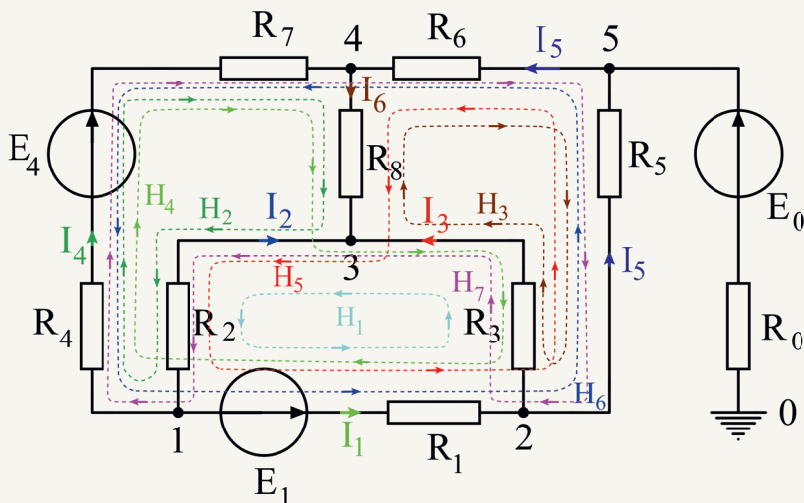




KENÉZ LAJOS

ELMÉLETI VILLAMOSSÁGTAN

FELADATMEGOLDÁSI ÚTMUTATÓ
ÉS FELADATGYŰJTEMÉNY

Kenéz Lajos

Elméleti villamosságtan

Feladatmegoldási útmutató
és feladatgyűjtemény



SAPIENTIA ERDÉLYI MAGYAR TUDOMÁNYEGYETEM
MAROSVÁSÁRHELYI KAR
VILLAMOSMÉRNÖKI TANSZÉK

Kenéz Lajos

Elméleti villamosságtan

Feladatmegoldási útmutató
és feladatgyűjtemény



DOI: 10.47745/SAPVOL.2025.04

Felelős kiadó:

Sorbán Angella

Lektor:

Kelemen András (Marosvásárhely)

Borítóterv:

Tipotéka Kft.

Kiadói koordinátor:

Szabó Beáta

A szakmai felelősséget teljes mértékben a szerkesztők, illetve a szerzők vállalják.

Első magyar nyelvű kiadás: 2025

© Scientia 2025

Minden jog fenntartva, beleértve a sokszorosítás, a nyilvános előadás, a rádió- és televízióadás, valamint a fordítás jogát, az egyes fejezeteket illetően is.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

KENÉZ, LAJOS

Elméleti villamosságtan : feladatmegoldási útmutató és feladatgyűjtemény /

Kenéz Lajos. - Cluj-Napoca : Scientia, 2025

ISBN 978-606-975-105-3

62

TARTALOMJEGYZÉK

1. Az egyenáramú áramkörökre vonatkozó elméleti alapok	11
1.1. Mennyiségek	11
1.1.1. Az elektromos áram fogalma	11
1.1.2. Az elektromos potenciál fogalma	12
1.1.3. Az elektromos feszültség fogalma	12
1.1.4. Koncentrált paraméterű, lineáris egyenáramú áramkörök	13
1.2. Alapvető törvények (Ohm- és Kirchhoff-törvények)	15
1.2.1. Ohm-törvény	16
1.2.2. Kirchhoff I. törvénye – csomóponti törvény	16
1.2.3. Kirchhoff II. törvénye – huroktörvény	17
1.3. Potenciálváltozás a kétpólusok mentén	17
1.3.1. Ideális feszültséggenerátor	17
1.3.2. Ideális ellenállás	18
1.3.3. A feszültségek algebrai összegzésének módszere	18
1.4. Feszültségosztó	19
1.5. Áramosztó	20
1.6. Teljesítmény és energia	21
1.7. Ekvivalens ellenállás számítása	24
1.7.1. Sorba kapcsolt ellenállások eredőjének kiszámítása	24
1.7.2. Párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjének kiszámítása	24
1.7.3. Két sorba kapcsolt ellenállás ekvivalens vezetőképességének kiszámítása	25
1.7.4. Két párhuzamosan kapcsolt ellenállás ekvivalens vezetőképességének kiszámítása	26
1.7.5. Ellenállások vegyes kapcsolása (példa)	26
1.7.6. Ellenállások hárompólusú kapcsolása	27
1.8. Áramköri megoldási módszerek	34
1.8.1. A szuperpozíció-elv	34
1.8.2. Független Kirchhoff-törvényekből álló egyenletrendszer	34
1.8.3. Thèvenin-tétel – a helyettesítő feszültséggenerátor tétele	37
1.8.4. Norton-tétel – a helyettesítő áramgenerátor tétele	39
1.8.5. Millman-tétel (a Norton-tétel következménye)	41
2. Megoldott feladatok	43
3. Ajánlott feladatok	141
A szerzőről	155

CUPRINS

1. Bazele teoretice ale circuitelor electrice de curent continuu	11
1.1. Mărimi	11
1.1.1. Noțiunea de curent electric	11
1.1.2. Noțiunea de potențial electric	12
1.1.3. Noțiunea de tensiune electrică	12
1.1.4. Circuite electrice de curent continuu liniare, cu parametri concentrați	13
1.2. Legi fundamentale (Legea lui Ohm și legile lui Kirchhoff)	15
1.2.1. Legea lui Ohm	16
1.2.2. Prima teoremă a lui Kirchhoff	16
1.2.3. A doua teoremă a lui Kirchhoff	17
1.3. Repartiția potențialului de-a lungul dipolilor	17
1.3.1. Generator de tensiune ideal	17
1.3.2. Rezistor ideal	18
1.3.3. Metoda însumării algebrice a tensiunilor	18
1.4. Divizor de tensiune	19
1.5. Divizor de curent	20
1.6. Putere și energie	21
1.7. Calculul rezistenței echivalente	24
1.7.1. Calculul rezistenței echivalente pentru rezistențe conectate în serie	24
1.7.2. Calculul rezistenței echivalente pentru rezistențe conectate în paralel	24
1.7.3. Calculul conductanței echivalente pentru două rezistențe în serie	25
1.7.4. Calculul conductanței echivalente pentru două rezistențe în paralel	26
1.7.5. Conexiune mixtă de rezistențe (exemplu)	26
1.7.6. Conexiune de rezistențe cu trei terminale	27
1.8. Metode de rezolvare a circuitelor	34
1.8.1. Principiul superpoziției	34
1.8.2. Sistem de ecuații bazat pe legile lui Kirchhoff	34
1.8.3. Teorema lui Thèvenin – generatorul de tensiune echivalent	37
1.8.4. Teorema lui Norton – generatorul de curent echivalent	39
1.8.5. Teorema lui Millman	41
2. Probleme rezolvate	43
3. Probleme propuse	141
Rezumat	153
Despre autor	155

TABLE OF CONTENTS

1. Theoretical Foundations of Direct Current (DC) Circuits	11
1.1. Quantities	11
1.1.1. The Concept of Electric Current	11
1.1.2. The Concept of Electric Potential	12
1.1.3. The Concept of Electric Voltage	12
1.1.4. Lumped Parameter, Linear Direct Current Circuits	13
1.2. Fundamental Laws (Ohm's and Kirchhoff's Laws)	15
1.2.1. Ohm's Law	16
1.2.2. Kirchhoff's Current Law	16
1.2.3. Kirchhoff's Voltage Law	17
1.3. Potential Distribution along the Two-Terminal Networks	17
1.3.1. Ideal Voltage Generator	17
1.3.2. Ideal Resistor	18
1.3.3. The Method of Algebraic Summation of Voltages	18
1.4. Voltage Divider	19
1.5. Current Divider	20
1.6. Power and Energy	21
1.7. Calculation of Equivalent Resistances	24
1.7.1. Equivalent of Resistors in Series	24
1.7.2. Equivalent of Resistors in Parallel	24
1.7.3. Equivalent Conductance of Two Resistors in Series	25
1.7.4. Equivalent Conductance of Two Resistors in Parallel	26
1.7.5. Mixed Resistor Connections (Example)	26
1.7.6. Three-Terminal Resistor Connections	27
1.8. Circuit Analysis Methods	34
1.8.1. Superposition Principle	34
1.8.2. System of Equations based on Kirchhoff's Laws	34
1.8.3. Thèvenin's Theorem – The Equivalent Voltage Source Theorem	37
1.8.4. Norton's Theorem – The Equivalent Current Source Theorem	39
1.8.5. Millman's Theorem	41
2. Solved Problems	43
3. Recommended Problems	141
Abstract	154
About the Author	155

BEVEZETŐ

Húsz év villamosság-tan-oktatási tapasztalata áll ezen feladatgyűjtemény kidolgozása mögött, és tekintve azt, hogy az áramkörök tanulmányozása, módszerei szintjén már nem nagyon lehet újat alkotni, ennek a feladatgyűjteménynek az a célja, hogy a magyarázat és szemléltetés szintjén nyújtson valami újat.

Már elég rég elindult egy olyan folyamat, hogy a diákok a feladatmegoldást a megfelelő elméleti tudás hiányában vagy foghíjas tudássalal próbálják megtenni. Ezt húszévnnyi villamosság-tan-tanítás és sok száz diák vizsgáztatása mondhatja velem. Mivel azonban a tantárgy alapjai már nagyon régen le vannak fektetve, az elsajátításának módszerei sem változnak, marad a régi, jól bejáratott út, tehát meg kell érteni az elméletet, el kell sajátítani a törvényeket, meg kell érteni és tanulni a feladatmegoldási módszereket, majd pedig el kell mélyíteni a megfelelő gyakorlás útján.

A feladatgyűjtemény első fejezete céltudatosan foglalja össze mindazt az elmélettel kapcsolatos információt, amely az egyenáram- és az egyenáramú áramköri feladatok megoldásához technikai szinten szükséges anélkül, hogy részletes magyarázatokba bocsátkoznánk az elmélettel kapcsolatban. Természetesen ezeknek az információknak a döntő többsége sok más kiadványban is megtalálható.

A második fejezet részletes magyarázatokkal ellátott feladatmegoldásokat tartalmaz. Ezek a feladatmegoldások úgy vannak elkészítve, hogy tartalmazzák mindazokat az információkat, amelyek a mai szóhasználatnál élve „best practice”-nek („jó gyakorlat”-nak vagy „bevált gyakorlat”-nak) számítanak, tehát elmagyarázzák mindazt, amit érdemes tenni, és azt is, hogy hogyan érdemes azt tenni. A megfelelő helyeken a magyarázatok arra is kitérnek, hogy adott esetekben melyek azok a módszerek, illetve helyzetek, amikor egy adott módszer kiválasztása esetén nem érdemes végig megoldani a feladatot, azért, mert csak bonyolulttá teszi azt. Természetesen nem helytelen, ha valaki mégis egy ilyen rögzített utat választ a feladat megoldásához.

A harmadik fejezet ajánlott feladatokat tartalmaz sok-sok alpontra fűszerezve az áramkörök megoldási lehetőségeinek tekintetében. Ezekhez a feladatokhoz csak a megoldásból származó eredmények vannak csatolva, bízva abban, hogy az első fejezet elméleti anyagának elsajátítása, valamint a második fejezet részletes feladatmegoldásai megfelelő segítséget nyújtanak ezen feladatok megoldásához.

Ezúton szeretném kifejezni őszinte köszönetemet dr. Kelemen András kollégámnak a szakreferensként végzett lelkiismeretes, alapos és értékes munkájáért. Hozzájárulása – különösen a szakterületi javaslatai, észrevételei és a tartalom elkészítésének idején folytatott megbeszélések – jelentősen segítette a feladatgyűjtemény szakmai színvonalának emelését.

A szerző

AZ EGYENÁRAMÚ ÁRAMKÖRÖKRE VONATKOZÓ ELMÉLETI ALAPOK

1.1. Mennyiségek

Az áramkörökben kiszámítandó/mérendő mennyiségek az áramerősség, az elektromos potenciál, feszültség, teljesítmény, energia, illetve az áramköri elemek paraméterei, tehát az ellenállás, elektromotoros feszültség és belső ellenállás. Ahhoz, hogy megfelelően tudjunk értelmezni és megoldani áramkörökkel kapcsolatos feladatokat, feltétlenül szükséges az alábbi mennyiségek jelentéseinek megfelelő ismerete.

Azt is figyelembe kell venni, hogy az áramkörök nagyrészt fémes anyagokból készülnek, amelyekben az elmozdítható töltéshordozó az ún. vezetési elektron (más néven delokalizált vagy szabad elektron).

1.1.1. Az elektromos áram fogalma

Az *elektromos áram* definíciója:

- ▶ Az elektromos áram az elektromosan töltött részecskék rendezett mozgása.

Az elektromos áram erősségének definíciója:

- ▶ Az áramerősség a vezeték teljes keresztmetszetén egységnyi idő alatt rendezetten áthaladó töltésmennyiség:

$$I = \frac{dq}{dt} \quad 1.1-1.$$

Az áramerősség mértékegységének definíciója:

$$[I]_{SI} = \frac{[Q]_{SI}}{[t]_{SI}} = 1 \frac{C \text{ (Coulomb)}}{s \text{ (szekundum)}} = 1 \text{ A (Ampère)} \quad 1.1-2.$$

Az áramirány definíciója:

- ▶ Fizikai áramirány: az elektromos tér hatására elmozduló vezetési elektron elmozdulási iránya.
- ▶ Technikai áramirány: egy, a vezetőben elképzelt pozitív szabad töltéshordozó elektromos tér hatására történő elmozdulási iránya.
- ▶ Az áramkörök megoldásánál az áramkör ágaiban minden esetben technikai áramirányt feltételezünk!!!

1.1.2. Az elektromos potenciál fogalma

Az *elektromos potenciál* definíciója:

- Az elektromos potenciál az elektromos tér munkavégző képességét jellemzi.

Ha az elektromos tér elmozdít egy q töltésű szabad töltéshordozót a V_1 potenciállal jellemzett pontból a V_2 potenciállal jellemzett pontba, akkor az egységnyi elektromos töltésen végzett mechanikai munkát az 1.1-3. képlet adja meg. *Megjegyzés:* az 1.1-3. képlettel definiált egységnyi elektromos töltésre vonatkozó összefüggést a fizika tantárgyban szokványos potenciál tér részéről ható erő által végzett mechanikai munka definíciójának megfelelő előjelszabállyal adtuk meg!

$$\frac{L_{12}}{q} = -(V_2 - V_1) \quad 1.1-3.$$

Nagyon fontos kiemelni azt a tényt, hogy az elektromos tér potenciáljának értéke mindig egy referenciapontban felvett értékéhez viszonyítva adható meg. A referenciapotenenciál értéke tetszőlegesen választható meg, és nem befolyásolja a többi áramköri mennyiséget.

Abban az esetben, amikor a V_1 potenciállal jellemzett pontból az abszolút nulla potenciállal ($V_2 \equiv V_0 = 0$) rendelkező referenciapontba mozdtja el az elektromos tér a pozitív töltésű töltéshordozót, akkor az egységnyi elektromos töltésen végzett mechanikai munka megadja az illető pont elektromos potenciáljának értékét.

$$V_1 = \frac{L_{10}}{q} \quad 1.1-4.$$

Az elektromos potenciál mértékegységének a definíciója:

$$[V]_{SI} = \frac{[L]_{SI}}{[q]_{SI}} = 1 \frac{J \text{ (Joule)}}{C \text{ (Coulomb)}} = 1 \text{ V (Volt)} \quad 1.1-5.$$

1.1.3. Az elektromos feszültség fogalma

Az *elektromos feszültség* definíciója:

- Az elektromos feszültség az áramkör két pontja közötti potenciálkülönbség (1.1-6.). Nagyon fontos az, hogy a feszültség előjeles mennyiség. Az 1.1-6. összefüggésben megadott mennyiséget úgy nevezzük, hogy az „A” és a „B” pont közötti feszültség. Az összefüggésnek megfelelően ha $V_A > V_B$, akkor pozitív, ha viszont $V_A < V_B$, akkor negatív feszültségről van szó.

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad 1.1-6.$$

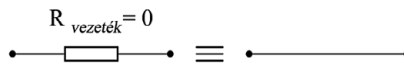
Az elektromos feszültség mértékegységének a definíciója:

$$[U]_{SI} = \frac{[L]_{SI}}{[q]_{SI}} = 1 \frac{J \text{ (Joule)}}{C \text{ (Coulomb)}} = 1 \text{ V (Volt)} \quad 1.1-7.$$

1.1.4. Koncentrált paraméterű, lineáris egyenáramú áramkörök

Ennek a feladatgyűjteménynek a célja a koncentrált paraméterű, lineáris, egyenáramú áramkörök megoldási módszereinek bemutatása, tanulmányozása. Nagyon fontos kiemelnünk azt a tényt, hogy amikor egyenáramú áramkör tanulmányozásáról/megoldásáról beszélünk, akkor minden esetben egy állapotot írunk le, amely állapotot stacionárius állapotnak nevezzük. A stacionárius állapot tulajdonképpen azt jelenti, hogy az áramkört jellemző bármely mennyiség értéke időben állandó és soha meg nem változik.

Koncentrált paraméterűnek nevezünk egy áramkört abban az esetben, amikor egymástól jól elkülöníthető áramköri elemek nulla ellenállású vezetékkel vannak egymáshoz csatlakoztatva, és nincs szerepe az áramköri elemek térbeli dimenziójának. A továbbiakban minden áramkörben, ahol vezeték van jelölve (1.1-1. ábra), egy $R_{\text{vezeték}} = 0$ ellenállású szakasszal van dolgunk, ahol a teljes szakaszra vonatkozóan ugyanaz az elektromos potenciál értéke – ekvipotenciális szakasz.

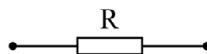


1.1-1. ábra

Kétpólusnak nevezünk minden olyan áramköri részt, amely a külső áramkörhöz két pontban csatlakozik. A továbbiakban tárgyalt áramköri elemek tulajdonképpen egyszerű kétpólusok.

A kétpólusokat két nagy csoportra oszthatjuk úgy, mint passzív és aktív kétpólusok. Az aktív kétpólusok termelik az elektromos energiát. Ha egy kétpólus csak elnyelni, tárolni vagy átengedni tud elektromos energiát, de termelni nem, azt passzív kétpólusnak nevezzük.

Az egyenáramú áramkörben előforduló passzív kétpólus az úgynevezett „ellenállás”, amely csak az energia elnyelésére képes. Ezt a továbbiakban ideális áramköri elemként fogjuk használni, ami azt jelenti, hogy kizárólag az *Ohm*-ban mért R ellenállásával fogjuk jellemezni (1.1-2. ábra). Abban az esetben, amikor az ellenálláson nem folyik át áram, ekvipotenciális áramköri elemként viselkedik, tehát mindkét bekötési pontjának ugyanaz az elektromos potenciálja.



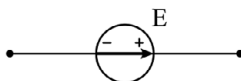
1.1-2. ábra

Meg kell jegyeznünk azt a tényt, hogy valós áramköri elemként az ellenállás rendelkezik induktivitással és kapacitással is, azonban a tárgyalásra kerülő jelenségkör esetében ezeknek a hatásait elhanyagolhatjuk.

Az aktív kétpólusok a feszültséggenerátorok, illetve az áramgenerátorok. Ezek lehetnek ideálisak vagy valóságok.

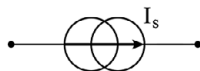
Az ideális generátorok minden esetben egyetlen paraméterrel jellemezhetők.

Ideális feszültséggenerátort kétpólusként az elektromotoros feszültségével jellemezzük, amelyet *Volt*-ban mérünk. Ez egy irányított mennyiség, mindig a generátor negatív (alacsony potenciálú) pólusától a pozitív (magas potenciálú) felé irányítjuk (1.1-3. ábra). A feszültséggenerátor jellemzője az, hogy a rajta átfolyó áram erősségétől függetlenül a pólusai közti feszültséget a generátor elektromotoros feszültsége határozza meg.



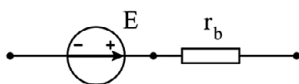
1.1-3. ábra

Az ideális áramgenerátort kétpólusként a forrásáramával jellemezzük, amelyet *Ampère*-ben mérünk. Mint minden áram, ez is irányítással rendelkezik (1.1-4. ábra). Az ilyen generátor jellemzője az, hogy a pólusai között megjelenő feszültségtől függetlenül fenntartja az általa előírt áram erősségét abban az áramköri ághban, amelybe be lett kötve.



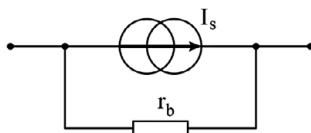
1.1-4. ábra

A valós feszültséggenerátort két paraméterrel jellemezzük, az egyik az ideális generátornál már megismert elektromotoros feszültség, a másik pedig a belső ellenállás. Áramköri szempontból a valós feszültséggenerátort összetett kétpólusként modellezzük úgy, mint egy ideális feszültséggenerátor és egy ideális ellenállás (belső ellenállás – r_b) soros kapcsolása (1.1-5. ábra).



1.1-5. ábra

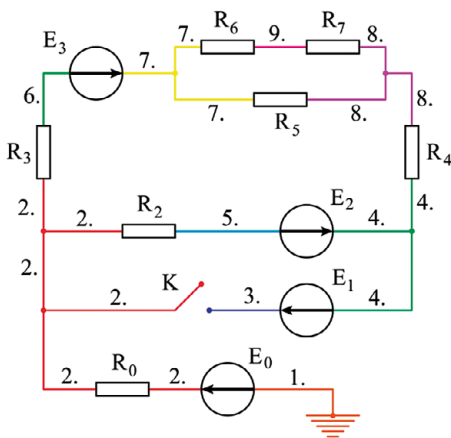
A valós áramgenerátort két paraméterrel jellemezzük, az egyik az ideális generátornál már megismert forrásáram, a másik pedig a belső ellenállás. Áramköri szempontból a valós áramgenerátort egy összetett kétpólusként modellezzük úgy, mint egy ideális áramgenerátor és egy ideális ellenállás (belső ellenállás – r_b) párhuzamos kapcsolása (1.1-6. ábra).



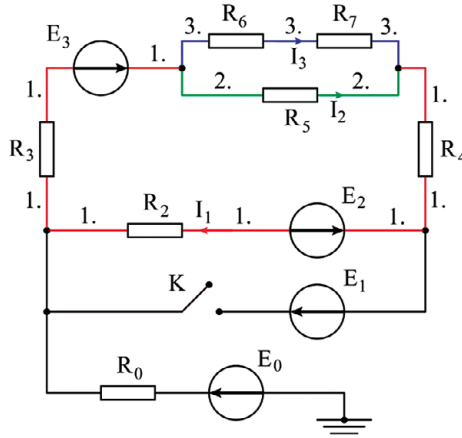
1.1-6. ábra

Az áramkört lineárisnak nevezzük abban az esetben, amikor az áramkörü elemekre vonatkozó feszültség-áram (vagy áram-feszültség) értékek lineáris függvénykapcsolatban állnak egymással.

Összefoglalásként a fenti információkat egy koncentrált paraméterű egyen-áramú példaáramkörben jelenítjük meg (1.1-7. ábra). Néhány kétpólust láthatunk vezetőekkel összekapcsolva, egy nyitott kapcsolót, illetve a referenciapotenciállal rendelkező pontként kiválasztott ponthoz csatlakozó áramkörü szakaszt. Az 1.1-7. ábrán 1-től 9-ig vannak számozva az azonos potenciálú (ekvipotenciális) áramkörü részek. Fontos megjegyezni azt, hogy egy ellenállás mindkét pólusa azonos potenciállal rendelkezik, ha nem folyik áram az ellenállást tartalmazó ágban (1.1-7. ábra, ld. 1.2.1. fejezet), illetve azt, hogy azonos számmal jelölt ágban ugyanaz az áram folyik (1.1-8. ábra, ld. 1.2.2. fejezet).



1.1-7. ábra



1.1-8. ábra

Az 1.1-8. ábra ugyanazt az áramkört szemlélteti, mint az 1.1-7. ábra, de ebben az esetben az áramkörben folyó áramokat jelöltük be (I_1 , I_2 és I_3).

1.2. Alapvető törvények (Ohm- és Kirchhoff-törvények)

Minél bonyolultabb egy áramkör felépítése, annál inkább szerteágazó a megoldási lehetőségek tárháza is. Ahhoz, hogy minél hatékonyabban oldjunk meg feladatokat, ismernünk kell a megoldási módszereket és fel kell ismernünk azt, hogy a kiválasztott megoldási módszer miként alkalmazható, miként vezet eredményre. Nagyon egyszerűen fogalmazva, ismernünk kell az eszközöket, tudnunk kell használni azokat, és fel kell ismernünk azt, hogy az adott feladat megoldásához melyik eszköz lehetne a leghatékonyabb. Ehhez természetesen elsősorban elméleti tudás, másodsorban gyakorlás szükséges, amely elvezet ahhoz, hogy

megfelelően ismerjük fel és mérjük fel a különböző lehetőségeket a feladatok megoldásában.

A lehető legegyszerűbb dolgunk akkor van, amikor nincs zárt áramkör (a gyakorlatban ez rengetegszer előfordul, mivel nagyon sok elektromos eszközünk folyamatosan készenléti (stand-by) állapotban van, ami azt jelenti, hogy feszültség alá vannak helyezve, és a működtetéshez csak arra van szükség, hogy egy megszakítót zárjunk (pl. televízió, kávéfőző, hajszárító stb.). Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban nevezzük ezeket zéró-hurok áramköröknek.

1.2.1. Ohm-törvény

Az Ohm-törvény egy empirikus (kísérleti) törvény, melyet az 1.2-1. egyenlet ad meg. A törvény kimondja, hogy egy adott ellenállás (mint áramköri elem) esetében az ellenállásra kapcsolt feszültség és az ellenálláson átfolyó áram erősségének aránya állandó, és ez az arányossági tényező nem más, mint az ellenállás, melynek mértékegysége az 1.2-2. által definiált *Ohm*.

$$R = \frac{U}{I} \quad 1.2-1.$$

$$[R]_{SI} = \frac{[U]_{SI}}{[I]_{SI}} = 1 \frac{V}{A} = 1 \Omega \text{ (Ohm)} \quad 1.2-2.$$

A fizikában fontos szerepe van az ellenállás reciproknak értékének is, amit vezetőképességnek nevezünk és az (1.2-3.) összefüggéssel definiáljuk.

$$G = \frac{1}{R} \quad 1.2-3.$$

$$[G]_{SI} = \frac{1}{[R]_{SI}} = 1 \Omega^{-1} = 1 S \text{ (Siemens)} \quad 1.2-4.$$

1.2.2. Kirchhoff I. törvénye – csomóponti törvény

A csomóponti törvényt az áramkörök megoldása szempontjából az áramkör egy adott csomópontjára (ágak találkozási/szétválási pontja) vonatkozó töltésmegmaradás törvény integrális alakjaként foghatjuk fel. A töltésmegmaradás törvénye kimondja azt, hogy egy csomópont esetében a csomópontba érkező és az abból távozó töltések száma megegyezik. A számítások elvégzésének szempontjából az áramokat előjellel látjuk el, pozitívnak tekintjük a kifolyó és negatívnak tekintjük a befolyó áramokat (ez egy adott konvenció, ennek a fordítottja is lehetséges). Ennek megfelelően a csomóponti törvény kimondja, hogy egy áramkör csomópontjában az áramok algebrai összege nulla (1.2-5.), vagy másképpen fogalmazva a csomópontba befolyó áramok összege megegyezik a csomópontból kifolyó áramok összegével. A képlet egy olyan csomópont esetére vonatkozik, amelyben n áramköri ág találkozik, és I_i az i -dik ágban folyó áram erőssége a fent definiált előjeles módon.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad 1.2-5.$$

1.2.3. Kirchhoff II. törvénye – huroktörvény

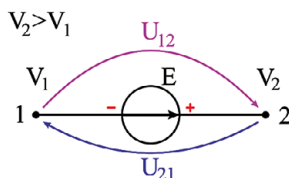
A huroktörvény értelmében egy áramkörben bármely zárt hurok esetében a hurok mentén fellépő feszültségek előjeles összege nulla (1.2-6.). Ez tulajdonképpen nem más, mint az elektromos tér örvénymentességének (vagy konzervativitásának) matematikailag könnyedén kezelhető makroszkopikus megfogalmazása. Az 1.2-6. egyenlet bal oldalán a generátorok elektromotoros feszültségeinek (röviden e.m.f.) algebrai összege látható, ahol egy e.m.f.-et pozitívnak tekintünk, ha a hurokban a körüljárási irány és az e.m.f. irányítása megegyezik, ellenkező esetben pedig negatívnak tekintjük. Az 1.2-6. egyenlet jobb oldalán a hurokban lévő ellenállásokra jutó feszültségek algebrai összege látható, ahol a feszültséget pozitívnak tekintjük, ha a hurokban a körüljárási irány megegyezik az ellenállást tartalmazó ágon feltételezett áram technikai irányával, ellenkező esetben pedig negatívnak tekintjük.

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{j=1}^m R_j I_j \quad 1.2-6.$$

1.3. Potenciálváltozás a kétpólusok mentén

1.3.1. Ideális feszültséggenerátor

Az ideális feszültséggenerátor belső ellenállása $R_b = 0$, így egyetlen jellemzője van, ami nem más, mint a *Volt*-ban mért e.m.f.-e, amelyet általában E -vel jelölünk. A feszültséggenerátor esetén mindig beszélhetünk egy alacsony potenciálú oldalról (kapocsnak, saroknak stb. nevezhetjük, és ezt jelöljük a (-) oldalnak), és egy magas potenciálú oldalról (ezt jelöljük a (+) oldalnak). Minden esetben ezekre úgy kell gondolnunk, hogy a (+) oldal mindig a (-)-hoz képest pozitív, tehát nem lesznek minden esetben abszolút értékben is (+)-ak vagy (-)-ak egy áramkör bármely pontjához képest. Mivel ezeket mindig egymáshoz kell viszonyítanunk, tulajdonképpen a feszültséget kell számolnunk. Ezt viszont kétféleképpen tehetjük, hiszen bármelyiket viszonyíthatjuk bármelyikhez. A viszonyítást az ábrákon egy irányított nyíllal végezzük (1.3-1. ábra), képletben pedig mindig a nyíl irányításának megfelelően vonjuk ki a potenciálokat egymásból (1.3-1. és 1.3-2.).



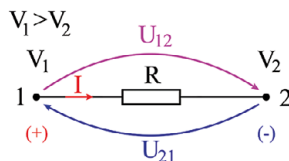
1.3-1. ábra

$$U_{21} = V_2 - V_1 = E \quad 1.3-1.$$

$$U_{12} = V_1 - V_2 = -(V_2 - V_1) = -E = -U_{21} \quad 1.3-2.$$

1.3.2. Ideális ellenállás

Az ideálisnak tekintett ellenállást (mint áramköri elemet) kizárólag az ohm-ban mért ellenállása jellemzi (jelölje R). Egy ellenállás esetében a két bekötési pont közötti áram létrejöttéért a feszültség (potenciálkülönbség) a felelős. Tehát ha nincs potenciálkülönbség, akkor nem folyik áram, ilyenkor az ellenállást ekvipotenciálisnak nevezzük. Minden más esetben az áram technikai irányának megfelelő irányban csökken az elektromos potenciál, és a potenciálkülönbség (feszültség) értékét az Ohm-törvény adja meg (1.2.1). Azonban itt is, mint a feszültséggenerátor esetében, a potenciálokat egymáshoz viszonyítjuk, és ugyanúgy előjeles feszültségeket írhatunk fel. A viszonyítást az ábrákon egy irányított nyíllal végezzük (1.3-2. ábra), képletben pedig mindig a nyíl irányításának megfelelően vonjuk ki a potenciálokat egymásból (1.3-3. és 1.3-4.).



1.3-2. ábra

$$U_{12} = V_1 - V_2 = IR \quad 1.3-3.$$

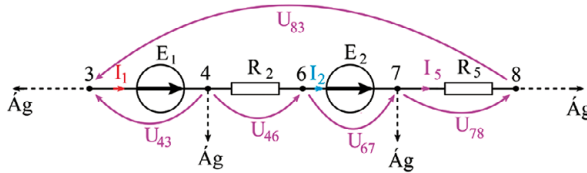
$$U_{21} = V_2 - V_1 = -(V_1 - V_2) = -(IR) = -U_{12} \quad 1.3-4.$$

1.3.3. A feszültségek algebrai összegzésének módszere

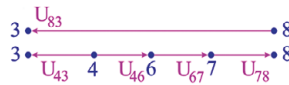
A feladatok megoldásánál nagyon fontos ez az egyszerű módszer, amely a potenciálok egymáshoz viszonyításánál, tehát a feszültségek kiszámításánál nyújt egyszerű és hatékony segítséget. Akkor van erre a módszerre nagy szükség, amikor a tanulmányozott áramköri szakasz több kétpólust is magába foglal, áramforrásokat különböző polaritásokkal, illetve ellenállásokat, amelyeken más és más áramok különböző irányba folynak. A módszer akkor is használható, ha

már ismertek az áramértékek és irányítások, illetve feszültségpolaritások, de akkor is, ha még a megoldás kezdeti szakaszában vagyunk, és minden mennyiség feltételezett polaritással és feltételezett áramirányítással rendelkezik.

Az 1.3-3. ábra egy zárt, stacionárius állapotban lévő egyenáramú áramkörből kiragadott részletet szemléltet. Mivel 4 és 6 csomópontok, az áramkörben az E_1 , E_2 , R_2 és R_5 -tel jelzett áramköri elemeken más áramok folynak. A cél az U_{83} feszültség kiszámítása, amelyhez már a megnevezéssel tulajdonképpen hozzá is rendeljük az ábrán látható irányítást. Az összegzésnél ezt az irányítást fogjuk a továbbiakban pozitívnak tekinteni. A 3 és 8 pontok között lévő kétpólusokon külön-külön tetszés szerinti feszültségirányításokat feltételezünk (1.3-3. ábra), majd „összeadunk” minden feszültséget, úgy, hogy az előzőleg kitűzött pozitív irányítással megegyező irányítású feszültségek pozitív, az azzal ellentétes irányítású feszültségek pedig negatív előjellel kerülnek az „összegzésbe” (1.3-4. ábra). Például az 1.3-5. egyenletben az U_{43} feszültség pozitív előjellel szerepel az egyenletben, mert megegyezik az U_{83} irányításával, az U_{46} , U_{67} és U_{78} feszültségek pedig negatív előjellel szerepelnek az egyenletben, mert ellentétesek az U_{83} irányításával.



1.3-3. ábra



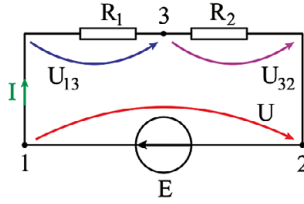
1.3-4. ábra

$$U_{83} = U_{43} - U_{46} - U_{67} - U_{78} \quad 1.3-5.$$

Megjegyzés: az 1.3-5. egyenletben lévő feszültségek előjeles mennyiségek, amelyeket az 1.3. fejezetben leírt szabályok szerint számolunk ki.

1.4. Feszültségosztó

Két ellenállás (kétpólus) soros kapcsolása egy ún. feszültségosztót alkot (1.4-1. ábra), amely a feszültséggenerátor által biztosított feszültséget ($U = E$) leosztja két feszültség összegére. A leosztásból származó feszültségek a huroktörvényből (1.2.3) kiszámítható áram felhasználásával (1.4-2.), az ellenállásokra felírt Ohm-törvényekből (1.2.1), az 1.4-3. és 1.4-4. egyenletekkel adhatók meg.



1.4-1. ábra

$$U = E = U_{13} + U_{32} = I(R_1 + R_2) \quad 1.4-1.$$

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} \quad 1.4-2.$$

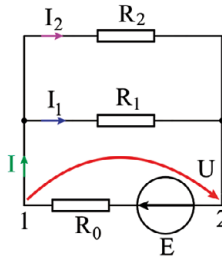
Feszültségosztó-képletek:

$$U_{13} = IR_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U \quad 1.4-3.$$

$$U_{32} = IR_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U \quad 1.4-4.$$

1.5. Áramosztó

Két ellenállás (kétpólus) párhuzamos kapcsolása egy ún. áramosztót alkot (1.5-1. ábra), amely az E elektromotoros feszültséggel rendelkező generátor által a főágban létrehozott I áramot leosztja két különböző ágba folyó áramra. Az áram leosztásából származó áramok a csomóponti törvényből (1.2-5.) és a huroktörvényből (1.2-6.) számíthatók ki, és az 1.5-1., 1.5-2., 1.5-3. és 1.5-4. egyenletekkel adhatók meg.



1.5-1. ábra

$$I = I_1 + I_2 \quad 1.5-1.$$

$$U = I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad \rightarrow \quad I_2 = I_1 \frac{R_1}{R_2} \quad 1.5-2.$$

Áramosztó-képletek:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad 1.5-3.$$

$$I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad 1.5-4.$$

1.6. Teljesítmény és energia

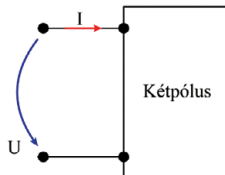
Az elektromos teljesítményt definíció szerint a kétpóluson lévő feszültség és a kétpólust tartalmazó ágba folyó áram szorzata (1.6-1.), az energiát pedig az időtartam (Δt) és teljesítmény (P) közötti szorzat adja meg (1.6-2.).

$$P = UI \quad 1.6-1.$$

$$Q = P\Delta t \quad 1.6-2.$$

Az energiamegmaradás univerzális törvénye az áramkörökre is érvényes, ami azt jelenti, hogy vannak energiát generáló (termelő) és fogyasztó kétpólusok, a generált és a fogyasztott energiamennyiség pedig mindig egyenlő kell legyen egymással. Mivel az áramkör működtetésekor a generált és a fogyasztott energiák mindig ugyanarra a Δt időtartamra vonatkoznak, a számítások elvégzéséhez elegendő az egységnyi időtartamra vonatkoztatott energiával számolnunk, ami természetesen nem más, mint a teljesítmény. Ennek megfelelően jelenthetjük ki, hogy az áramkörben vannak generált és fogyasztott teljesítmények. A továbbiakban ezekkel a mennyiségekkel dolgozunk.

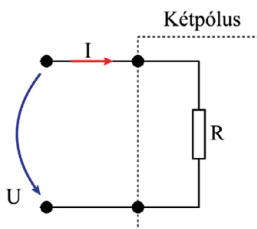
Mivel mind az áram, mind a feszültség irányított (előjeles) mennyiségek, fontos az, hogy e két mennyiség egymáshoz viszonyítva milyen irányítású. Az 1.6-1. ábra egy kétpólust mutat be, amelyen feltüntettük a feszültséget és az áramot is. Az áram és a feszültség irányításának jelölése az ún. fogyasztói konvenció szerint történt, ami azt jelenti, hogy az áram és a feszültség szorzata a kétpólus által elfogyasztott (felvett) teljesítményt jelenti. Természetesen nem feledkezhetünk meg arról sem, hogy a feltüntetett irányítások esetén is lehetséges az, hogy a mennyiségek pozitív vagy negatív értékkel rendelkezzenek.



1.6-1. ábra

Egy passzív áramköri elem, esetünkben egy ellenállás, kizárólag energiafogyasztó lehet, és ez adja az alapot az ún. fogyasztói konvenció bevezetéséhez. Az

1.6-2. ábra az 1.6-1. ábra által szemléltetett fogyasztói konvenciónak megfelelően egy ellenállást szemléltet a pólusain lévő feszültséggel és a rajta átfolyó árammal. Az ellenállás esetében két lehetőség van az előjeleket illetően, vagy mindkét mennyiség pozitív, vagy pedig negatív, ezért a szorzatuk (1.6-1.), tehát a teljesítmény is pozitív. Ennek megfelelően a fogyasztói konvencióban a fogyasztott teljesítmény/energia pozitív előjelű.



1.6-2. ábra

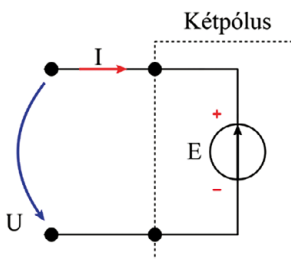
Az Ohm-törvényből kifejezett áram vagy feszültség segítségével a teljesítményt az 1.6-3., a fogyasztott energiát pedig az 1.6-5. képlettel számolhatjuk ki.

$$P_R^{(fogy.konv)} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} > 0 \quad 1.6-3.$$

$$P_R^{(fogy.konv)} \equiv P_{fogy} \quad 1.6-4.$$

$$Q_{fogy} = P_{fogy} \Delta t = UI \Delta t = I^2 R \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t \quad 1.6-5.$$

Az 1.6-3. ábra az 1.6-1. ábra által szemléltetett fogyasztói konvenciónak megfelelően egy feszültséggenerátort szemléltet a pólusain lévő feszültséggel és a rajta átfolyó árammal. Az ábra szerint a feszültség pozitív értékű, de az áram folyhat az ábra szerinti irányban, és ekkor az értéke pozitív, de azzal ellentétesen is, és ekkor az értéke negatív. Ennek megfelelően az 1.6-1. egyenlet által definiált teljesítmény felvehet pozitív, illetve negatív értéket is.



1.6-3. ábra

Ha az áram értéke pozitív ($I > 0$), akkor a teljesítmény értéke pozitív, ami a fogyasztói konvencióban megfelelően felvett (elfogyasztott) teljesítményt jelent

(1.6-6.). Ez megfelel annak a ténynek is, hogy ebben az esetben az áram iránya ellentétes azzal az áramiránnyal, amit egy feszültséggenerátor tud létrehozni. A fogyasztott elektromos energiát az 1.6-8. egyenlet adja meg.

$$P_E^{(fogy.konv)} = UI = EI > 0 \quad 1.6-6.$$

$$P_E^{(fogy.konv)} \equiv P_{fogy} \quad 1.6-7.$$

$$Q_{fogy} = P_{fogy}\Delta t = UI\Delta t = EI\Delta t \quad 1.6-8.$$

Ha az áram értéke negatív ($I < 0$), akkor a teljesítmény értéke negatív, ami a fogyasztói konvenciónak megfelelően azt jelenti, hogy a fogyasztott teljesítmény negatív, vagyis a generátor nem fogyaszt, hanem generál teljesítményt. Ez megfelel annak a ténynek is, hogy az áram iránya ebben az esetben megegyezik azzal az áramiránnyal, amit egy feszültséggenerátor tud létrehozni. Az elfogyasztott teljesítményt az 1.6-9. egyenlettel számíthatjuk ki (továbbra is figyelembe kell venni, hogy a fogyasztói konvenció szerint a negatív fogyasztott teljesítmény generált teljesítményt jelent), és ennek a modulusza a generált teljesítményt jelenti (1.6-10.). A generált elektromos energiát az 1.6-11. egyenlet adja meg.

$$P_E^{(fogy.konv)} = UI = EI < 0 \quad 1.6-9.$$

$$\left| P_E^{(fogy.konv)} \right| \equiv P_{gen} \quad 1.6-10.$$

$$Q_{gen} = P_{gen}\Delta t = UI\Delta t = EI\Delta t \quad 1.6-11.$$

Ahogy az előzőekben láttuk, a teljesítmény hasznos eszköz a számítások elvégzéséhez, de a valóságban az energia a legfontosabb mennyiség. Mivel az energiamegmaradás törvénye érvényes kell legyen, így a generált és a fogyasztott energiák mindig egyenlők kell legyenek egymással. Az energiamegmaradás törvénye az 1.6-12. egyenlettel adható meg.

$$Q_{gen} = Q_{fogy} \quad 1.6-12.$$

Az 1.6-2. definíciónak megfelelően átírjuk az 1.6-12. egyenletet a teljesítmények függvényében, és egyszerűsítjük az egyenletet az időtartammal, így megkapjuk a teljesítménymegmaradás egyenletét (1.6-13.).

$$P_{gen} = P_{fogy} \quad 1.6-13.$$

Az áramkörök esetében is szükséges definiálni a hatásfokot, amely megegyezik a hasznos és a befektetett és energiák/teljesítmények arányával (1.6-14.).

$$\eta = \frac{P_{haszn.}}{P_{befekt.}} \quad 1.6-14.$$

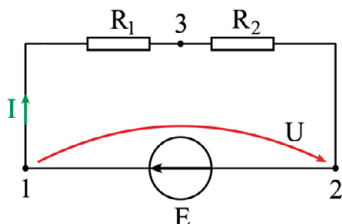
1.7. Ekvivalens ellenállás számítása

Egy ellenállás-kapcsolás esetén definiálhatunk egy ekvivalens helyettesítő ellenállást úgy, hogy az eredeti ellenállás-kapcsolás és az ekvivalens ellenállás ugyanarra a feszültséggenerátorra kapcsolva ugyanazt az áramot veszi fel.

