} = \dots = u_{p-4} = -u_{p-2} = u_p = -u_{p+2} \\ &= u_{p+4} = \dots = u_{3p-4} = -u_{3p-2} = u_{3p}. \end{aligned}$$

Vagyis a $[0] - [2p-1]$ $4p$ egyenletéből a $-p-1$ és $3p$ közti indexű $4p+2$ változók alteréből két szabadsági fokú rendszer maradt. Emiatt a $[0] - [2p-1]$ egyenletek között csak akkor lehet redundáns, ha nem mind a $4p+2$ változó független, vagyis ha $-p-1+2q-2 \leq 3p$, $4p \geq 2q-4$, azaz $p \geq q-p-2$. Mivel páros p -re q páratlan, ezért $p \neq q-p-2$, ezzel beláttuk:

$$\text{Ha } p \leq q-p-2 \text{ páros, akkor } T_0 = \frac{2q-2p-2}{q}.$$

Legyen most p páratlan. Akkor $[0]$, illetve $[1]$ első egyenletének alakja

$$\begin{aligned} u_{p-1} + (u_{p-3} + u_{p-5}) + \dots + (u_{3-p} + u_{1-p}) &= 0, \\ u_p + (u_{p-2} + u_{p-4}) + \dots + (u_{4-p} + u_{2-p}) &= 0. \end{aligned}$$

Ezért $[2p-2]$ -ből $u_{p-1} = 0$, $[2p-1]$ -ből $u_p = 0$ következik. A páros indexű egyenleteket először csökkenő, aztán növekvő sorrendben figyelembe véve kapjuk, hogy

$$0 = u_{p-1} = u_{p-3} = u_{p-5} = \dots = u_{-p-1} = u_{p+1} = u_{p+3} = \dots = u_{3p+1},$$

és hasonlóan egy indexszel eltolva

$$0 = u_p = u_{p-2} = \dots = u_{3p+2}.$$

Innen következik, hogy $[2p+2]$ első egyenlete redundáns. Másrészt a $[0] - [2p+1]$ $4p+4$ egyenletéből megkaptuk, hogy az u_{-p-1} és u_{3p+2} közti $4p+4$ változó mindegyike nulla. Vagyis $[0] - [2p+1]$ -ben nem lehet redundáns egyenlet, ha a változók függetlenek, azaz $-p-1+2q-2 > 3p+2$, másképpen ha $p \leq q-p-3$. Ezzel igazoltuk:

$$\text{Ha } p \leq q-p-3 \text{ páratlan, akkor } T_0 = \frac{2q-2p-4}{q}.$$

Végül legyen $p = q-p-2$ páratlan. Akkor $[2p]$ első egyenlete redundáns. Ugyanis $3p+1 = 2q-p-3$ miatt

$$\begin{aligned} u_{3p+1} + u_{3p-1} &= u_{-p-3} + u_{-p-5} = -(u_{-p-1} + u_{1-p} + \dots + u_{2q-p-7}) \\ &= -[(u_{-p-1} + u_{1-p}) + \dots + (u_{p-5} + u_{p-3}) + u_{p-1} \\ &\quad + (u_{p+1} + u_{p+3}) + \dots + (u_{3p-5} + u_{3p-3})] = 0. \end{aligned}$$

Másrészt ha $[2p - 1]$ -ben is lenne redundáns egyenlet, akkor $[0] - [2p + 1]$ -ben legfeljebb $4p + 1 = 2q - 3$ független egyenlet volna, márpedig láttuk, hogy ezekből az egyenletekből következik, hogy mind a $2q - 2$ változó egyenlő nullával. Vagyis ez esetben az első redundáns egyenlet $[2p]$ -beli, ezért

$$T_0 = (2q - 2p - 2)/q = (2p + 2)/q = 1.$$

A fentiekből a lemma állításai már könnyen adódnak. Valóban, ha p páros és $q - p - 2$ páratlan, akkor $p \neq q - p - 2$ és $p < q - p - 2$ esetén $T_0 = (2q - 2p - 2)/q$, $p > q - p - 2$ esetén pedig $T_0 = (2q - 2(q - p - 2) - 4)/q = 2p/q$, ahonnan a lemma a) állítása következik. Ha p páratlan és $q - p - 2$ páros, akkor szintén $p \neq q - p - 2$ és $p < q - p - 2$ esetén $T_0 = (2q - 2p - 4)/q$; $p > q - p - 2$ esetén pedig $T_0 = (2q - 2(q - p - 2) - 2)/q = (2p + 2)/q$, amiből b) következik. Végül ha p és $q - p - 2$ is páratlan, de nem egyenlők, akkor $p < q - p - 2$ esetén $T_0 = (2q - 2p - 4)/q$; $p > q - p - 2$ esetén pedig $T_0 = (2q - 2(q - p - 2) - 4)/q = 2p/q$, a $p = q - p - 2$ esetet pedig már láttuk. Ezzel a c) is igazolást nyert, amivel a bizonyítást befejeztük. $\square$

Hivatkozások

- [1] S. A. AVDONIN AND J. EDWARD: *Exact controllability for a string with attached masses*, IMA Preprints, Minnesota (2015).
- [2] C. CASTRO: *Exact controllability of the 1-d wave equation from a moving interior point*, ESAIM: COCV **19** (2013), no. 1, 301–316.
- [3] S. HANSEN AND E. ZUAZUA: *Exact controllability and stabilization of a vibrating string with an interior point mass*, SIAM J. Control and Optim. **33** (1995), no. 5, 1357–1391.
- [4] V. A. IL'IN AND E. I. MOISEEV: *Optimization of the boundary control of string vibrations by an elastic force on an arbitrary sufficiently large time interval*, Diff. Equ. **42** (2006), no. 12, 1775–1786.
- [5] I. JOÓ: *On the reachability set of a string in two interior points*, Acta Math. Hung. **49** (1987), 203–211.
- [6] I. JOÓ: *The control of a string in two interior points*, Periodica Math. Hung. **22** (1991), no. 1, 15–25.

(Beérkezett: 2016. március 29.)

HORVÁTH MIKLÓS

Matematika Intézet, Analízis Tanszék
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
H 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3–9.
horvath@math.bme.hu

THE CONTROL OF VIBRATING STRINGS

MIKLÓS HORVÁTH

We investigate the reachable movement states of a finite string, fixed at the endpoints, with zero initial state and controlled in two interior points. It is known that all states reachable in finite time can be obtained in a fixed finite time T_0 . In this paper we give a simple linear algebraic characterization of the minimal reachability time T_0 .