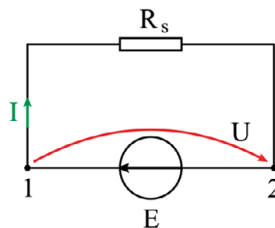
A legegyszerűbb az a két eset, amikor két (vagy több) ellenállás sorosan (1.7.1. fejezet) vagy párhuzamosan (1.7.2. fejezet) van kapcsolva egymással, és egy-egy ekvivalens eredő ellenállással helyettesíthetjük a kapcsolásukat. Ha a soros és párhuzamos kapcsolások egyszerre jelen vannak egy ellenállás-kapcsolásban, akkor vegyes kapcsolásról beszélünk (1.7.3. fejezet). Ebben az esetben is egy eredő ellenállással helyettesíthetjük a vegyes ellenállás-kapcsolást.

1.7.1. Sorba kapcsolt ellenállások eredőjének kiszámítása

Az ekvivalens ellenállás definíciójának megfelelően, az 1.7-1. ábra által szemléltetett áramkörrel akkor lehet ekvivalens az 1.7-2. ábra által szemléltetett áramkör, ha a fogyasztók mindkét áramkörben ugyanazt az áramot veszik fel a feszültségforrástól (1.7-1.). Ennek megfelelően a két sorba kapcsolt ellenállás helyettesíthető egy ellenállással, amit eredő ellenállásnak nevezünk, és a jelölése R_s . Az eredő ellenállást az 1.7-2. egyenlettel számíthatjuk ki.



1.7-1. ábra



1.7-2. ábra

$$U = I(R_1 + R_2) = IR_s \quad 1.7-1.$$

$$R_s = R_1 + R_2 \quad 1.7-2.$$

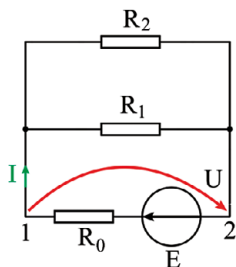
Az 1.7-2. összefüggést általánosíthatjuk n darab sorba kapcsolt ellenállás esetére az 1.7-3. egyenlettel.

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad 1.7-3.$$

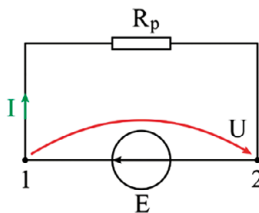
1.7.2. Párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjének kiszámítása

Az 1.7.1. fejezetben leírtakhoz hasonlóan, az 1.7-3. ábra által szemléltetett áramkörrel akkor lehet ekvivalens az 1.7-6. ábra által szemléltetett áramkör, ha a

fogyasztók mindkét áramkörben ugyanazt az áramot veszik fel a feszültségforrástól (1.7-4.). Ennek megfelelően a két párhuzamosan kapcsolt ellenállás helyettesíthető egy ellenállással, amit eredő ellenállásnak nevezünk, és a jelölése R_p . Az eredő ellenállást az 1.7-5. egyenlettel számíthatjuk ki.



1.7-3. ábra



1.7-4. ábra

$$\frac{U}{R_p} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} \quad 1.7-4.$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad 1.7-5.$$

Hozzuk közös nevezőre az 1.7-5. összefüggést, és fejezzük ki az R_p eredő ellenállást. Az összefüggésben szokás egy rövidített, kifejező írásmódot használni a két párhuzamosan kapcsolt ellenállás szemléletes megjelenítésére. Ezt egy „ $\times$ ”-szel jelzett művelettel szokás megjeleníteni, amit „replusz” műveletnek nevezünk (1.7-6.). Minden esetben a „replusz” művelet azt jelenti, hogy a két ellenállást összeszorozzuk egymással, majd elosztjuk ezt a két ellenállás összegével (megjegyzés: hasonlóképpen alkalmazható a művelet más típusú mennyiségekkel is, pl. vezetőképességekkel vagy kapacitásokkal stb.).

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \times R_2 \quad 1.7-6.$$

Az 1.7-5. összefüggést általánosíthatjuk n darab párhuzamosan kapcsolt ellenállás esetére az 1.7-7. egyenlettel.

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} \quad 1.7-7.$$

1.7.3. Két sorba kapcsolt ellenállás ekvivalens vezetőképességének kiszámítása

A számítások elvégzésének szempontjából sok esetben előnyös az, ha az eredő ellenállást az ekvivalens vezetőképességen keresztül számítjuk ki. Ehhez az 1.7-2. egyenletben az egyes ellenállásokat, beleértve a soros kapcsolás eredő

ellenállását is, az 1.2-4. összefüggés szerint, a megfelelő vezetőképességekkel fejezzük ki (1.7-8.). Elvégezve a közös nevezőre hozást az egyenletben, kifejezhetjük a sorba kapcsolt ellenállások ekvivalens vezetőképességét, amelyet szintén megadhatunk a „replusz” művelettel (1.7-9.).

$$R_s = \frac{1}{G_s} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} \quad 1.7-8.$$

$$G_s = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} = G_1 \times G_2 \quad 1.7-9.$$

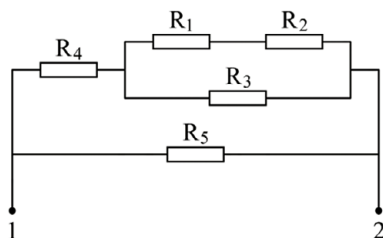
1.7.4. Két párhuzamosan kapcsolt ellenállás ekvivalens vezetőképességének kiszámítása

Az 1.7.3. fejezetben leírtaknak megfelelően két párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredőjét is kiszámíthatjuk az ekvivalens vezetőképességen keresztül. Ehhez az 1.7-5. egyenletben az egyes ellenállásokat, beleértve a párhuzamos kapcsolás eredő ellenállását is, az 1.2-4. összefüggés szerint, a megfelelő vezetőképességekkel fejezzük ki (1.7-10.).

$$\frac{1}{R_p} = G_p = G_1 + G_2 \quad 1.7-10.$$

1.7.5. Ellenállások vegyes kapcsolása (példa)

Minél nagyobb az ellenállás-kapcsolásban felhasználható ellenállások száma, annál nagyobb a variációs lehetőség ahhoz, hogy vegyes kapcsolásokat hozzunk létre. Az 1.7-5. ábra egy olyan példát szemléltet, ahol öt ellenállásból hoztunk létre egy vegyes kapcsolást. Megfigyelhető az ábrán, hogy az R_1 és az R_2 sorba van kapcsolva, az eredőjük párhuzamosan van kapcsolva az R_3 ellenállással, majd ennek a három ellenállásnak az eredője sorba van kapcsolva az R_4 ellenállással, és végül ennek a négy ellenállásnak az eredője párhuzamosan van kapcsolva az R_5 ellenállással. Legyen R_{12} a helyettesítő eredő ellenállás az 1–2 pontokra vonatkozóan, amelyet a rövidített írásmóddal az 1.7-11. összefüggés, kifejtve pedig az 1.7-12. összefüggés határoz meg.



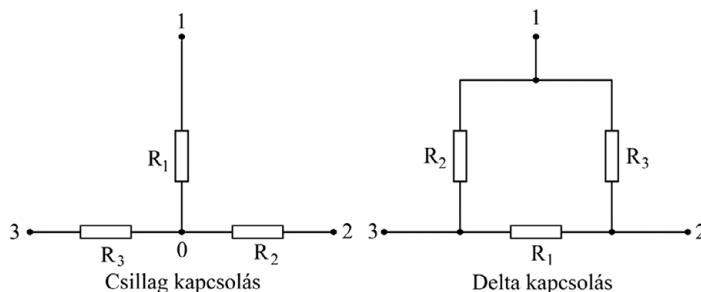
1.7-5. ábra

$$R_{12} = \{[(R_1 + R_2) \times R_3] + R_4\} \times R_5 \quad 1.7-11.$$

$$R_{12} = \frac{\left[\frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 \right] R_5}{\frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 + R_5} \quad 1.7-12.$$

1.7.6. Ellenállások hárompólusú kapcsolása

Nem minden esetben lehet alkalmazni ellenállások eredőjének számítására a sorosan és/vagy párhuzamosan kapcsolt ellenállásokra vonatkozó képleteket, mivel ezen egyszerű kapcsolásokon kívül léteznek bonyolultabbak is. Ilyenek azok az esetek, amikor három ellenállás van egymással összekapcsolva úgy, hogy három póluson keresztül legyenek az áramkörhöz kapcsolva. Ezeket az ellenállás-kapcsolásokat már nem lehet egy eredő ellenállással helyettesíteni, így valamilyen más úton kell egy ekvivalens ellenállás-kapcsolást létrehozni. Ilyen a csillag vagy delta (háromszög) (1.7-6. ábra) alakzatba kapcsolt ellenállások esete. Ezekben az esetekben a csillag alakzatba kapcsolt ellenállásokat helyettesíthetjük delta alakzatba kapcsolt ekvivalens ellenállásokkal vagy fordítva, és reménykedhetünk, hogy a számításaink eredményeként kapott ellenállás-kapcsolás eredő ellenállása már kiszámítható a soros és/vagy párhuzamos ellenállásokra vonatkozó képletekkel. **Figyelem:** nem biztos, hogy egy ekvivalens átalakítás megoldja a problémát, néha szükséges lehet újabb ekvivalens átalakítás elvégzése!!!



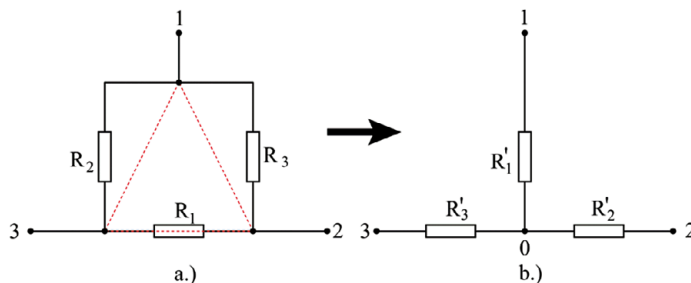
1.7-6. ábra

1.7.6.1. Delta–csillag átalakítás

A Delta–csillag átalakítás (vagy Háromszög–csillag) esetében a delta alakzatba kapcsolt ellenállásokat (1.7-7. ábra, R_1, R_2, R_3) csillag alakzatba kapcsolt ellenállásokkal helyettesítjük (1.7-7. ábra, R'_1, R'_2, R'_3). **Figyelem:** minden esetben más értékű ellenállások szerepelnek az egyik, illetve a másik alakzatban, ezért már a jelölésük is más!!!

Annak érdekében, hogy az átszámítás során egyszerűen megjegyezhető és alkalmazható képleteket kapjunk, szükséges egy következetes jelölésrendszer bevezetése. A következő jelöléseket ajánlott betartani:

- » a delta alakzatban az 1, 2 és 3 csatlakozási pontokkal szemben levő oldalra helyezzük el a megfelelő jelölésű ellenállásokat, tehát az 1-es ponttal szemben levő oldalon az R_1 , a 2-vel szemben levő oldalon az R_2 és a 3-mal szemben levő oldalon az R_3 ellenállás legyen elhelyezve (1.7-7. ábra, a.),
- » a csillag alakzatban az 1, 2 és 3 csatlakozási pontokat tartalmazó ágakban helyezzük el a megfelelő ellenállásokat, tehát az 1-es pont ágában az R'_1 , a 2-es ágában az R'_2 és a 3-as ágában az R'_3 ellenállás legyen elhelyezve (1.7-7. ábra, b.).

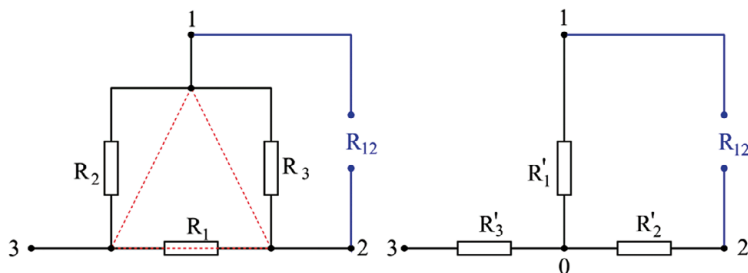


1.7-7. ábra

Az ekvivalens ellenállások számítása

Az ekvivalens ellenállások értékének kiszámításához egy egyenletrendszert írunk fel, amit meg kell oldani. Az egyenletrendszert ekvivalens ellenállás számítások során úgy írjuk fel, hogy két-két pont között ellenállást mérünk/számolunk a delta, majd a csillag alakzatban.

- » az R_{12} ellenállást úgy számítjuk ki, hogy a 3-as pont a levegőben található (nem csatlakozik sehova sem, 1.7-8. ábra)
 - a delta alakzatban az R_1 és az R_2 sorba vannak kapcsolva, míg az eredőjük az R_3 -mal párhuzamosan (1.7-13.),
 - a csillag alakzatban az R'_1 és az R'_2 sorba vannak kapcsolva (1.7-13.),
 - az így számolt R_{12} ellenállások egyenlők kell legyenek (1.7-16.).



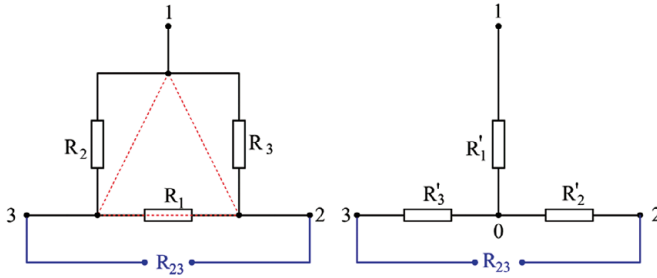
1.7-8. ábra

$$R_{12} = (R_1 + R_2) \times R_3$$

$$R_{12} = R'_1 + R'_2$$

1.7-13.

- » az R_{23} ellenállást úgy számítjuk ki, hogy az 1-es pont a levegőben található (nem csatlakozik sehova sem, 1.7-9. ábra)
- a delta alakzatban az R_2 és az R_3 sorba vannak kapcsolva, míg az eredőjük az R_1 -gyel párhuzamosan (1.7-14.),
 - a csillag alakzatban az R'_1 és az R'_2 sorba vannak kapcsolva (1.7-14.),
 - az így számolt R_{23} ellenállások egyenlők kell legyenek (1.7-17.).



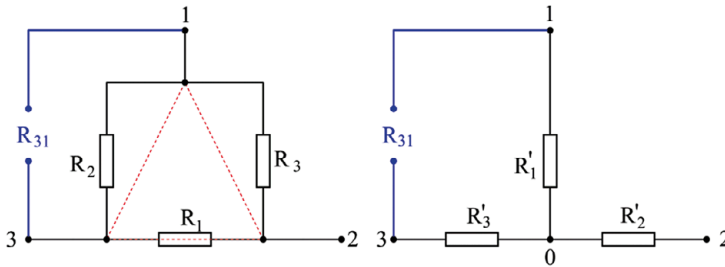
1.7-9. ábra

$$R_{23} = (R_2 + R_3) \times R_1$$

$$R_{23} = R'_3 + R'_2$$

1.7-14.

- » az R_{31} ellenállást úgy számítjuk ki, hogy a 2-es pont a levegőben található (nem csatlakozik sehova sem, 1.7-10. ábra)
- a delta alakzatban az R_1 és az R_3 sorba vannak kapcsolva, míg az eredőjük az R_2 -vel párhuzamosan (1.7-15.),
 - a csillag alakzatban az R'_3 és az R'_1 sorba vannak kapcsolva (1.7-15.),
 - az így számolt R_{31} ellenállások egyenlők kell legyenek (1.7-18.).



1.7-10. ábra

$$R_{31} = (R_1 + R_3) \times R_2$$

$$R_{31} = R'_1 + R'_3$$

1.7-15.

Az 1.7-16., 1.7-17. és 1.7-18. egyenletekből álló egyenletrendszer megoldva megkapjuk az ekvivalens csillag alakzat ellenállásainak értékét. Az egyszerű megoldás érdekében észrevehetjük azt a tényt, hogy ha az 1.7-16. egyenlethez hozzáadjuk az 1.7-18. egyenletet, és ezekből kivonjuk az 1.7-17. egyenletet, majd elosztjuk az eredményt 2-vel, akkor R'_1 -t nyerjük (1.7-19.). Bevezetjük az R_Δ jelöl-

lést az 1.7-19. egyenlet nevezőjét illetően (1.7-20.), és átírjuk az R'_1 -re vonatkozó képletet (1.7-21.), majd pedig hasonló módszerrel kiszámítjuk az R'_2 (1.7-21.) és R'_3 (1.7-21.) ellenállásokat. **Megjegyzés:** ha betartjuk a jelöléseket, akkor elegendő megjegyezni az R'_1 -re vonatkozó (1.7-21.) képletet, majd permutálni az 1, 2, 3 indexeket, hogy megkapjuk az R'_2 és R'_3 -ra vonatkozó képleteket.

$$\frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = R'_1 + R'_2 \quad 1.7-16.$$

$$\frac{(R_2 + R_3)R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = R'_3 + R'_2 \quad 1.7-17.$$

$$\frac{(R_1 + R_3)R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = R'_1 + R'_3 \quad 1.7-18.$$

$$R'_1 = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \quad 1.7-19.$$

$$R_\Delta = R_1 + R_2 + R_3 \quad 1.7-20.$$

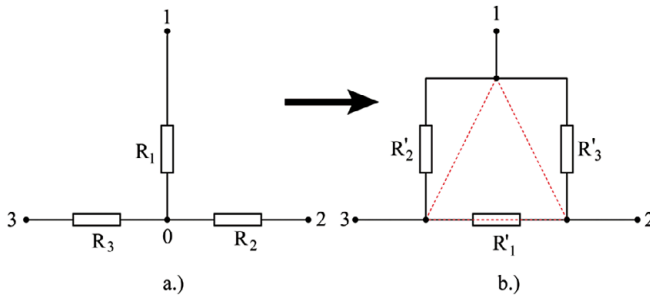
$$R'_1 = \frac{R_2 R_3}{R_\Delta} \quad R'_2 = \frac{R_1 R_3}{R_\Delta} \quad R'_3 = \frac{R_1 R_2}{R_\Delta} \quad 1.7-21.$$

1.7.6.2. Csillag–delta átalakítás

A *Csillag–delta* átalakítás (vagy *Csillag–háromszög*) esetében a csillag alakzatba kapcsolt ellenállásokat (1.7-11. ábra, R_1 , R_2 , R_3) delta alakzatba kapcsolt ellenállásokkal helyettesítjük (1.7-11. ábra, R'_1 , R'_2 , R'_3). **Figyelem:** minden esetben más értékű ellenállások szerepelnek az egyik, illetve a másik alakzatban, ezért már a jelölésük is más!!!

Annak érdekében, hogy az átszámítás során egyszerűen megjegyezhető és alkalmazható képleteket kapjunk, szükséges egy következetes jelölésrendszer bevezetése. A következő jelöléseket ajánlott betartani:

- » a csillag alakzatban az 1, 2 és 3 csatlakozási pontokat tartalmazó ágakban helyezzük el a megfelelő ellenállásokat, tehát az 1-es pont ágában az R_1 , a 2-es ágában az R_2 és a 3-as ágában az R_3 ellenállás legyen elhelyezve (1.7-11. ábra, a.).
- » a delta alakzatban az 1, 2 és 3 csatlakozási pontokkal szemben levő oldalra helyezzük el a megfelelő jelölésű ellenállásokat, tehát az 1-es ponttal szemben levő oldalon az R'_1 , a 2-vel szemben levő oldalon az R'_2 és a 3-mal szemben levő oldalon az R'_3 ellenállás legyen elhelyezve (1.7-11. ábra, b.).

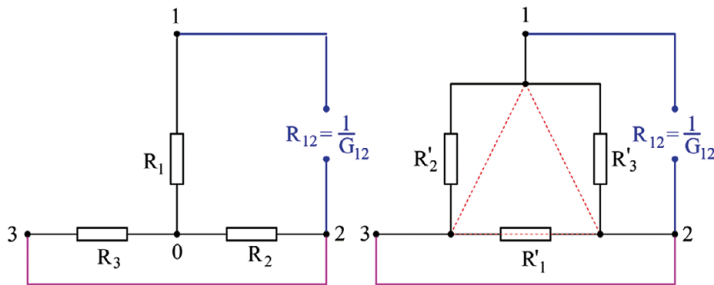


1.7-11. ábra

Az ekvivalens ellenállások és vezetőképességek számítása

Az ekvivalens ellenállások kiszámításához ismét egy egyenletrendszer írunk fel, amelyben az eredő ellenállásokat a megfelelő két-két pont között számítjuk ki a csillag, majd a delta alakzatban. Annak érdekében, hogy delta-csillag átalakításnál levezetett képletekkel azonos alakú eredményt kapjunk, ebben az esetben úgy járunk el, hogy az alakzatokban két pontot rövidre zárunk, majd a szabadon megmaradt két pont között számoljuk az ellenállásokat (1.7-12. ábra, 1.7-13. ábra és 1.7-14. ábra).

- » az R_{12} ellenállásokat úgy számítjuk ki, hogy a 2-es és 3-as pontokat rövidre zárjuk, majd az 1-es és 2-es pontok között kiszámítjuk az eredő ellenállást (1.7-12. ábra)
 - a csillag alakzatban az R_2 és az R_3 párhuzamosan vannak kapcsolva, míg az eredőjük az R_1 -gyel sorosan (1.7-22.),
 - a delta alakzatban az R'_2 és az R'_3 párhuzamosan vannak kapcsolva (1.7-22.),
 - az így számolt R_{12} ellenállások egyenlők kell legyenek (1.7-29.).



1.7-12. ábra

$$R_{12} = (R_2 \times R_3) + R_1$$

$$R_{12} = R'_2 \times R'_3$$

1.7-22.

A továbbiakban nem ellenállásokkal, hanem a megfelelő vezetőképességekkel végezzük el a számításokat (1.7-23.).

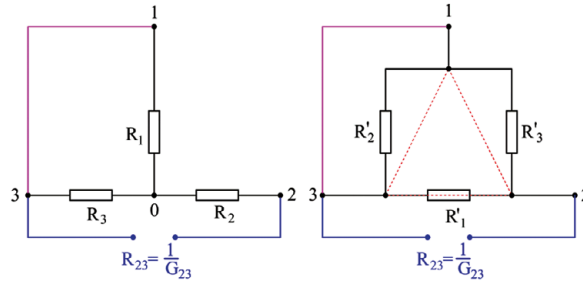
$$G_1 = \frac{1}{R_1} \qquad G_2 = \frac{1}{R_2} \qquad G_3 = \frac{1}{R_3} \qquad 1.7-23.$$

Az 1.7-22. egyenletekben lévő ellenállásokat a továbbiakban az ekvivalens vezetőképességek segítségével számítjuk ki. Figyelembe véve azt, hogy két sorosan kapcsolt ellenállás ekvivalens vezetőképességét az 1.7-9. egyenlettel, és két párhuzamosan kapcsolt ellenállás ekvivalens vezetőképességét az 1.7-10. egyenlettel számíthatjuk ki, az 1.7-22. egyenletekkel számolt ellenállások az 1.7-24. formában írhatók fel a vezetőképességek függvényében.

$$\frac{1}{R_{12}} = G_{12} = (G_2 + G_3) \times G_1 \qquad \frac{1}{R_{12}} = G_{12} = G'_2 + G'_3 \qquad 1.7-24.$$

» az R_{23} ellenállásokat úgy számítjuk ki, hogy az 1-es és 3-as pontokat rövidre zárjuk, majd a 3-as és 2-es pontok között kiszámítjuk az ellenállást (1.7-13. ábra)

- a csillag alakzatban az R_1 és az R_3 párhuzamosan vannak kapcsolva, míg az eredőjük az R_2 -vel sorosan (1.7-25.),
- a delta alakzatban az R'_1 és az R'_3 párhuzamosan vannak kapcsolva (1.7-25.),
- az így számolt R_{23} ellenállások egyenlők kell legyenek (1.7-30.).



1.7-13. ábra

$$R_{23} = (R_1 \times R_3) + R_2 \qquad R_{23} = R'_1 \times R'_3 \qquad 1.7-25.$$

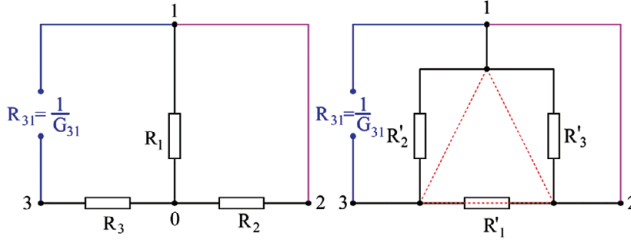
Az R_{12} számításához hasonlóan, itt is áttérünk az ekvivalens vezetőképességekre (1.7-26.).

$$\frac{1}{R_{23}} = G_{23} = (G_1 + G_3) \times G_2 \qquad \frac{1}{R_{23}} = G_{23} = G'_1 + G'_3 \qquad 1.7-26.$$

» az R_{31} ellenállásokat úgy számítjuk ki, hogy az 1-es és 2-es pontokat rövidre zárjuk, majd a 3-as és 1-es pontok között kiszámítjuk az ellenállást (1.7-14. ábra)

- a csillag alakzatban az R_1 és az R_2 párhuzamosan vannak kapcsolva, míg az eredőjük az R_3 -mal sorosan (1.7-27.),

- a delta alakzatban az R'_1 és az R'_2 párhuzamosan vannak kapcsolva (1.7-27.),
- az így számolt R_{31} ellenállások egyenlők kell legyenek (1.7-31.).



1.7-14. ábra

$$R_{31} = (R_1 \times R_2) + R_3 \qquad R_{31} = R'_1 \times R'_2 \qquad 1.7-27.$$

Az R_{12} számításához hasonlóan, itt is áttérünk az ekvivalens vezetőképességekre (1.7-28.).

$$\frac{1}{R_{31}} = G_{31} = (G_1 + G_2) \times G_3 \qquad \frac{1}{R_{31}} = G_{31} = G'_1 + G'_2 \qquad 1.7-28.$$

Az 1.7-29., 1.7-30. és 1.7-31. egyenletekből álló egyenletrendszert megoldva megkapjuk az ekvivalens delta alakzat vezetőképességeinek értékét. Az egyszerű megoldás érdekében észrevehetjük azt a tényt, hogy ha az 1.7-30. egyenlethez hozzáadjuk az 1.7-31. egyenletet, és ezekből kivonjuk az 1.7-29. egyenletet, majd elosztjuk az eredményt 2-vel, akkor G'_1 -et nyerjük (1.7-32.). Bevezetjük a G'_λ jelölést az 1.7-32. egyenlet nevezőjét illetően (1.7-33.), és átírjuk a G'_1 -re vonatkozó képletet (1.7-34.), majd pedig hasonló módszerrel kiszámítjuk a G'_2 (1.7-34.) és G'_3 (1.7-34.) vezetőképességeket. **Megjegyzés:** ha betartjuk a jelöléseket, akkor elegendő megjegyezni a G'_1 -re vonatkozó (1.7-34.) képletet, majd permutálni az 1, 2, 3 indexeket, hogy megkapjuk a G'_2 és G'_3 -ra vonatkozó képleteket.

$$\frac{(G_2 + G_3)G_1}{G_1 + G_2 + G_3} = G'_2 + G'_3 \qquad 1.7-29.$$

$$\frac{(G_1 + G_3)G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = G'_1 + G'_3 \qquad 1.7-30.$$

$$\frac{(G_1 + G_2)G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = G'_1 + G'_2 \qquad 1.7-31.$$

$$G'_1 = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} \qquad 1.7-32.$$

$$G'_\lambda = G_1 + G_2 + G_3 \qquad 1.7-33.$$

$$G'_1 = \frac{G_2 G_3}{G'_\lambda} \qquad G'_2 = \frac{G_1 G_3}{G'_\lambda} \qquad G'_3 = \frac{G_1 G_2}{G'_\lambda} \qquad 1.7-34.$$

Az 1.7-34. egyenletek ismeretében felírhatjuk az átalakítási képleteket az ellenállások függvényében. Az 1.7-35. összefüggés az R'_1 -re vonatkozó számításokat szemlélteti. Permutálva az 1, 2, 3 indexeket, ebben az esetben is megkaphatjuk a másik két ellenállás kifejezéseit (1.7-36.).

$$G'_1 = \frac{1}{R'_1} = \frac{\frac{1}{R_2} \frac{1}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{R_2 R_3} \frac{R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2} = \frac{R_1}{R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_2} \quad 1.7-35.$$

$$R'_1 = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad R'_3 = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \quad R'_2 = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \quad 1.7-36.$$

1.8. Áramköri megoldási módszerek

1.8.1. A szuperpozíció-elv

A szuperpozíció-elv a lineáris áramkörök vizsgálatának alapvető elve, amely minden lineáris rendszerre érvényes. Ez az elv az áramkörök esetén úgy alkalmazható, hogy ha több áramforrás van jelen egyszerre az áramkörben, akkor az áramkör ágaiban folyó áramok az egyes áramforrások áram-hozzájárulásainak algebrai összegeként fogható fel.

A szuperpozíció-elv alkalmazásakor először a tanulmányozandó áramkörben jelöljük áganként az áramokat egy tetszőleges irányítással. Ezek az irányítások majd áganként ugyanazok kell legyenek azokban az áramkörökben is, amelyekből sorra kiiktatjuk az összes áramforrást egy kivételével, vigyázva arra, hogy a kiiktatott áramforrásokat minden esetben a saját belső ellenállásukkal helyettesítsük. Az áramforrások kiiktatásával nyert áramkörökben kiszámolunk minden egyes áramot (tehát annyi áramkört oldunk meg, amennyi az aktív áramköri elemek száma), majd áganként minden egyes áramforrás áram-hozzájárulásának algebrai összegeként számoljuk ki a tanulmányozandó áramkör ágaiban folyó áramok erősségét.

1.8.2. Független Kirchhoff-törvényekből álló egyenletrendszer

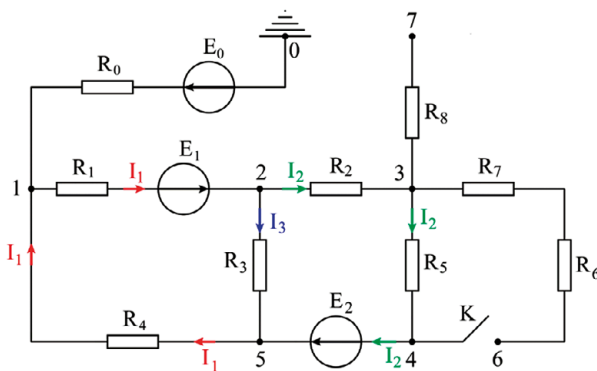
Az áramkörök megoldásának alapvető törvényei a csomóponti és a hurok-törvény. Fontos megfelelően azonosítani ezen törvények felírásához szükséges hálózati elemeket, amelyek nem mások, mint az áramköri ág, csomópont és hurok. Mint minden áramkörben, a fontos meghatározandó mennyiségek, az áramok, a feszültségek és – ha van rá mód – az áramkör pontjait jellemző elektromos potenciálok.

Tekintsük az 1.8-1. ábra által szemléltetett áramkört. Ez az áramkör felépítése szempontjából nézve tartalmaz olyan áramköri szakaszokat, amelyekben nem folynak áramok, mivel a szakaszok egyik vége „a levegőben lóg”. Egészen pontosan az egyik végén nyílt az áramköri szakasz, nem záródik az áramkör.

Példák ilyen áramköri szakaszokra:

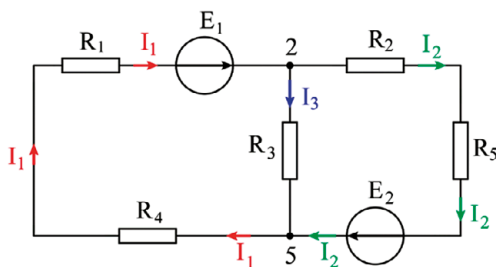
- » 0 és 1 pontok között az E_0 és R_0 kétpólusokat tartalmazó szakasz (0 földelési pont miatt),
- » 3 és 6 pontok között az R_7 és R_6 kétpólusokat tartalmazó szakasz (nyitott kapcsoló miatt),
- » 3 és 7 pontok között az R_8 kétpólust tartalmazó szakasz (7-es pont nincs bekötve sehova sem).

Természetesen ezek az áramköri szakaszok is fontos részei az áramkörnek, mivel alkalomadtán a nyílt végű szakaszokban elhelyezkedő áramköri elemeken is folyhatnak áramok, ha valamilyen módon zárttá tesszük az áramkört. Ilyen lehet például az az eset, amikor a K kapcsolót bezárjuk (a kapcsoló a 6-os állásba kerül), vagy a 7-es pontot az áramkör bármelyik pontjához hozzákötjük.



1.8-1. ábra

Azonban az áramok meghatározásának szempontjából eltekinthetünk ezek-től a nyílt végű szakaszoktól, és dolgozhatunk egy könnyebben áttekinthető áramkörben, amelyből hiányoznak ezek az áramköri szakaszok. Ezt a bizonyos egyszerűbb áramkört az 1.8-2. ábra szemlélteti. Megfigyelhető az ábrán az, hogy erről az áramkörrel egyszerűen lementszettük a nyílt végű áramköri szakaszokat. Jelen feladatgyűjteményben minden alkalommal, amikor az áramkörben folyó áramok meghatározása a cél, az áramköri analízishez, amelynek során meghatározzuk az áramkörben lévő ágakat, csomópontokat, valamint hurkokat, olyan áramköröket tekintünk, amelyek nem tartalmaznak nyílt áramköri szakaszokat! Abban az esetben, amikor az eredeti áramkörben vannak nyílt áramköri szakaszok is, az áramok meghatározása után visszatérünk az eredeti, nyílt áramköri szakaszokat is tartalmazó áramkörhöz azért, hogy kiszámíthassuk a nyílt szakaszokhoz tartozó potenciálok és feszültségek értékeit is.



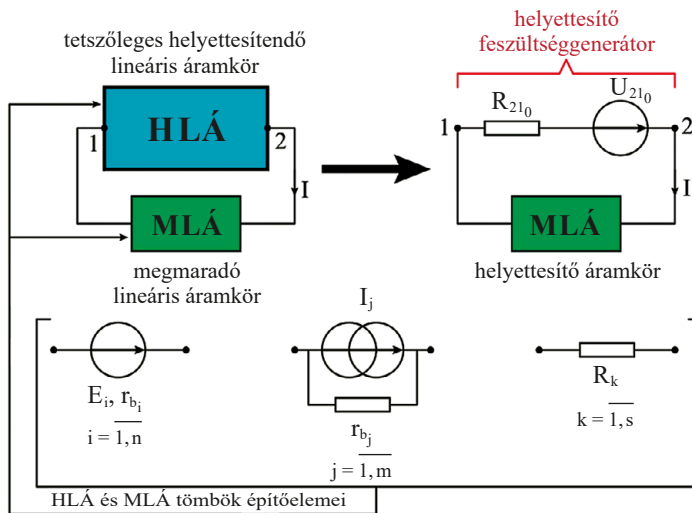
1.8-2. ábra

A továbbiakban a zárt áramkörre vonatkozó áramköri analízis résszel foglalkozunk, amelynek során az áramköri ágak, csomópontok, hurkok és független hurkok számának meghatározása történik. Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a legfontosabb információkat ezekkel kapcsolatban.

- **Ág:** az áramkör azon szakasza, ahol minden egyes áramköri elem (két-pólus) sorba van kapcsolva, és az így alkotott áramköri lánc mindkét végpontja fémesen kapcsolódik az áramkörbe (zárt) (N_{Ag} – ágak száma). Az ágak számának meghatározása azért is fontos, mert ugyanannyi ismeretlen, meghatározandó áram kering az áramkörben, így ennek megfelelő számú egyenletet kell felírunk.
- **Csomópont:** az áramköri ágak találkozási vagy metszéspontjai (N_{cs} – csomópontok száma). Megjegyzés: ha két csomópont esetében ugyanazokkal az áramokkal kell számolnunk (amely áram az egyiknél befolyó, az a másiknál kifolyó, és fordítva), az ilyen csomópontokat nem tekinthetjük egymástól függetlennek, hiszen ugyanazt a csomópont-törvényt adják.
- **Hurok:** az áramkör zárt szakaszai, amelyeket úgy definiálunk, hogy egy adott pontból elindulunk az áramkör mentén, és visszatérünk ugyanabba a pontba, de úgy, hogy egy ágot kizárólag egyszer érinthetünk (vagy ami ugyanazt jelenti, ha vannak az áramkörnek csomópontjai, akkor egy csomóponton csak egyszer haladhatunk át) (N_{Hurok} – hurkok száma).
- **Független hurkok száma:** az áramkörben definiálható minden egyes hurokra felírhatunk egy huroktörvényt (Kirchhoff II. egyenlet), azonban a sok huroktörvény között lesznek olyanok, amelyeket lineárisan kombinálva (összeadva/kivonva) eredményként egy másik huroktörvényt kapunk. Meg kell határozzuk az adott áramkörre vonatkozóan a huroktörvények maximálisan megengedett számát, amelyeket felhasználhatunk az egyenletrendszer felírásánál úgy, hogy az egyenletrendszer egymástól lineárisan független egyenleteket tartalmazzon (N_{FHurok} – független hurkok száma). A független hurkok számának meghatározására adott egy általános képlet: $N_{FHurok} = N_{Ag} - N_{cs} + 1$.

1.8.3. Thèvenin-tétel – a helyettesítő feszültséggenerátor tétele

A Thèvenin-tétel kimondja azt, hogy egy lineáris áramkör tetszőlegesen kiválasztott része, amely egy összetett kétpólust alkot, helyettesíthető egy valós feszültséggenerátorral, vagyis egy ideális feszültséggenerátor e.m.f.-ének és belső ellenállásának soros kapcsolásával (1.8-3. ábra). Az ábrán a „HLÁ” („Helyettesítendő Lineáris Áramkör”) a helyettesítendő összetett kétpólust, az „MLÁ” (Megmaradó Lineáris Áramkör) pedig az eredeti áramkörből változatlan formában megmaradó összetett kétpólust foglalja magába. Az általánosság kedvéért nincs áramkör rajzolva, csak az összetett kétpólusok építő elemei (valós/ideális feszültséggenerátorok, valós/ideális áramgenerátorok vagy ellenállások, ld. 1.8-3. ábra), a „HLÁ” és „MLÁ” felépítését illetően majd a további fejezetek szolgáltatnak konkrét példákat. A továbbiakban a helyettesítő generátor e.m.f.-ének és belső ellenállásának meghatározása a feladat.

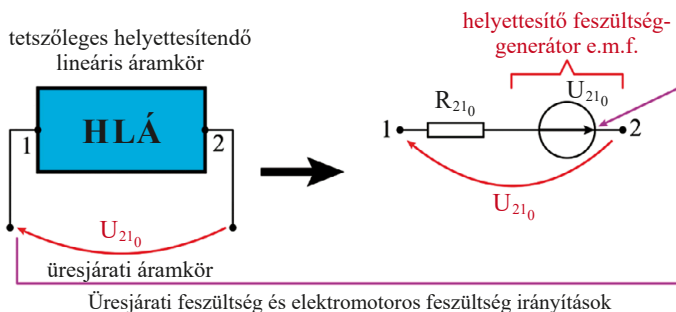


1.8-3. ábra

Eljárás az üresjáratú feszültség meghatározására:

- » a helyettesítésre kiválasztott összetett kétpólust „HLÁ” (1.8-3. ábra) leválasztjuk az eredeti áramkörrel, és a kapcsait üresben (terhelés nélkül) hagyjuk (üresjáratú áramkör) (1.8-4. ábra),
- » az üresben hagyott kétpólus kapcsai között jelöljük tetszőleges irányítással az üresjáratú feszültséget (nyíl irányítása 2-től 1-ig irányítva (1.8-4. ábra), majd kiszámítjuk azt (figyelem: az üresjáratú feszültség előjeles mennyiség!!!),
- » a helyettesítő feszültséggenerátor kapcsai között ugyanez kell legyen az üresjáratú feszültség, így az ábrán látható irányítással feltüntetett feszültségforrás elektromotoros feszültsége egyenlő kell legyen ezzel az üresjáratú

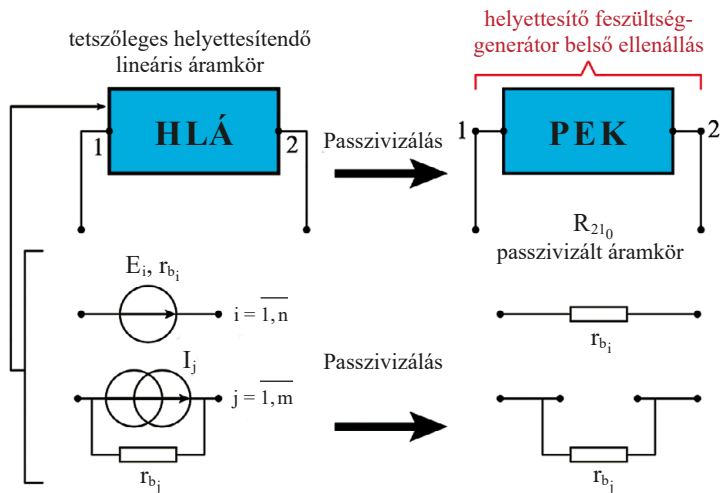
feszültséggel (ez technikailag azt jelenti, hogy a helyettesítő áramkörben a helyettesítő feszültséggenerátor elektromotoros feszültségének irányítása az üresjáratú áramkörben rögzített üresjáratú feszültség irányításnak a fordítottja kell legyen, tehát az 1-től a 2-ig (1.8-4. ábra).



1.8-4. ábra

Eljárás a belső ellenállás meghatározására:

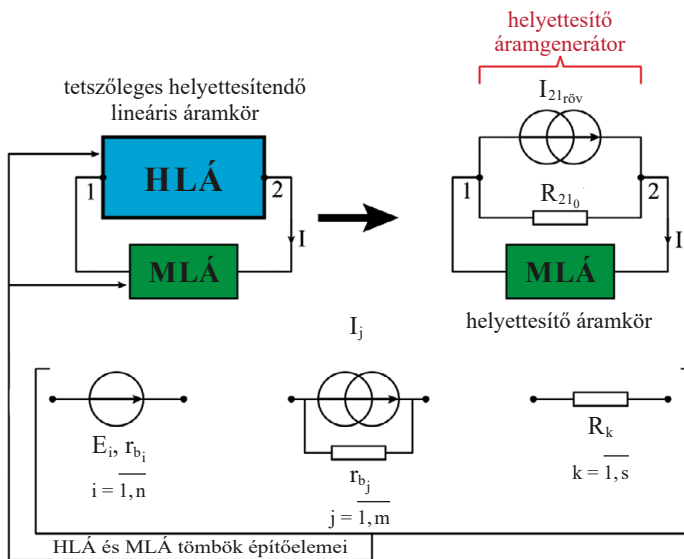
- » passzivizáljuk az üresjáratú áramkört (1.8-4. ábra), létrehozva a „PEK”-kel jelölt passzív ellenállás-kapcsolást (1.8-5. ábra), ami azt jelenti, hogy minden egyes áramforrást helyettesítünk a saját belső ellenállásával (1.8-5. ábra), majd kiszámítjuk az eredő ellenállást.



1.8-5. ábra

1.8.4. Norton-tétel – a helyettesítő áramgenerátor tétele

A Norton-tétel kimondja azt, hogy egy lineáris áramkör tetszőlegesen kiválasztott része, amely egy összetett kétpólust alkot, helyettesíthető egy valós áramgenerátorral, vagyis egy ideális áramgenerátor és belső ellenállásának párhuzamos kapcsolásával (1.8-6. ábra). Az ábrán a „HLÁ” („Helyettesítendő Lineáris Áramkör”) a helyettesítendő összetett kétpólust, az „MLÁ” (Megmaradó Lineáris Áramkör) pedig az eredeti áramkörből változatlan formában megmaradó összetett kétpólust foglalja magába. Az általánosság kedvéért nincs áramkör rajzolva, csak az összetett kétpólusok építőelemei (valós/ideális feszültséggenerátorok, valós/ideális áramgenerátorok vagy ellenállások, ld. 1.8-6. ábra), a „HLÁ” és „MLÁ” felépítését illetően majd a további fejezetek szolgáltatnak konkrét példákat. A továbbiakban a helyettesítő generátor forrásáramának és belső ellenállásának meghatározása a feladat.

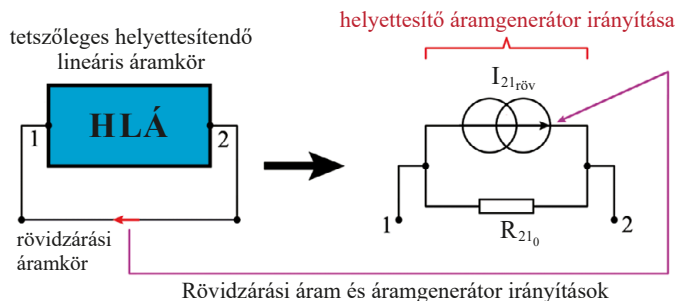


1.8-6. ábra

Eljárás a rövidzárási áram meghatározására:

- » a helyettesítésre kiválasztott összetett kétpólust „HLÁ” (1.8-6. ábra) leválasztjuk az eredeti áramkörrel, majd a kapcsokat rövidre zárjuk, létrehozva a rövidzárási áramkört (1.8-7. ábra),
- » a rövidzárási áramkörben tetszőlegesen felvesszük a rövidzárási áram technikai irányát (nyíl irányítása 2-től 1-ig irányítva, 1.8-7. ábra), majd kiszámítjuk (figyelem: a rövidzárási áram előjeles mennyiség!!!),
- » a helyettesítő áramkörben a rövidzárási áramot áramgenerátorént kell megjeleníteni, ezért a helyettesítő áramkörben úgy kell felvenni annak irá-

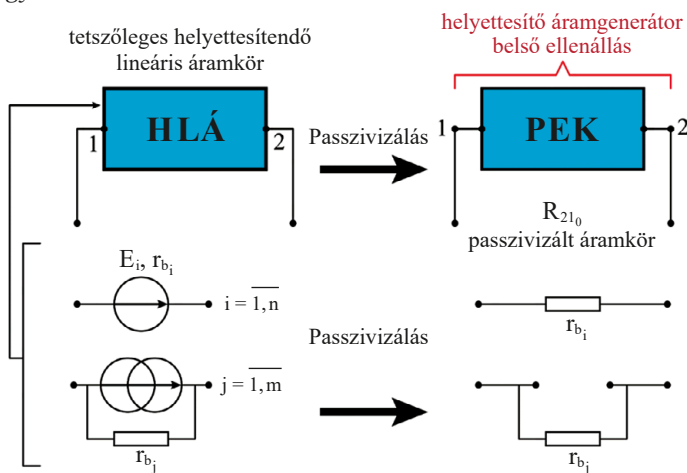
nyítást, hogy a rövidzárási áramkörben az előző lépésben felvett áramirányt biztosítsa, tehát az 1-től a 2-ig (1.8-7. ábra).



1.8-7. ábra

Eljárás a belső ellenállás meghatározására:

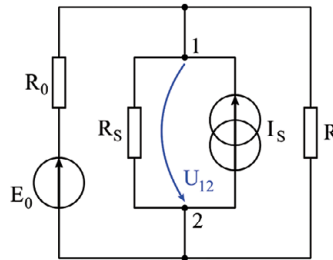
» megszüntetjük a rövidzárast, amit előzőleg a rövidzárási áram kiszámítása érdekében hoztunk létre (tulajdonképpen visszaállítva az üresjáratú áramkört, lásd Thèvenin-tétel, 1.8-4. ábra), majd passzivizáljuk azt (1.8-8. ábra), létrehozva a „PEK”-kel jelölt passzív ellenállás-kapcsolást, ami azt jelenti, hogy minden egyes áramforrást helyettesítünk a saját belső ellenállásával, majd kiszámítjuk az eredő ellenállást. Megjegyzés: a helyettesítő feszültség-, illetve áramgenerátorok belső ellenállásának kiszámítása ugyanúgy történik, ezért ugyanannak az áramköri szakasznak Thèvenin- vagy Norton-tétellel való helyettesítésekor a két generátor belső ellenállása ugyanaz!



1.8-8. ábra

1.8.5. Millman-tétel (a Norton-tétel következménye)

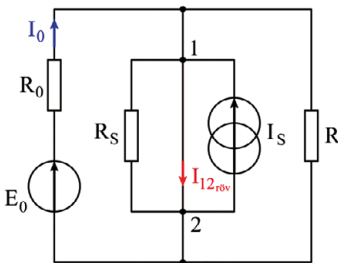
Egy áramkörben, ahol a csomópontokat egymással párhuzamosan kapcsolt áramköri ágak kötik össze (1.8-9. ábra), a csomópontok közötti feszültséget egy képlet (1.8-1.) és a hozzá tartozó előjelszabály segítségével könnyedén ki lehet számolni. Az ágakban lévő generátorok előjelét mindig a csomópontok közötti feszültség (U_{12}) irányításához képest definiáljuk. Az előjelszabály kimondja, hogy egy feszültséggenerátor (E_0/R_0) vagy áramgenerátor (I_S) által szolgáltatott áram-hozzájárulás pozitív, ha a generátor elektromotoros feszültségének vagy forrásáramának irányítása ellentétes a feszültség feltételezett irányításával, és negatív, ha megegyezik azzal.



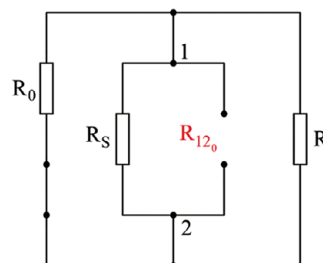
1.8-9. ábra

$$U_{12} = \frac{\frac{E_0}{R_0} + I_S}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_S} + \frac{1}{R}} \quad 1.8-1.$$

A Millman-tétel tulajdonképpen nem más, mint egy Norton-tétel, amellyel a teljes áramkört helyettesítjük egy áramgenerátorral, és az áramgenerátor sarkai közötti feszültséget számoljuk ki. A továbbiakban az 1.8.4. fejezetben leírtaknak megfelelően járunk el. Az eredeti áramkörben lévő két csomópontot rövidre zárjuk, és kiszámítjuk a rövidzárási áramot (1.8-2.).



1.8-10. ábra



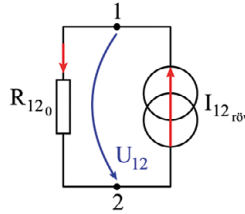
1.8-11. ábra

$$I_{12_{rov}} = I_0 + I_S = \frac{E_0}{R_0} + I_S \quad 1.8-2.$$

Megszüntetjük a rövidzárt, passzivizáljuk az áramkört (1.8-11. ábra), és kiszámítjuk az eredő ellenállást. Annak érdekében, hogy a Millman-tételnél megadott képletet minél egyszerűbben írassuk fel, a három párhuzamosan kapcsolt ellenállás eredő vezetőképességét számoljuk ki (1.8-3.).

$$\frac{1}{R_{12_0}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_S} + \frac{1}{R} \quad 1.8-3.$$

Az 1.8-12. ábra a helyettesítő áramgenerátort szemlélteti, ahol a generátor kapcsai közötti feszültséget az 1.8-4. egyenlettel számolhatjuk ki, amely megegyezik a Millman-tétel kijelentésénél megadott egyenlettel (1.8-1.).



1.8-12. ábra

$$U_{12} = I_{12_{r\acute{o}v}} R_{12_0} = \frac{I_{12_{r\acute{o}v}}}{\frac{1}{R_{12_0}}} = \frac{\frac{E_0}{R_0} + I_S}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_S} + \frac{1}{R}} \quad 1.8-4.$$

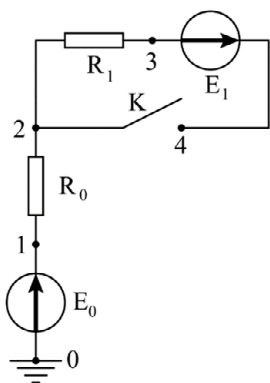
MEGOLDOTT FELADATOK

2.1. feladat

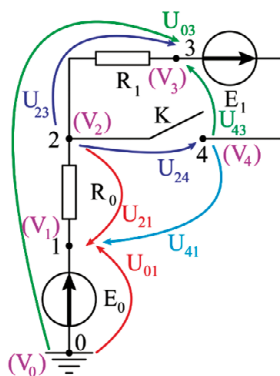
A 2.1-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adottak: $R_0 = 4\Omega$, $E_1 = 25V$, $R_1 = 50\Omega$ és $V_0 = 0V$.

Feladatok:

- A K kapcsoló nyitott állásában (2.1-1. ábra) számítsuk ki minden jelzett pont elektromos potenciálját és néhányat a lehetséges feszültségek közül, ha $E_0 = 0V$, illetve $E_0 = 20V$.
- A K kapcsoló zárt állásában (2.1-5. ábra) számítsuk ki minden jelzett pont elektromos potenciálját és néhányat a lehetséges feszültségek közül, ha $E_0 = 0V$, illetve $E_0 = 20V$.



2.1-1. ábra



2.1-2. ábra

2.1.1. Az a) megoldása

Ebben az esetben nincs zárt áramkör, így nem folynak sehol sem áramok. A bejelölt pontok potenciálját E_0 és E_1 elektromotoros feszültsége befolyásolja a referenciapotenciálhoz képest ($V_0 = 0V$). Továbbá a jelölt pontok, illetve a referenciapont („földelés”) és a jelölt pontok között feszültségek vannak, amelyeket a 2.1-1. és 2.1-2. egyenletekkel számolhatunk ki.

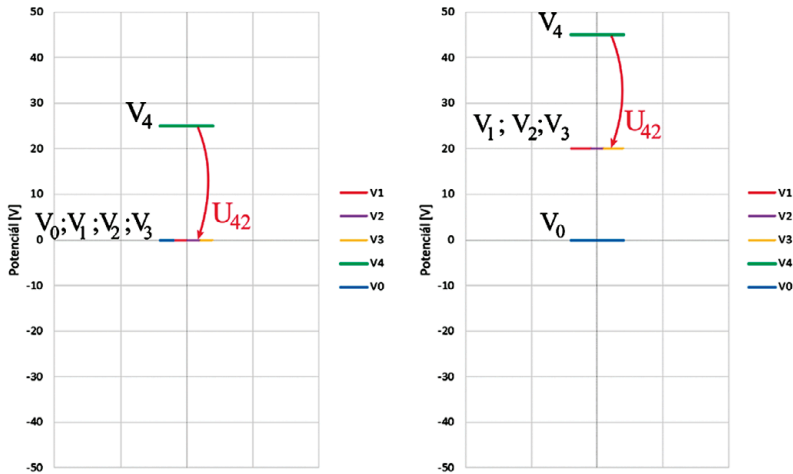
Ha $E_0 = 0V$:

$U_{01} = V_0 - V_1 = -E_0 = 0 (V)$	$\rightarrow$	$V_1 = V_0 - U_{01} = 0 (V)$	2.1-1.
$U_{21} = V_2 - V_1 = 0 (V)$	$\rightarrow$	$V_2 = V_1 + U_{21} = V_1 = 0 (V)$	
$U_{23} = V_2 - V_3 = 0 (V)$	$\rightarrow$	$V_3 = V_2 - U_{23} = V_2 = 0 (V)$	
$U_{43} = V_4 - V_3 = E_1 = 25 (V)$	$\rightarrow$	$V_4 = V_3 + U_{43} = 25 (V)$	
$U_{24} = V_2 - V_4 = -25 (V)$	$\rightarrow$	(a K kapcsoló sarkain mérhető feszültség)	
$U_{03} = V_0 - V_3 = 0 (V)$	vagy	$U_{03} = U_{01} - U_{21} + U_{23} = 0 (V)$	
$U_{41} = V_4 - V_1 = 25 (V)$	vagy	$U_{41} = U_{21} - U_{24} = 25 (V)$	

Ha $E_0 = 20V$:

$U_{01} = V_0 - V_1 = -E_0 = -20 (V)$	$\rightarrow$	$V_1 = V_0 - U_{01} = 20 (V)$	2.1-2.
$U_{21} = V_2 - V_1 = 0 (V)$	$\rightarrow$	$V_2 = V_1 + U_{21} = V_1 = 20 (V)$	
$U_{23} = V_2 - V_3 = 0 (V)$	$\rightarrow$	$V_3 = V_2 - U_{23} = V_2 = 20 (V)$	
$U_{43} = V_4 - V_3 = E_1 = 25 (V)$	$\rightarrow$	$V_4 = V_3 + U_{43} = 45 (V)$	
$U_{24} = V_2 - V_4 = -25 (V)$	$\rightarrow$	(a K kapcsoló sarkain mérhető feszültség)	
$U_{03} = V_0 - V_3 = -20 (V)$	vagy	$U_{03} = U_{01} - U_{21} + U_{23} = -20 (V)$	
$U_{41} = V_4 - V_1 = 25 (V)$	vagy	$U_{41} = U_{21} - U_{24} = 25 (V)$	

A számítások eredményeit a 2.1-3. ábra szemlélteti. Fontos kiemelni azt a tényt, hogy a referenciapotenciál kiválasztása kizárólag az abszolút potenciál értékeit befolyásolja (röviden potenciál), azonban a feszültségeket nem.

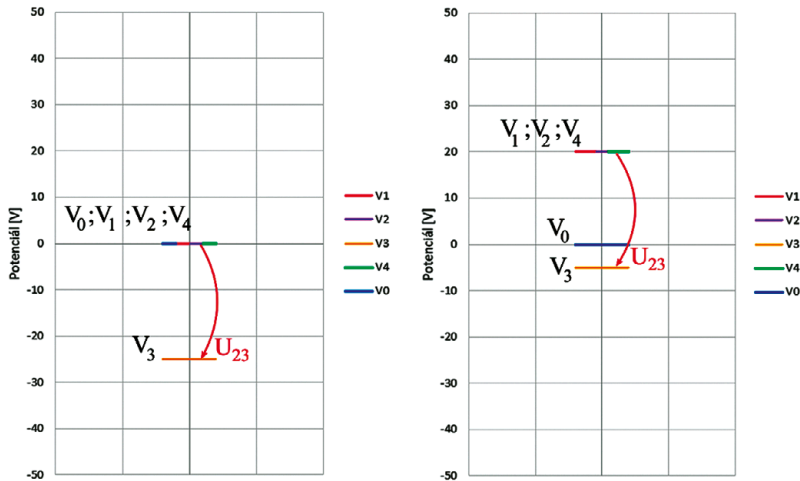


2.1-3. ábra

Ha $E_0 = 20\text{ V}$:

$U_{01} = V_0 - V_1 = -E_0 = -20\text{ (V)}$	$\rightarrow$	$V_1 = V_0 - U_{01} = 20\text{ (V)}$	2.1-5.
$U_{21} = V_2 - V_1 = 0\text{ (V)}$	$\rightarrow$	$V_2 = V_1 + U_{21} = V_1 = 20\text{ (V)}$	
$U_{23} = V_2 - V_3 = R_1 I = 25\text{ (V)}$	$\rightarrow$	$V_3 = V_2 - U_{23} = -5\text{ (V)}$	
$U_{43} = V_4 - V_3 = E_1 = 25\text{ (V)}$	$\rightarrow$	$V_4 = V_3 + U_{43} = 20\text{ (V)}$	
$U_{24} = V_2 - V_4 = 0\text{ (V)}$	$\rightarrow$	(a K kapcsoló zárva van, a két pontja azonos potenciálon van)	
$U_{03} = V_0 - V_3 = (V_0 - V_1) +$ $+(V_1 - V_2) + (V_2 - V_3) =$ $= -E_0 + 0 + R_1 I = 5\text{ (V)}$	vagy	$U_{03} = U_{01} - U_{21} + U_{23} = 5\text{ (V)}$	
$U_{41} = V_4 - V_1 = 0\text{ (V)}$	vagy	$U_{41} = U_{21} - U_{24} = 0\text{ (V)}$	

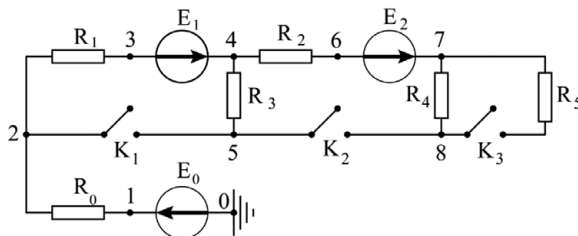
A számítások eredményeit a 2.1-6. ábra szemlélteti. Fontos itt is kiemelni azt a tényt, hogy a referenciapotenciál kiválasztása kizárólag az abszolút potenciál értékeket befolyásolja, azonban a feszültségeket nem.



2.1-6. ábra

2.2. feladat

A 2.2-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, ahol adott: $E_0 = 10\text{V}$, $E_1 = 20\text{V}$, $E_2 = 30\text{V}$, $R_0 = 1\Omega$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 15\Omega$, $R_4 = 20\Omega$, $R_5 = 30\Omega$, $V_0 = 0\text{V}$.



2.2-1. ábra

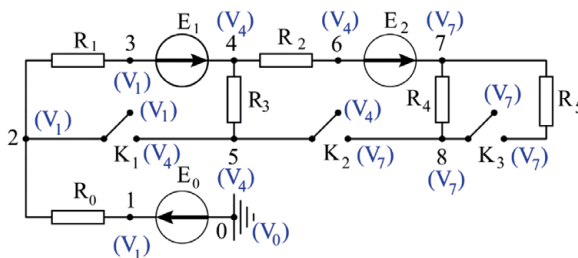
Feladatok:

Az alábbi esetekben számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramok erősségeit és a bejelölt pontok potenciáljait.

- K_1 , K_2 és K_3 kapcsolók nyitva vannak,
- a K_1 kapcsoló zárva, a K_2 és K_3 kapcsolók pedig nyitva vannak,
- a K_1 és K_3 kapcsolók zárva, a K_2 kapcsoló pedig nyitva van,
- a K_1 és K_2 kapcsolók zárva, a K_3 kapcsoló pedig nyitva van,
- a K_1 és K_3 kapcsolók nyitva a K_2 kapcsoló pedig zárva van,
- a K_1 kapcsoló nyitva, a K_2 és K_3 kapcsolók pedig zárva vannak,
- a K_1 , K_2 és K_3 kapcsolók zárva vannak.

2.2.1. Az a) megoldása

Mivel minden kapcsoló nyitott állásban van, így nincs zárt áramkör, és nem folynak áramok sem. A bejelölt pontok potenciáljait a 2.2-2. ábra szemlélteti és a 2.2-1. egyenletekkel számíthatjuk ki.



2.2-2. ábra

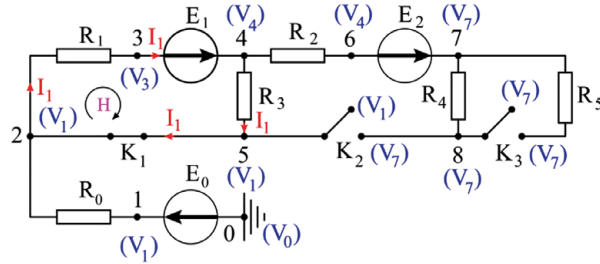
Potenciálszámítás:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= V_0 + E_0 = 10 \text{ (V)} \\
 V_2 &\equiv V_3 \equiv V_1 = 10 \text{ (V)} \\
 V_4 &\equiv V_6 \equiv V_5 \equiv V_3 + E_1 = 30 \text{ (V)} \\
 V_7 &\equiv V_8 \equiv V_6 + E_2 = 60 \text{ (V)}
 \end{aligned}$$

2.2-1.

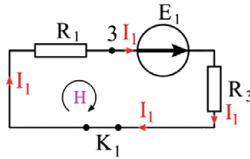
2.2.2. A b) megoldása

Abban az esetben, amikor a K_1 kapcsoló zárva, a K_2 és K_3 kapcsolók pedig nyitva vannak, már van zárt áramkör, de még vannak nyílt áramköri szakaszok is, ahol nem folynak áramok (2.2-3. ábra).



2.2-3. ábra

Az áramkörben folyó áram meghatározásához eltekintünk a nyílt áramköri szakaszoktól, ennek megfelelően egy ág van az áramkörben, amely az egyetlen hurkot is alkotja (2.2-4. ábra). Az áramot a 2.2-2. huroktörvényből számíthatjuk ki.



2.2-4. ábra

Huroktörvény az áram kiszámításához:

$$E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_1 = (R_1 + R_3) I_1 \quad 2.2-2.$$

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = 1 \text{ (A)}. \quad 2.2-3.$$

Az áramkörben folyó áram ismeretében visszatérünk az eredeti, nyílt áramköri szakaszokat is tartalmazó áramkörhöz, és kiszámítjuk a potenciálokat (2.2-4.).

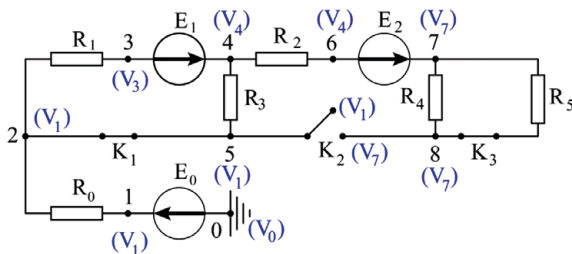
Potenciálszámítás:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 + E_0 = 10 \text{ (V)} \\ V_2 &\equiv V_1 = 10 \text{ (V)} \\ V_3 &= V_2 - R_1 I_1 = 5 \text{ (V)} \\ V_4 &= V_3 + E_1 = 25 \text{ (V)} \\ V_5 &= V_4 - R_3 I_1 = 10 \text{ (V)} \equiv V_1 \\ V_6 &\equiv V_4 = 25 \text{ (V)} \\ V_8 &\equiv V_7 = V_6 + E_2 = 55 \text{ (V)}. \end{aligned}$$

2.2-4.

2.2.3. A c) megoldása

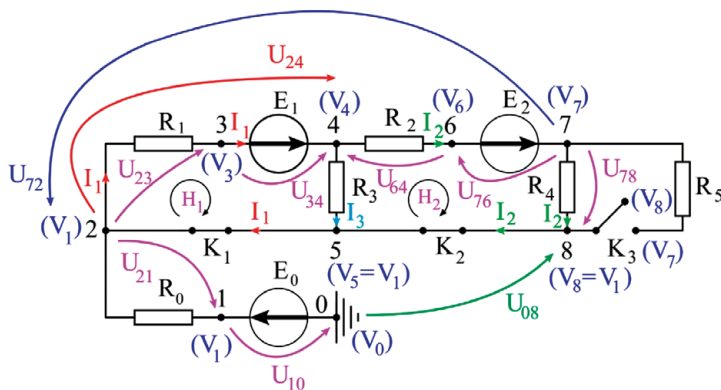
Abban az esetben, amikor a K_1 és K_3 kapcsolók zárva, a K_2 kapcsoló pedig nyitva van, a feladat megoldása megegyezik a b) megoldásával. Annyit kell csupán megjegyeznünk, hogy a K_3 zárásával két olyan ellenállás kerül párhuzamos kapcsolásba, amelyeken nem folyhatnak áramok, így tulajdonképpen nem szólnak bele a potenciáeloszlásba (2.2-5. ábra).



2.2-5. ábra

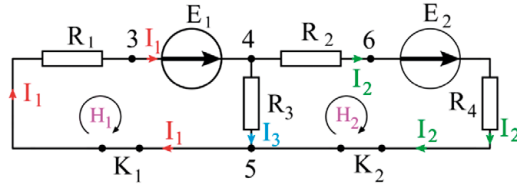
2.2.4. A d) megoldása

Abban az esetben, amikor a K_1 , K_2 kapcsolók zárva, a K_3 kapcsoló pedig nyitva van, van zárt áramkör, de vannak nyílt áramköri szakaszok is, ahol nem folynak áramok (2.2-6. ábra).



2.2-6. ábra

Az áramkörben folyó áramok meghatározásához eltekintünk a nyílt áramköri szakaszoktól, ennek megfelelően három ága van az áramkörnek (2.2-7. ábra). A három ismeretlen áram kiszámításához egy háromismeretlenes, egymástól független egyenleteket tartalmazó egyenletrendszerre van szükség (két huroktörvény és egy csomóponti törvény, 2.2-5.).



2.2-7. ábra

$$\begin{array}{l} H_1 \text{ hurok:} \\ H_2 \text{ hurok:} \\ 4. \text{ csomópont:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \\ E_2 = (R_2 + R_4) I_2 - R_3 I_3 \\ I_1 - I_2 - I_3 = 0 \end{array} \right. \quad 2.2-5.$$

Az egyenletrendszer szimbolikus megoldása (2.2-6.):

$$\begin{aligned} I_3 &= I_1 - I_2 \\ E_1 &= R_1 I_1 + R_3 (I_1 - I_2) = (R_1 + R_3) I_1 - R_3 I_2 \\ E_2 &= (R_2 + R_4) I_2 - R_3 (I_1 - I_2) = -R_3 I_1 + (R_2 + R_4 + R_3) I_2 \\ I_2 &= \frac{E_2 + R_3 I_1}{R_2 + R_4 + R_3} = \frac{E_2}{R_2 + R_4 + R_3} + \frac{R_3}{R_2 + R_4 + R_3} I_1 \\ E_1 &= (R_1 + R_3) I_1 - R_3 \left(\frac{E_2}{R_2 + R_4 + R_3} + \frac{R_3}{R_2 + R_4 + R_3} I_1 \right) \\ E_1 + \frac{R_3}{R_2 + R_4 + R_3} E_2 &= \left(R_1 + R_3 - \frac{R_3^2}{R_2 + R_4 + R_3} \right) I_1 \\ I_1 &= \frac{E_1 + \frac{R_3}{R_2 + R_4 + R_3} E_2}{R_1 + R_3 - \frac{R_3^2}{R_2 + R_4 + R_3}} = \frac{20 + \frac{15}{5 + 20 + 15} 30}{5 + 15 - \frac{225}{5 + 20 + 15}} = 2,173 \text{ (A)} \\ I_2 &= \frac{E_2 + R_3 I_1}{R_2 + R_4 + R_3} = \frac{30 + 15 \cdot 2,173}{40} = 1,565 \text{ (A)} \\ I_3 &= I_1 - I_2 = 2,173 - 1,565 = 0,608 \text{ (A)} \end{aligned} \quad 2.2-6.$$

Megoldás: $I_1 = 2,173 \text{ (A)}$, $I_2 = 1,565 \text{ (A)}$, $I_3 = 0,608 \text{ (A)}$.

Az áramkörben folyó áram ismeretében visszatérünk az eredeti, nyílt áramköri szakaszokat is tartalmazó áramkörhöz, és kiszámítjuk a potenciálokat (2.2-7.) és a feszültségeket (2.2-8.).

Potenciálszámítás:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 + E_0 = 10 \text{ (V)} \\ V_2 &\equiv V_1 = 10 \text{ (V)} \\ V_3 &= V_2 - R_1 I_1 = -0,865 \text{ (V)} \end{aligned} \quad 2.2-7.$$

$$V_4 = V_3 + E_1 = 19,135 \text{ (V)}$$

$$V_5 = V_4 - R_3 I_3 = 10,015 \text{ (V)}$$

$$V_6 = V_4 - R_2 I_2 = 11,31 \text{ (V)}$$

$$V_7 = V_6 + E_2 = 41,31 \text{ (V)}$$

$$V_8 = V_7 - R_4 I_2 = 10,01 \text{ (V)}$$

2.2-7.
(folvt.)

Megjegyzés: mivel a 8 és az 5 pont azonos potenciálon van az 1 ponttal, a V_8 és a V_5 potenciálok számított értékeinek eltérése a V_1 értékétől az áramok kiszámításakor tekintett közelítésekből adódik!!!

Feszültségek számítása: az összetett kétpólus sarkai közti feszültségeket az 1.1.3. fejezetben leírt módon számoljuk ki.

$$U_{23} = R_1 I_1 = 10,865 \text{ (V)}$$

$$U_{34} = -E_1 = -20 \text{ (V)}$$

$$U_{76} = E_2 = 30 \text{ (V)}$$

$$U_{64} = -(R_2 I_2) = -7,825 \text{ (V)}$$

$$U_{10} = E_0 = 10 \text{ (V)}$$

$U_{21} = 0 \text{ (V)}$ (R_0 ellenálláson nem folyik áram)

$$U_{78} = R_4 I_2 = 31,3 \text{ (V)}$$

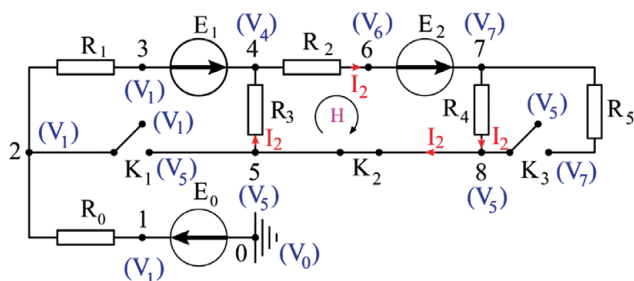
$$U_{24} = V_2 - V_4 = -9,135 \text{ (V)} = U_{23} + U_{34} = 9,135 \text{ (V)}$$

$$U_{72} = V_7 - V_2 = 31,31 \text{ (V)} = U_{76} + U_{64} - U_{24} = 31,31 \text{ (V)}$$

2.2-8.

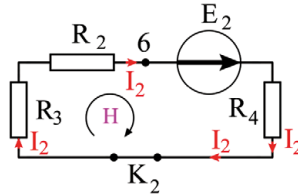
2.2.5. Az e) megoldása

Abban az esetben, amikor K_1 , K_3 kapcsolók nyitva, a K_2 kapcsoló pedig zárva van, létezik zárt áramkör, de vannak nyílt áramköri szakaszok is, ahol nem folynak áramok (2.2-8. ábra).



2.2-8. ábra

Az áramkörben folyó áram meghatározásához eltekintünk a nyílt áramkörü szakaszoktól, ennek megfelelően egy ág van az áramkörben, amely az egyetlen hurokot is alkotja (2.2-9. ábra). Az áramot a 2.2-10. huroktörvényből számíthatjuk ki.



2.2-9. ábra

Huroktörvény az áram kiszámításához:

$$H \text{ hurok: } E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_2 + R_4 I_2 = (R_2 + R_3 + R_4) I_2 \quad 2.2-9.$$

$$I_2 = \frac{E_2}{R_2 + R_3 + R_4} = 0,75 \text{ (A)}. \quad 2.2-10.$$

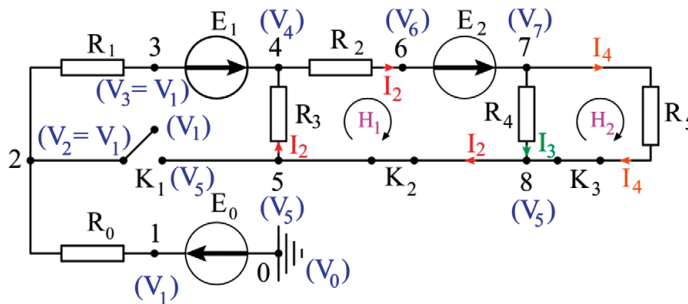
Az áramkörben folyó áram ismeretében visszatérünk az eredeti, nyílt áramköri szakaszokat is tartalmazó áramkörhöz, és kiszámítjuk a potenciálokat (2.2-11.).

Potenciálszámítás:

$$\begin{aligned} V_1 &\equiv V_0 + E_0 = 10 \text{ (V)} \\ V_2 &\equiv V_3 = V_1 = 10 \text{ (V)} \\ V_4 &= V_3 + E_1 = 30 \text{ (V)} \\ V_5 &= V_4 + R_3 I_2 = 41,25 \text{ (V)} \\ V_6 &= V_4 - R_2 I_2 = 26,25 \text{ (V)} \\ V_7 &= V_6 + E_2 = 56,25 \text{ (V)} \\ V_8 &\equiv V_5 = V_7 - R_4 I_2 = 41,25 \text{ (V)} \end{aligned} \quad 2.2-11.$$

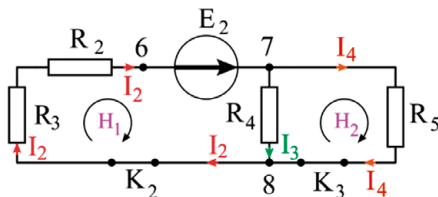
2.2.6. Az f) megoldása

Abban az esetben, amikor a K_1 kapcsoló nyitva, a K_2 és K_3 kapcsolók pedig zárva vannak, létezik zárt áramkör, de vannak nyílt áramköri szakaszok is, ahol nem folynak áramok (2.2-10. ábra).



2.2-10. ábra

Az áramkörben folyó áramok meghatározásához eltekintünk a nyílt áramköri szakaszoktól, ennek megfelelően három ága van az áramkörnek (2.2-11. ábra). A három ismeretlen áram kiszámításához egy háromismeretlenes, egymástól független egyenleteket tartalmazó egyenletrendszerre van szükség (két huroktörvény és egy csomóponti törvény, 2.2-12.).



2.2-11. ábra

Az áramok kiszámítása:

$$\begin{array}{l} H_1 \text{ hurok: } \\ H_2 \text{ hurok: } \\ 7. \text{ csomópont: } \end{array} \left\{ \begin{array}{l} E_2 = R_2 I_2 + R_3 I_2 + R_4 I_3 \\ 0 = R_5 I_4 - R_4 I_3 \\ I_2 - I_3 - I_4 = 0 \end{array} \right. \quad 2.2-12.$$

Az egyenletrendszer szimbolikus megoldása (2.2-13.):

$$\begin{aligned} I_2 &= I_3 + I_4 \\ E_2 &= (R_2 + R_3)I_2 + R_4 I_3 = (R_2 + R_3)(I_3 + I_4) + R_4 I_3 = (R_2 + R_3 + R_4)I_3 + (R_2 + R_3)I_4 \\ I_4 &= \frac{R_4}{R_5} I_3 \\ E_2 &= (R_2 + R_3 + R_4)I_3 + (R_2 + R_3) \frac{R_4}{R_5} I_3 = \left(R_2 + R_3 + R_4 + (R_2 + R_3) \frac{R_4}{R_5} \right) I_3 \\ I_3 &= \frac{E_2}{R_2 + R_3 + R_4 + (R_2 + R_3) \frac{R_4}{R_5}} = \frac{30}{40 + 20 \frac{20}{30}} = 0,5625 \text{ (A)} \\ I_4 &= \frac{R_4}{R_5} I_3 = \frac{20}{30} 0,5625 = 0,375 \text{ (A)} \\ I_2 &= I_3 + I_4 = 0,5625 + 0,375 = 0,9375 \text{ (A)} \end{aligned} \quad 2.2-13.$$

Megoldás: $I_2 = 0,9375 \text{ (A)}$, $I_3 = 0,5625 \text{ (A)}$, $I_4 = 0,375 \text{ (A)}$.

Az áramkörben folyó áram ismeretében visszatérünk az eredeti, nyílt áramköri szakaszokat is tartalmazó áramkörhöz, és kiszámítjuk a potenciálokat (2.2-14.).

Potenciálszámítás:

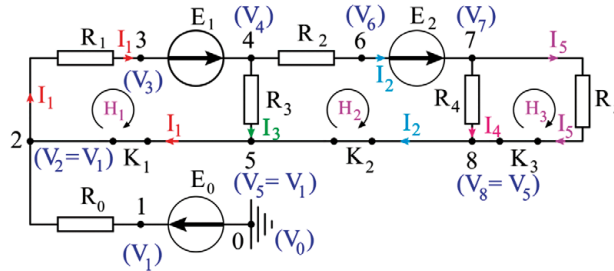
$$\begin{array}{l} V_1 = V_0 + E_0 = 10 \text{ (V)} \\ V_2 \equiv V_3 = V_1 = 10 \text{ (V)} \\ V_4 = V_3 + E_1 = 10 + 20 = 30 \text{ (V)} \end{array} \quad 2.2-14.$$

$$\begin{aligned}
 V_5 &= V_4 + R_3 I_2 = 44,0625 \text{ (V)} \\
 V_6 &= V_4 - R_2 I_2 = 25,3125 \text{ (V)} \\
 V_7 &= V_6 + E_2 = 55,3125 \text{ (V)} \\
 V_8 &\equiv V_5 = V_7 - R_4 I_3 = 44,0625 \text{ (V)} \\
 V_8 &\equiv V_5 = V_7 - R_5 I_4 = 44,0625 \text{ (V)}
 \end{aligned}$$

2.2-14.
(folyt.)

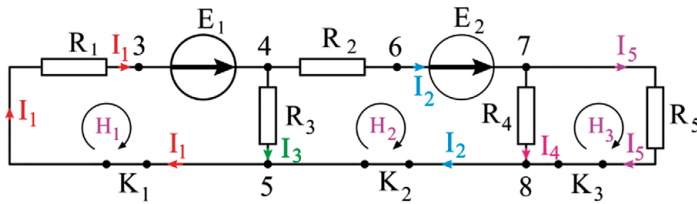
2.2.7. A g) megoldása

Abban az esetben, amikor a K_1 , K_2 és K_3 kapcsolók zárva vannak, sok zárt áramkört definiálhatunk, de még mindig marad egy nyílt áramkörti szakasz, amely biztosítja az előírt referenciapotenciál értékét (2.2-12. ábra).



2.2-12. ábra

Az áramkörben folyó áramok meghatározásához eltekintünk a nyílt áramkörti szakaszoktól, ennek megfelelően öt ága van az áramkörnek (2.2-13. ábra). Az öt ismeretlen áram kiszámításához egy ötismeretlenes, egymástól független egyenleteket tartalmazó egyenletrendszerre van szükség (2.2-15.).



2.2-13. ábra

Az áramok kiszámítása:

$$\begin{aligned}
 &H_1 \text{ hurok:} \\
 &H_2 \text{ hurok:} \\
 &H_3 \text{ hurok:} \\
 &4. \text{ csomópont:} \\
 &7. \text{ csomópont:}
 \end{aligned}
 \left\{
 \begin{aligned}
 E_1 &= R_1 I_1 + R_3 I_3 \\
 E_2 &= R_2 I_2 + R_4 I_4 - R_3 I_3 \\
 0 &= R_5 I_5 - R_4 I_4 \\
 I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\
 I_2 - I_4 - I_5 &= 0
 \end{aligned}
 \right.$$

2.2-15.

Az egyenletrendszer szimbolikus megoldása (2.2-16.):

Redukálás négyismeretlenes egyenletrendszerre az I_5 áramnak a kifejezésével, majd a többi egyenletbe való behelyettesítésével:

$$I_5 = \frac{R_4}{R_5} I_4$$

$$I_2 = I_4 + I_5 = I_4 + \frac{R_4}{R_5} I_4 = I_4 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right)$$

Négyismeretlenes egyenletrendszer:

$$I_2 = I_4 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right)$$

$$E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$$

$$E_2 = R_2 I_2 + R_4 I_4 - R_3 I_3$$

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Redukálás háromismeretlenes egyenletrendszerre az I_2 áramnak a kifejezésével, majd a többi egyenletbe való behelyettesítésével:

$$I_1 = I_2 + I_3 = I_4 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) + I_3$$

Háromismeretlenes egyenletrendszer:

$$I_1 = I_4 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) + I_3$$

$$E_2 = \left[R_2 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) + R_4 \right] I_4 - R_3 I_3$$

$$E_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3$$

2.2-16.

Redukálás kétismeretlenes egyenletrendszerre az I_1 áramnak a kifejezésével, majd a többi egyenletbe való behelyettesítésével:

$$E_1 = R_1 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) I_4 + (R_3 + R_1) I_3$$

$$E_2 = \left[R_2 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) + R_4 \right] I_4 - R_3 I_3$$

Redukálás egyismeretlenes egyenletre az I_3 áramnak a kifejezésével, majd a többi egyenletbe való behelyettesítésével:

$$I_3 = \frac{E_1 - R_1 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) I_4}{R_3 + R_1}$$

$$E_2 = \left[R_2 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) + R_4 \right] I_4 - R_3 \frac{E_1 - R_1 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) I_4}{R_3 + R_1}$$

$$E_2 + \frac{R_3 E_1}{R_3 + R_1} = \left\{ \left[R_2 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) + R_4 \right] + \frac{R_3 R_1 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right)}{R_3 + R_1} \right\} I_4$$

$$I_4 = \frac{E_2 + \frac{R_3 E_1}{R_3 + R_1}}{\left[R_2 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) + R_4 \right] + \frac{R_3 R_1 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right)}{R_3 + R_1}} = 1,301 \text{ (A)}$$

$$I_3 = \frac{E_1 - R_1 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) I_4}{R_3 + R_1} = 0,457 \text{ (A)}$$

$$I_1 = I_4 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) + I_3 = 2,627 \text{ (A)}$$

$$I_2 = I_4 \left(1 + \frac{R_4}{R_5} \right) = 2,169 \text{ (A)}$$

$$I_5 = \frac{R_4}{R_5} I_4 = 0,867 \text{ (A)}$$

2.2-16.
(folyt.)

Megoldás: $I_1 = 2,627 \text{ (A)}$, $I_2 = 2,169 \text{ (A)}$, $I_3 = 0,457 \text{ (A)}$, $I_4 = 1,301 \text{ (A)}$, $I_5 = 0,867 \text{ (A)}$.

Az áramkörben folyó áram ismeretében visszatérünk az eredeti, nyílt áramköri szakaszokat is tartalmazó áramkörhöz, és kiszámítjuk a potenciálokat (2.2-17.).

Potenciálszámítás:

$$V_1 = V_0 + E_0 = 10 \text{ (V)}$$

$$V_2 = V_5 = V_8 = V_1 = 10 \text{ (V)}$$

$$V_3 = V_2 - R_1 I_1 = -3,135 \text{ (V)}$$

$$V_4 = V_3 + E_1 = 16,865 \text{ (V)}$$

$$V_5 = V_4 - R_3 I_3 = 10,01 \text{ (V)}$$

$$V_6 = V_4 - R_2 I_2 = 6,02 \text{ (V)}$$

$$V_7 = V_6 + E_2 = 36,02 \text{ (V)}$$

$$V_8 = V_7 - R_4 I_4 = 10 \text{ (V)}$$

$$V_9 = V_7 - R_5 I_5 = 10,01 \text{ (V)}$$

2.2-17.

Megjegyzés: mivel a 8, 5 és a 2 pont azonos potenciálon van az 1 ponttal, a V_8 és a V_5 potenciálok számított értékeinek eltérése a V_1 értékétől az áramok kiszámításakor tekintett közelítésekből adódik!!!

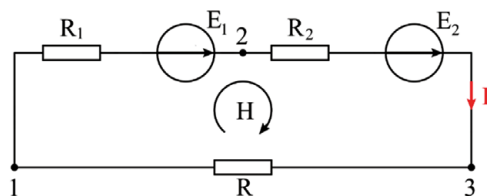
2.3. feladat

Tekintsünk egy zárt egyenáramú áramkört, amelyben két valós generátor (E_1 elektromotoros feszültség, R_1 belső ellenállás) és (E_2 elektromotoros feszültség, R_2 belső ellenállás), valamint egy terhelő ellenállás (R) vannak sorba kapcsolva. Számítsuk ki az áramkörben folyó áram erősségét a szuperpozíció-elv segítségével a következő esetekben:

- a) a generátorok elektromotoros feszültségeinek irányításai megegyeznek,
- b) a generátorok elektromotoros feszültségeinek irányításai ellentétesek.

2.3.1. Az a) megoldása

Az a) pont követelményeinek megfelelő áramkört a 2.3-1. ábra szemlélteti.



2.3-1. ábra

Ha mindkét áramforrás jelen van az áramkörben, a 2.3-1. huroktörvény értelmében az áramkörben folyó áram erősségét a 2.3-2. egyenlettel számolhatjuk ki.

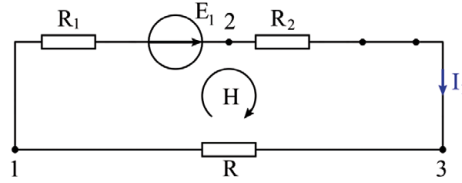
$$E_1 + E_2 = (R_1 + R_2 + R)I \quad 2.3-1.$$

$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R} \quad 2.3-2.$$

A szuperpozíció-elv alkalmazásakor minden egyes áramforrás kiiktatásával nyert újabb áramkörben az áram feltételezett irányítása meg kell egyezzen az eredeti áramkörben feltételezett áramiránnyal.

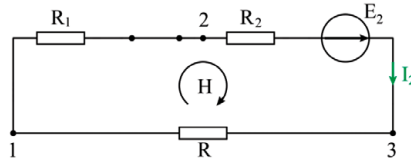
Először kiiktatjuk az E_2 feszültségforrást (2.3-2. ábra), és kiszámoljuk az áramkörben folyó áram erősségét (2.3-3.). Ezután kiiktatjuk az E_1 feszültségforrást (2.3-3. ábra), és kiszámoljuk az áramkörben folyó áram erősségét (2.3-4.). Ne feledkezzünk meg arról, hogy mindkét esetben a kiiktatott generátort a belső ellenállásával helyettesítettük!

A szuperpozíció-elv matematikai alakjának megfogalmazásakor az I_1 és az I_2 áramokat összeadjuk egymással (2.3-5.).



2.3-2. ábra

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R} \quad 2.3-3.$$



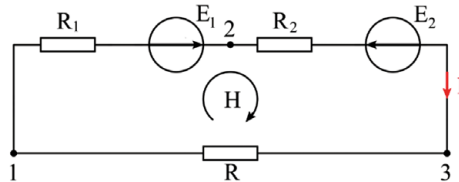
2.3-3. ábra

$$I_2 = \frac{E_2}{R_1 + R_2 + R} \quad 2.3-4.$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R} + \frac{E_2}{R_1 + R_2 + R} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R} \quad 2.3-5.$$

2.3.2. A b) megoldása

A b) pont követelményeinek megfelelő áramkört a 2.3-4. ábra szemlélteti.



2.3-4. ábra

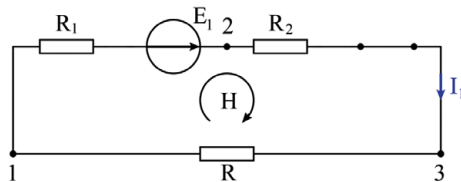
Ha mindkét áramforrás jelen van az áramkörben, a 2.3-6. huroktörvény értelmében az áramkörben folyó áram erősségét a 2.3-7. egyenlettel számolhatjuk ki.

$$E_1 - E_2 = (R_1 + R_2 + R)I \quad 2.3-6.$$

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R} \quad 2.3-7.$$

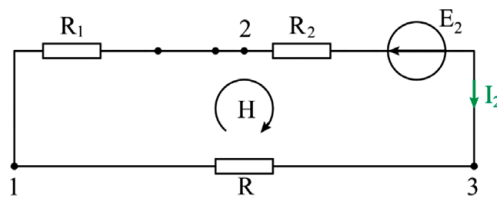
Az a) ponthoz hasonlóan, először kiiktatjuk az E_2 feszültségforrást (2.3-5. ábra), és kiszámoljuk az áramkörben folyó áram erősségét (2.3-8.). Ezután kiiktatjuk az E_1 feszültségforrást (2.3-6. ábra), és kiszámoljuk az áramkörben folyó áram erősségét (2.3-9.). Ne feledkezzünk meg arról, hogy mindkét esetben a kiiktatott generátort a belső ellenállásával helyettesítettük!

A szuperpozíció-elv matematikai alakjának megfogalmazásakor az I_1 és az I_2 áramokat összeadjuk egymással (2.3-10.).



2.3-5. ábra

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R} \quad 2.3-8.$$



2.3-6. ábra

$$I_2 = -\frac{E_2}{R_1 + R_2 + R} \quad 2.3-9.$$

$$I = I_1 + I_2 = \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R} - \frac{E_2}{R_1 + R_2 + R} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2 + R} \quad 2.3-10.$$

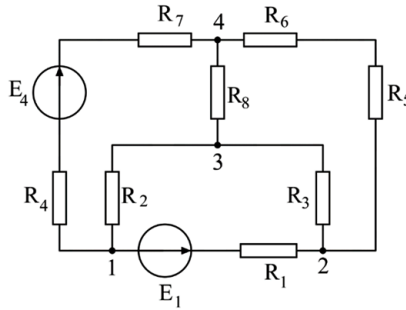
Megjegyzés: általános esetben, amikor az áramkörnek több ága van, a fenti számításokat minden egyes ágra vonatkozóan külön-külön el kell végezni. Az elv alkalmazása során a tanulmányozandó áramkörben áganként lerögzítünk egy pozitív irányítást, és az összes többi áramkörben az áramokat áganként ezeknek az irányításoknak megfelelően irányítjuk, így az áramokat előjelesen határozzuk meg, és az eredeti áramkör ágaiban folyó áramokat áganként az áramok algebrai összegeként kapjuk meg.

2.4. feladat

Tekintsük a 2.4-1. ábra által szemléltetett egyenáramú áramkört, amelyben adottak: $E_1 = 80\text{V}$, $E_4 = 80\text{V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 15\Omega$, $R_5 = 5\Omega$, $R_6 = 15\Omega$, $R_7 = 35\Omega$ és $R_8 = 40\Omega$.

Feladatok:

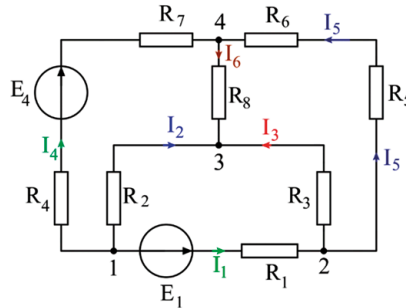
- jelöljük az áramkör ágaiban folyó áramokat,
- írjuk fel az összes lehetséges csomóponti és huroktörvényt,
- számoljuk ki az áramokat a Kirchhoff-egyenletekből felírt egyenletrendszerből.



2.4-1. ábra

2.4.1. Az a) megoldása

Az áramkörnek hat ága van, ennek megfelelően a 2.4-2. ábra hat feltételezett irányítású áramot szemléltet.



2.4-2. ábra

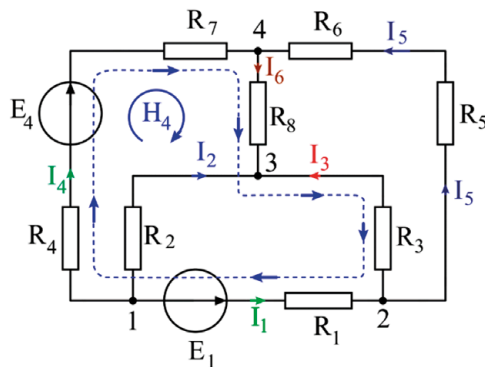
2.4.2. A b) megoldása

Áramköri analízis:

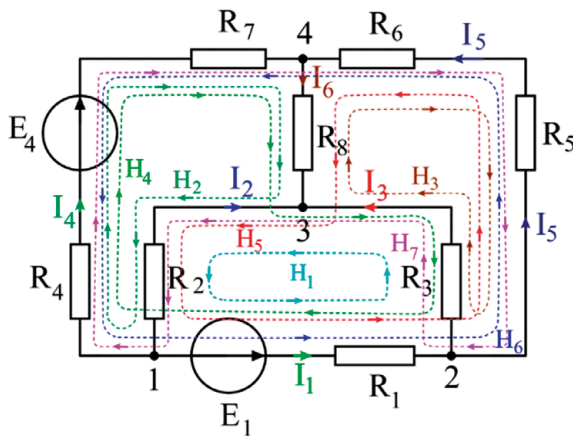
Nagyon fontos része a feladatmegoldásnak az áramköri ágak ($N_{\text{Ág}}$), csomópontok, hurkok (N_{Hurok}) és független hurkok (N_{FHurok}) számának meghatározása

(2.4-1.). A jobb áttekinthetőség kedvéért a 2.4-3. ábra szemléltet egyet a lehetséges hurkok közül (H_4), majd pedig a 2.4-4. ábra szemlélteti az összes lehetséges hurkot a hurktörvények felírásához szükséges feltételezett körüljárási irányokkal ($H_i, i = \overline{1,7}$).

$$N_{\hat{A}g} = 6; N_{cs} = 4; N_{Hurok} = 7 \rightarrow N_{FHurok} = N_{\hat{A}g} - N_{cs} + 1 = 3 \quad 2.4-1.$$



2.4-3. ábra



2.4-4. ábra

Áramköri ágak:

1. 1–2 cs. között: E_1 és R_1 sorosan vannak összekapcsolva és I_1 áram folyik,
2. 1–3 cs. között: R_2 ellenálláson I_2 áram folyik,
3. 2–3 cs. között: R_3 ellenálláson I_3 áram folyik,
4. 1–2 cs. között: R_4 , E_4 és R_7 sorosan vannak összekapcsolva és I_4 áram folyik,
5. 2–4 cs. között: R_5 és R_6 sorosan vannak összekapcsolva és I_4 áram folyik,
6. 4–3 cs. között: R_8 ellenálláson I_6 áram folyik.

Huroktörvények a 2.4-4. ábra jelöléseivel (2.4-2.):

$$\begin{array}{l|l}
 H_1 \text{ hurok: } E_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 & \\
 H_2 \text{ hurok: } E_4 = -R_2 I_2 + (R_4 + R_7) I_4 + R_8 I_6 & \\
 H_3 \text{ hurok: } 0 = R_3 I_3 - (R_5 + R_6) I_5 - R_8 I_6 & \\
 H_4 \text{ hurok: } E_4 - E_1 = -R_1 I_1 - R_3 I_3 + (R_4 + R_7) I_4 + R_8 I_6 & 2.4-2. \\
 H_5 \text{ hurok: } E_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + (R_5 + R_6) I_5 + R_8 I_6 & \\
 H_6 \text{ hurok: } E_1 - E_4 = R_1 I_1 - (R_4 + R_7) I_4 + (R_5 + R_6) I_5 & \\
 H_7 \text{ hurok: } E_4 = -R_2 I_2 + R_3 I_3 + (R_4 + R_7) I_4 - (R_5 + R_6) I_5 &
 \end{array}$$

Csomóponti törvények a 2.4-4. ábra jelöléseivel (2.4-3.):

$$\begin{array}{l|l}
 1. \text{ csomópont: } I_1 + I_2 + I_4 = 0 & \\
 2. \text{ csomópont: } I_1 - I_3 - I_5 = 0 & \\
 3. \text{ csomópont: } I_2 + I_3 + I_6 = 0 & 2.4-3. \\
 4. \text{ csomópont: } I_4 + I_5 - I_6 = 0 &
 \end{array}$$

2.4.3. A c) megoldása

A fentiekben (2.4-2. és 2.4-3.) 11 egyenlet található, amelyek közül 6 egymástól független egyenlet szükséges ahhoz, hogy az ismeretlen áramokat kiszámítsuk.

- » Mivel a négy csomóponti törvény egymástól nem független, nem választhatjuk ki mind a négyet egy egyenletrendszerhez.
- » Mivel maximum három huroktörvényt választhatunk ki, akkor a hét huroktörvény közül ki kell választanunk három egymástól független egyenletet (itt már vigyázni kell, mert több lehetőség is van arra, hogy három egyenletet kiválasszunk, amelyekből kettőnek az összege vagy különbsége a harmadikat adja). A három egymástól független huroktörvényhez pedig kiválaszthatunk három csomóponti törvényt.

a) Példák megoldható egyenletrendszerekre (2.4-4. és 2.4-5.)

1. Egyenletrendszer

$$\begin{array}{l|l}
 H_1 \text{ hurok: } E_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3 & \\
 H_2 \text{ hurok: } E_4 = -R_2 I_2 + (R_4 + R_7) I_4 + R_8 I_6 & \\
 H_3 \text{ hurok: } 0 = R_3 I_3 - (R_5 + R_6) I_5 - R_8 I_6 & \\
 1. \text{ csomópont: } I_1 + I_2 + I_4 = 0 & 2.4-4. \\
 2. \text{ csomópont: } I_1 - I_3 - I_5 = 0 & \\
 3. \text{ csomópont: } I_2 + I_3 + I_6 = 0 &
 \end{array}$$

2. Egyenletrendszer

H_1 hurok: $E_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3$	2.4-5.
H_2 hurok: $E_4 = -R_2 I_2 + (R_4 + R_7) I_4 + R_8 I_6$	
H_6 hurok: $E_1 - E_4 = R_1 I_1 - (R_4 + R_7) I_4 + (R_5 + R_6) I_5$	
2. csomópont: $I_1 - I_3 - I_5 = 0$	
3. csomópont: $I_2 + I_3 + I_6 = 0$	
4. csomópont: $I_4 + I_5 - I_6 = 0$	

Az egyenletrendszerek megoldása: $I_1 = 1,524$ (A), $I_2 = -1,905$ (A), $I_3 = 1,333$ (A),
 $I_4 = 0,38$ (A), $I_5 = 0,19$ (A), $I_6 = 0,571$ (A).

b) Példák határozatlan egyenletrendszerekre (nem oldhatók meg) (2.4-6. és 2.4-7.)

3. Egyenletrendszer

HATÁROZATLAN!!!	H_1 hurok: $E_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3$	2.4-6.
	H_2 hurok: $E_4 = -R_2 I_2 + (R_4 + R_7) I_4 + R_8 I_6$	
	H_4 hurok: $E_4 - E_1 = -R_1 I_1 - R_3 I_3 + (R_4 + R_7) I_4 + R_8 I_6$	
	2. csomópont: $I_1 - I_3 - I_5 = 0$	
	3. csomópont: $I_2 + I_3 + I_6 = 0$	
	4. csomópont: $I_4 + I_5 - I_6 = 0$	

- ha a H_2 huroktörvényből kivonjuk a H_1 huroktörvényt, amely a H_4 huroktörvényt adja eredményül.
- H_1 , H_2 és H_4 egymástól lineárisan függő egyenletek.

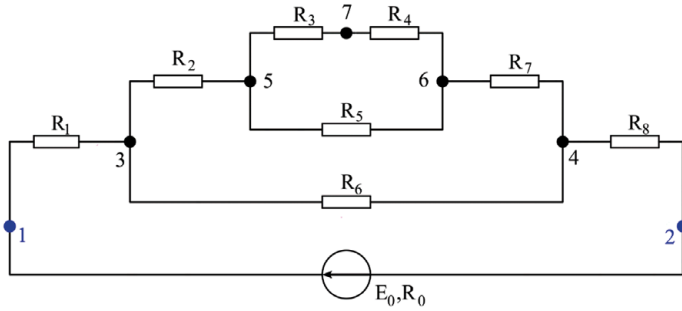
4. Egyenletrendszer

HATÁROZATLAN!!!	H_1 hurok: $E_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_3 I_3$	2.4-7.
	H_2 hurok: $E_4 = -R_2 I_2 + (R_4 + R_7) I_4 + R_8 I_6$	
	H_3 hurok: $0 = R_3 I_3 - (R_5 + R_6) I_5 - R_8 I_6$	
	H_4 hurok: $E_4 - E_1 = -R_1 I_1 - R_3 I_3 + (R_4 + R_7) I_4 + R_8 I_6$	
	H_5 hurok: $E_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + (R_5 + R_6) I_5 + R_8 I_6$	
	H_6 hurok: $E_1 - E_4 = R_1 I_1 - (R_4 + R_7) I_4 + (R_5 + R_6) I_5$	

- nem felel meg az $N_{FHurok} = 3$ követelménynek.
- Csak 3 huroktörvényt használhatunk fel.

2.5. feladat

A 2.5-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben: $E_0 = 10\text{V}$ a feszültséggenerátor elektromotoros feszültsége és $R_0 = 2\Omega$ a belső ellenállása, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 12\Omega$, $R_5 = 16\Omega$, $R_6 = 30\Omega$, $R_7 = 12\Omega$ és $R_8 = 18\Omega$.



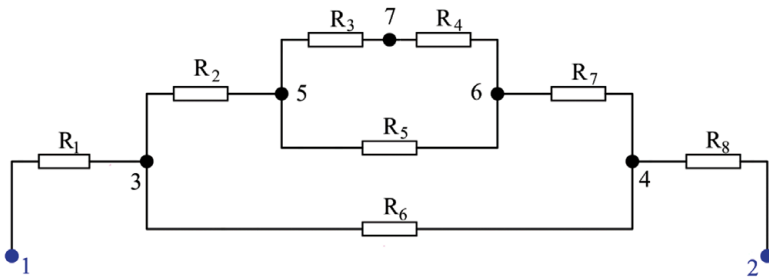
2.5-1. ábra

Feladatok:

- Számítsuk ki az 1 és 2 pontok közötti terhelés eredő ellenállását.
- Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramok erősségeit, valamint az egyes kétpólusokon megjelenő feszültségeket.
- Számítsuk ki az egyes kétpólusok által felvett teljesítményeket.
- Írjuk fel a teljesítménymérleg egyenletét.
- Mennyi energiát fogyaszt az áramkör egyóránnyi működés alatt?
- Mennyi az áramkör hatásfoka?

2.5.1. Az a) megoldása

A terhelés eredő ellenállását a 2.5-2. ábra alapján számíthatjuk ki.



2.5-2. ábra

Az 1.4. és az 1.5. fejezetekben tárgyalt egyszerű kapcsolásoknak megfelelően, az ábra által szemléltetett kapcsolásban az eredő ellenállást a következőképpen számíthatjuk ki:

– az R_3 és R_4 ellenállások sorba vannak kapcsolva, így az eredőjük (2.5-1.),

$$R'_{56} = R_3 + R_4 = 16 \, (\Omega) \quad 2.5-1.$$

– az R'_{56} eredő ellenállás párhuzamosan van kapcsolva az R_5 ellenállással, így az eredőjük $R_{56} = R'_{56} \times R_5$ (2.5-2.), vagyis

$$R_{56} = \frac{R'_{56} R_5}{R'_{56} + R_5} = 8 \, (\Omega) \quad 2.5-2.$$

– az R_2 , az R_{56} és az R_7 ellenállások sorba vannak kapcsolva, így az eredőjük (2.5-3.),

$$R'_{34} = R_2 + R_{56} + R_7 = 30 \, (\Omega) \quad 2.5-3.$$

– az R'_{34} eredő ellenállás párhuzamosan van kapcsolva az R_6 ellenállással, így az eredőjük $R_{34} = R'_{34} \times R_6$ (2.5-4.), vagyis

$$R_{34} = \frac{R'_{34} R_6}{R'_{34} + R_6} = 15 \, (\Omega) \quad 2.5-4.$$

– végül az R_1 , az R_{34} és az R_8 ellenállások sorba vannak kapcsolva, így az eredőjük (2.5-5.),

$$R_{eredő} \equiv R_{12} = R_1 + R_{34} + R_8 = 38 \, (\Omega) \quad 2.5-5.$$

A fentiekben megfogalmazott számítási menetet rövidítve is felírhatjuk a 2.5-6. képlettel,

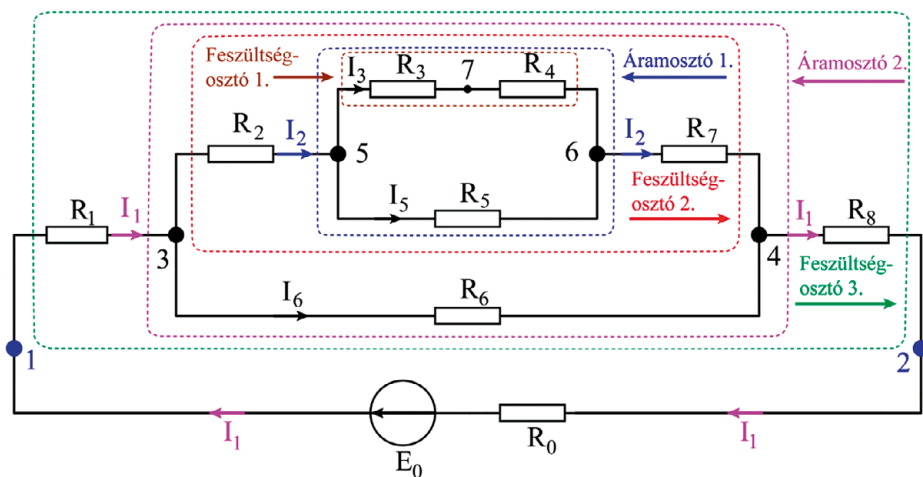
$$R_{eredő} \equiv R_{12} = R_1 + [(R_2 + [(R_3 + R_4) \times R_5] + R_7) \times R_6] + R_8 \quad 2.5-6.$$

vagy emeletes tört formájában (2.5-7.).

$$R_{eredő} \equiv R_{12} = R_1 + \frac{\left(R_2 + \frac{(R_3 + R_4) R_5}{R_3 + R_4 + R_5} + R_7 \right) R_6}{R_2 + \frac{(R_3 + R_4) R_5}{R_3 + R_4 + R_5} + R_7 + R_6} + R_8 = 38 \, (\Omega) \quad 2.5-7.$$

2.5.2. A b) megoldása

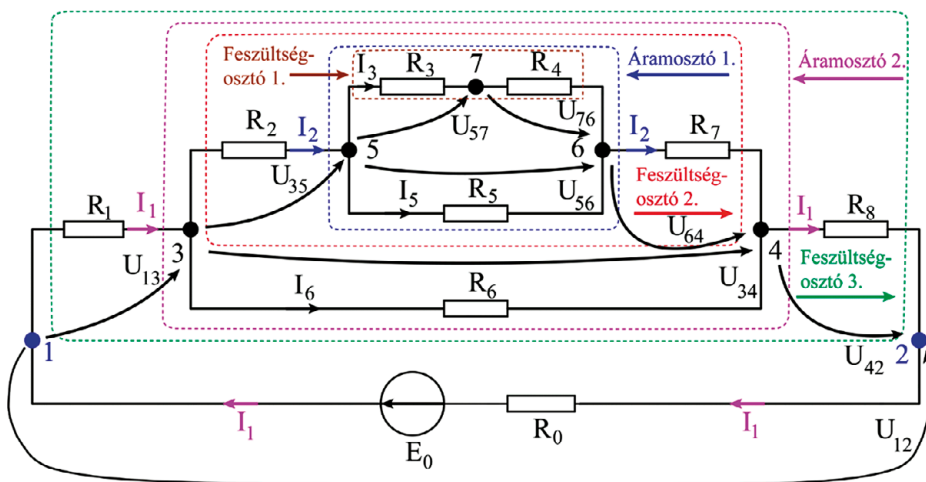
A 2.5-2. ábra szerint az áramkör olyan áram- és feszültségosztók (1.4. fejezet és 1.5. fejezet) kapcsolásából áll, amelyek mind eredő kétpólusokra vezethetők vissza. A 2.5-3. ábra szemlélteti azt, hogy két áramosztó és három feszültségosztó kapcsolásról van szó. Megjegyezzük, hogy a továbbiakban a valós generátort az ideális kétpólusokkal megjelenített modelljével, tehát egy E_0 elektromotoros feszültségű generátor és egy R_0 ellenállás soros kapcsolásával helyettesítjük.



2.5-3. ábra

A 2.5-4. ábra jelöléseivel a következőket állapíthatjuk meg:

- az „Áramosztó 1.” az 5–6 csomópontok között található; az ábra jelölései szerint az 5-ös csomópontban szétágazó vezetékek a befolyó I_2 áramot a kifolyó I_3 és I_5 áramokra „osztják”.
- az „Áramosztó 2.” a 3–4 csomópontok között található; az ábra jelölései szerint a 3-as csomópontban szétágazó vezetékek a befolyó I_1 áramot a kifolyó I_2 és I_6 áramokra „osztják”.
- a „Feszültségosztó 1.” az 5–6 csomópontok között található áramosztó felső ágában van, ahol az I_3 áram folyik, az R_3 és R_4 ellenállások által meghatározott arányban osztja le az U_{56} feszültséget az U_{57} és U_{76} feszültségekre.
- a „Feszültségosztó 2.” a 3–4 csomópontok között található áramosztó felső ágában van, ahol az I_2 áram folyik, az R_2 , $[(R_3 + R_4) \times R_5]$ és R_7 ellenállások által meghatározott arányban osztja le az U_{34} feszültséget az U_{35} , U_{56} és U_{64} feszültségekre.
- a „Feszültségosztó 3.” az 1–2 pontok között lévő valós egyenáramú feszültségforrás $U_{12} = E_0 - R_0 I_1$ kapocsfeszültségét, az R_1 , $[R_2 + (R_3 + R_4) \times R_5 + R_7] \times R_6$ és R_8 ellenállások által meghatározott arányban osztja le az U_{13} , U_{34} és U_{42} feszültségekre.

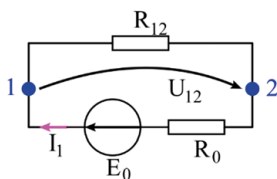


2.5-4. ábra

A főágban folyó áram (I_1 , generátor ága) kiszámításához a 2.5-7. egyenlet által adott eredő ellenállás értékét fogjuk felhasználni, és a huroktörvényt a 2.5-5. ábra által szemléltetett ekvivalens áramkörben írjuk fel (2.5-9.).

$$E_0 = (R_0 + R_{12})I_1 \quad 2.5-8.$$

$$I_1 = \frac{E_0}{R_0 + R_{12}} = \frac{10}{2 + 38} = 0,25 \text{ (A)} \quad 2.5-9.$$



2.5-5. ábra

A 2.5-4. ábra jelöléseit követve kiszámíthatjuk a „Feszültségosztó 3.” által létrehozott U_{13} (2.5-10.), U_{34} (2.5-11.) és U_{42} (2.5-12.) feszültségeket.

$$U_{13} = I_1 R_1 = 1,25 \text{ (V)} \quad 2.5-10.$$

$$U_{42} = I_1 R_8 = 4,5 \text{ (V)} \quad 2.5-11.$$

$$U_{34} = E_0 - U_{13} - U_{42} - I_1 R_0 = 3,75 \text{ (V)} \quad 2.5-12.$$

vagy

$$U_{34} = I_1 R_{34} = 3,75 \text{ (V)}$$

Az U_{34} ismeretében egy Ohm-törvényből könnyedén kiszámíthatjuk az „Áramosztó 2.” alsó ágában folyó I_6 áramot (2.5-13.).

$$I_6 = \frac{U_{34}}{R_6} = 0,125 \text{ (A)} \quad 2.5-13.$$

Az „Áramosztó 2.” felső ágában folyó I_2 áramot a 3-as csomópontra érvényes csomóponti törvényből számíthatjuk ki (2.5-14.).

$$I_1 = I_2 + I_6 \quad \rightarrow \quad I_2 = I_1 - I_6 = 0,125 \text{ (A)} \quad 2.5-14.$$

Az I_2 áram ismeretében, a 2.5-4. ábra jelöléseit követve kiszámíthatjuk a „Feszültségosztó 2.” által létrehozott U_{35} (2.5-15.), U_{56} (2.5-16.) és U_{64} (2.5-17.) feszültségeket.

$$U_{35} = I_2 R_2 = 1,25 \text{ (V)} \quad 2.5-15.$$

$$U_{64} = I_2 R_7 = 1,5 \text{ (V)} \quad 2.5-16.$$

$$U_{56} = U_{34} - U_{35} - U_{64} = 1 \text{ (V)} \quad \text{vagy} \quad 2.5-17.$$

$$U_{56} = I_2 R_{56} = 1 \text{ (V)}$$

Az U_{56} ismeretében egy Ohm-törvényből könnyedén kiszámíthatjuk az „Áramosztó 1.” alsó ágában folyó I_5 áramot (2.5-18.).

$$I_5 = \frac{U_{56}}{R_5} = 0,0625 \text{ (A)} \quad 2.5-18.$$

Az „Áramosztó 1.” felső ágában folyó I_3 áramot az 5-ös csomópontra érvényes csomóponti törvényből számíthatjuk ki (2.5-19.).

$$I_2 = I_3 + I_5 \quad \rightarrow \quad I_3 = I_2 - I_5 = 0,0625 \text{ (A)} \quad 2.5-19.$$

Az I_3 áram ismeretében, a 2.5-4. ábra jelöléseit követve kiszámíthatjuk a „Feszültségosztó 1.” által létrehozott U_{57} (2.5-20.) és U_{76} (2.5-21.) feszültségeket.

$$U_{57} = I_3 R_3 = 0,25 \text{ (V)} \quad 2.5-20.$$

$$U_{76} = I_3 R_4 = 0,75 \text{ (V)} \quad 2.5-21.$$

2.5.3. A c) megoldása

A teljesítménymérleg egyenletének felírásához szükségünk van minden kétpólus esetében az átfolyó áram erősségére és a kétpólusok kapcsain lévő feszültségekre. Mivel csak egy aktív áramköri elem van az áramkörben, ez kizárólag generátor üzemmódban működhet, míg minden más ellenállás (beleértve a generátor belső ellenállását is) fogyasztó. Ez a tény belátható abból is, hogy a 2.5-4. ábra szerinti jelölésekkel elvégzett számítások minden ágon pozitív előjelű áramot eredményeztek. A fogyasztói konvenció szerint számított teljesítmény az ellenállások esetében pozitív előjelű, a generátor üzemmódban működő feszültséggenerátorok esetében pedig negatív (1.6. fejezet).

Az adatokat az 1. táblázat foglalja össze. A táblázatban először a fogyasztói konvenciónak megfelelő előjellel tüntettük fel a teljesítményeket, amelynek a se-

gítségével el tudtuk dönteni, hogy mely kétpólusok generálják az elektromos teljesítményt. Ezek után már csak a teljesítmények abszolút értékeit tüntettük fel.

1. táblázat

	E_0	R_0	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8
Áram (A)	0,25	0,25	0,25	0,125	0,0625	0,0625	0,0625	0,125	0,125	0,25
Feszültség (V)	10	0,5	1,25	1,25	0,25	0,75	1	3,75	1,5	4,5
Generált teljesítmény (fogyasztói konvenció) (W) $P_E^{(fogy.konv.)}$	-2,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Fogyasztott teljesítmény (fogyasztói konvenció) (mW) $P_R^{(fogy.konv.)}$	–	125	312,5	156,25	15,625	46,875	62,5	468,75	187,5	1125
Generált teljesítmény (W) P_{gen}	2,5	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Fogyasztott teljesítmény (mW) P_{fogy}	–	125	312,5	156,25	15,625	46,875	62,5	468,75	187,5	1125
Generált össz- teljesítmény (W)	2,5	–								
Fogyasztott össz- teljesítmény (W)	–	2,5								

2.5.4. A d) megoldása

A teljesítménymérleg egyenletének megfelelően a generált és a fogyasztott teljesítmények egyenlők egymással, és a 2.5-22. alakban írható fel.

$$P_{gen} = P_{fogy} = 2,5 \text{ (W)}$$

2.5-22.

2.5.5. Az e) megoldása

Az egy óra, tehát 3600 s alatt elfogyasztott energiát a fogyasztott teljesítmény és az időtartam szorzata adja (2.5-23.).

$$Q_{fogy} = P_{fogy} \Delta t = 2,5 \cdot 3600 = 9000 (J) \quad 2.5-23.$$

2.5.6. Az f) megoldása

Az áramkör hatásfokát a befektetett teljesítmény és a hasznos teljesítmény aránya adja meg. A hasznos teljesítmény az 1–2 pontok között lévő terhelésen jelenik meg (tehát nem vesszük bele a generátor belső ellenállásán megjelenő teljesítményt). Ennek megfelelően a hatásfokot a 2.5-24. adja meg.

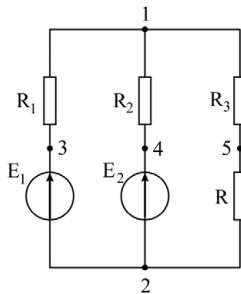
$$\eta = \frac{P_{haszn.}}{P_{befekt.}} = \frac{U_{12}I_1}{E_0I_1} = \frac{U_{12}}{E_0} = \frac{E_0 - R_0I_1}{E_0} = 1 - \frac{R_0I_1}{E_0} = 0,95 \text{ vagyis } \eta = 95\% \quad 2.5-24.$$

2.6. feladat

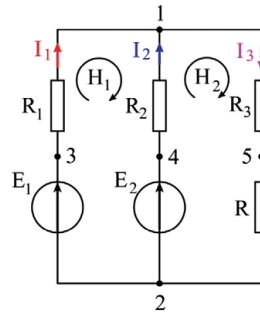
A 2.6-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben: $E_1 = 20V$, $E_2 = 10V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R = 5\Omega$.

Feladatok:

- Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat (2.6-2. ábra) a Thèvenin- és Norton-tételekkel, tárgyalva a tételek alkalmazásának különböző előnyeit és hátrányait.
- Számítsuk ki az áramkörben folyó áramokat a Millman-tétel alkalmazásával.
- Számítsuk ki az áramkörben folyó áramokat a szuperpozíció-elvvel.
- Számítsuk ki az áramkörben folyó áramokat a Kirchhoff-egyenletrendszerrel.



2.6-1. ábra



2.6-2. ábra

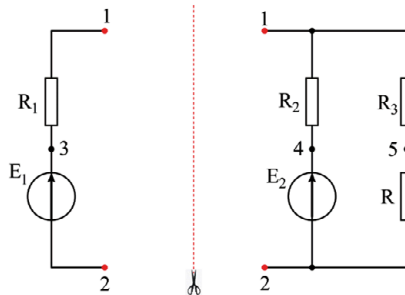
2.6.1. Thèvenin-tétel

Célunk a Thèvenin-tétel alkalmazásával kiszámítani az áramkör ágaiban folyó áramokat, kitérve a különböző választási lehetőségekre és a számításokban megjelenő következményekre.

2.6.1.1. Az I_1 áram kiszámítása

a) Első választási lehetőség

A 2.6-3. ábra azt az esetet szemlélteti, amikor a helyettesítő áramkörben meghagyjuk a teljes ágot, amelyben az I_1 áram folyik, tehát E_1 és R_1 soros kapcsolását. Az ábra jobb oldalán látható részt helyettesítjük egy ekvivalens feszültség-generátorral, és erről tápláljuk a bal oldalon látható kétpólust.



2.6-3. ábra

• A helyettesítő feszültségforrás elektromotoros feszültségének meghatározása

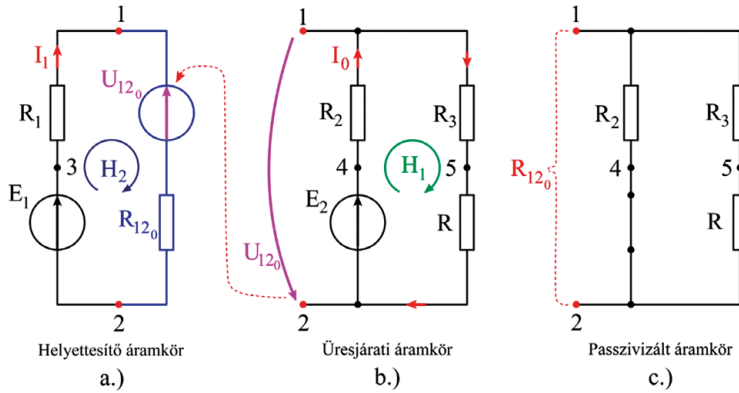
Az elektromotoros feszültség meghatározásához az üresjáratú áramkörben a szétválasztási pontok között lévő üresjáratú feszültséget kell kiszámítanunk (2.6-4. ábra b.). Az üresjáratú áramkörben jelöljük az üresjáratú feszültséget (U_{12_0}), majd kiszámítjuk. Ehhez az áramkörben folyó áramot kell ismernünk (2.6.1-2.),

$$E_2 = I_0(R_2 + R_3 + R) \quad 2.6.1-1.$$

$$I_0 = \frac{E_2}{R_2 + R_3 + R} = \frac{2}{7} \text{ (A)} \quad 2.6.1-2.$$

majd kiszámítjuk az üresjáratú feszültséget (2.6.1-3.).

$$U_{12_0} = I_0(R_3 + R) = \frac{50}{7} \text{ (V)} \quad 2.6.1-3.$$



2.6-4. ábra

Fontos lépés az, hogy az elektromotoros feszültséget megfelelőképpen irányítsuk a helyettesítő áramkörben (ld. 1.8.3. fejezet)!

• **A helyettesítő feszültségforrás belső ellenállásának meghatározása**

A helyettesítő feszültségforrás belső ellenállását az üresjáratú áramkör passziválásával létrehozott, ellenállásokat tartalmazó kapcsolásból számítjuk ki úgy, hogy a szétválasztási pontok között eredő ellenállást számolunk. Esetünkben (2.6-4. ábra c.) az R_3 és R ellenállások sorba vannak kapcsolva, míg ezeknek az eredője az R_2 ellenállással párhuzamosan van kapcsolva (2.6.1-4.).

$$R_{12_0} = (R_3 + R) \times R_2 = \frac{(R_3 + R)R_2}{R_2 + R_3 + R} = \frac{50}{7} (\Omega) \quad 2.6.1-4.$$

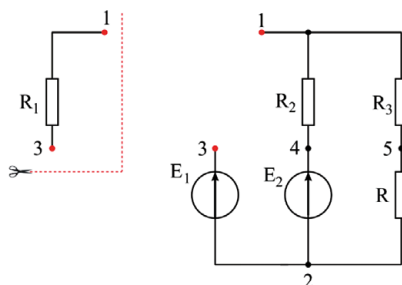
• **Az ágba folyó áram meghatározása a helyettesítő áramkörben**

A keresett I_1 áramot egyszerűen a helyettesítő áramkörben (2.6-4. ábra a.) felírt huroktörvényből számíthatjuk ki (2.6.1-5.).

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{12_0}}{R_1 + R_{12_0}} = 0,75 (A) \quad 2.6.1-5.$$

b) Második választási lehetőség

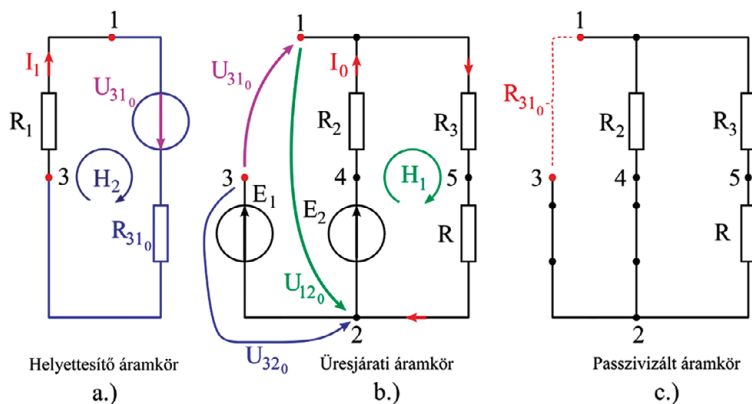
A 2.6-5. ábra azt az esetet szemlélteti, amikor a helyettesítő áramkörben csak az R_1 ellenállást hagyjuk meg, amelyen az I_1 áram átfolyik. Az ábra jobb oldalán látható részt helyettesítjük egy ekvivalens feszültséggenerátorral, és erről tápláljuk a bal oldalon látható kétpólust.



2.6-5. ábra

• **A helyettesítő feszültségforrás elektromotoros feszültségének meghatározása**

Az elektromotoros feszültség meghatározásához az üresjáratú áramkörben a szétválasztási pontok között lévő üresjáratú feszültséget kell kiszámítanunk (2.6-6. ábra b.).



2.6-6. ábra

Az üresjáratú áramkörben jelöljük az üresjáratú feszültséget (U_{31_0}), majd kiszámítjuk. Ehhez az áramkörben folyó áramot kell ismernünk, amelyet az a) pontnak megfelelően a 2.6.1-2. képlet adja meg, az U_{12_0} feszültséget pedig a 2.6.1-3. egyenlettel számíthatjuk ki. Az üresjáratú feszültséget a 2.6-6. ábra b) részének megfelelően az U_{12_0} és az $U_{32_0} = E_1$ feszültségek segítségével számolhatjuk ki (2.6.1-6.) (ld. 1.3.3. fejezet!).

$$U_{12_0} = U_{32_0} - U_{31_0} \quad \rightarrow \quad U_{31_0} = U_{32_0} - U_{12_0} \quad 2.6.1-6.$$

Fontos lépés az, hogy az elektromotoros feszültséget megfelelőképpen irányítsuk a helyettesítő áramkörben (ld. 1.8.3. fejezet)!

Megjegyzés: az üresjáratú feszültség meghatározása az a) pontban egyszerűbb, mivel megoldható egy Ohm-törvénnyel. A b) pontban két feszültséget kell figyelembe vennünk az üresjáratú feszültség kiszámításánál, amelyeket természetesen polaritásuknak és az eredő feszültség választott polaritásának megfelelően kell összegezni (2.6.1-6.). Ez a lépés gondot okozhat azoknál, akik még nem mélyítették el tudásukat, nem gyakoroltak eleget, és a tapasztalat azt mutatja, hogy ilyenkor találgatásra szorúlnak az előjeleket illetően. Az a) esetben ilyenre nincs szükség, így értelemszerűen ez a szétválasztás az egyszerűbb az ezt követő számítások tekintetében!!!

• **A helyettesítő feszültségforrás belső ellenállásának meghatározása**

Mivel a 2.6-6. ábra b) részének passzivizálása ugyanazt az ellenállás-kapcsolást adja (2.6-6. ábra c.), mint a 2.6-4. ábra b) részének passzivizálása, ezért az R_{31_0} belső ellenállás megegyezik az a) pontban számított R_{12_0} belső ellenállással.

$$R_{31_0} \equiv R_{12_0} = \frac{(R_3 + R)R_2}{R_2 + R_3 + R} = \frac{50}{7} (\Omega) \quad 2.6.1-7.$$

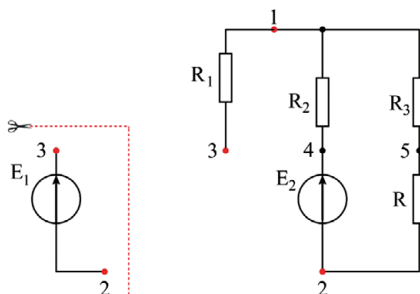
• **Az ágba folyó áram meghatározása a helyettesítő áramkörben**

A keresett I_1 áramot egyszerűen a helyettesítő áramkörben (2.6-6. ábra a.) felírt huroktörvényből számíthatjuk ki (2.6.1-8.), amely megegyezik a 2.6.1-5. által adott eredménnyel.

$$I_1 = \frac{U_{31_0}}{R_1 + R_{31_0}} = \frac{U_{32_0} - U_{12_0}}{R_1 + R_{31_0}} = \frac{E_1 - U_{12_0}}{R_1 + R_{31_0}} \equiv \frac{E_1 - U_{12_0}}{R_1 + R_{12_0}} = 0,75 (A) \quad 2.6.1-8.$$

c) Harmadik választási lehetőség

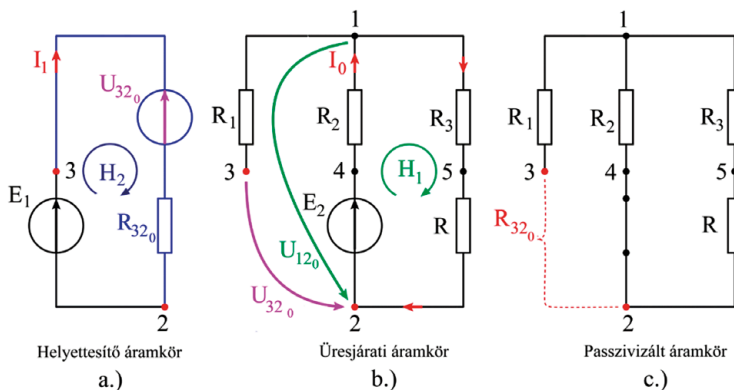
A 2.6-7. ábra azt az esetet szemlélteti, amikor a helyettesítő áramkörben csak az E_1 feszültséggenerátort hagyjuk meg, amelyen az I_1 áram átfolyik. Az ábra jobb oldalán látható részt helyettesítjük egy ekvivalens feszültséggenerátorral, és erről tápláljuk a bal oldalon látható kétpólust.



2.6-7. ábra

• **A helyettesítő feszültségforrás elektromotoros feszültségének meghatározása**

Az elektromotoros feszültség meghatározásához az üresjáratú áramkörben a szétválasztási pontok között lévő üresjáratú feszültséget kell kiszámítanunk (2.6-8. ábra b.).



2.6-8. ábra

Az üresjáratú áramkörben jelöljük az üresjáratú feszültséget (U_{32_0}), majd kiszámítjuk. Ehhez az áramkörben folyó áramot kell ismernünk, amelyet az a) pontnak megfelelően a 2.6.1-2. összefüggés adja meg, az U_{12_0} feszültséget pedig a 2.6.1-3. egyenlettel számolhatjuk ki. Mivel az R_1 ellenálláson nem folyik át áram, az U_{32_0} üresjáratú feszültség (2.6.1-9.) azonos az U_{12_0} feszültséggel (2.6.1-3.) (2.6-8. ábra b.).

$$U_{32_0} \equiv U_{12_0} = I_0(R_3 + R) = \frac{E_2(R_3 + R)}{R_2 + R_3 + R} = \frac{50}{7} \text{ (V)} \quad 2.6.1-9.$$

Fontos lépés az, hogy az elektromotoros feszültséget megfelelőképpen irányítsuk a helyettesítő áramkörben (ld. 1.8.3. fejezet)!

• **A helyettesítő feszültségforrás belső ellenállásának meghatározása**

A helyettesítő feszültségforrás belső ellenállását az üresjáratú áramkör passziválásával létrehozott, ellenállásokat tartalmazó kapcsolásból számítjuk ki úgy, hogy a szétválasztási pontok között eredő ellenállást számolunk. Esetünkben (2.6-8. ábra c.) az R_3 és R ellenállások sorba vannak, ezeknek az eredője az R_2 ellenállással párhuzamosan, és az így kapott eredő az R_1 ellenállással sorba van kapcsolva (2.6.1-10.).

$$R_{32_0} = R_1 + (R_3 + R) \times R_2 = R_1 + \frac{(R_3 + R)R_2}{R_2 + R_3 + R} = \frac{120}{7} \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.6.1-10.$$

• **Az ágba folyó áram meghatározása a helyettesítő áramkörben**

A keresett I_1 áramot egyszerűen a helyettesítő áramkörben (2.6-8. ábra a.) felírt huroktörvényből számíthatjuk ki (2.6.1-11.), amely megegyezik a 2.6.1-5. által adott eredménnyel.

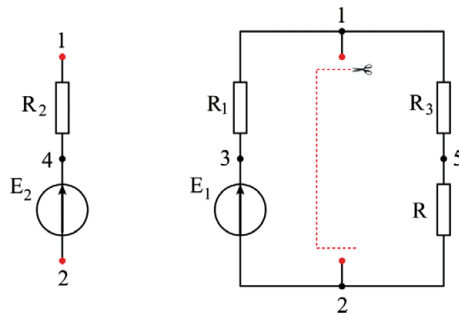
$$I_1 = \frac{E_1 - U_{32_0}}{R_{32_0}} \equiv \frac{E_1 - U_{12_0}}{R_1 + R_{12_0}} = 0,75 \text{ (A)} \quad 2.6.1-11.$$

2.6.1.2. Az I_2 áram kiszámítása

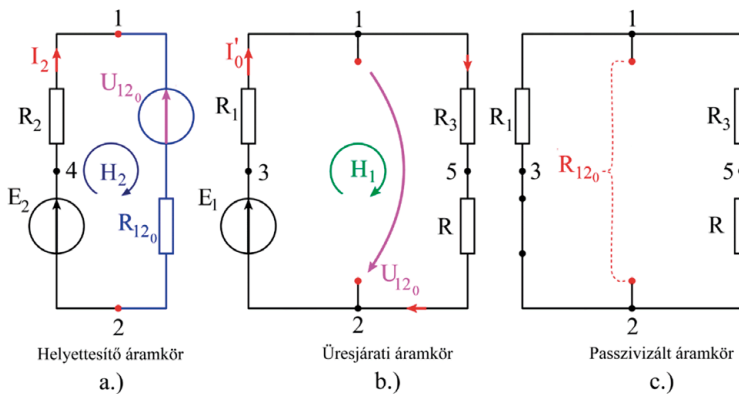
Az I_2 áram meghatározásánál a 2.6.1.1. fejezetben leírtaknak megfelelően járhatunk el, így csak az ábrákat és a számításokat adjuk meg ebben az alpontban, a magyarázó szöveg nélkül.

a) **Első választási lehetőség**

– az E_2 feszültséggenerátor és az R_2 ellenállás soros kapcsolását választjuk le (2.6-9. ábra), amelyek a helyettesítő áramkörbe kerülnek, és az áramkör többi részét helyettesítjük egy feszültséggenerátorral,



2.6-9. ábra



2.6-10. ábra

$$E_1 = I'_0(R_1 + R_3 + R) \quad 2.6.1-12.$$

$$I'_0 = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R} = \frac{4}{7} \text{ (A)} \quad 2.6.1-13.$$

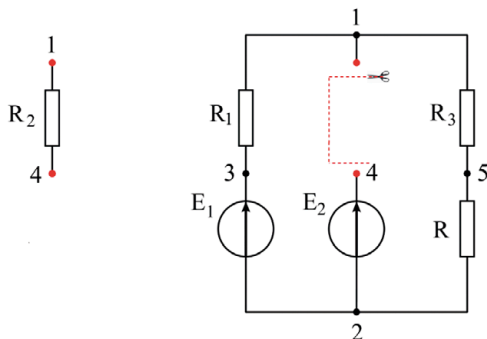
$$U_{12_0} = I'_0(R_3 + R) = \frac{100}{7} \text{ (V)} \quad 2.6.1-14.$$

$$R_{12_0} = (R_3 + R) \times R_1 = \frac{(R_3 + R)R_1}{R_1 + R_3 + R} = \frac{50}{7} \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.6.1-15.$$

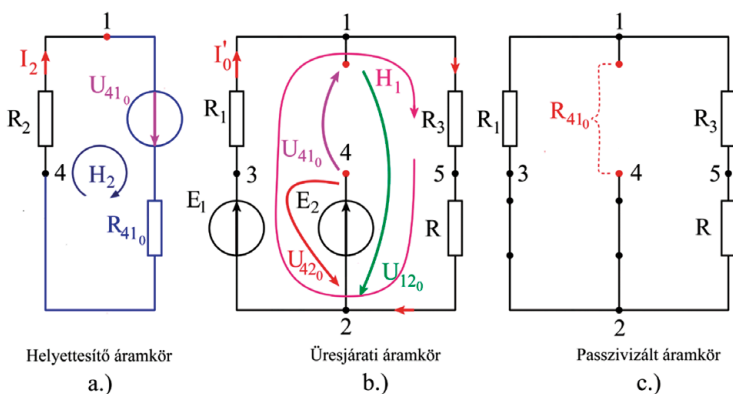
$$I_2 = \frac{E_2 - U_{12_0}}{R_2 + R_{12_0}} = -0,25 \text{ (A)}. \quad 2.6.1-16.$$

b) Második választási lehetőség

– az R_2 ellenállást választjuk le (2.6-11. ábra), amely a helyettesítő áramkörbe kerül, és az áramkör többi részét helyettesítjük egy feszültséggenerátorral,



2.6-11. ábra



2.6-12. ábra

$$E_1 = I'_0(R_1 + R_3 + R) \quad 2.6.1-17.$$

$$I'_0 = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R} = \frac{4}{7} \text{ (A)} \quad 2.6.1-18.$$

$$U_{12_0} = I'_0(R_3 + R) = \frac{100}{7} \text{ (V)} \quad 2.6.1-19.$$

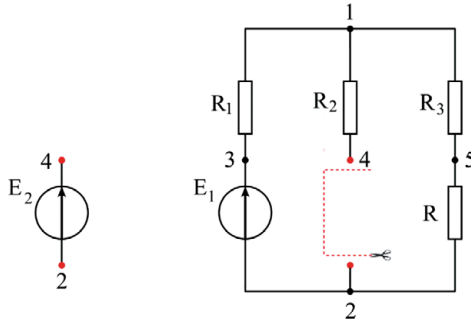
$$U_{12_0} = U_{42_0} - U_{41_0} = E_2 - U_{41_0} \rightarrow U_{41_0} = U_{42_0} - U_{12_0} = -\frac{30}{70} \text{ (V)} \quad 2.6.1-20.$$

$$R_{12_0} = (R_3 + R) \times R_1 = \frac{(R_3 + R)R_1}{R_1 + R_3 + R} = \frac{50}{7} \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.6.1-21.$$

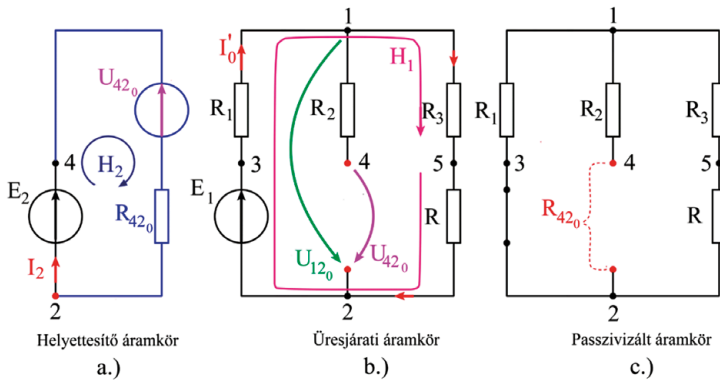
$$I_2 = \frac{U_{41_0}}{R_2 + R_{41_0}} = -0,25 \text{ (A)}. \quad 2.6.1-22.$$

c) Harmadik választási lehetőség

– az E_2 feszültséggenerátort választjuk le (2.6-13. ábra), amely a helyettesítő áramkörbe kerül, és az áramkör többi részét helyettesítjük egy feszültséggenerátorral,



2.6-13. ábra



2.6-14. ábra

$$E_1 = I'_0(R_1 + R_3 + R) \quad 2.6.1-23.$$

$$I'_0 = \frac{E_1}{R_1 + R_3 + R} = \frac{4}{7} \text{ (A)} \quad 2.6.1-24.$$

$$U_{42_0} \equiv U_{12_0} = I'_0(R_3 + R) = \frac{100}{7} \text{ (V)} \quad 2.6.1-25.$$

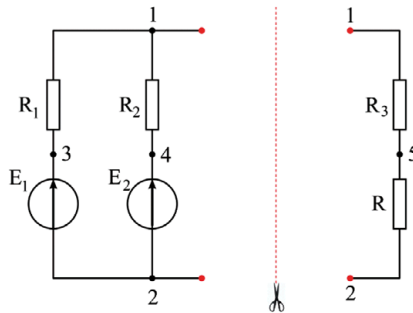
$$R_{42_0} = R_2 + (R_3 + R) \times R_1 = R_2 + \frac{(R_3 + R)R_1}{R_1 + R_3 + R} = \frac{120}{7} \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.6.1-26.$$

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{42_0}}{R_{42_0}} = -0,25 \text{ (A)}. \quad 2.6.1-27.$$

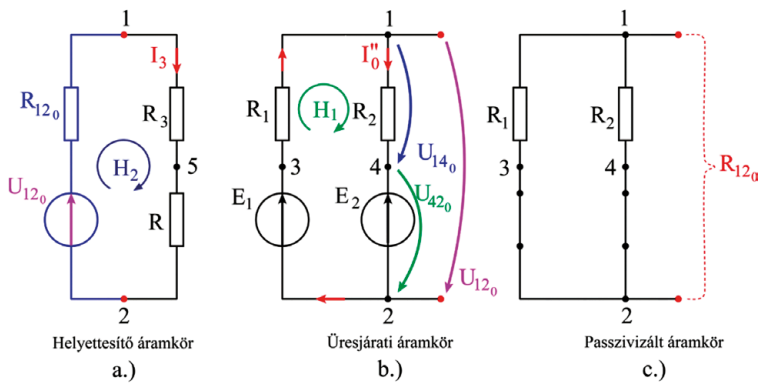
2.6.1.3. Az I_3 áram kiszámítása

a) Első választási lehetőség

– az R_3 és R ellenállások soros kapcsolását választjuk le (2.6-15. ábra), amelyek a helyettesítő áramkörbe kerülnek, és az áramkör többi részét helyettesítjük egy feszültséggenerátorral,



2.6-15. ábra



2.6-16. ábra

$$E_1 - E_2 = I_0''(R_1 + R_2) \quad 2.6.1-28.$$

$$I_0'' = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ (A)} \quad 2.6.1-29.$$

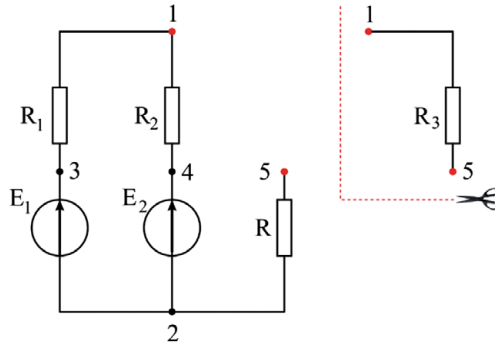
$$U_{12_0} = U_{14_0} + U_{42_0} = I_0''R_2 + E_2 = 15 \text{ (V)} \quad 2.6.1-30.$$

$$R_{12_0} = R_1 \times R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 5 \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.6.1-31.$$

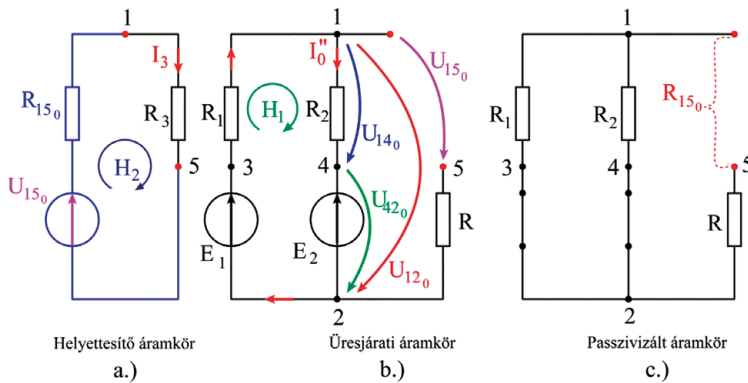
$$I_3 = \frac{U_{12_0}}{R_{12_0} + R_3 + R} = 0,5 \text{ (A)}. \quad 2.6.1-32.$$

b) Második választási lehetőség

– az R_3 ellenállást választjuk le (2.6-17. ábra), amely a helyettesítő áramkörbe kerül, és az áramkör többi részét helyettesítjük egy feszültséggenerátorral,



2.6-17. ábra



2.6-18. ábra

$$E_1 - E_2 = I_0''(R_1 + R_2) \quad 2.6.1-33.$$

$$I_0'' = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ (A)} \quad 2.6.1-34.$$

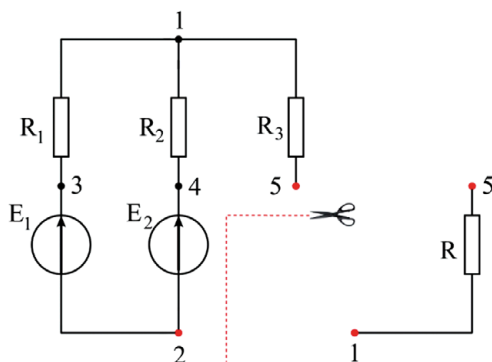
$$U_{15_0} \equiv U_{12_0} = U_{14_0} + U_{42_0} = I_0''R_2 + E_2 = 15 \text{ (V)} \quad 2.6.1-35.$$

$$R_{12_0} = R + R_1 \times R_2 = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 10 \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.6.1-36.$$

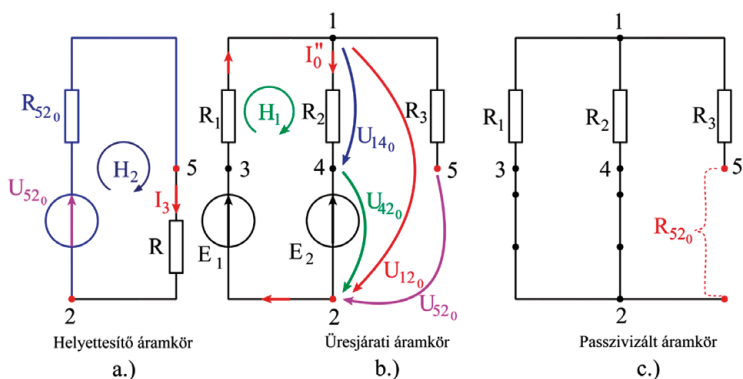
$$I_3 = \frac{U_{15_0}}{R_{15_0} + R_3} = 0,5 \text{ (A)}. \quad 2.6.1-37.$$

c) Harmadik választási lehetőség

– az R ellenállást választjuk le (2.6-19. ábra), amely a helyettesítő áramkörbe kerül, és az áramkör többi részét helyettesítjük egy feszültséggenerátorral,



2.6-19. ábra



2.6-20. ábra

$$E_1 - E_2 = I_0''(R_1 + R_2) \quad 2.6.1-38.$$

$$I_0'' = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} = 0,5 \text{ (A)} \quad 2.6.1-39.$$

$$U_{52_0} \equiv U_{12_0} = U_{14_0} + U_{42_0} = I_0'' R_2 + E_2 = 15 \text{ (V)} \quad 2.6.1-40.$$

$$R_{52_0} = R_3 + R_1 \times R_2 = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 25 \text{ } (\Omega) \quad 2.6.1-41.$$

$$I_3 = \frac{U_{52_0}}{R_{52_0} + R} = 0,5 \text{ (A)} \quad 2.6.1-42.$$

2.6.2. Norton-tétel

Célunk a Norton-tétel alkalmazásával kiszámítani az áramkör ágaiban folyó áramokat, kiterve a különböző választási lehetőségekre és a számításokban megjelenő következményekre.

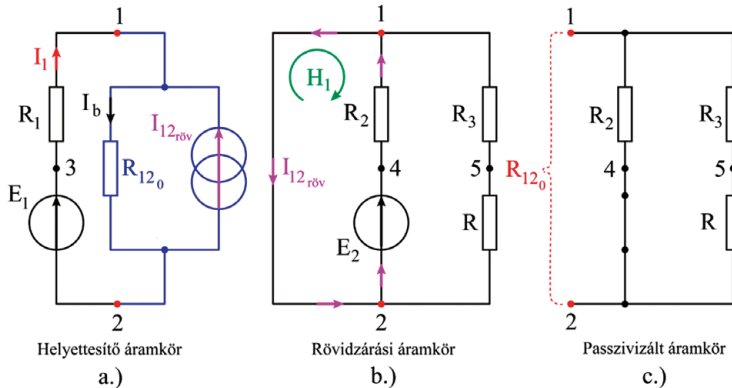
2.6.2.1. Az I_1 áram kiszámítása

a) Első választási lehetőség

A 2.6-3. ábra azt az esetet szemlélteti, amikor a helyettesítő áramkörben meghagyjuk a teljes ágot, amelyben az I_1 áram folyik, tehát E_1 és R_1 soros kapcsolását. Az ábra jobb oldalán látható részt helyettesítjük egy ekvivalens áramgenerátorral, és erről tápláljuk a bal oldalon látható kétpólust. A helyettesítésre kiválasztott áramköri résznek kiszámítjuk a zárlati áramát és a belső ellenállását.

• A helyettesítő áramgenerátor forrásáramának meghatározása

A forrásáram meghatározásához a szétválasztási pontokat rövidre zárjuk (nulla ellenállású dróttal), és kiszámítjuk a rövidzáron folyó áram erősségét (rövidzárási áram) (2.6-21. ábra b.).



2.6-21. ábra

A rövidzárási áramkörben jelöljük a rövidzárási áram technikai irányát ($I_{12_{\text{röv}}}$), majd kiszámítjuk. Ehhez azt a tényt kell figyelembe vennünk, hogy ha egy kizárólag ellenállásokat tartalmazó ág rövidre van zárva, akkor ebben az ágba nem folyik áram (2.6.2-1.).

$$E_2 = I_{12_{\text{röv}}} R_2 \quad \rightarrow \quad I_{12_{\text{röv}}} = \frac{E_2}{R_2} = 1 \text{ (A)} \quad 2.6.2-1.$$

Fontos lépés az, hogy az áramgenerátort megfelelően megjelenítsük a helyettesítő áramkörben (1.8.4. fejezet).

• **A helyettesítő áramforrás belső ellenállásának meghatározása**

A helyettesítő áramforrás belső ellenállását ugyanúgy határozzuk meg, mint a Thèvenin-tétel alkalmazása esetén ugyanarra a helyettesített áramköri részre, tehát ugyanúgy, mint az a) pontban (2.6.1-4.).

Megjegyzés: sokszor elkövetett hiba az, hogy a passzivizálást a rövidzárási áramkörben végzik el úgy, hogy meghagyják a rövidzárt. **Figyelem:** az így létrehozott ellenállás-kapcsolás eredő ellenállása minden esetben nulla!!! A belső ellenállást mindig a Thèvenin-tételnek megfelelően kell elvégezni, tehát ha valaki a rövidzárási áramkört passzivizálja, akkor meg kell szüntetnie a rövidzárt, és a szétválasztási pontokat ismért üresjárásba kell hoznia!!!

• **Az ágba folyó áram meghatározása a helyettesítő áramkörben**

A 2.6-21. ábra a) része mutatja be a Norton-tétel alkalmazásával nyert helyettesítő áramkört. Ha ezt összevetjük a megfelelő szétválasztás esetében (2.6.1.1. a) pont) a Thèvenin-tétellel létrehozott helyettesítő áramkörrel (2.6-4. ábra a.), akkor azt tapasztalhatjuk, hogy a Norton-tétel egy bonyolultabb áramkört eredményez, amelyben még mindig van két ismeretlen áram. A keresett I_1 áramot már nem lehet egyszerűen egy huroktételből kiszámítani. Ez azt is sugallhatja, hogy ez a módszer bonyolultabb, hiszen még további számításokra van szükség. Azonban ez így nem teljesen igaz. Össze kell vetni azt, hogy milyen számítást kellett elvégezni ebben az esetben a rövidzárási áram kiszámításához, és milyen számításokat kellett elvégezni a 2.6.1.1. a) pontban az üresjáratú feszültség kiszámításához. Minél bonyolultabb a szétválasztás során a helyettesítésre szánt áramkör, annál több számítást kell elvégezni a Thèvenin-tétel alkalmazásánál, mint a Norton-tétel alkalmazásánál. Ehhez azonban jól kell megválasztani a szétválasztási pontokat. A Norton-tételt akkor lehet igazán hatékonyan alkalmazni, amikor a szétválasztást két csomópont között végezzük, így teljes ágakat lehet rövidre zárni! Ellenpélda magyarázattal a 2.6.2.1. b) pontban lesz.

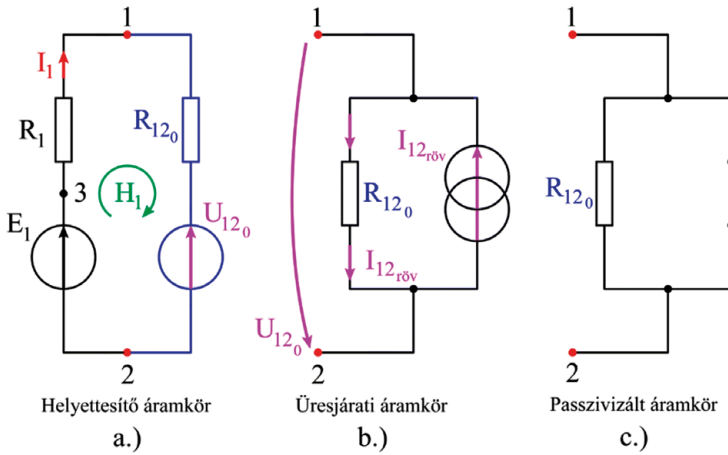
A további számításokat többféleképpen elvégezhetjük, azonban a leghatékonyabb a Thèvenin-tétel alkalmazása a Norton-tétellel létrehozott áramgenerátor feszültséggenerátorral való helyettesítésére (2.6-22. ábra). A helyettesítő generátor elektromotoros feszültségét egy Ohm-törvényből számítjuk ki (2.6-22. ábra b.),

és az 1.8.3. fejezetben leírtaknak megfelelően irányítjuk az újabb helyettesítő áramkörben (2.6-22. ábra a.).

$$U_{12_0} = I_{12_{r\ddot{o}v}} R_{12_0} = \frac{50}{7} \text{ (V)} \quad 2.6.2-2.$$

A helyettesítő generátor belső ellenállását az üresjárásban hagyott áramkör (2.6-22. ábra b.) passzivizálásával létrehozott ellenállás-kapcsolásból számítjuk ki (2.6-22. ábra c.). Mivel kizárólag az áramgenerátor belső ellenállása marad meg, így egyértelmű, hogy ebben az esetben a két generátor belső ellenállása ugyanaz (R_{12_0}). Az így nyert helyettesítő áramkörben (2.6-22. ábra a.) már egy huroktörvényből kiszámíthatjuk a keresett áramot (2.6.2-3.).

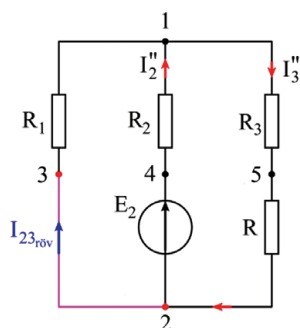
$$I_1 = \frac{E_1 - U_{12_0}}{R_1 + R_{12_0}} = \frac{E_1 - I_{12_{r\ddot{o}v}} R_{12_0}}{R_1 + R_{12_0}} = 0,75 \text{ (A)} \quad 2.6.2-3.$$



2.6-22. ábra

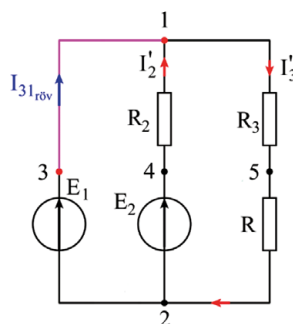
b) Második és harmadik választási lehetőség

A (2.6-5. ábra) és a (2.6-7. ábra) azokat az eseteket szemlélteti, amikor a helyettesítő áramkörben csak az R_1 ellenállást vagy az E_1 elektromotoros feszültségű ideális generátort hagyjuk meg, amelyiken I_1 áram átfolyik.



Rövidzárási áramkör

2.6-23. ábra



Rövidzárási áramkör

2.6-24. ábra

A (2.6-23. ábra) és a (2.6-24. ábra) a két megfelelő rövidzárási áramkört szemlélteti. Megfigyelhető, hogy mindkét esetben a rövidzárási áramok meghatározásához a megoldás szempontjából az eredeti áramkörrel (2.6-1. ábra) azonos „nehézségi fokú” áramkört kapunk, így a Norton-tétel alkalmazása csak egy plusz teher (fölsőlegesnek mondható). **Megjegyzés:** nem helytelen így megoldani a feladatot, de nem egyszerűsít, így nem célszerű!!! A megoldást nem is folytatjuk ebben a két esetben.

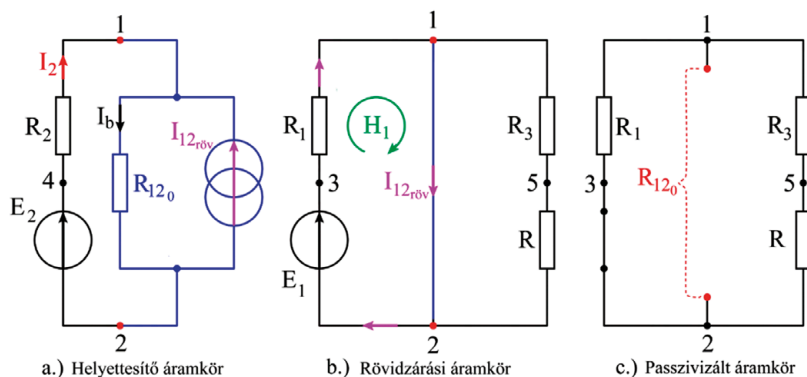
2.6.2.2. Az I_2 áram kiszámítása

a) Első választási lehetőség

A 2.6-9. ábra azt az esetet szemlélteti, amikor a helyettesítő áramkörben meghagyjuk a teljes ágot, amelyben az I_2 áram folyik, tehát E_2 és R_2 soros kapcsolását. Az ábra jobb oldalán látható részt helyettesítjük egy ekvivalens áramgenerátorral, és erről tápláljuk a bal oldalon látható kétpólust. A helyettesítésre kiválasztott áramköri résznek kiszámítjuk a zárlati áramát és a belső ellenállását.

• A helyettesítő áramgenerátor forrásáramának meghatározása

A forrásáram meghatározásához a szétválasztási pontokat rövidre zárjuk (nulla ellenállású vezetékkel), és kiszámítjuk a vezetékeken folyó áram erősségét (zárlati áram) (2.6-25. ábra b.).



2.6-25. ábra

A rövidzárási áramkörben jelöljük a rövidzárási áram technikai irányát ($I_{12_{rov}}$), majd kiszámítjuk. Ehhez azt a tényt kell figyelembe vennünk, hogy ha egy rövidzár párhuzamosan van kapcsolva egy áramköri ággal, amelyben csak ellenállások találhatók, akkor az ellenállásokat tartalmazó ágban nem folyhat áram (2.6.2-4.).

$$E_1 = I_{12_{rov}} R_1 \quad \rightarrow \quad I_{12_{rov}} = \frac{E_1}{R_1} = 2 \text{ (A)} \quad 2.6.2-4.$$

Fontos lépés az, hogy az áramgenerátort megfelelően megjelenítsük a helyettesítő áramkörben (1.8.4. fejezet).

• A helyettesítő áramforrás belső ellenállásának meghatározása

A helyettesítő áramforrás belső ellenállását ugyanúgy határozzuk meg, mint a Thèvenin-tétel alkalmazása esetén ugyanarra a helyettesített áramköri részre, tehát ugyanúgy, mint a 2.6.1.2. a) pontban (2.6.1-15.).

Megjegyzés: sokszor elkövetett hiba az, hogy a passzivizálást a rövidzárási áramkörben végzik el úgy, hogy meghagyják a rövidzárt. **Figyelem:** az így létrehozott ellenállás-kapcsolás eredő ellenállása minden esetben nulla!!! A belső ellenállást mindig a Thèvenin-tételnek megfelelően kell elvégezni, tehát ha valaki a rövidzárási áramkört passzivizálja, akkor meg kell szüntetnie a rövidzárt, és a szétválasztási pontokat ismét üresjárásba kell hoznia!!!

• Az ágban folyó áram meghatározása a helyettesítő áramkörben

A 2.6-25. ábra a) része mutatja be a Norton-tétel alkalmazásával nyert helyettesítő áramkört. Ha ezt összevetjük a megfelelő szétválasztás esetében (2.6.1.2. a) pont) a Thèvenin-tétellel létrehozott helyettesítési áramkörrel (2.6-10. ábra a.), akkor azt tapasztalhatjuk, hogy a Norton-tétel egy bonyolultabb áramkört eredményez, amelyben még mindig van két ismeretlen áram. A keresett I_2 áramot már nem lehet egyszerűen egy huroktételből kiszámítani. Ez azt is sugallhatja, hogy ez

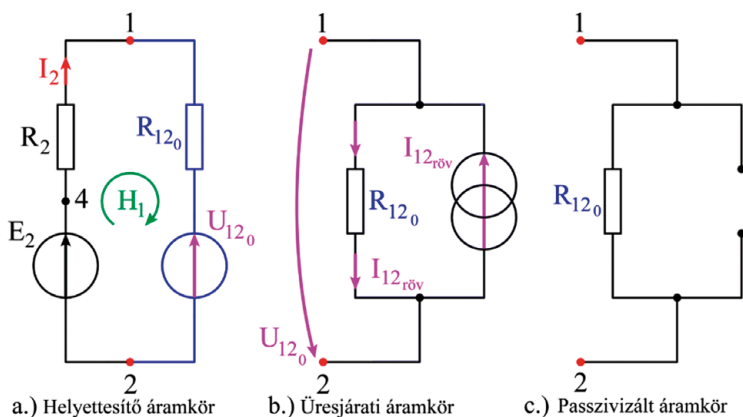
a módszer bonyolultabb, hiszen még további számításokra van szükség. Azonban ez így nem teljesen igaz. Össze kell vetni azt, hogy milyen számítást kellett elvégezni ebben az esetben a rövidzárási áram kiszámításához, és milyen számításokat kellett elvégezni a 2.6.1.2. a) pontban az üresjáratú feszültség kiszámításához. Minél bonyolultabb a szétválasztás során a helyettesítésre szánt áramkör, annál több számítást kell elvégezni a Thèvenin-tétel alkalmazásánál, mint a Norton-tétel alkalmazásánál. Ehhez azonban jól kell megválasztani a szétválasztási pontokat. A Norton-tételt akkor lehet igazán hatékonyan alkalmazni, amikor a szétválasztást két csomópont között végezzük, így teljes ágakat lehet rövidre zárni! Ellenpélda magyarázattal a 2.6.2.2. b) pontban lesz.

A további számításokat többféleképpen elvégezhetjük, azonban a leghatékonyabb a Thèvenin-tétel alkalmazása a Norton-tétellel létrehozott áramgenerátor feszültséggenerátorral való helyettesítésére (2.6-26. ábra). A helyettesítő generátor elektromotoros feszültségét egy Ohm-törvényből számítjuk ki (2.6-26. ábra b.), és az 1.8.3. fejezetben leírtaknak megfelelően irányítjuk az újabb helyettesítő áramkörben (2.6-26. ábra a.).

$$U_{12_0} = I_{12_{r\ddot{o}v}} R_{12_0} = \frac{100}{7} \text{ (V)} \quad 2.6.2-5.$$

A helyettesítő generátor belső ellenállását az üresjáratú áramkör (2.6-26. ábra b.) passzivizálásával létrehozott ellenállás-kapcsolásból (2.6-26. ábra c.) számítjuk ki. Mivel kizárólag az áramgenerátor belső ellenállása marad meg, így egyértelmű, hogy ebben az esetben a két generátor belső ellenállása ugyanaz (R_{12_0}). Az így nyert helyettesítő áramkörben (2.6-26. ábra a.) már egy huroktörvényből kiszámíthatjuk a keresett áramot (2.6.2-6.).

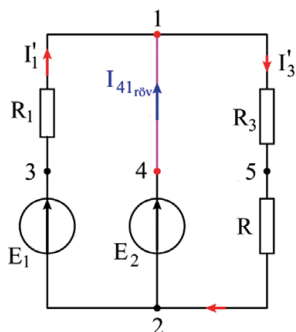
$$I_2 = \frac{E_2 - U_{12_0}}{R_2 + R_{12_0}} = \frac{E_2 - I_{12_{r\ddot{o}v}} R_{12_0}}{R_2 + R_{12_0}} = -0,25 \text{ (A)} \quad 2.6.2-6.$$



2.6-26. ábra

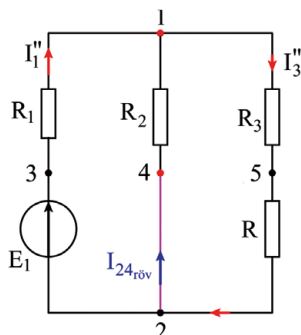
b) Második és harmadik választási lehetőség

A 2.6-11. ábra és a 2.6-13. ábra azokat az eseteket szemlélteti, amikor a helyettesítő áramkörben csak az R_2 ellenállást vagy az E_2 elektromotoros feszültségű ideális generátort hagyjuk meg, amelyen I_2 áram átfolyik.



Rövidzárási áramkör

2.6-27. ábra



Rövidzárási áramkör

2.6-28. ábra

A 2.6-27. ábra és a 2.6-28. ábra a két megfelelő rövidzárási áramkört szemlélteti. Megfigyelhető, hogy mindkét esetben a rövidzárási áramok meghatározásához a megoldás szempontjából az eredeti áramkörrel (2.6-1. ábra) azonos „nehézségi fokú” áramkört kapunk, így a Norton-tétel alkalmazása csak egy plusz teher (főlőslegesenek mondható). **Megjegyzés:** nem helytelen így megoldani a feladatot, de nem egyszerűsít, így nem célszerű!!! A megoldást nem is folytatjuk e két esetben.

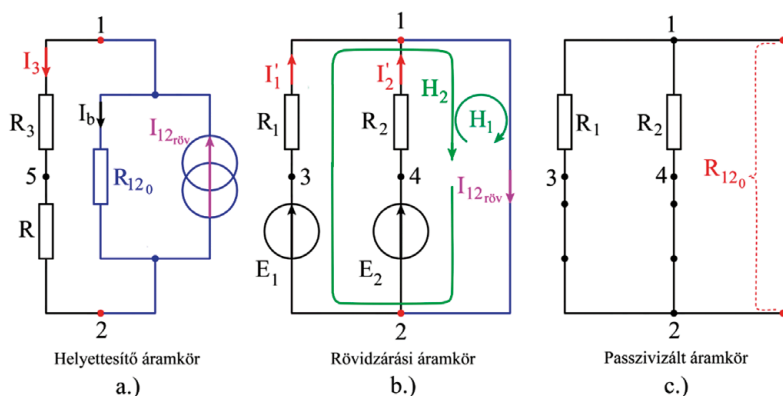
2.6.2.3. Az I_3 áram kiszámítása

a) Első választási lehetőség

A 2.6-15. ábra azt az esetet szemlélteti, amikor a helyettesítő áramkörben meghagyjuk a teljes ágot, amelyben az I_3 áram folyik, tehát R_3 és R soros kapcsolását. Az ábra jobb oldalán látható részt helyettesítjük egy ekvivalens áramgenerátorral, és erről tápláljuk a bal oldalon látható kétpólust. A helyettesítésre kiválasztott áramköri résznek kiszámítjuk a zárlati áramát és a belső ellenállását.

• A helyettesítő áramgenerátor forrásáramának meghatározása

A forrásáram meghatározásához a szétválasztási pontokat rövidre zárjuk (nulla ellenállású vezetékkel), és kiszámítjuk a vezetéken folyó áram erősségét (zárlati áram) (2.6-29. ábra b.).



2.6-29. ábra

A rövidzárási áramkörben jelöljük a rövidzárási áram technikai irányát ($I_{12\text{röv}}$), majd kiszámítjuk. A (2.6-29. ábra b.) jelölései alapján a két huroktörvény a 2.6.2-7. és a 2.6.2-8. egyenletekkel adható meg, amelyek egymástól függetlenek, a rövidzárási áram pedig az 1. csomópontra érvényes csomóponti törvényből számítható ki (2.6.2-9.).

$$E_1 = I'_1 R_1 \quad \rightarrow \quad I'_1 = \frac{E_1}{R_1} = 2 \text{ (A)} \quad 2.6.2-7.$$

$$E_2 = I'_2 R_2 \quad \rightarrow \quad I'_2 = \frac{E_2}{R_2} = 1 \text{ (A)} \quad 2.6.2-8.$$

$$I_{12\text{röv}} = I'_1 + I'_2 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = 3 \text{ (A)} \quad 2.6.2-9.$$

Fontos lépés az, hogy az áramgenerátort megfelelően megjelenítsük a helyettesítő áramkörben (1.8.4. fejezet).

• **A helyettesítő áramforrás belső ellenállásának meghatározása**

A helyettesítő áramforrás belső ellenállását ugyanúgy határozzuk meg, mint a Thèvenin-tétel alkalmazása esetén ugyanarra a helyettesített áramköri részre, tehát ugyanúgy, mint a 2.6.1.3. a) pontban (2.6.1-31.).

Megjegyzés: sokszor elkövetett hiba az, hogy a passzivizálást a rövidzárási áramkörben végzik el úgy, hogy meghagyják a rövidzárt. **Figyelem:** az így létrehozott ellenállás-kapcsolás eredő ellenállása minden esetben nulla!!! A belső ellenállást mindig a Thèvenin-tételnek megfelelően kell elvégezni, tehát ha valaki a rövidzárási áramkört passzivizálja, akkor meg kell szüntetnie a rövidzárt, és a szétválasztási pontokat ismét üresjárásba kell hoznia!!!

• **Az ágba folyó áram meghatározása a helyettesítő áramkörben**

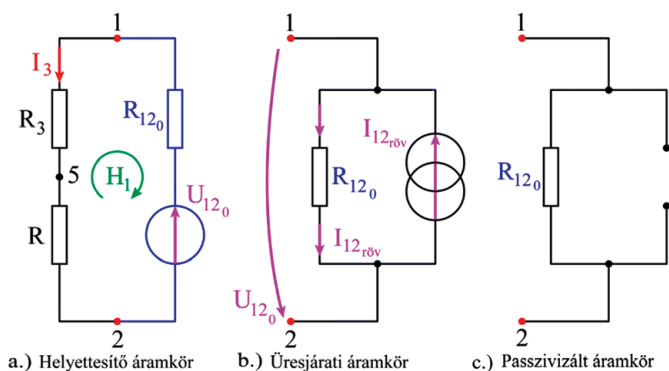
A 2.6-29. ábra a.) része mutatja be a Norton-tétel alkalmazásával nyert helyettesítő áramkört. Ha ezt összevetjük a megfelelő szétválasztás esetében (2.6.1.3. a) pont) a Thèvenin-tétellel létrehozott helyettesítési áramkörrel (2.6-16. ábra a.), akkor azt tapasztalhatjuk, hogy a Norton-tétel egy bonyolultabb áramkört eredményez, amelyben még mindig van két ismeretlen áram. A keresett I_3 áramot már nem lehet egyszerűen egy huroktételből kiszámítani. Ez azt is sugallhatja, hogy ez a módszer bonyolultabb, hiszen még további számításokra van szükség. Azonban ez így nem teljesen igaz. Össze kell vetni azt, hogy milyen számítást kellett elvégezni ebben az esetben a rövidzárási áram kiszámításához, és milyen számításokat kellett elvégezni a 2.6.1.3. a) pontban az üresjáratú feszültség kiszámításához. Minél bonyolultabb a szétválasztás során a helyettesítésre szánt áramkör, annál több számítást kell elvégezni a Thèvenin-tétel alkalmazásánál, mint a Norton-tétel alkalmazásánál. Ehhez azonban jól kell megválasztani a szétválasztási pontokat. A Norton-tételt akkor lehet igazán hatékonyan alkalmazni, amikor a szétválasztást két csomópont között végezzük, így teljes ágakat lehet rövidre zárni! Ellenpélda magyarázattal a 2.6.2.3. b) alponthban lesz.

A további számításokat többféleképpen elvégezhetjük, azonban a leghatékonyabb a Thèvenin-tétel alkalmazása a Norton-tétellel létrehozott áramgenerátor feszültséggenerátorral való helyettesítésére (2.6-30. ábra). A helyettesítő generátor elektromotoros feszültségét egy Ohm-törvényből számítjuk ki (2.6-26. ábra b.), és az 1.8.3. fejezetben leírtaknak megfelelően irányítjuk az újabb helyettesítő áramkörben (2.6-26. ábra a.).

$$U_{12_0} = I_{12_{r\ddot{o}v}} R_{12_0} = 15 \text{ (V)} \quad 2.6.2-10.$$

A helyettesítő generátor belső ellenállását az üresjáratú áramkör (2.6-30. ábra b.) passzivizálásával létrehozott ellenállás-kapcsolásból (2.6-30. ábra c.) számítjuk ki. Mivel kizárólag az áramgenerátor belső ellenállása marad meg, így egyértelmű, hogy ebben az esetben a két generátor belső ellenállása ugyanaz (R_{12_0}). Az így nyert helyettesítő áramkörben (2.6-30. ábra a.) már egy huroktörvényből kiszámíthatjuk a keresett áramot (2.6.2-11.).

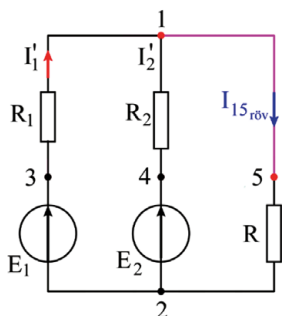
$$I_3 = \frac{U_{12_0}}{R_3 + R + R_{12_0}} = \frac{I_{12_{r\ddot{o}v}} R_{12_0}}{R_3 + R + R_{12_0}} = 0,5 \text{ (A)} \quad 2.6.2-11.$$



2.6-30. ábra

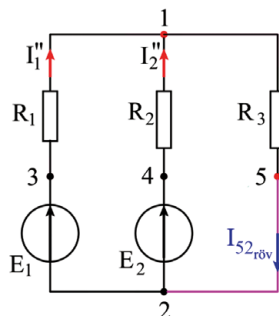
b) Második és harmadik választási lehetőség

A 2.6-17. ábra és a 2.6-19. ábra azokat az eseteket szemlélteti, amikor a helyettesítő áramkörben csak az R_3 ellenállást vagy az R ellenállást hagyjuk meg, amelyen I_3 áram átfolyik.



Rövidzárási áramkör

2.6-31. ábra



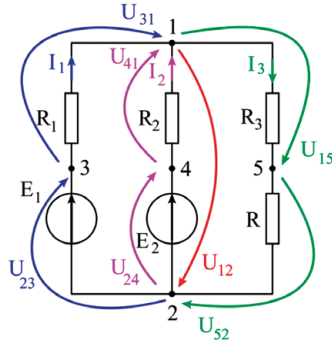
Rövidzárási áramkör

2.6-32. ábra

A 2.6-31. ábra és a 2.6-32. ábra a két megfelelő rövidzárási áramkört szemlélteti. Megfigyelhető, hogy mindkét esetben a rövidzárási áramok meghatározásához egy, az eredeti áramkörrel (2.6-1. ábra) azonos architektúrájú, tehát megoldás szempontjából azonos nehézségi szintű áramkört kapunk, így a Norton-tétel alkalmazása csak egy plusz teher (fölszelegesnek mondható). **Megjegyzés:** nem helytelen így megoldani a feladatot, de nem egyszerűsít, így nem célszerű!!! A megoldást nem is folytatjuk e két esetben.

2.6.3. Millman-tétel

Mivel az áramkör két csomópontot tartalmaz, három egymással párhuzamos ág található benne (2.6-33. ábra), így alkalmazható a Millman-tétel a csomópontok közötti feszültség kiszámítására (2.6.3-1.).



2.6-33. ábra

$$U_{12} = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + R}} = 12,5 \text{ (V)} \quad 2.6.3-1.$$

Megjegyzés: általában a Millman-tétellel kiszámított feszültség lehet pozitív vagy negatív előjelű is (jelen esetben az előjel pozitív), amely fontos információval szolgál az áramkör ágaiban folyó áramok irányait illetően is!!!

A 2.6.3-1. ismeretében már könnyű dolgunk van, mert az I_3 áramot egy Ohm-törvényből számíthatjuk ki (2.6.3-2.) (az áram iránya megfelel a 2.6-33. ábra jelöléseinek).

$$I_3 = \frac{U_{12}}{R_3 + R} = 0,5 \text{ (V)} \quad 2.6.3-2$$

Az I_2 áramot az áramkör középső ágában az U_{12} , $U_{24} = -E_2$ és $U_{41} = I_2 R_2$ feszültségek segítségével számíthatjuk ki (2.6.3-3.) (ha az áram értéke pozitív, akkor a feltételezett áramirány a valós áramirány, ha negatív, akkor annak az ellenkezője).

$$U_{12} = -U_{24} - U_{41} = E_2 - I_2 R_2 \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{12}}{R_2} = -0,25 \text{ (A)} \quad 2.6.3-3.$$

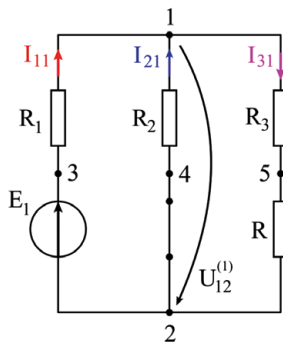
Az I_1 áramot az áramkör bal oldali ágában az U_{12} , $U_{23} = -E_1$ és $U_{31} = I_1 R_1$ feszültségek segítségével számíthatjuk ki (2.6.3-4.) (ha az áram értéke pozitív, akkor a feltételezett áramirány a valós áramirány, ha negatív, akkor annak az ellenkezője).

$$U_{12} = -U_{23} - U_{31} = E_1 - I_1 R_1 \quad \rightarrow \quad I_1 = \frac{E_1 - U_{12}}{R_1} = 0,75 \text{ (A)} \quad 2.6.3-4.$$

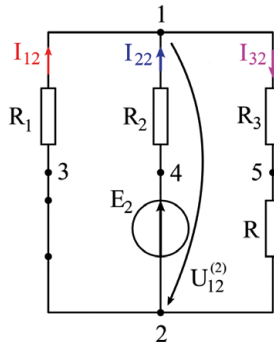
2.6.4. Szuperpozíció-elv

A szuperpozíció elvének alkalmazásakor az eredeti áramkörből (2.6-2. ábra) sorra kiiktatjuk az E_2 (2.6-34. ábra), majd az E_1 (2.6-35. ábra) feszültségforrásokat, és kiszámoljuk az áramkör ágaiban folyó áramokat. **Figyelem:** mindkét esetben,

minden egyes ágbaan ugyanazokat az áramirányításokat feltételezzük, mint az eredeti áramkörben (2.6-2. ábra)!



2.6-34. ábra



2.6-35. ábra

Az E_2 feszültségforrás kiiktatásával létrejött áramkörben az I_{11} , I_{21} , I_{31} áramok folynak az áramkör ágaiban, amelyeket a (2.6.4-1.), (2.6.4-3.) és (2.6.4-4.) összefüggésekkel számolhatunk ki.

$$I_{11} = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2(R_3 + R)}{R_2 + R_3 + R}} = \frac{7}{6} \text{ (A)} \quad 2.6.4-1.$$

$$U_{12}^{(1)} = E_1 - I_{11}R_1 = \frac{25}{3} \text{ (V)} \quad 2.6.4-2.$$

$$I_{21} = -\frac{U_{12}^{(1)}}{R_2} = -\frac{5}{6} \text{ (A)} \quad 2.6.4-3.$$

$$I_{31} = \frac{U_{12}^{(1)}}{R_3 + R} = \frac{1}{3} \text{ (A)} \quad 2.6.4-4.$$

Az E_1 feszültségforrás kiiktatásával létrejött áramkörben az I_{12} , I_{22} , I_{32} áramok folynak az áramkör ágaiban, amelyeket a 2.6.4-5., 2.6.4-7. és 2.6.4-8. összefüggésekkel számolhatunk ki.

$$I_{22} = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1(R_3 + R)}{R_1 + R_3 + R}} = \frac{7}{12} \text{ (A)} \quad 2.6.4-5.$$

$$U_{12}^{(2)} = E_2 - I_{22}R_2 = \frac{25}{6} \text{ (V)} \quad 2.6.4-6.$$

$$I_{12} = -\frac{U_{12}^{(2)}}{R_1} = -\frac{5}{12} \text{ (A)} \quad 2.6.4-7.$$

$$I_{32} = \frac{U_{12}^{(2)}}{R_3 + R} = \frac{1}{6} \text{ (A)} \quad 2.6.4-8.$$

A szuperpozíció-elvet úgy fogalmazzuk meg matematikailag, hogy az áramforrások kiiktatásával nyert áramkörben, a különböző ágakban folyó áramoknál a pozitív irányítás minden esetben a 2.6-2. ábra jelölései szerint történik (2.6.4-9., 2.6.4-10. és 2.6.4-11.).

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = 0,75 \text{ (A)} \quad 2.6.4-9.$$

$$I_2 = I_{21} + I_{22} = -0,25 \text{ (A)} \quad 2.6.4-10.$$

$$I_3 = I_{31} + I_{32} = 0,5 \text{ (A)} \quad 2.6.4-11.$$

2.6.5. Kirchhoff-egyenletrendszer

Áramköri analízis:

- » az áramköri ágak száma $N_{\text{Ág}} = 3$, ennek megfelelően három áram van az áramkörben (2.6-2. ábra),
- » a csomópontok száma $N_{\text{Cs}} = 2$,
- » a független hurkok száma $N_{\text{FHurok}} = N_{\text{Ág}} - N_{\text{Cs}} + 1 = 2$, ennek megfelelően két huroktörvényt használhatunk az egyenletrendszerben.

Egy lehetséges Kirchhoff-egyenletrendszert a (2.6-2. ábra) jelölései alapján a (2.6.5-1.) formában írhatjuk fel.

$$\begin{array}{l} H_1 \text{ hurok:} \\ H_2 \text{ hurok:} \\ 1. \text{ csomópont:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_2 I_2 \\ E_2 = R_2 I_2 + (R_3 + R) I_3 \\ I_1 + I_2 - I_3 = 0 \end{array} \right. \quad 2.6.5-1.$$

Az egyenletrendszer szimbolikus megoldása (2.6.5-2.):

$$\begin{array}{l} I_3 = I_1 + I_2 \\ E_2 = R_2 I_2 + (R_3 + R)(I_1 + I_2) = (R_3 + R)I_1 + (R_2 + R_3 + R)I_2 \\ I_2 = \frac{E_2}{R_2 + R_3 + R} - \frac{R_3 + R}{R_2 + R_3 + R} I_1 \\ E_1 - E_2 = R_1 I_1 - R_2 \left(\frac{E_2}{R_2 + R_3 + R} - \frac{R_3 + R}{R_2 + R_3 + R} I_1 \right) \\ E_1 - E_2 + \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R} E_2 = \left(R_1 + R_2 \frac{R_3 + R}{R_2 + R_3 + R} \right) I_1 \\ E_1(R_2 + R_3 + R) - E_2(R_3 + R) = [R_1(R_2 + R_3 + R) + R_2(R_3 + R)] I_1 \\ I_1 = \frac{E_1(R_2 + R_3 + R) - E_2(R_3 + R)}{R_1(R_2 + R_3 + R) + R_2(R_3 + R)} = 0,75 \text{ (A)} \\ I_2 = \frac{E_2}{R_2 + R_3 + R} - \frac{R_3 + R}{R_2 + R_3 + R} I_1 = -0,25 \text{ (A)} \\ I_3 = I_1 + I_2 = 0,5 \text{ (A)} \end{array} \quad 2.6.5-2.$$

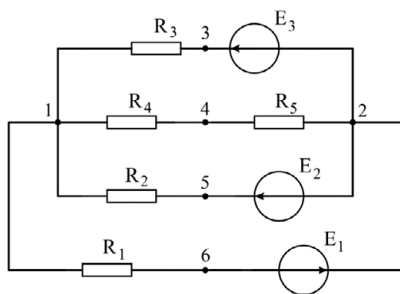
Az egyenletrendszer megoldása: $I_1 = 0,75 \text{ (A)}$, $I_2 = -0,25 \text{ (A)}$, $I_3 = 0,5 \text{ (A)}$.

2.7. feladat

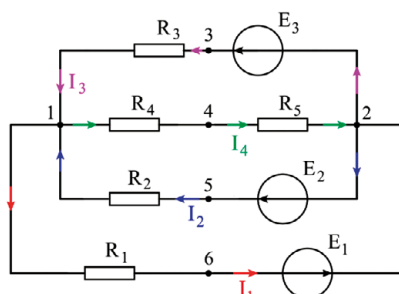
A 2.7-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adottak a következő paraméterek: $E_1 = 16\text{V}$, $E_2 = 30\text{V}$, $E_3 = 60\text{V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 40\Omega$, $R_5 = 20\Omega$.

Feladatok:

- Az áramkörben folyó áramok kiszámításához írjunk fel egy, a Kirchhoff-törvényekből álló határozott egyenletrendszer!
- Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Thèvenin-tétellel úgy, hogy az üresjáratú áramkörben az üresjáratú feszültség kiszámításához a Millman-tételt alkalmazzuk (figyelem, a gyakorlás érdekében mind a négy áramot hasonló eljárással számíttjuk ki)!
- Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Norton-tétellel (figyelem, a gyakorlás érdekében mind a négy áramot hasonló eljárással számíttjuk ki)!
- Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Millman-tétel alkalmazásával úgy, hogy a tétel alkalmazása után minden ágban az Ohm-törvényt alkalmazzuk!



2.7-1. ábra



2.7-2. ábra

2.7.1 Az a) megoldása

Áramköri analízis:

- » áramköri ágak száma $N_{\text{Ág}} = 4$, ennek megfelelően négy áram van az áramkörben (2.7-2. ábra),
- » csomópontok száma $N_{\text{Cs}} = 2$,
- » független hurkok száma $N_{\text{FHurok}} = N_{\text{Ág}} - N_{\text{Cs}} + 1 = 3$, ennek megfelelően három huroktörvényt használhatunk az egyenletrendszerben.

A 2.7-2. ábra jelölései szerint, egy lehetséges egyenletrendszert a 2.7-1. törvények szemléltetnek.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 + E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 \\ E_1 = R_1 I_1 - (R_4 + R_5) I_4 \\ E_1 + E_3 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \\ I_1 + I_4 = I_2 + I_3 \end{array} \right. \quad 2.7-1.$$

Az egyenletrendszer szimbolikus megoldása (2.7-2.):

Redukálás háromismeretlenes egyenletrendszerre az I_4 áramnak a kifejezésével, majd a többi egyenletbe való behelyettesítésével:

$$\begin{aligned} I_4 &= I_2 + I_3 - I_1 \\ E_1 &= R_1 I_1 - (R_4 + R_5)(I_2 + I_3 - I_1) \\ E_1 &= (R_1 + R_4 + R_5)I_1 - (R_4 + R_5)(I_2 + I_3) \\ I_1 &= \frac{E_1}{R_1 + R_4 + R_5} + \frac{R_4 + R_5}{R_1 + R_4 + R_5}(I_2 + I_3) \end{aligned}$$

Háromismeretlenes egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= R_1 I_1 + R_2 I_2 \\ I_1 &= \frac{E_1}{R_1 + R_4 + R_5} + \frac{R_4 + R_5}{R_1 + R_4 + R_5}(I_2 + I_3) \\ E_1 + E_3 &= R_1 I_1 + R_3 I_3 \end{aligned}$$

Redukálás kétismeretlenes egyenletrendszerre az I_1 áramnak a kifejezésével, majd a többi egyenletbe való behelyettesítésével:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= R_1 \left(\frac{E_1}{R_1 + R_4 + R_5} + \frac{R_4 + R_5}{R_1 + R_4 + R_5}(I_2 + I_3) \right) + R_2 I_2 \\ I_2 &= \frac{(E_1 + E_3)(R_4 + R_5) + R_1 E_3}{R_1(R_4 + R_5)} - \frac{R_1(R_4 + R_5) + R_3(R_1 + R_4 + R_5)}{R_1(R_4 + R_5)} I_3 \\ I_2 &= \frac{E_1 + E_3}{R_1} + \frac{E_3}{R_4 + R_5} - \left(1 + \frac{R_3(R_1 + R_4 + R_5)}{R_1(R_4 + R_5)} \right) I_3 \\ E_1 + E_3 &= R_1 \left(\frac{E_1}{R_1 + R_4 + R_5} + \frac{R_4 + R_5}{R_1 + R_4 + R_5}(I_2 + I_3) \right) + R_3 I_3 \\ I_3 &= \frac{(E_1 + E_2)(R_4 + R_5) + R_1 E_2}{R_1(R_4 + R_5)} - \frac{R_1(R_4 + R_5) + R_2(R_1 + R_4 + R_5)}{R_1(R_4 + R_5)} I_2 \\ I_3 &= \frac{E_1 + E_2}{R_1} + \frac{E_2}{R_4 + R_5} - \left(1 + \frac{R_2(R_1 + R_4 + R_5)}{R_1(R_4 + R_5)} \right) I_2 \end{aligned} \quad 2.7-2.$$

Kétismeretlenes egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{E_1 + E_3}{R_1} + \frac{E_3}{R_4 + R_5} - \left(1 + \frac{R_3(R_1 + R_4 + R_5)}{R_1(R_4 + R_5)} \right) I_3 \\ I_3 &= \frac{E_1 + E_2}{R_1} + \frac{E_2}{R_4 + R_5} - \left(1 + \frac{R_2(R_1 + R_4 + R_5)}{R_1(R_4 + R_5)} \right) I_2 \end{aligned}$$

Redukálás egy ismeretlent tartalmazó egyenletre az I_2 behelyettesítésével:

$$I_3 = \frac{\frac{E_1 + E_2}{R_1} + \frac{E_2}{R_4 + R_5} - \left(1 + \frac{R_2(R_1 + R_4 + R_5)}{R_1(R_4 + R_5)}\right) \left(\frac{E_1 + E_3}{R_1} + \frac{E_3}{R_4 + R_5}\right)}{1 - \left(1 + \frac{R_2(R_1 + R_4 + R_5)}{R_1(R_4 + R_5)}\right) \left(1 + \frac{R_3(R_1 + R_4 + R_5)}{R_1(R_4 + R_5)}\right)}$$

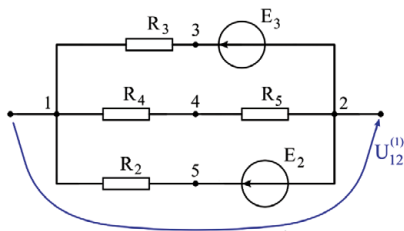
2.7-2.
(folyt.)

Az egyenletrendszer megoldása: $I_1 = 2,8$ (A), $I_2 = 0,6$ (A), $I_3 = 2,4$ (A), $I_4 = 0,2$ (A).

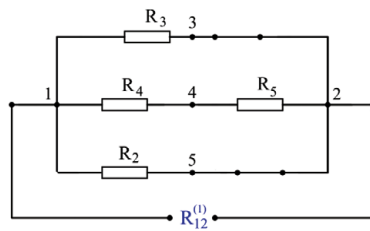
2.7.2. A b) megoldása

A 2.7-2. ábra az áramkör ágaiban feltételezett áramirányokat szemlélteti.

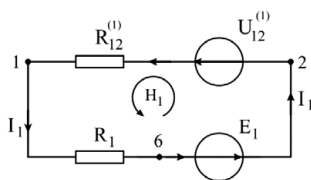
Az I_1 áram Thèvenin-tétellel való kiszámításának első lépésében az 1–2 pontok között üresjárást hozunk létre (2.7-3. ábra) úgy, hogy a helyettesítő áramkörben (2.7-5. ábra) meghagyjuk azt az áramköri ágot, amelyben az I_1 áram folyik. Feladatunk az $U_{12}^{(1)}$ -vel jelzett üresjáratú feszültség (2.7-3. ábra) kiszámítása a Millman-tétel alkalmazásával (2.7-3.), amely egyben megegyezik a helyettesítő feszültségforrás elektromotoros feszültségével is. A Thèvenin-tétel alkalmazásának második lépésében a helyettesítő feszültségforrás belső ellenállását számítjuk ki, amelyhez az üresjáratú áramkörben minden generátort kiiktatunk (helyettesítjük a saját belső ellenállásával, amely esetünkben nulla) (2.7-4. ábra), és kiszámítjuk az 1–2 pontok közötti eredő ellenállást ($R_{12}^{(1)}$) (2.7-4.). Az utolsó lépésben megrajzoljuk a helyettesítő áramkört (2.7-5. ábra) és felírjuk a huroktörvényt (2.7-5.).



2.7-3. ábra



2.7-4. ábra



2.7-5. ábra

$$U_{12}^{(1)} = \frac{\frac{E_3}{R_3} + \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5} + \frac{1}{R_2}} = 40 \text{ (V)}$$

2.7-3.

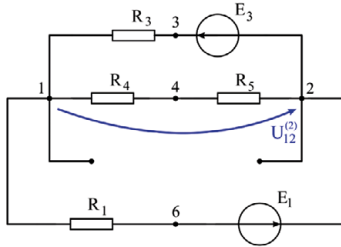
$$\frac{1}{R_{12}^{(1)}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{12}^{(1)} = 10 \text{ (}\Omega\text{)}$$

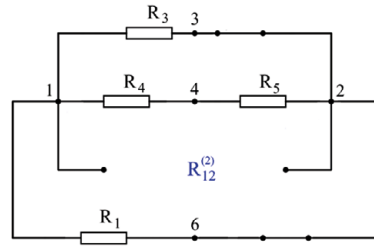
2.7-4.

$$I_1 = \frac{U_{12}^{(1)} + E_1}{R_{12}^{(1)} + R_1} = 2,8 \text{ (A)} \quad 2.7-5.$$

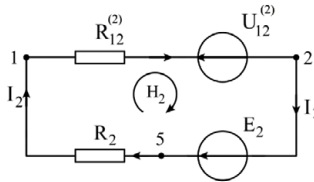
Az I_2 áram Thèvenin-tétellel való kiszámításának első lépésében az 1–2 pontok között üresjárást hozunk létre (2.7-6. ábra) úgy, hogy a helyettesítő áramkörben (2.7-8. ábra) meghagyjuk azt az áramköri ágot, amelyben az I_2 áram folyik. Feladatunk az $U_{12}^{(2)}$ -vel jelzett üresjáratú feszültség (2.7-6. ábra) kiszámítása a Millman-tétel alkalmazásával (2.7-6.), amely egyben megegyezik a helyettesítő feszültségforrás elektromotoros feszültségével is. A Thèvenin-tétel alkalmazásának második lépésében a helyettesítő feszültségforrás belső ellenállását számítjuk ki, amelyhez az üresjáratú áramkörben minden generátort kiiktatunk (helyettesítjük a saját belső ellenállásával, amely esetünkben nulla) (2.7-7. ábra), és kiszámítjuk az 1–2 pontok közötti eredő ellenállást ($R_{12}^{(2)}$) (2.7-7.). Az utolsó lépésben megrajzoljuk a helyettesítő áramkört (2.7-8. ábra), és felírjuk a huroktörvényt (2.7-8.).



2.7-6. ábra



2.7-7. ábra



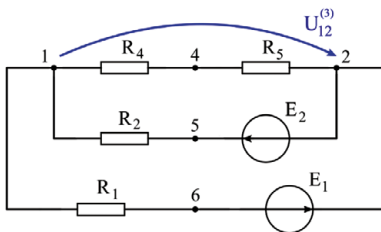
2.7-8. ábra

$$U_{12}^{(2)} = \frac{\frac{E_3}{R_3} - \frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5} + \frac{1}{R_1}} = 8,4 \text{ (V)} \quad 2.7-6. \quad \left. \begin{aligned} \frac{1}{R_{12}^{(2)}} &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5} + \frac{1}{R_1} \\ R_{12}^{(2)} &= 6 \text{ (}\Omega\text{)} \end{aligned} \right| \quad 2.7-7.$$

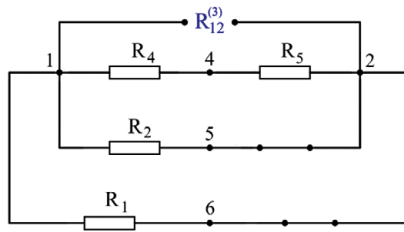
$$I_2 = \frac{E_2 - U_{12}^{(2)}}{R_{12}^{(2)} + R_2} = 0,6 \text{ (A)} \quad 2.7-8.$$

Az I_3 áram Thèvenin-tétellel való kiszámításának első lépésében az 1–2 pontok között üresjárást hozunk létre (2.7-9. ábra) úgy, hogy a helyettesítő áramkörben (2.7-11. ábra) meghagyjuk azt az áramköri ágot, amelyben az I_3 áram fo-

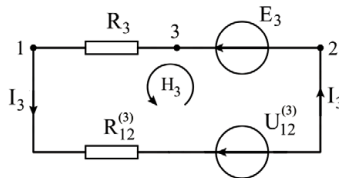
lyik. Feladatunk az $U_{12}^{(3)}$ -vel jelzett üresjáratú feszültség (2.7-9. ábra) kiszámítása a Millman-tétel alkalmazásával (2.7-9.), amely egyben megegyezik a helyettesítő feszültségforrás elektromotoros feszültségével is. A Thèvenin-tétel alkalmazásának második lépésében a helyettesítő feszültségforrás belső ellenállását számítjuk ki, amelyhez az üresjáratú áramkörben minden generátort kiiktatunk (helyettesítjük a saját belső ellenállásával, amely esetünkben nulla) (2.7-10. ábra), és kiszámítjuk az 1–2 pontok közötti eredő ellenállást ($R_{12}^{(3)}$) (2.7-10.). Az utolsó lépésben megrajzoljuk a helyettesítő áramkört (2.7-11. ábra), és felírjuk a huroktörvényt (2.7-11.).



2.7-9. ábra



2.7-10. ábra



2.7-11. ábra

$$U_{12}^{(3)} = \frac{\frac{E_2}{R_2} - \frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4 + R_5} + \frac{1}{R_2}} = -4(V) \quad 2.7-9.$$

$$\frac{1}{R_{12}^{(3)}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4 + R_5} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{12}^{(3)} = \frac{60}{9} (\Omega)$$

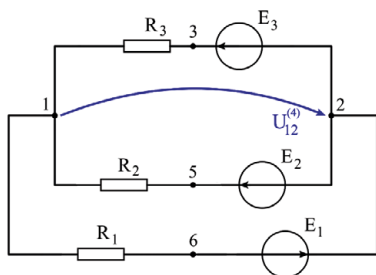
2.7-10.

$$I_3 = \frac{E_3 - U_{12}^{(3)}}{R_{12}^{(3)} + R_3} = 2,4 (A)$$

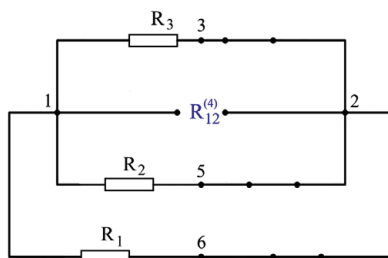
2.7-11.

Az I_4 áram Thèvenin-tétellel való kiszámításának első lépésében az 1–2 pontok között üresjáratot hozunk létre (2.7-12. ábra) úgy, hogy a helyettesítő áramkörben (2.7-14. ábra) meg hagyjuk azt az áramköri ágot, amelyben az I_4 áram folyik. Feladatunk az $U_{12}^{(4)}$ -gyel jelzett üresjáratú feszültség (2.7-12. ábra) kiszámítása a Millman-tétel alkalmazásával (2.7-12.), amely egyben megegyezik a helyettesítő feszültségforrás elektromotoros feszültségével is. A Thèvenin-tétel alkalmazásának második lépésében a helyettesítő feszültségforrás belső ellenállását számítjuk ki, amelyhez az üresjáratú áramkörben minden generátort kiiktatunk (he-

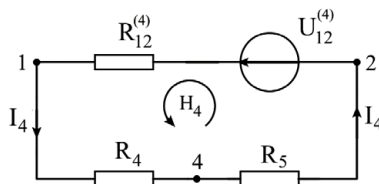
lyettesítjük a saját belső ellenállásával, amely esetünkben nulla) (2.7-13. ábra), és kiszámítjuk az 1–2 pontok közötti eredő ellenállást ($R_{12}^{(4)}$) (2.7-13.). Az utolsó lépésben megrajzoljuk a helyettesítő áramkört (2.7-14. ábra), és felírjuk a huroktörvényt (2.7-14.).



2.7-12. ábra



2.7-13. ábra



2.7-14. ábra

$$U_{12}^{(4)} = \frac{\frac{E_3}{R_3} + \frac{E_2}{R_2} - \frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{144}{11} \text{ (V)}$$

2.7-12.

$$\frac{1}{R_{12}^{(4)}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$R_{12}^{(4)} = \frac{60}{11} \text{ (}\Omega\text{)}$$

2.7-13.

$$I_4 = \frac{U_{12}^{(4)}}{R_{12}^{(4)} + R_4 + R_5} = 0,2 \text{ (A)}$$

2.7-14.

A kapott eredmények helyességét a csomóponttörvénnyel ellenőrizhetjük (2.7-15.) (a 2.7-2. ábra szemlélteti az ágakban folyó áramokat).

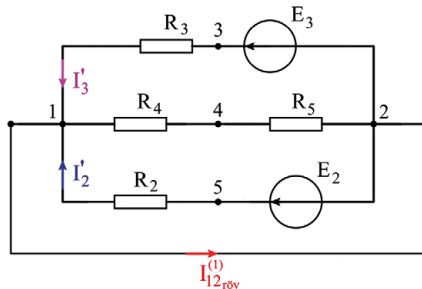
$$I_1 = I_2 + I_3 - I_4 = 0,6 + 2,4 - 0,2 = 2,8 \text{ (A)}$$

2.7-15.

2.7.3. A c) megoldása

Az I_1 áram Norton-tétellel való meghatározásához az a) pontnál használt szétválasztást fogjuk alkalmazni (R_1 és E_1 soros kapcsolását hagyjuk meg a helyettesítő áramkörben), azonban ebben az esetben a szétválasztási pontokat rövidre zárjuk egy ellenállásmentes ággal (2.7-15. ábra), és kiszámítjuk a rövidzáron folyó áram erősségét. A rövidzárási áramot az 1. csomópontra felírt csomóponti

törvényből számíthatjuk ki. Mivel abban az ágban nem folyhat áram, ahol csak ellenállások vannak, az ábrán jelölt áramokat két egymástól független huroktörvényből számíthatjuk ki (2.7-14.).

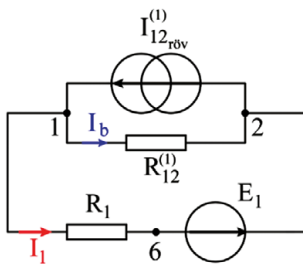


2.7-15. ábra

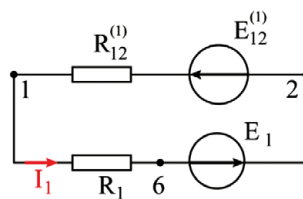
$$I_{12röv}^{(1)} = I'_2 + I'_3 = \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} = 4 \text{ (A)} \quad 2.7-16.$$

Mivel a helyettesítő áramkörben az R_1 és E_1 soros kapcsolását hagytuk meg ugyanúgy, mint az a) pontban, amikor az I_1 -et a Thèvenin-tétellel határoztuk meg, a helyettesítő áramforrás belső ellenállása ugyanaz lesz, és a 2.7-4. ábra alapján a 2.7-4. képlettel számíthatjuk ki.

A helyettesítő áramkört a 2.7-16. ábra szemlélteti, amelyben az egyszerűbb számítások érdekében a fentiekben meghatározott áramgenerátort egy ekvivalens feszültségforrással helyettesítjük (2.7-17. ábra), ahol a helyettesítő feszültség-generátor elektromotoros feszültségét a 2.7-17. egyenlettel számíthatjuk ki.



2.7-16. ábra



2.7-17. ábra

$$E_{12}^{(1)} = R_{12}^{(1)} I_{12röv}^{(1)} = 40 \text{ (V)} \quad 2.7-17.$$

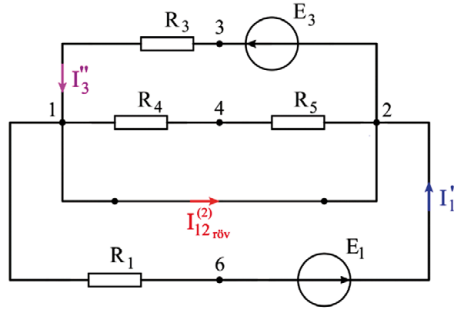
A keresett I_1 áramot a 2.7-17. ábra alapján felírt huroktörvényből számíthatjuk ki.

$$I_1 = \frac{E_{12}^{(1)} + E_1}{R_{12}^{(1)} + R_1} = 2,8 \text{ (A)} \quad 2.7-18.$$

Természetesen más lehetőség is kínálkozik arra, hogy a 2.7-16. ábra által szemléltetett áramkörben kiszámítsuk az I_1 áramot. Az alábbiakban felírunk egy kétismeretlenes egyenletrendszert, és megoldjuk (2.7-19.). Feltételezzük, hogy a helyettesítő áramforrás belső ellenállásán I_b áram folyik.

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} E_1 = R_1 I_1 - R_{12}^{(1)} I_b \\ I_{12röv}^{(1)} = I_b + I_1 \end{cases} \\
 & I_b = I_{12röv}^{(1)} - I_1 \\
 & E_1 = R_1 I_1 - R_{12}^{(1)} (I_{12röv}^{(1)} - I_1) = (R_1 + R_{12}^{(1)}) I_1 - R_{12}^{(1)} I_{12röv}^{(1)} \\
 & E_1 + R_{12}^{(1)} I_{12röv}^{(1)} = (R_1 + R_{12}^{(1)}) I_1 \\
 & I_1 = \frac{E_1 + R_{12}^{(1)} I_{12röv}^{(1)}}{R_1 + R_{12}^{(1)}} = 2,8 \text{ (A)}
 \end{aligned}
 \tag{2.7-19.}$$

Az I_2 áram Norton-tétellel való meghatározásához az a) pontnál használt szétválasztást fogjuk alkalmazni (R_2 és E_2 soros kapcsolását hagyjuk meg a helyettesítő áramkörben), azonban ebben az esetben a szétválasztási pontokat rövidre zárjuk egy ellenállásmentes ággal (2.7-18. ábra), és kiszámítjuk a rövidzáron folyó áram erősségét. A rövidzárási áramot az 1. csomópontra felírt csomóponti törvényből számíthatjuk ki. Mivel abban az ágba nem folyhat áram, ahol csak ellenállások vannak, az ábrán jelölt áramokat két egymástól független huroktörvényből számíthatjuk ki (2.7-20.).

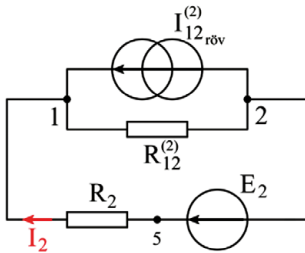


2.7-18. ábra

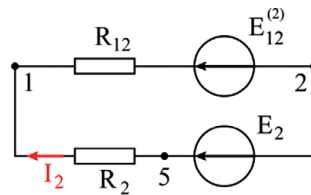
$$I_{12röv}^{(1)} = I_3'' - I_1'' = \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_1}{R_1} = 1,4 \text{ (A)} \tag{2.7-20.}$$

Mivel a helyettesítő áramkörben az R_2 és E_2 soros kapcsolását hagyjuk meg ugyanúgy, mint az a) pontban, amikor az I_2 -t a Thèvenin-tétellel határoztuk meg, a helyettesítő áramforrás belső ellenállása ugyanaz lesz, és a 2.7-7. ábra alapján a 2.7-7. képlettel számíthatjuk ki. A helyettesítő áramkört a 2.7-19. ábra szemlélteti.

teni, amelyben az egyszerűbb számítások érdekében a fentiekben meghatározott áramgenerátort egy ekvivalens feszültségforrással helyettesítjük (2.7-20. ábra), ahol a helyettesítő feszültséggenerátor elektromotoros feszültségét a 2.7-21. egyenlettel számíthatjuk ki.



2.7-19. ábra



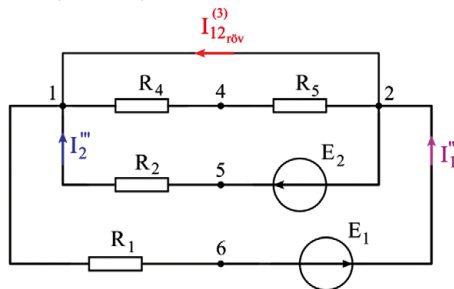
2.7-20. ábra

$$E_{12}^{(2)} = R_{12}^{(2)} I_{12r\ddot{o}v}^{(2)} = 8,4 \text{ (V)} \quad 2.7-21.$$

A keresett I_2 áramot a 2.7-20. ábra alapján felírt huroktörvényből számíthatjuk ki.

$$I_2 = \frac{E_2 - E_{12}^{(2)}}{R_{12}^{(2)} + R_2} = 0,6 \text{ (A)} \quad 2.7-22.$$

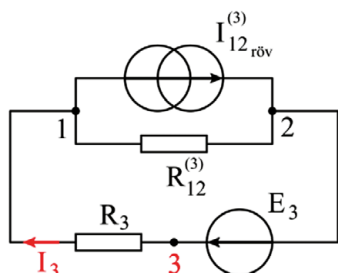
Az I_3 áram Norton-tétellel való meghatározásához az a) pontnál használt szétválasztást fogjuk alkalmazni (R_3 és E_3 soros kapcsolását hagyjuk meg a helyettesítő áramkörben), azonban ebben az esetben a szétválasztási pontokat rövidre zárjuk egy ellenállásmentes ággal (2.7-21. ábra), és kiszámítjuk a rövidzáron folyó áram erősségét. A rövidzárási áramot az 1. csomópontra felírt csomóponti törvényből számíthatjuk ki. Mivel abban az ágban nem folyhat áram, ahol csak ellenállások vannak, az ábrán jelölt áramokat két egymástól független huroktörvényből számíthatjuk ki (2.7-23.).



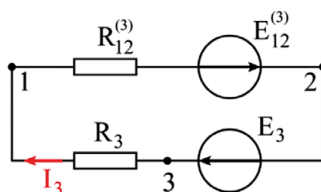
2.7-21. ábra

$$I_{12r\ddot{o}v}^{(3)} = I_1''' - I_2''' = \frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} = 0,6 \text{ (A)} \quad 2.7-23.$$

Mivel a helyettesítő áramkörben az R_3 és E_3 soros kapcsolását hagyjuk meg ugyanúgy, mint az a) pontban, amikor az I_3 -at a Thèvenin-tétellel határoztuk meg, a helyettesítő áramforrás belső ellenállása ugyanaz lesz, és a 2.7-10. ábra alapján a 2.7-10. képlettel számíthatjuk ki. A helyettesítő áramkört a 2.7-22. ábra szemlélteti, amelyben az egyszerűbb számítások érdekében a fentiekben meghatározott áramgenerátort egy ekvivalens feszültségforrással helyettesítjük (2.7-23. ábra), ahol a helyettesítő feszültséggenerátor elektromotoros feszültségét a 2.7-24. egyenlettel számíthatjuk ki.



2.7-22. ábra



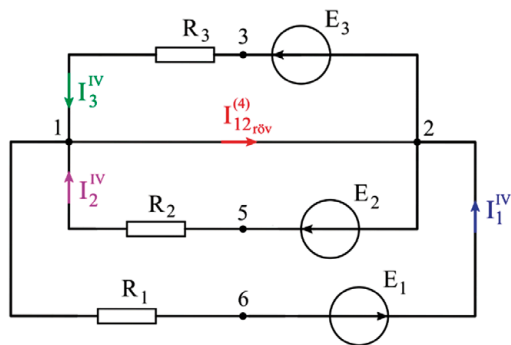
2.7-23. ábra

$$E_{12}^{(3)} = R_{12}^{(3)} I_{12, \text{röv}}^{(3)} = 4 \text{ (V)} \quad 2.7-24.$$

A keresett I_3 áramot a 2.7-23. ábra alapján felírt huroktörvényből számíthatjuk ki.

$$I_3 = \frac{E_3 + E_{12}^{(3)}}{R_{12}^{(3)} + R_3} = 2,4 \text{ (A)} \quad 2.7-25.$$

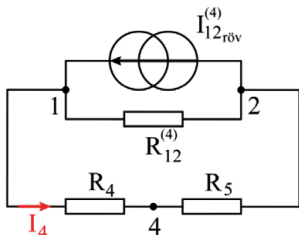
Az I_4 áram Norton-tétellel való meghatározásához az a) pontnál használt szétválasztást fogjuk alkalmazni (R_4 és R_5 soros kapcsolását hagyjuk meg a helyettesítő áramkörben), azonban ebben az esetben a szétválasztási pontokat rövidre zárjuk egy ellenállásmentes ággal (2.7-24. ábra), és kiszámítjuk a rövidzáron folyó áram erősségét. A rövidzárási áramot az 1. csomópont felírt csomóponti törvényből számíthatjuk ki. Az ábrán jelölt áramokat három egymástól független huroktörvényből számíthatjuk ki (2.7-26.).



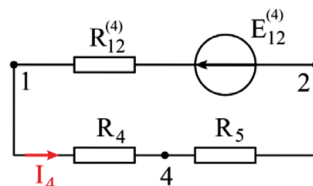
2.7-24. ábra

$$I_{12_{r\acute{o}v}}^{(4)} = I_2^{IV} + I_3^{IV} - I_1^{IV} = \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_1}{R_1} = 2,4 \text{ (A)} \quad 2.7-26.$$

Mivel a helyettesítő áramkörben az R_4 és R_5 soros kapcsolását hagytuk meg ugyanúgy, mint az a) pontban, amikor az I_4 -et a Thèvenin-tétellel határoztuk meg, a helyettesítő áramforrás belső ellenállása ugyanaz lesz, és a 2.7-13. ábra alapján a 2.7-13. képlettel számíthatjuk ki. A helyettesítő áramkört a 2.7-25. ábra szemlélteti, amelyben az egyszerűbb számítások érdekében a fentiekben meghatározott áramgenerátort egy ekvivalens feszültségforrással helyettesítjük (2.7-26. ábra), ahol a helyettesítő feszültséggenerátor elektromotoros feszültségét a 2.7-27. egyenlettel számíthatjuk ki.



2.7-25. ábra



2.7-26. ábra

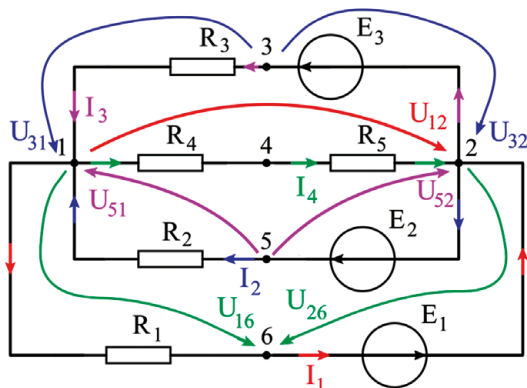
$$E_{12}^{(4)} = R_{12}^{(4)} I_{12_{r\acute{o}v}}^{(4)} = \frac{144}{11} \text{ (V)} \quad 2.7-27.$$

A keresett I_4 áramot a 2.7-26. ábra alapján felírt huroktörvényből számíthatjuk ki.

$$I_4 = \frac{E_{12}^{(4)}}{R_{12}^{(4)} + R_4 + R_5} = 0,2 \text{ (A)} \quad 2.7-28.$$

2.7.4. A d) megoldása

A 2.7-27. ábra szemlélteti a meghatározandó U_{12} -et, amelyet a 2.7-29. Millman-tétellel számítunk ki.



2.7-27. ábra

$$U_{12} = \frac{\frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3} - \frac{E_1}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4 + R_5}} = 12 \text{ (V)} \quad 2.7-29.$$

A továbbiakban felhasználjuk a Millman-tétellel kiszámított U_{12} feszültséget úgy, hogy minden egyes ágba a 2.7-27. ábra szerint feltételezett feszültségeket használjuk fel (2.7-30.), (2.7-31., 2.7-32., 2.7-33.).

$$\begin{aligned} U_{12} &= U_{16} - U_{26} = R_1 I_1 - E_1 \\ U_{16} &= R_1 I_1, \quad U_{26} = E_1 \end{aligned} \quad I_1 = \frac{U_{12} + E_1}{R_1} = 2,8 \text{ (A)} \quad 2.7-30.$$

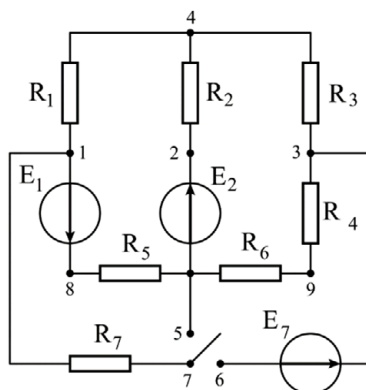
$$\begin{aligned} U_{12} &= U_{52} - U_{51} = E_2 - R_2 I_2 \\ U_{51} &= R_2 I_2, \quad U_{52} = E_2 \end{aligned} \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{12}}{R_2} = 0,6 \text{ (A)} \quad 2.7-31.$$

$$\begin{aligned} U_{12} &= U_{32} - U_{31} = E_3 - R_3 I_3 \\ U_{31} &= R_3 I_3, \quad U_{32} = E_3 \end{aligned} \quad I_3 = \frac{E_3 - U_{12}}{R_3} = 2,4 \text{ (A)} \quad 2.7-32.$$

$$U_{12} = (R_4 + R_5) I_4 \quad I_4 = \frac{U_{12}}{R_4 + R_5} = 0,2 \text{ (A)} \quad 2.7-33.$$

2.8. feladat

A 2.8-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben: $E_1 = 20\text{V}$, $E_2 = 40\text{V}$, $E_7 = 35\text{V}$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 60\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 20\Omega$, $R_5 = 15\Omega$, $R_6 = 5\Omega$, $R_7 = 10\Omega$.



2.8-1. ábra

Feladatok:

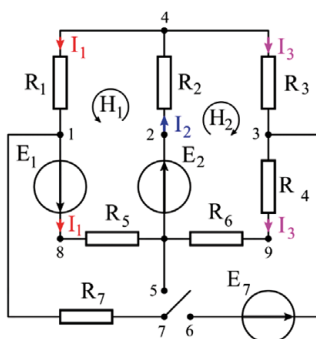
- A kapcsoló nyitott állásában írjunk fel egy Kirchhoff-törvényekből álló egyenletrendszert, és számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat.
- A kapcsolót a 6-os állásba kapcsoljuk. Írjunk fel egy Kirchhoff-törvényekből álló egyenletrendszert, és számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat.
- A kapcsolót a 6-os állásba kapcsoljuk. Számítsuk ki az R_7 ellenálláson átfolyó áram erősségét a Thèvenin-tétellel.
- A kapcsolót az 5-ös állásba kapcsoljuk. Számítsuk ki az R_5 ellenálláson átfolyó áram erősségét a Millman-tétellel.

2.8.1. Az a) megoldása – az egyenletrendszer felírása

Áramköri analízis:

- az áramköri ágak száma $N_{\text{Ág}} = 3$, ennek megfelelően három áram van az áramkörben (2.8-2. ábra),
- a csomópontok száma $N_{\text{Cs}} = 2$,
- a független hurkok száma $N_{\text{FHurok}} = N_{\text{Ág}} - N_{\text{Cs}} + 1 = 2$, ennek megfelelően két huroktörvényt használhatunk az egyenletrendszerben.

A 2.8-2. ábra jelölései alapján egy lehetséges egyenletrendszert a 2.8-1. törvények szemléltetnek.



2.8-2. ábra

$$\begin{array}{l} H_1 \text{ hurok:} \\ H_2 \text{ hurok:} \\ 4. \text{ csomópont:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} E_1 + E_2 = (R_1 + R_5)I_1 + R_2I_2 \\ E_2 = R_2I_2 + (R_3 + R_4 + R_6)I_3 \\ I_1 - I_2 + I_3 = 0 \end{array} \right.$$

2.8-1.

Az egyenletrendszer megoldása: $I_1 = 0,732 \text{ (A)}$, $I_2 = 0,695 \text{ (A)}$, $I_3 = -0,038 \text{ (A)}$.

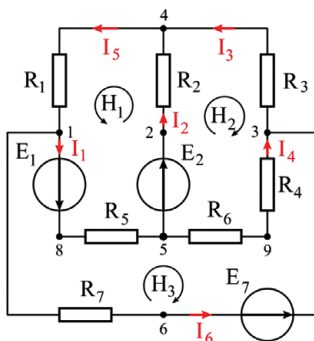
Megjegyzés: az egyenletrendszer megoldásánál kerekítéseket használtunk (háromtizedes pontossággal végzett számítások). Az áramok értékeit ennek megfelelően kell értelmezni, így a harmadik tizedes érték már hibával terhelt!

2.8.2. A b) megoldása – egyenletrendszer

Áramköri analízis:

- » az áramköri ágak száma $N_{\text{Ág}} = 6$, ennek megfelelően hat áram van az áramkörben (2.8-3. ábra),
- » a csomópontok száma $N_{\text{Cs}} = 4$,
- » a független csomópontok száma $N_{\text{FCs}} = 3$,
- » a független hurok száma $N_{\text{FHurok}} = N_{\text{Ág}} - N_{\text{Cs}} + 1 = 3$, ennek megfelelően három huroktörvényt használhatunk az egyenletrendszerben.

A 2.8-3. ábra jelölései alapján egy lehetséges egyenletrendszert a 2.8-2. törvények szemléltetnek.



2.8-3. ábra

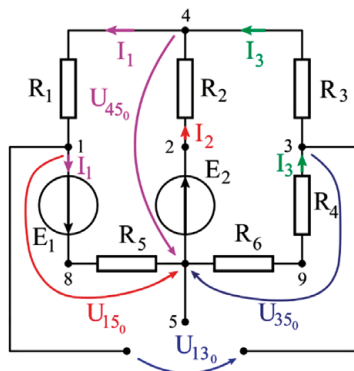
$$\begin{array}{l}
 H_1 \text{ hurok:} \\
 H_2 \text{ hurok:} \\
 H_3 \text{ hurok:} \\
 1. \text{ csomópont:} \\
 3. \text{ csomópont:} \\
 4. \text{ csomópont:}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 E_1 + E_2 = R_5 I_1 + R_2 I_2 + R_1 I_5 \\
 E_2 = R_2 I_2 - R_3 I_3 - (R_4 + R_6) I_4 \\
 E_1 - E_7 = R_5 I_1 + (R_4 + R_6) I_4 - R_7 I_6 \\
 I_5 - I_1 - I_6 = 0 \\
 I_4 + I_6 - I_3 = 0 \\
 I_3 + I_2 - I_5 = 0
 \end{array}
 \right.
 \quad 2.8-2.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $I_1 = 0,313 \text{ (A)}$, $I_2 = 0,704 \text{ (A)}$, $I_3 = 0,601 \text{ (A)}$, $I_4 = -0,391 \text{ (A)}$, $I_5 = 1,305 \text{ (A)}$, $I_6 = 0,992 \text{ (A)}$.

2.8.3. A c) megoldása – Thèvenin-tétel

Az I_6 áram meghatározása érdekében az R_7 ellenállás és E_7 generátor soros kapcsolását leválasztjuk az áramkörrel, majd a helyettesítő áramkörbe tesszük (2.8-9. ábra). A megmaradó áramkört helyettesítjük egy feszültséggenerátorral, amelynek elektromotoros feszültségét az üresjáratú áramkörből számítjuk ki (2.8-4. ábra).

2.8.3.1. Üresjáratú áramkör (üresjáratú feszültség)



2.8-4. ábra

Az üresjáratú feszültség kiszámításához szükség van az I_1 és I_3 áramok ismeretére. Célunk elérése érdekében először kiszámítjuk az U_{450} feszültséget a Millman-tételből (2.8-3.), majd ezt felhasználva, a 2.8-4. ábra jelöléseivel kiszámoljuk a keresett áramokat (2.8-4. és 2.8-5.). Az üresjáratú feszültséget az U_{150} és U_{350} feszültségek segítségével a 2.8-6. egyenlettel számíthatjuk ki.

$$U_{450} = \frac{\frac{E_2}{R_2} - \frac{E_1}{R_1 + R_5}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_5} + \frac{1}{R_4 + R_6 + R_3}} = -1,69 \text{ (V)} \quad 2.8-3.$$

$$I_3 = \frac{-U_{450}}{R_4 + R_6 + R_3} = -37,5 \text{ (mA)} \quad 2.8-4.$$

$$I_1 = \frac{U_{45_0} + E_1}{R_1 + R_5} = 0,732 \text{ (A)} \quad 2.8-5.$$

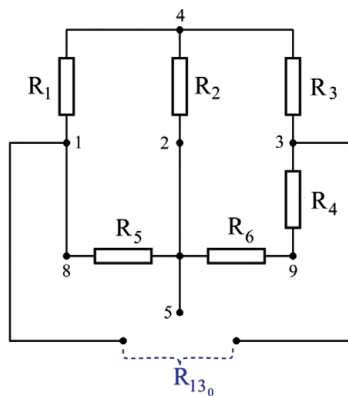
$$U_{13_0} = U_{15_0} - U_{35_0} = (I_1 R_5 - E_1) - I_3 (R_4 + R_6) = -8,08 \text{ (V)} \quad 2.8-6.$$

2.8.3.2. Passzivizálás a belső ellenállás meghatározásához

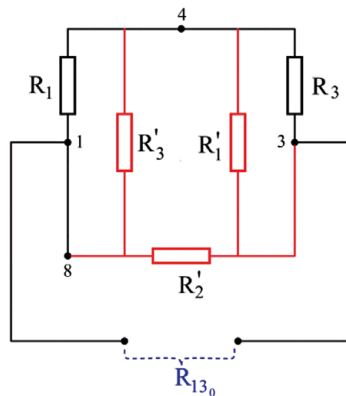
A helyettesítő generátor belső ellenállását a 2.8-4. ábra üresjáratú áramkör passzivizálásával nyert ellenállás-kapcsolás (2.8-5. ábra) megfelelő pontjai közötti ellenállás kiszámításával nyerjük. Látható az ábrán, hogy az R_4 és az R_6 sorosan van egymással összekapcsolva, de ezen kívül más ellenállás nincs, amelyik sorosan vagy párhuzamosan lenne kapcsolva egymással, ennek megfelelően egy vegyes kapcsolással állunk szemben. A megoldást ebben az esetben a csillag-delta vagy a delta-csillag ekvivalens átalakítás szolgáltatja.

Megfigyelhető például az, hogy az 5-ös pont egy csillagpont, az R_2 , R_5 és $R_4 + R_6$ ellenállások csillag alakzatba vannak kapcsolva. Más lehetőség is észrevehető, mert például az R_1 , R_5 és R_2 vagy az R_2 , $R_4 + R_6$ és R_3 ellenállások delta alakzatba vannak kapcsolva.

a) A keresett belső ellenállás kiszámításához az R_2 , R_5 és $R_4 + R_6$ csillag alakzatba kapcsolt ellenállásokat helyettesítjük egy ekvivalens delta alakzattal, ahol a részt vevő ellenállások az R'_1 , R'_2 és R'_3 elnevezéseket kapták, és a 2.8-6. ábra szerint vannak összekapcsolva.



2.8-5. ábra



2.8-6. ábra

A számításokat a csillag-delta átalakítás módszerének megfelelően a helyettesítendő ellenállások vezetőképességeinek kiszámításával kezdjük (2.8-7.), majd a csillag-delta átalakítás képleteit alkalmazzuk (2.8-8. és 2.8-9.), és végül a kapott vezetőképességeket átalakítjuk ellenállásokká (2.8-10.).

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = 0,016 \text{ (S)} \quad G_5 = \frac{1}{R_5} = 0,066 \text{ (S)} \quad G_{64} = \frac{1}{R_6 + R_4} = 0,04 \text{ (S)} \quad 2.8-7.$$

$$G_{\lambda} = G_2 + G_5 + G_{64} = 0,122 \text{ (S)} \quad 2.8-8.$$

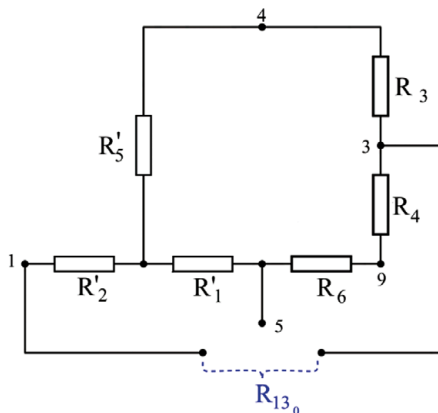
$$G'_1 = \frac{G_2 G_{64}}{G_{\lambda}} = 5,2 \text{ (mS)} \quad G'_2 = \frac{G_5 G_{64}}{G_{\lambda}} = 21,6 \text{ (mS)} \quad G'_3 = \frac{G_5 G_2}{G_{\lambda}} = 8,6 \text{ (mS)} \quad 2.8-9.$$

$$R'_1 = \frac{1}{G'_1} = 190,6 \text{ (}\Omega\text{)} \quad R'_2 = \frac{1}{G'_2} = 46,21 \text{ (}\Omega\text{)} \quad R'_3 = \frac{1}{G'_3} = 115,5 \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.8-10.$$

Az átalakítás során nyert ellenállás-kapcsolás már sorosan és/vagy párhuzamosan kapcsolt ellenállásokból épül fel (2.8-6. ábra), így már könnyedén kiszámíthatjuk az eredő ellenállást a 2.8-11. rövidített formában felírt képlettel (R_1 párhuzamos R'_3 -mal, R_3 párhuzamos R'_1 -gyel, az így számolt eredők sorba vannak kapcsolva egymással, és az így származtatott eredő ellenállás párhuzamosan van kapcsolva az R'_2 ellenállással).

$$R_{13_0} = [(R_1 \times R'_3) + (R_3 \times R'_1)] \times R'_2 = 17,16 \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.8-11.$$

b) A keresett belső ellenállás kiszámításához az R_1 , R_2 és R_5 delta alakzatba kapcsolt ellenállásokat helyettesítjük egy ekvivalens csillag alakzattal, ahol a részt vevő ellenállások az R'_1 , R'_2 és R'_5 elnevezéseket kapták, és a 2.8-7. ábra szerint vannak összekapcsolva.



2.8-7. ábra

A számításokat a delta-csillag átalakítás módszerének megfelelően végezzük el, és a delta-csillag átalakítás képleteit alkalmazzuk.

$$R_d = R_1 + R_2 + R_5 = 85 \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.8-12.$$

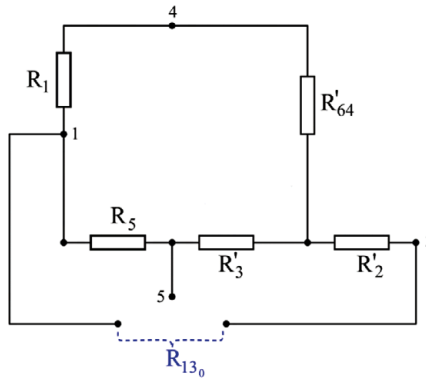
$$R'_1 = \frac{R_2 R_5}{R_d} = 10,59 \text{ (}\Omega\text{)} \quad R'_2 = \frac{R_1 R_5}{R_d} = 1,76 \text{ (}\Omega\text{)} \quad R'_5 = \frac{R_1 R_2}{R_d} = 7,06 \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.8-13.$$

Az átalakítás során nyert ellenállás-kapcsolás már sorosan- és/vagy párhuzamosan kapcsolt ellenállásokból épül fel (2.8-7. ábra), így már könnyedén

kiszámíthatjuk az eredő ellenállást a 2.8-14. rövidített formában felírt képlettel (R_3 soros R'_5 -tel, R_4 , R_6 és R'_1 sorosan vannak kapcsolva, az így számolt eredők párhuzamosan vannak kapcsolva egymással, és az így származtatott eredő ellenállás sorba van kapcsolva az R'_2 ellenállással).

$$R_{13_0} = [(R_3 + R'_5) \times (R'_1 + R_4 + R_6)] + R'_2 = 17,16 (\Omega) \quad 2.8-14.$$

c) A keresett belső ellenállás kiszámításához az R_2 , R_3 és $R_{64} = R_4 + R_6$ delta alakzatba kapcsolt ellenállásokat helyettesítjük egy ekvivalens csillag alakzattal, ahol a részt vevő ellenállások az R'_2 , R'_3 és R'_{64} elnevezéseket kapták, és a 2.8-8. ábra szerint vannak összekapcsolva.



2.8-8. ábra

A számításokat a delta-csillag átalakítás módszerének megfelelően végezzük el, és a delta-csillag átalakítás képleteit alkalmazzuk.

$$R_4 = R_2 + R_3 + R_6 + R_4 = 105 (\Omega) \quad 2.8-15.$$

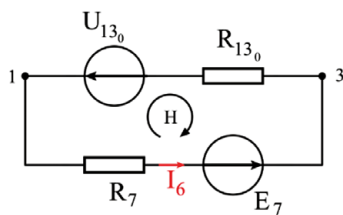
$$R'_2 = \frac{R_3 R_{64}}{R_4} = 4,76 (\Omega) \quad R'_3 = \frac{R_2 R_{64}}{R_4} = 14,28 (\Omega) \quad R'_{64} = \frac{R_2 R_3}{R_4} = 11,42 (\Omega) \quad 2.8-16.$$

Az átalakítás során nyert ellenállás-kapcsolás már sorosan és/vagy párhuzamosan kapcsolt ellenállásokból épül fel (2.8-8. ábra), így már könnyedén kiszámíthatjuk az eredő ellenállást a 2.8-17. rövidített formában felírt képlettel (R_1 soros R'_{64} -gyel, R_5 soros R'_1 -gyel, az így számolt eredők párhuzamosan vannak kapcsolva egymással, és az így származtatott eredő ellenállás sorba van kapcsolva az R'_2 ellenállással).

$$R_{13_0} = [(R_1 + R'_{64}) \times (R'_3 + R_5)] + R'_2 = 17,16 (\Omega) \quad 2.8-17.$$

2.8.3.3. Helyettesítő áramkör

Nem marad más hátra, mint elkészíteni a helyettesítő áramkört (2.8-9. ábra), és alkalmazni a huroktörvényt a keresett áram kiszámítására (2.8-18.).

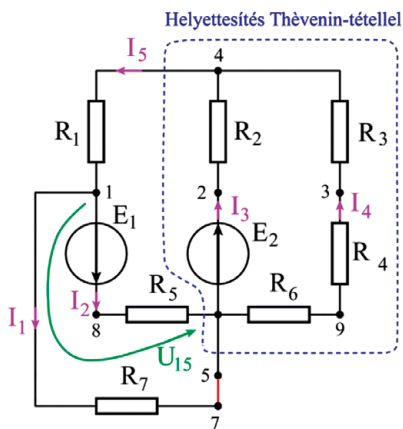


2.8-9. ábra

$$I_6 = \frac{U_{13_0} + E_7}{R_{13_0} + R_7} = \frac{-8,08 + 35}{17,16 + 10} = 0,99 \text{ (A)} \quad 2.8-18.$$

2.8.4. A d) megoldása Millman-tétellel

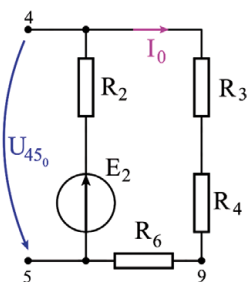
A 2.8-10. ábra az áramkört szemlélteti a kapcsoló 5-ös állásba való átkapcsolása után. Az áramkörnek ebben a formájában nem alkalmazható a Millman-tétel egyik csomópont-pár esetében sem, mivel nem párhuzamosan kapcsolt ágak futnak össze a csomópontokban. Azonban ha egy megfelelően kiválasztott áramköri részt helyettesítünk (esetünkben a szaggatott vonallal jelzett áramköri részt, 2.8-10. ábra), akkor az áramkör a Millman-tételnek megfelelő struktúrára alakítható (2.8-13. ábra). Ezt az átalakítást jelen esetben egy Thèvenin-tétellel valósíthatjuk meg, mivel az egy áramosztót egy soros kapcsolással helyettesít.



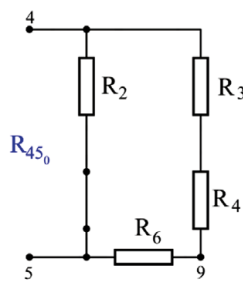
2.8-10. ábra

2.8.4.1. Helyettesítés Thèvenin-tétellel

Az eredeti áramkörrel leválasztjuk a 2.8-11. ábra által szemléltetett részt, amely egy újabb üresjáratú áramkört jelent. Ebben az áramkörben kiszámítjuk az U_{45_0} -tel jelzett üresjáratú feszültséget (2.8-20.), amely a helyettesítő generátor elektromotoros feszültsége lesz.



2.8-11. ábra



2.8-12. ábra

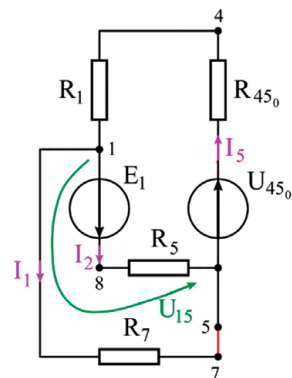
$$I_0 = \frac{E_2}{R_2 + R_3 + R_4 + R_6} = 0,38 \text{ (A)} \quad 2.8-19.$$

$$U_{45_0} = E_2 - I_0 R_2 = I_0 (R_3 + R_4 + R_6) = 17,14 \text{ (V)} \quad 2.8-20.$$

A továbbiakban passzivizáljuk az üresjáratú áramkört (2.8-12. ábra), és kiszámítjuk a kapcsolás 4–5 pontjai közötti eredő ellenállását (2.8-21.).

$$R_{45_0} = (R_3 + R_4 + R_6) \times R_2 = 25,7 \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.8-21.$$

A helyettesítési tétel alkalmazásából származó adatokkal elkészítjük a helyettesítő áramkört (2.8-13. ábra), amelyben az 1 és 5 csomópontok között alkalmazható a Millman-tétel (2.8-22.), és a 2.8-13. ábra jelöléseit felhasználva kiszámíthatjuk a keresett áramot (2.8-23.).



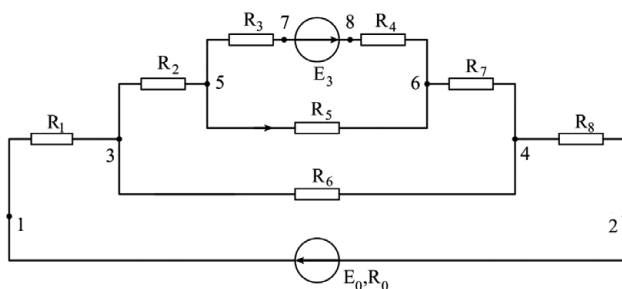
2.8-13. ábra

$$U_{15} = \frac{\frac{U_{45_0}}{R_{45_0} + R_1} - \frac{E_1}{R_5}}{\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_{45_0} + R_1}} = \frac{\frac{17,14}{35,7} - \frac{20}{15}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35,7}} = -4,37 \text{ (V)} \quad 2.8-22.$$

$$I_2 = \frac{U_{15} + E_1}{R_5} = 1,041 \text{ (A)} \quad 2.8-23.$$

2.9. feladat

A 2.9-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben: $E_0 = 10\text{V}$ a feszültséggenerátor elektromotoros feszültsége és $R_0 = 2\Omega$ a belső ellenállása, $E_3 = 32\text{V}$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 12\Omega$, $R_5 = 16\Omega$, $R_6 = 30\Omega$, $R_7 = 12\Omega$ és $R_8 = 18\Omega$.



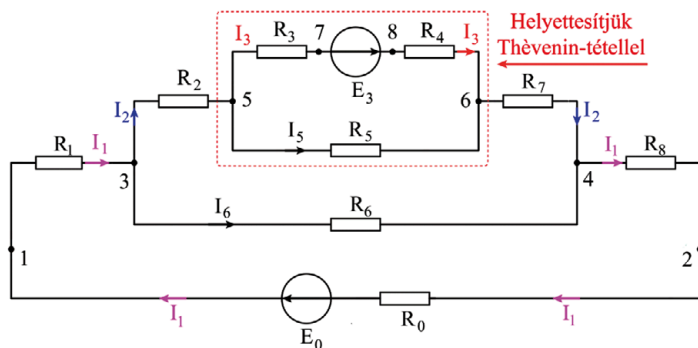
2.9-1. ábra

Feladatok:

Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Thèvenin-, Norton- és Millman-tételek alkalmazásával.

2.9.1. A Thèvenin-tétel alkalmazása

A 2.9-2. ábra szemlélteti az áramkörben folyó áramokat és az áramkör Thèvenin-tétellel helyettesítendő részét. Megjegyezzük, hogy a továbbiakban a valós generátort az ideális kétpólusokkal megjelölt modelljével, tehát egy E_0 elektromotoros feszültségű generátor és egy R_0 ellenállás soros kapcsolásával helyettesítjük.



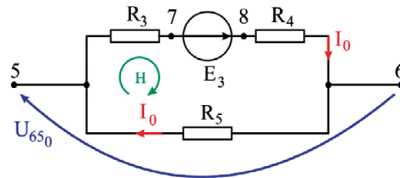
2.9-2. ábra

A 2.9-3. ábra a helyettesítendő áramköri részt szemlélteti, amely ebben az esetben megegyezik a helyettesítendő áramköri résszel (összetett kétpólus). Ebben az áramkörben kell meghatároznunk a szétválasztási pontok (5 és 6) közötti

üresjáratú feszültséget (érték és polaritás!!!). Ehhez először az ábrán jelzett hurokban a feltételezett áramirányt és körüljárási irányt figyelembe véve meghatározzuk az áramerősséget a huroktörvény segítségével (2.9-1. és 2.9-2.), majd kiszámítjuk az üresjáratban lévő pontok közötti feszültséget (2.9-3.).

$$E_3 = (R_3 + R_4 + R_5)I_0 \quad 2.9-1.$$

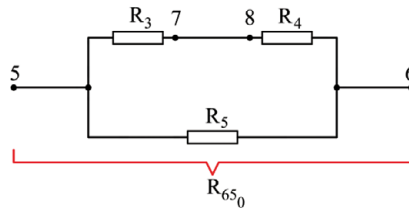
$$I_0 = \frac{E_3}{R_3 + R_4 + R_5} = 1 \text{ (A)} \quad 2.9-2.$$



2.9-3. ábra

$$U_{65_0} = R_5 I_0 = 16 \text{ (V)} \quad 2.9-3.$$

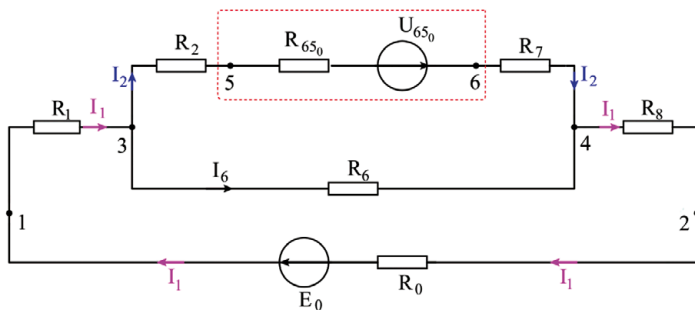
A helyettesítő feszültségforrás belső ellenállását a 2.9-3. ábra passzivizálásával nyert ellenállás kapcsolás (2.9-4. ábra) 5 és 6 pont közötti eredő ellenállásnak kiszámítása útján nyerjük. Mint az látható az ábrán, az R_3 sorosan van kapcsolva az R_4 -gyel, az eredőjük pedig párhuzamosan az R_5 -tel (2.9-4.).



2.9-4. ábra

$$R_{65_0} = (R_3 + R_4) \times R_5 = \frac{(R_3 + R_4)R_5}{R_3 + R_4 + R_5} = 8 \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.9-4.$$

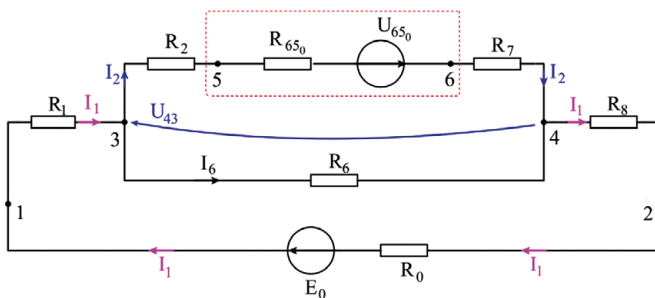
Figyelembe véve a Thèvenin-tétel alkalmazásának szabályait, a helyettesítéssel nyert új áramkört a 2.9-5. ábra szemlélteti.



2.9-5. ábra

2.9.2. A Millman-tétel alkalmazása

A Thèvenin-tétel alkalmazása után nyert áramkör már alkalmas a Millman-tétel alkalmazására (2.9-5. ábra). Jelöljük a 4 és 3 csomópontok közötti feszültséget (U_{43}) az ábrán jelzett irányítással (2.9-6. ábra), és kiszámítjuk a 2.9-5. képlettel.



2.9-6. ábra

$$U_{43} = \frac{\frac{U_{650}}{R_2 + R_{650} + R_7} - \frac{E_0}{R_0 + R_1 + R_8}}{\frac{1}{R_2 + R_{650} + R_7} + \frac{1}{R_0 + R_1 + R_8} + \frac{1}{R_6}} = 1,25 \text{ (V)} \quad 2.9-5.$$

Az áramkör ágaiban folyó áramokat az U_{43} feszültség felhasználásával a 2.9-6., 2.9-7. és 2.9-8. egyenletekkel számíthatjuk ki.

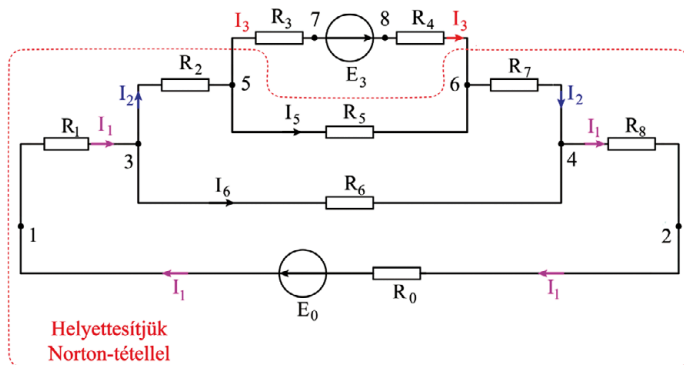
$$I_6 = -\frac{U_{43}}{R_6} = -41,67 \text{ (mA)} \quad 2.9-6.$$

$$I_1 = \frac{U_{43} + E_0}{R_0 + R_1 + R_8} = 0,45 \text{ (A)} \quad 2.9-7.$$

$$I_2 = I_1 - I_6 = 491,67 \text{ (mA)} \quad 2.9-8.$$

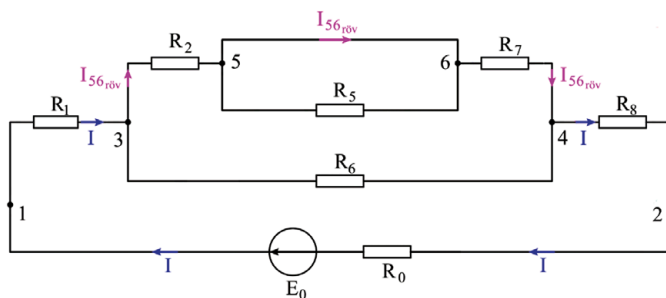
2.9.3. A Norton-tétel alkalmazása

Az eredeti áramkörből még fennmaradó meg nem határozott áramok kiszámítása érdekében alkalmazzuk a Norton-tételt úgy, hogy az alábbi ábrán a szaggatott vonallal elkerített részt helyettesítjük egy ekvivalens áramgenerátorral (2.9-7. ábra).



2.9-7. ábra

Ehhez először a már említett elkerített részt rövidre zárjuk (2.9-8. ábra), és kiszámítjuk a rövidzáráson folyó áramot, figyelembe véve azt, hogy az R_5 ellenálláson nem folyik áram. Az 1 és 2 pontok közötti eredő ellenállás segítségével a generátort tartalmazó ágba folyó áramot a 2.9-9. egyenlettel, majd az áramosztó-képletet alkalmazva az $I_{56_{röv}}$ áramot a 2.9-10. egyenlettel számíthatjuk ki.

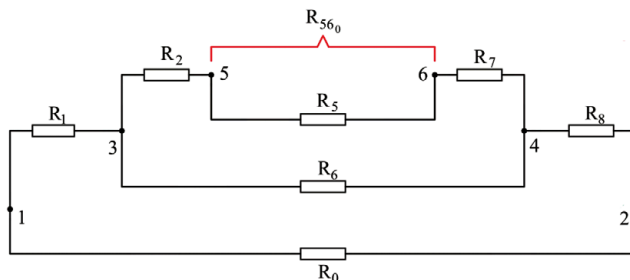


2.9-8. ábra

$$I = \frac{E_0}{R_0 + R_1 + R_8 + \frac{(R_2 + R_7)R_6}{R_2 + R_7 + R_6}} = 265,2 \text{ (mA)} \quad 2.9-9.$$

$$I_{56_{röv}} = I \frac{R_6}{R_6 + R_2 + R_7} = 153 \text{ (mA)} \quad 2.9-10.$$

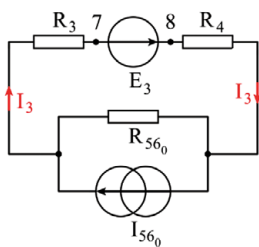
Ezek után passzivizáljuk az áramkört (2.9-9. ábra), és kiszámítjuk az 5 és 6 pontok közötti eredő ellenállást, amely a helyettesítő áramforrás belső ellenállása lesz (2.9-11.).



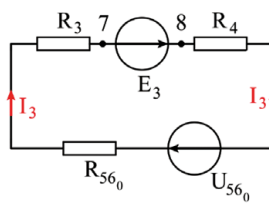
2.9-9. ábra

$$\begin{aligned}
 R_{56_0} &= \{[(R_0 + R_1 + R_8) \times R_6] + (R_2 + R_7)\} \times R_5 = \\
 &= \frac{\left[\frac{(R_0 + R_1 + R_8)R_6}{R_0 + R_1 + R_8 + R_6} + R_2 + R_7 \right] R_5}{\frac{(R_0 + R_1 + R_8)R_6}{R_0 + R_1 + R_8 + R_6} + R_2 + R_7 + R_5} = 11,04 \, (\Omega)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\frac{(R_0 + R_1 + R_8)R_6}{R_0 + R_1 + R_8 + R_6} + R_2 + R_7 + R_5}} \right| \quad 2.9-11.$$

A fentiekben meghatározott adatokkal a helyettesítő áramkört a 2.9-10. ábra szemlélteti, amelyben egy további Thèvenin-tétel alkalmazásával az áramforrást egy ekvivalens feszültségforrással helyettesítjük, amelynek az elektromotoros feszültsége a 2.9-12. képlettel adható meg, a belső ellenállása pedig R_{56_0} (2.9-11. ábra). A keresett áramot a 2.9-13. egyenlettel számíthatjuk ki.



2.9-10. ábra



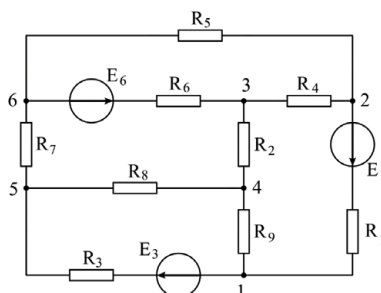
2.9-11. ábra

$$U_{56_0} = I_{56_{rov}} R_{56_0} = 1,689 \, (V) \quad 2.9-12.$$

$$I_3 = \frac{U_{56_0} + E_3}{R_{56_0} + R_3 + R_4} = \frac{1,689 + 32}{11,04 + 16} = 1,245 \, (A) \quad 2.9-13.$$

2.10. feladat

A 2.10-1. ábra egy lineáris, koncentrált paraméterű áramköri elemeket tartalmazó egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott: $E_1 = 80\text{V}$, $E_3 = 40\text{V}$, $E_6 = 20\text{V}$, $R_1 = 20\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 8\Omega$, $R_4 = 40\Omega$, $R_5 = 20\Omega$, $R_6 = 20\Omega$, $R_7 = 30\Omega$, $R_8 = 4\Omega$ és $R_9 = 2\Omega$.



2.10-1. ábra

Feladatok

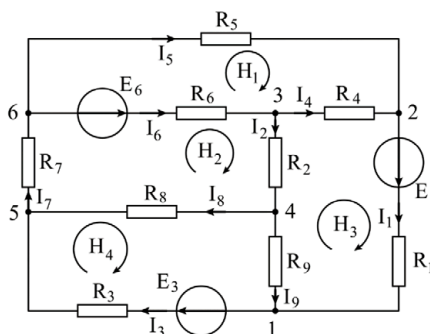
- Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramok erősségét a Kirchhoff-törvényekből felírt egyenletrendszer megoldásával.
- Számítsuk ki az R_5 ellenálláson folyó áramot a Thèvenin-tétellel.

2.10.1. Az a) megoldása

Áramköri analízis:

- » az áramköri ágak száma $N_{\text{Ág}} = 9$, ennek megfelelően kilenc áram van az áramkörben (2.10-2. ábra),
- » a csomópontok száma $N_{\text{Cs}} = 6$,
- » a független csomópontok száma $N_{\text{FCs}} = 5$,
- » a független hurkok száma $N_{\text{FHurok}} = N_{\text{Ág}} - N_{\text{Cs}} + 1 = 4$, ennek megfelelően négy huroktörvényt használhatunk az egyenletrendszerben.

Egy lehetséges egyenletrendszert a 2.2-5. törvények szemléltetnek.



2.10-2. ábra

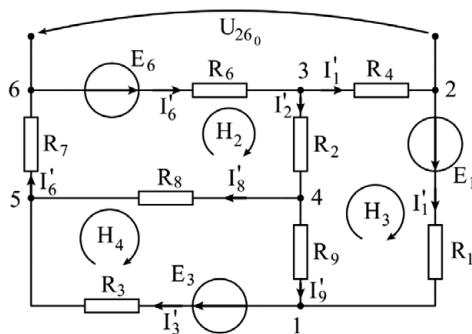
$$\begin{array}{l}
 H_1 \text{ hurok:} \\
 H_2 \text{ hurok:} \\
 H_3 \text{ hurok:} \\
 H_4 \text{ hurok:} \\
 1. \text{ csomópont:} \\
 2. \text{ csomópont:} \\
 3. \text{ csomópont:} \\
 4. \text{ csomópont:} \\
 6. \text{ csomópont:}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 -E_6 = -R_4 I_4 + R_5 I_5 - R_6 I_6 \\
 E_6 = R_2 I_2 + R_6 I_6 + R_7 I_7 + R_8 I_8 \\
 E_3 = R_3 I_3 - R_8 I_8 + R_9 I_9 \\
 E_1 = R_1 I_1 - R_2 I_2 + R_4 I_4 - R_9 I_9 \\
 I_3 - I_1 - I_9 = 0 \\
 I_1 - I_4 - I_5 = 0 \\
 I_2 + I_4 - I_6 = 0 \\
 I_9 + I_8 - I_2 = 0 \\
 I_5 + I_6 - I_7 = 0
 \end{array}
 \right.
 \quad 2.10-1.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $I_1 = 2,032$ (A), $I_2 = -0,989$ (A), $I_3 = 3,445$ (A), $I_4 = 1,005$ (A), $I_5 = 1,027$ (A), $I_6 = 0,016$ (A), $I_7 = 1,042$ (A), $I_8 = -2,403$ (A), $I_9 = 1,413$ (A).

2.10.2. A b) megoldása

Thèvenin-tétel – 1.

Leválasztjuk az R_5 ellenállást, amelyet a későbbiekben a helyettesítő áramkörbe teszünk. Eredményképpen a 2.10-3. ábra által szemléltetett üresjáratú áramkört kapjuk, amelyben meg kell határoznunk az U_{26_0} üresjáratú feszültséget. Mint látható az ábrán, az áramkör továbbra is elég bonyolult felépítésű, tartalmaz hat áramköri ágat és négy csomópontot, azonban számunkra elegendő az I'_1 és az I'_6 áramok ismerete. Ezeket az áramokat a 2.10-3. ábra által szemléltetett üresjáratú áramkör további egyszerűsítésével számoljuk ki.

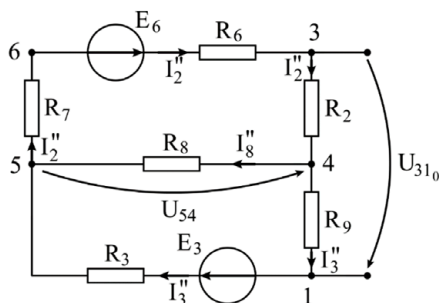


2.10-3. ábra

A folytatásban a **Thèvenin-tétel – 1**-en belül egy újabb Thèvenin-tételt alkalmazunk, amelynek a célja az I'_1 áram kiszámítása (**Thèvenin-tétel – 2.**).

Thèvenin-tétel – 2.

Leválasztjuk az R_1 , R_4 ellenállások és az E_1 generátor soros kapcsolását, amelyeket a későbbiekben a helyettesítő áramkörbe tesszük. Eredményképpen a 2.10-4. ábra által szemléltetett üresjáratú áramkört kapjuk, amelyben az U_{31_0} üresjáratú feszültséget kell meghatároznunk.



2.10-4. ábra

Az U_{31_0} üresjáratú feszültség kiszámítása érdekében kiszámítjuk az 5 és 4 csomópontok közötti U_{54} feszültséget a Millman-tétellel (2.10-4. ábra, 2.10-2.), majd a 2.10-3. és 2.10-4. összefüggésekkel kiszámítjuk az I_2'' és I_3'' áramokat.

$$U_{54} = \frac{\frac{E_3}{R_3 + R_9} - \frac{E_6}{R_2 + R_6 + R_7}}{\frac{1}{R_3 + R_9} + \frac{1}{R_2 + R_6 + R_7} + \frac{1}{R_8}} = 9,79 \text{ (V)} \quad 2.10-2.$$

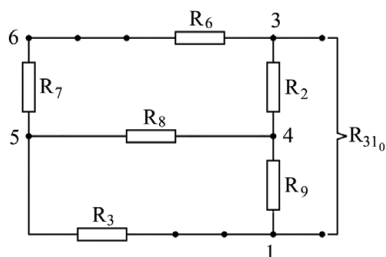
$$I_2'' = \frac{U_{45} + E_6}{R_2 + R_6 + R_7} = 0,572 \text{ (A)} \quad 2.10-3.$$

$$I_3'' = \frac{E_3 - U_{54}}{R_3 + R_9} = 3,021 \text{ (A)} \quad 2.10-4.$$

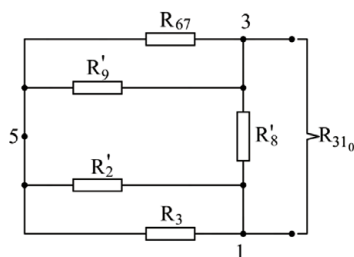
Az U_{31_0} üresjáratú feszültséget, a 2.10-4. ábra jelöléseit figyelembe véve, a 2.10-5. összefüggéssel számíthatjuk ki.

$$U_{31_0} = R_2 I_2'' + R_9 I_3'' = 7,186 \text{ (V)} \quad 2.10-5.$$

A helyettesítő feszültségforrás belső ellenállást a 2.10-4. ábra által szemléltetett áramkör passzivizálásával nyert ellenállás-kapcsolás 1 és 3 pontok közötti eredő ellenállásának meghatározásával nyerjük (2.10-5. ábra). Mivel a 4-es egy csillagpont ebben a kapcsolásban, egy csillag-delta átalakítást végzünk ($R_2, R_8, R_9 \rightarrow R'_2, R'_8, R'_9$, (2.10-6. ábra, 2.8-7., 2.8-8., 2.8-9. és 2.8-10. összefüggések).



2.10-5. ábra



2.10-6. ábra

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = 0,5 \text{ (S)} \quad G_8 = \frac{1}{R_8} = 0,25 \text{ (S)} \quad G_9 = \frac{1}{R_9} = 0,5 \text{ (S)} \quad 2.10-6.$$

$$G_{\lambda} = G_2 + G_8 + G_9 = 1,25 \text{ (S)} \quad 2.10-7.$$

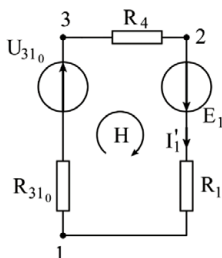
$$G'_2 = \frac{G_8 G_9}{G_{\lambda}} = 0,1 \text{ (mS)} \quad G'_8 = \frac{G_2 G_9}{G_{\lambda}} = 0,2 \text{ (mS)} \quad G'_9 = \frac{G_8 G_2}{G_{\lambda}} = 0,1 \text{ (mS)} \quad 2.10-8.$$

$$R'_2 = \frac{1}{G'_2} = 10 \text{ (}\Omega\text{)} \quad R'_8 = \frac{1}{G'_8} = 5 \text{ (}\Omega\text{)} \quad R'_9 = \frac{1}{G'_9} = 10 \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.10-9.$$

A helyettesítő generátor belső ellenállása a 2.10-6. ábra alapján a 2.10-10. összefüggéssel számítható ki.

$$R_{13_0} = [(R_{67} \times R'_9) + (R_3 \times R'_2)] \times R'_8 = 3,59 \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.10-10.$$

A helyettesítő áramkört a 2.10-7. ábra mutatja be.



2.10-7. ábra

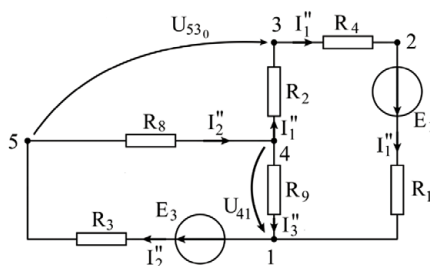
Az I'_1 áramot a helyettesítő áramkörben felírt huroktörvényből számíthatjuk ki, amellyel a **Thèvenin-tétel – 2.** alkalmazása befejeződik (2.10-11.).

$$I'_1 = \frac{E_1 + U_{31_0}}{R_1 + R_4 + R_{31_0}} = 1,371 \text{ (A)} \quad 2.10-11.$$

A folytatásban a **Thèvenin-tétel – 1**-en belül egy újabb Thèvenin-tételt kezdünk meg, amelynek a célja az I'_6 áram kiszámítása (**Thèvenin-tétel – 3.**)

Thèvenin-tétel – 3.

Leválasztjuk az R_6 , R_7 ellenállások és az E_6 generátor soros kapcsolását, amelyeket a későbbiekben a helyettesítő áramkörbe tesszük. Eredményképpen a 2.10-8. ábra által szemléltetett üresjáratú áramkört kapjuk, amelyben az U_{53_0} üresjáratú feszültséget kell meghatároznunk.



2.10-8. ábra

Az U_{53_0} üresjáratú feszültség kiszámítása érdekében kiszámítjuk a 4 és 1 csomópontok közötti U_{41} feszültséget a Millman-tétellel (2.10-8. ábra, 2.10-12.), majd a 2.10-13. és 2.10-14. összefüggésekkel kiszámítjuk az I_1'' és I_2'' áramokat.

$$U_{41} = \frac{\frac{E_3}{R_3 + R_8} - \frac{E_1}{R_1 + R_2 + R_4}}{\frac{1}{R_3 + R_8} + \frac{1}{R_1 + R_2 + R_4} + \frac{1}{R_9}} = 3,408 \text{ (V)} \quad 2.10-12.$$

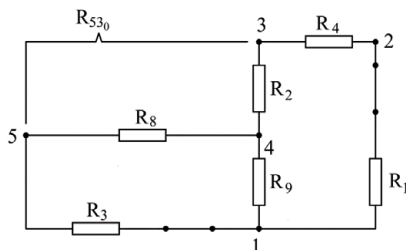
$$I_1'' = \frac{U_{41} + E_1}{R_1 + R_2 + R_4} = 1,345 \text{ (A)} \quad 2.10-13.$$

$$I_2'' = \frac{E_3 - U_{41}}{R_3 + R_8} = 3,049 \text{ (A)} \quad 2.10-14.$$

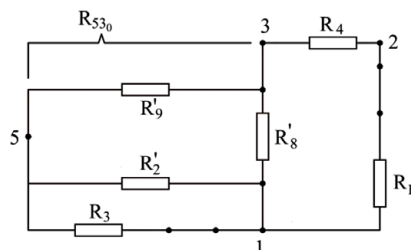
Az U_{53_0} üresjáratú feszültséget, a 2.10-8. ábra jelöléseit figyelembe véve, a 2.10-15. összefüggéssel számíthatjuk ki.

$$U_{53_0} = R_2 I_1'' + R_8 I_2'' = 14,89 \text{ (V)} \quad 2.10-15.$$

A helyettesítő feszültségforrás belső ellenállást a 2.10-8. ábra által szemléltetett áramkör passzivizálásával nyert ellenállás-kapcsolás 5 és 3 pontok közötti eredő ellenállásának meghatározásával nyerjük (2.10-9. ábra). Mivel a 4-es egy csillagpont ebben a kapcsolásban, egy csillag-delta átalakítást végzünk, amelynek eredménye megegyezik a **Thèvenin-tétel** – 2-nél számított értékekkel ($R_2, R_8, R_9 \rightarrow R'_2, R'_8, R'_9$, (2.10-10. ábra, 2.8-7., 2.8-8., 2.8-9. és 2.8-10. összefüggések).



2.10-9. ábra

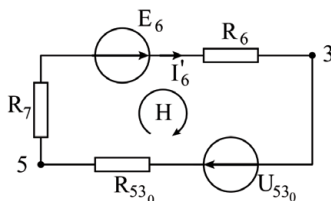


2.10-10. ábra

A helyettesítő generátor belső ellenállása a 2.10-10. ábra alapján a 2.10-16. összefüggéssel számítható ki.

$$R_{53_0} = [(R_1 + R_4) \times R'_8] + (R_3 \times R'_2) \times R'_9 = 4,752 (\Omega) \quad 2.10-16.$$

A helyettesítő áramkört a 2.10-11. ábra mutatja be.



2.10-11. ábra

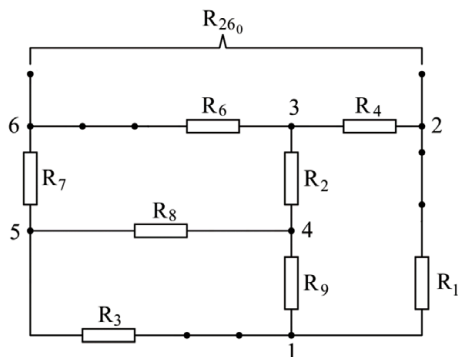
Az I'_6 áramot a helyettesítő áramkörben felírt huroktörvényből számíthatjuk ki, amellyel a **Thèvenin-tétel – 3.** alkalmazása befejeződik (2.10-17.).

$$I'_6 = \frac{E_6 + U_{53_0}}{R_6 + R_7 + R_{53_0}} = 0,637 (A) \quad 2.10-17.$$

Felhasználva a **Thèvenin-tétel – 2.** és a **Thèvenin-tétel – 3.** segítségével kiszámolt I'_1 és I'_6 áramokat, illetve figyelembe véve a 2.10-3. ábra jelöléseit, kiszámíthatjuk a **Thèvenin-tétel – 1.** U_{26_0} üresjáratú feszültségét (2.10-18.).

$$U_{26_0} = E_6 - R_6 I'_6 - R_4 I'_1 = 20 - 12,74 - 54,84 = -47,58 (V) \quad 2.10-18.$$

A **Thèvenin-tétel – 1.** folytatásában a generátor belső ellenállását kell kiszámítanunk, amelyet a 2.10-3. ábra passzivizálásával nyert ellenállás-kapcsolás 2 és 6 pontjai közötti eredő ellenállás kiszámításával nyerünk (2.10-12. ábra). Az ábrán megfigyelhető, hogy vegyes kapcsolással van dolgunk, így ekvivalens átalakításra van szükség. Többféleképpen lehet átalakításokat végezni, amelyek során láthatóvá válik az is, hogy egy átalakítás nem elegendő az eredő kiszámításához. Az alábbiakban egyet mutatunk be a lehetséges megoldások közül.

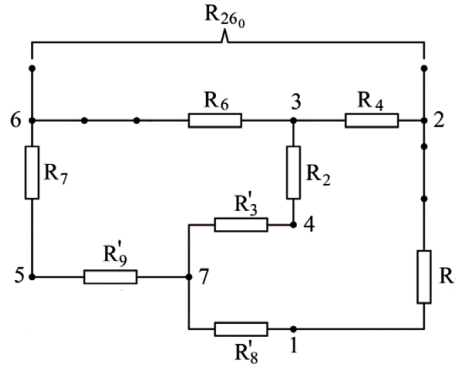


2.10-12. ábra

Az R_3 , R_8 , R_9 ellenállások delta kapcsolásban vannak, amelyet az R'_3 , R'_8 , R'_9 csillag alakzatba kapcsolt ellenállás-hármassal helyettesítünk (2.10-13. ábra). A csillag alakzat ellenállásainak értékeit a 2.10-19. és 2.10-20. összefüggésekkel számíthatjuk ki.

$$R_\Delta = R_3 + R_8 + R_9 = 14 \, (\Omega) \quad 2.10-19.$$

$$R'_3 = \frac{R_8 R_9}{R_\Delta} = 0,57 \, (\Omega) \quad R'_8 = \frac{R_3 R_9}{R_\Delta} = 1,14 \, (\Omega) \quad R'_9 = \frac{R_8 R_3}{R_\Delta} = 2,28 \, (\Omega) \quad 2.10-20.$$



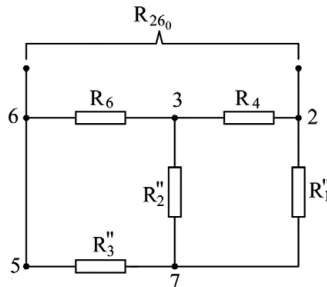
2.10-13. ábra

Észrevehető, hogy megjelennek soros kapcsolások az átalakítás után, így az alábbiakban néhány eredő ellenállást számíthatunk ki (2.10-21., 2.10-22., 2.10-23.), és egyszerűbb alakban rajzolhatjuk le a kapcsolást (2.10-14. ábra).

$$R''_1 = R_1 + R'_8 = 21,14 \, (\Omega) \quad 2.10-21.$$

$$R''_2 = R_2 + R'_3 = 2,57 \, (\Omega) \quad 2.10-22.$$

$$R''_3 = R_7 + R'_9 = 32,28 \, (\Omega) \quad 2.10-23.$$



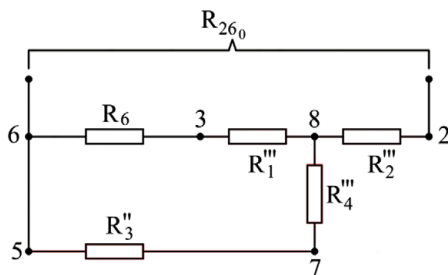
2.10-14. ábra

A 2.10-14. ábra által szemléltetett áramkör még mindig egy vegyes kapcsolás, így újabb átalakításra van szükség. Az R''_1 , R''_2 , R_4 ellenállások delta kapcsol-

lásban vannak, amelyet az R_1''' , R_2''' , R_4''' csillag alakzatba kapcsolt ellenállás-hár-masssal helyettesítünk (2.10-15. ábra). A csillag alakzat ellenállásainak értékeit a 2.10-24. és 2.10-25. összefüggésekkel számíthatjuk ki.

$$R_\Delta = R_1'' + R_2'' + R_4 = 63,71 (\Omega) \quad 2.10-24.$$

$$R_1''' = \frac{R_4 R_2''}{R_\Delta} = 1,62 (\Omega) \quad R_2''' = \frac{R_1'' R_4}{R_\Delta} = 13,27 (\Omega) \quad R_4''' = \frac{R_2'' R_1''}{R_\Delta} = 0,85 (\Omega) \quad 2.10-25.$$

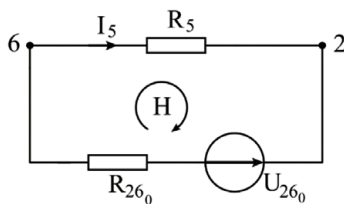


2.10-15. ábra

A keresett belső ellenállást a 2.10-15. ábra alapján a 2.10-26. összefüggéssel számíthatjuk ki.

$$R_{26_0} = ((R_6 + R_1''') \times (R_3''' + R_4''')) + R_2''' = 26,35 (\Omega) \quad 2.10-26.$$

Figyelembe véve azt, hogy a kiindulásnál az R_5 ellenállást választottuk le az eredeti áramkörrel, majd meghatároztuk a helyettesítő feszültségforrás elektromotoros feszültségét (2.10-18.) és belső ellenállását (2.10-26.), megrajzolhatjuk a helyettesítő áramkört, majd pedig egy huroktörvényből kiszámíthatjuk a keresett I_5 áramot (2.10-27.).



2.10-16. ábra

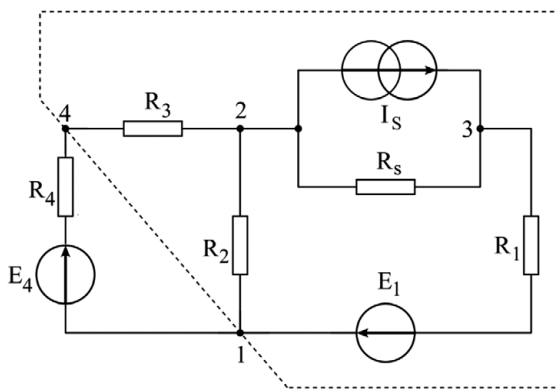
$$I_5 = -\frac{U_{26_0}}{R_5 + R_{26_0}} = -\frac{-47,58}{20 + 26,35} = 1,027 (A) \quad 2.10-27.$$

2.11. feladat

A 2.11-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben: $E_1 = 20\text{ V}$, $E_4 = 40\text{ V}$, $I_s = 2\text{ A}$, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, $R_4 = 20\ \Omega$ és $R_s = 10\ \Omega$.

Feladatok:

- Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat egy Kirchhoff-egyenletekből felírt egyenletrendszerből.
- Az ábrán szaggatott vonallal jelzett kétpólust helyettesítsük egy ekvivalens feszültséggenerátorral.
- Számoljuk ki az R_2 ellenálláson átfolyó áramot a Norton-tétellel.
- Számítsuk ki a kétpólusok által szolgáltatott és fogyasztott teljesítményeit.



2.11-1. ábra

2.11.1. Az a) megoldása

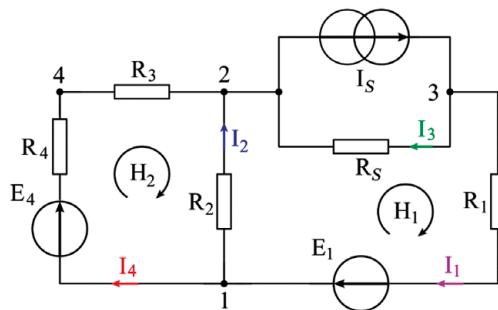
Áramköri analízis:

- » az áramköri ágak száma $N_{Ag} = 4$, ennek megfelelően négy áram van az áramkörben (2.11-2. ábra) (megjegyezzük azt a tényt, hogy az áramgenerátor forrásáramát tartalmazó ágban kizárólag az I_s áram folyhat),
- » a csomópontok száma $N_{Cs} = 3$,
- » a független hurkok száma $N_{FHurok} = N_{Ag} - N_{Cs} + 1 = 2$, ennek megfelelően két huroktörvényt használhatunk az egyenletrendszerben.

Egy lehetséges egyenletrendszert a 2.11-1. törvények szemléltetnek.

$$\begin{array}{l}
 H_1 \text{ hurok:} \\
 H_2 \text{ hurok:} \\
 1. \text{ csomópont:} \\
 2. \text{ csomópont:}
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 E_1 = R_1 I_1 + R_2 I_2 - R_s I_3 \\
 E_4 = -R_2 I_2 + (R_3 + R_4) I_4 \\
 I_4 + I_2 - I_1 = 0 \\
 I_s - I_2 - I_3 - I_4 = 0
 \end{array}
 \right.
 \quad 2.11-1.$$

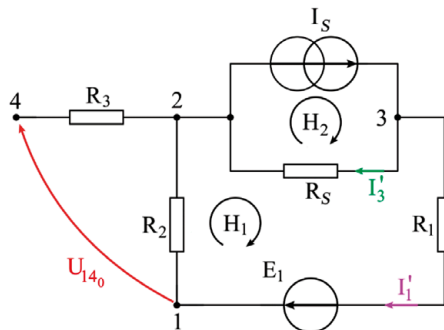
Az egyenletrendszer megoldása: $I_1 = 1,2\text{ (A)}$, $I_2 = 0,1\text{ (A)}$, $I_3 = 0,8\text{ (A)}$, $I_4 = 1,1\text{ (A)}$.



2.11-2. ábra

2.11.2. A b) megoldása

A 2.11-1. ábra szaggatott vonallal jelölt részének helyettesítéséhez leválasztjuk a jelölt áramköri elemeket az eredeti áramkörrel, ezáltal létrehozva az üresjáratú áramkört, amelyben az U_{14_0} üresjáratú feszültséget kell kiszámítani (2.11-3. ábra).



2.11-3. ábra

Az egyszerűség kedvéért egy kétismeretlenes egyenletrendszert írunk fel az ábrán jelzett áramok kiszámítása érdekében (2.11-3. ábra), amely tartalmaz egy huroktörvényt és egy csomóponti törvényt (2.11-2.).

$$\left. \begin{array}{l} H_1 \text{ hurok: } \{ E_1 = (R_1 + R_2)I'_1 - R_S I'_3 \\ 3. \text{ csomópont: } \{ I'_1 + I'_3 - I_S = 0 \end{array} \right\} \quad 2.11-2.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $I'_1 = \frac{4}{7} \text{ (A)}$, $I'_3 = \frac{10}{7} \text{ (A)}$.

Figyelem!

A 2.11-2. egyenletekből álló Kirchhoff-egyenletrendszer nem az egyedüli lehetőség a feladat megoldására. Más egyenlet felírására is lehetőség van, például ebben az esetben a H_2 huroktörvényt is fel lehet írni. Ez a hurok viszont óvatosan kezelendő, mivel ebben a hurokban nem találunk elektromotoros feszültséget, ezért a huroktörvény is eltér a megszokott alaktól. Ebben az esetben a huroktör-

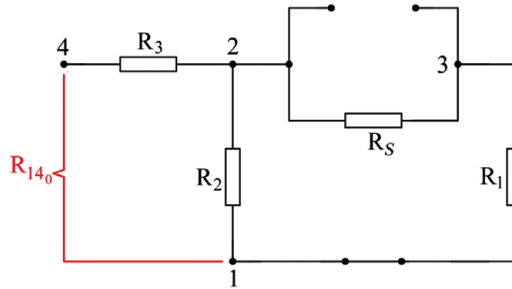
vény tulajdonképpen az áramgenerátor sarkain lévő feszültséget adja meg (U_{32}), amit például az áramgenerátor belső ellenállásán számíthatunk ki (2.11-3.).

$$H_2 \text{ hurok: } U_{32} = R_S I'_3 \quad 2.11-3.$$

Mivel az R_3 ellenálláson nem folyik áram, az üresjáratú feszültséget egyszerűen a 2.11-4. egyenlettel számolhatjuk ki.

$$U_{14_0} = R_2 I'_1 = \frac{160}{7} \text{ (V)} \quad 2.11-4.$$

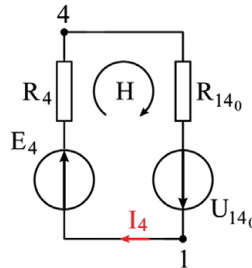
A helyettesítő generátor belső ellenállását az üresjáratú áramkör (2.11-3. ábra) passzivizálásával nyert ellenállás-kapcsolás (2.11-4. ábra) 4 és 1 pontjai közötti eredő ellenállás kiszámításával nyerjük (2.11-5.).



2.11-4. ábra

$$R_{14_0} = R_3 + (R_S + R_1) \times R_2 = R_3 + \frac{(R_S + R_1)R_2}{R_S + R_1 + R_2} = \frac{260}{7} \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.11-5.$$

A helyettesítő generátor elektromotoros feszültségét (U_{14_0}) és belső ellenállását (R_{14_0}) sorba kapcsoljuk az eredeti áramkörből meghagyott E_4 és R_4 áramköri elemekkel, létrehozva a helyettesítő áramkört (2.11-5. ábra), majd pedig egy huroktörvényből kiszámítjuk a keresett I_4 áramot (2.11-6.).

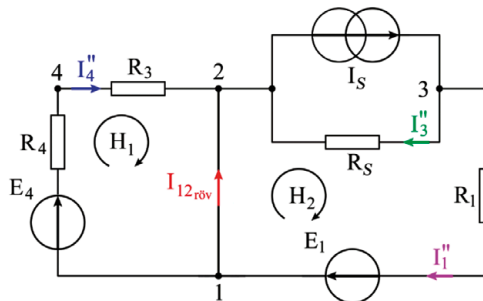


2.11-5. ábra

$$I_4 = \frac{U_{14_0} + E_4}{R_{14_0} + R_4} = 1,1 \text{ (A)} \quad 2.11-6.$$

2.11.3. A c) megoldása

A rövidzárási áram létrehozása szempontjából, a választott rövidzárás függetleníti a rövidzárás bal oldalán lévő áramkörti elemeket a jobb oldalán lévő áramkörti elemektől (2.11-6. ábra). Ennek megfelelően felírhatunk egy független huroktörvényt (2.11-6. ábra) az I_4'' kiszámításához (2.11-7.) és egy kétismeretlenes egyenletrendszert (2.11-6. ábra) az I_1'' és az I_3'' kiszámításához (2.11-8.).



2.11-6. ábra

$$I_4'' = \frac{E_4}{R_3 + R_4} = 1 \text{ (A)} \quad 2.11-7.$$

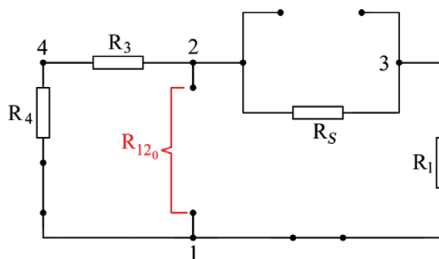
$$\begin{array}{l} H_2 \text{ hurok: } \{ E_1 = R_1 I_1'' - R_S I_3'' \\ 3. \text{ csomópont: } \{ I_1'' + I_3'' - I_S = 0 \end{array} \quad 2.11-8.$$

Az egyenletrendszer megoldása: $I_1'' = \frac{4}{3} \text{ (A)}$, $I_3'' = \frac{2}{3} \text{ (A)}$.

A keresett rövidzárási áramot a 2.11-6. ábra 1-es csomópontjára felírt csomóponti törvényből számíthatjuk ki (2.11-9.).

$$I_{12rov} = I_1'' - I_4'' = \frac{1}{3} \text{ (A)} \quad 2.11-9.$$

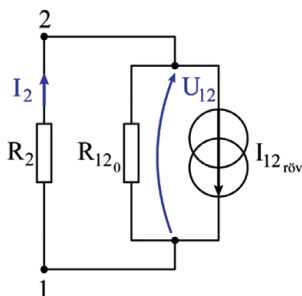
A helyettesítő generátor belső ellenállását a rövidzárási áramkör (2.11-6. ábra) passzivizálásával nyert ellenállás-kapcsolás (2.11-7. ábra) 1 és 2 pontjai közötti eredő ellenállás kiszámításával nyerjük (2.11-10.).



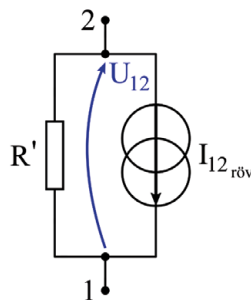
2.11-7. ábra

$$R_{12_0} = (R_3 + R_4) \times (R_5 + R_1) = \frac{(R_3 + R_4)(R_5 + R_1)}{R_3 + R_4 + R_5 + R_1} = \frac{120}{7} (\Omega) \quad 2.11-10.$$

A helyettesítő áramkört a 2.11-8. ábra szemlélteti. Az I_2 kiszámítása érdekében összevonhatjuk az R_2 és R_{12_0} párhuzamosan kapcsolt ellenállásokat (2.11-11.), az így kapott eredő ellenállást tekinthetjük egy újabb áramgenerátor belső ellenállásának (2.11-9. ábra), és kiszámíthatjuk a generátor sarkain lévő feszültséget (2.11-12.). Ugyanez a feszültség van az eredeti áramgenerátor sarkain is (2.11-8. ábra), így a keresett áramot egy Ohm-törvény segítségével kiszámíthatjuk (2.11-13.).



2.11-8. ábra



2.11-9. ábra

$$R' = R_2 \times R_{12_0} = \frac{R_2 R_{12_0}}{R_2 + R_{12_0}} = 12 (\Omega) \quad 2.11-11.$$

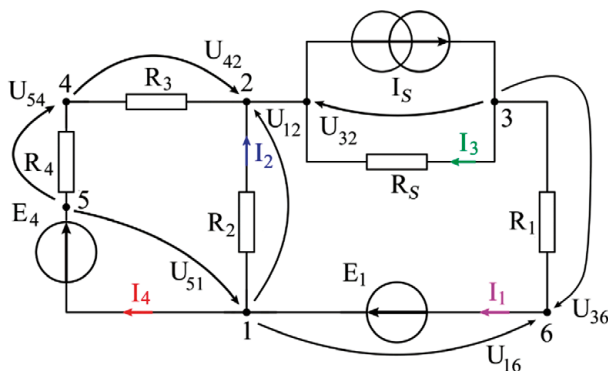
$$U_{12} = R' I_{12_0} = 4 (V) \quad 2.11-12.$$

$$I_2 = \frac{U_{12}}{R_2} = 0,1 (A) \quad 2.11-13.$$

2.11.4. A d) megoldása

A teljesítménymérleg egyenletének felírásához szükségünk van minden két-pólus esetében az átfolyó áram erősségére és a kétpólusok kapcsain lévő feszültségekre.

Mivel három aktív áramkörü elem van az áramkörben, külön figyelmet kell szentelnünk arra, hogy milyen üzemmódban működnek ezek az aktív áramkörü elemek. Az áramkörben folyó áramok technikai irányait és az áramkörü elemeken lévő pozitív feszültségeket a 2.11-10. ábra szemlélteti.



2.11-10. ábra

A teljesítménymérleg egyenletének felírásához szükséges eldönteni azt, hogy mely kétpólusok fogyasztják és mely kétpólusok generálják a teljesítményt (energiát). A feladat megoldásához az 1.6. fejezetben bevezetett fogyasztói konvenciót fogjuk használni. Az ellenállások esetében természetesen nincs semmilyen tennivalónk, hiszen ezek kizárólag fogyasztják a teljesítményt. A három aktív áramköri elem esetében viszont meg kell vizsgálnunk, hogy a konvenciónak megfelelően milyen előjelt vesz fel a teljesítmény.

A fogyasztói konvenciónál bevezetett jelölések és a 2.11-10. ábra jelölései alapján:

- » az E_1 feszültséggenerátor esetében az U_{16} feszültség pozitív, az I_1 áram viszont a feszültség irányításával ellentétes irányba folyik, így a teljesítmény $U_{16} I_1 < 0$, tehát a feszültséggenerátor generálja az elektromos teljesítményt,
- » az E_4 feszültséggenerátor esetében az U_{54} feszültség pozitív, az I_4 áram viszont a feszültség irányításával ellentétes irányba folyik, így a teljesítmény $U_{54} I_4 < 0$, tehát a feszültséggenerátor generálja az elektromos teljesítményt,
- » az I_s áramgenerátor esetében az U_{32} feszültség pozitív, az I_s áram viszont a feszültség irányításával ellentétes irányba folyik, így $U_{32} I_s < 0$, tehát az áramgenerátor generálja az elektromos teljesítményt.

Következésképpen mindhárom áramforrás generálja az elektromos energiát. A kétpólusokon átfolyó áramokra, a kétpólusokon lévő feszültségekre, a kétpólusokon lévő teljesítményekre vonatkozó adatokat, illetve a teljesítménymérlegre vonatkozó egyenletet a 2. táblázat foglalja össze. A táblázatban először a fogyasztói konvenciónak megfelelő előjellel tüntettük fel a teljesítményeket, amelynek a segítségével el tudtuk dönteni, hogy mely kétpólusok generálják az elektromos teljesítményt. Ezek után már csak a teljesítmények abszolút értékeit, illetve a teljesítménymérleg egyenletét tüntettük fel (2.11-14.).

2. táblázat

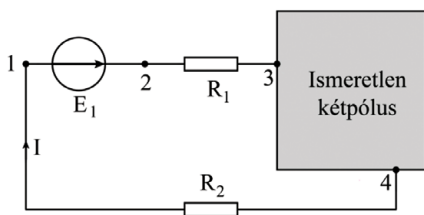
	E_1	E_4	I_s	R_s	R_1	R_2	R_3	R_4
Áram (A)	1,2	1,1	2	0,8	1,2	0,1	1,1	1,1
Feszültség (V)	20	40	8	8	24	4	22	22
Generált teljesítmény (fogyasztói konvenció) (W) $P_E^{(fogy.konv.)}$	-24	-44	-16	–	–	–	–	–
Fogyasztott teljesítmény (fogyasztói konvenció) (mW) $P_R^{(fogy.konv.)}$	–	–	–	6,4	28,8	0,4	24,2	24,2
Generált teljesítmény (W) P_{gen}	24	44	16	–	–	–	–	–
Fogyasztott teljesítmény (mW) P_{fogy}	–	–	–	6,4	28,8	0,4	24,2	24,2
Generált össz-teljesítmény (W)	84			–				
Fogyasztott össz-teljesítmény (W)	–			84				
Teljesítménymérleg egyenlete	$P_{gen} = P_{fogy} = 84 \text{ (W)}$						2.11-14.	

2.12. feladat

A 2.12-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott az áram technikai iránya és az áramerősség $I = 0,5\text{A}$, valamint ismertek az áramköri elemek paraméterei: $E_1 = 10\text{V}$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 4\Omega$. Az áramkörnek egy része egy „Ismeretlen kétpólus” felirattal ellátott dobozba van rejtve.

Feladatok:

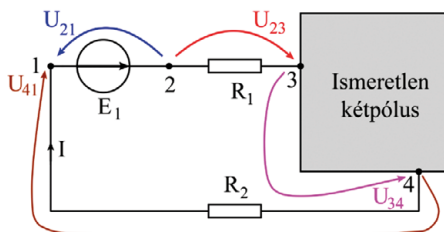
- A fogyasztói konvenciót figyelembe véve döntsük el, hogy fogyasztó vagy generátor üzemmódban lévő áramköri szakaszt rejt-e a doboz.
- Mekkora a dobozban lévő áramkör által felvett/leadott teljesítmény?
- Nevezzük meg a legegyszerűbb ideális kétpólusokat, amelyek szerepelhetnek a dobozban úgy, hogy az áramkörben az $I = 0,5\text{A}$ áram folyjon, és adjuk meg az áramköri paramétereiket. Szemléltessük ezeket az eseteket az áramkörben.
- Adjunk példákat két ideális kétpólusból álló összetett kétpólusra, amelyek szintén az $I = 0,5\text{A}$ áramot biztosítják az áramkörben.
- Mi kellene legyen a legegyszerűbb kétpólus, és milyen paraméterrel kell rendelkezzen ahhoz, hogy az áramkörben $I = -0,5\text{A}$ erősségű áram folyjon?



2.12-1. ábra

2.12.1. Az a) megoldása

Ahhoz, hogy ezt a kérdést megválaszolhassuk, ki kell számolni az ismeretlen kétpólus bemenetein lévő feszültséget. Mivel az áram iránya és értéke is adott, az ismert kétpólusokon lévő feszültségek könnyedén kiszámíthatók (2.12-2. ábra, 2.12-1. – 2.12-3.).



2.12-2. ábra

$$U_{41} = R_2 I = 2 \text{ (V)} \quad 2.12-1.$$

$$U_{21} = E_1 = 10 \text{ (V)} \quad 2.12-2.$$

$$U_{23} = R_1 I = 4 \text{ (V)} \quad 2.12-3.$$

A továbbiakban felírhatjuk a huroktörvényt (2.12-4.), amelyből kiszámíthatjuk az ismeretlen kétpóluson lévő feszültséget (2.12-5.).

$$U_{41} = -U_{34} - U_{23} + U_{21} \quad 2.12-4.$$

$$U_{34} = U_{21} - U_{23} - U_{41} = 4 \text{ (V)} \quad 2.12-5.$$

Mivel az U_{34} feszültség pozitív értékkel rendelkezik, és az irányítása meg egyezik az áramkörben folyó áram technikai irányával, következik, hogy az „Ismeretlen kétpólus” feliratú dobozban fogyasztóként működő áramköri szakasz van.

2.12.2. A b) megoldása

Az ismeretlen kétpólus által felvett teljesítmény a 2.12-6. összefüggéssel számolható ki.

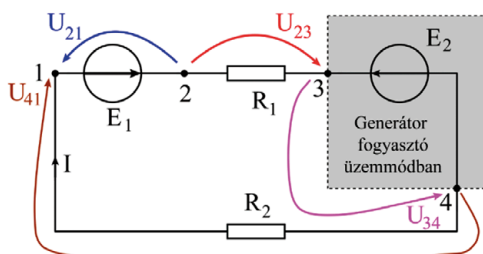
$$P_{34} = U_{34} I = 2 \text{ (W)} \quad 2.12-6.$$

2.12.3. A c) megoldása

Mivel a feladat a lehető legegyszerűbb ideális kétpólusokat kéri megnevezni, csak két eset lehetséges. Az egyik esetben egy fogyasztóként működő ideális generátort, a másik esetben pedig egy ellenállást képzelhetünk el a dobozban.

A generátor elektromotoros feszültsége az U_{34} -gyel kell egyenlő legyen (2.12-7.), és áramkörileg a 2.12-3. ábra szerint kell legyen bekötve.

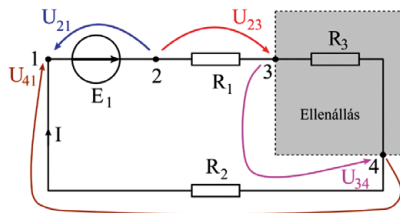
$$E_2 = U_{34} = 4 \text{ (V)} \quad 2.12-7.$$



2.12-3. ábra

Az ellenálláson a feszültség az U_{34} -gyel kell egyenlő legyen, így az ellenállás értékét az Ohm-törvényből számíthatjuk ki (2.12-8.), és áramkörileg a 2.12-4. ábra szerint kell legyen bekötve.

$$R_3 = \frac{U_{34}}{I} = 8 \text{ (}\Omega\text{)} \quad 2.12-8.$$

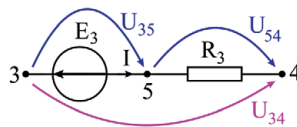


2.12-4. ábra

2.12.4. A d) megoldása

2.12.4.1. Fogyasztó üzemmódban lévő valós feszültséggenerátor / ekvivalens áramgenerátor

A fogyasztó üzemmódban működő valós feszültséggenerátort a 2.12-5. ábra szemlélteti. Ez a generátor egy feltételnek kell megfeleljen, mégpedig annak, hogy a pólusain a feszültség értéke $U_{34} = 4 \text{ V}$ kell legyen. Ezt a feltételt két paraméter kombinálásával érhetjük el a 2.12-9. egyenletnek megfelelően.



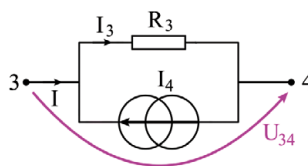
2.12-5. ábra

$$U_{34} = U_{35} + U_{54} = E_3 + R_3 I = 4 \text{ (V)}$$

2.12-9.

Ezt az egyenletet parametrikusan tudjuk megoldani, ami azt jelenti, hogy ha pl. $E_3 = 3,5 \text{ V}$, akkor $R_3 = 1 \Omega$, vagy ha $E_3 = 1 \text{ V}$, akkor $R_3 = 6 \Omega$.

Ugyancsak megoldás lehet az előzőekben tárgyalt feszültséggenerátorral ekvivalens áramgenerátor (2.12-6. ábra). A generátor forrásáramát a Norton-tétellel lehet meghatározni (2.12-10.).



2.12-6. ábra

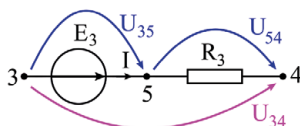
$$I_4 = \frac{E_3}{R_3}$$

2.12-10.

2.12.4.2. Fogyasztóként működő valós feszültséggenerátor / ekvivalens áramgenerátor

A fogyasztóként működő valós feszültséggenerátort a 2.12-7. ábra szemlélteti. Megfigyelhető, hogy a valós feszültségforrásban szereplő E_3 ideális feszültséggenerátor generátor üzemmódban működik, és teljesítményt ad le. Ennek ellenére a valós feszültséggenerátor teljesítményt vesz fel. Ennek az a magyarázata, hogy mind az E_3 által termelt, mind a külső áramkörtől felvett teljesítmény az R_3 belső ellenálláson disszipálódik. A valódi feszültséggenerátor sarkain (3 és 4 pont között) a pozitív feszültség és az áram iránya szintén megegyezik, ami egy fogyasztóra jellemző.

Ez a generátor is annak a feltételnek kell megfeleljen, hogy a pólusain a feszültség értéke $U_{34} = 4 \text{ V}$ kell legyen. Ezt a feltételt szintén két paraméter kombinálásával érhetjük el a 2.12-11. egyenletnek megfelelően.



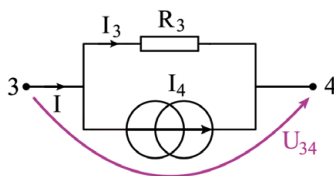
2.12-7. ábra

$$U_{34} = U_{35} + U_{54} = R_3 I - E_3 = 4 \text{ (V)}$$

2.12-11.

Az egyenletet szintén parametrikusan oldhatjuk meg, tehát ha pl. $E_3 = 4 \text{ V}$, akkor $R_3 = 16 \Omega$, vagy ha $E_3 = 1 \text{ V}$, akkor $R_3 = 10 \Omega$.

Ugyancsak megoldás lehet az előzőekben tárgyalt feszültséggenerátorral ekvivalens áramgenerátor (2.12-8. ábra). A generátor forrásáramát a Norton-tétellel lehet meghatározni (2.12-12.).



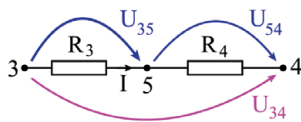
2.12-8. ábra

$$I_4 = \frac{E_3}{R_3}$$

2.12-12.

2.12.4.3. Két ellenállás soros vagy párhuzamos kapcsolása

A két ellenállás soros kapcsolását a 2.12-9. ábra szemlélteti, amelynek a kapcsain ugyancsak az $U_{34} = 4 \text{ V}$ kell legyen a feszültség. Ebben az esetben is két paraméter kombinálásával érhetjük el ezt a feltételt a 2.12-13. egyenletnek megfelelően.

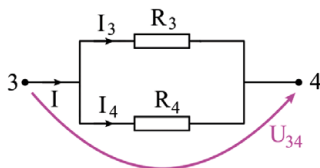


2.12-9. ábra

$$U_{34} = U_{35} + U_{54} = (R_3 + R_4)I = 4 \text{ (V)} \quad 2.12-13.$$

Az egyenletet szintén parametrikusan oldhatjuk meg, tehát ha pl. $R_3 = 6\Omega$, akkor $R_4 = 2\Omega$, vagy ha $R_3 = 1\Omega$, akkor $R_4 = 7\Omega$.

A két ellenállás párhuzamos kapcsolását a 2.12-10. ábra szemlélteti, amelynek a kapcsain ugyancsak az $U_{34} = 4 \text{ V}$ kell legyen a feszültség. Ebben az esetben is két paraméter kombinálásával érhetjük el ezt a feltételt a 2.12-14. egyenletnek megfelelően.



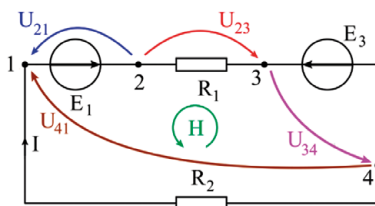
2.12-10. ábra

$$U_{34} = R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = 4 \text{ (V)} \quad 2.12-14.$$

Az egyenletet szintén parametrikusan oldhatjuk meg, tehát ha pl. $R_3 = 10\Omega$, akkor $R_4 = 40\Omega$, vagy ha $R_3 = 16\Omega$, akkor $R_4 = 16\Omega$.

2.12.5. Az e) megoldása

A legegyszerűbb kétpólus, amelynek segítségével teljesül az a feltétel, hogy az áram értéke megmarad, de technikai iránya az eredetivel ellentétessé válik, az egy ideális feszültséggenerátor, amelynek az áramköri bekötését a 2.12-11. ábra szemlélteti. A feszültséggenerátor elektromotoros feszültségét a 2.12-15. huroktörvényből számíthatjuk ki (2.12-16.).



2.12-11. ábra

$$E_3 - E_1 = -(R_1 + R_2)I \quad 2.12-15.$$

$$E_3 = E_1 - (R_1 + R_2)I = 11 \text{ (V)} \quad 2.12-16.$$

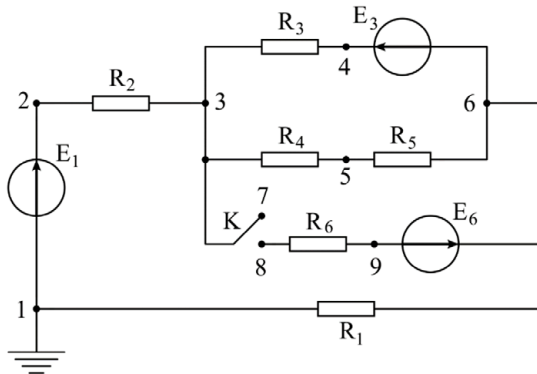
AJÁNLOTT FELADATOK

3.1. feladat

A 3.1-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott: $E_1 = 24\text{ V}$, $E_3 = 16\text{ V}$, $E_6 = 24\text{ V}$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 8\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 6\Omega$, $R_6 = 12\Omega$.

Feladatok:

1. A K kapcsoló nyitott állásában:
 - 1.1. számoljuk ki az áramkör ágaiban folyó áramok erősségét a Kirchhoff-törvényekkel felírt egyenletrendszerből,
 - 1.2. számoljuk ki az U_{52} és U_{36} feszültségeket,
 - 1.3. számoljuk ki az 5-ös pont potenciálját, ha $V_1 = 0\text{ V}$.
 - 1.4. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!
2. A K kapcsoló zárt állásában:
 - 2.1. számoljuk ki az áramkör ágaiban folyó áramok erősségét a Kirchhoff-törvényekkel felírt egyenletrendszerből,
 - 2.2. számoljuk ki az R_2 ellenálláson átfolyó áram erősségét a Thèvenin-tétellel,
 - 2.3. számoljuk ki az R_4 ellenálláson átfolyó áram erősségét, felhasználva a Millman-tételt.
 - 2.4. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!



3.1-1. ábra

Eredmények a megoldások ellenőrzéséhez:

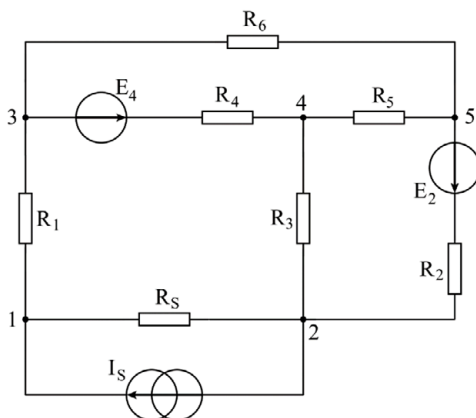
- 1.1. $1\text{ A}; 0,5\text{ A}; 1,5\text{ A};$
 1.2. $U_{52} = -7\text{ V}; U_{36} = 12\text{ V};$
 1.3. $V_5 = 17\text{ V};$
 1.4. $P_{gen} = 32\text{ W}; P_{foggy} = 32\text{ W}.$
 2.1. $1,6\text{ A}; 1,4\text{ A}; 0,6\text{ A}; 2,4\text{ A};$
 2.2. $I'_1 = 1,6\text{ A};$
 2.2. $I'_4 = 0,6\text{ A};$
 2.3. $P_{gen} = 118,4\text{ W}; P_{foggy} = 118,4\text{ W}.$

3.2. feladat

A 3.2-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott: $E_2 = 40\text{ V}$, $E_4 = 20\text{ V}$, $I_S = 3\text{ A}$, $R_1 = 80\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, $R_4 = 20\ \Omega$, $R_5 = 40\ \Omega$, $R_6 = 20\ \Omega$, $R_S = 80\ \Omega$.

Feladatok:

1. Határozzuk meg az áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff-egyenlet-rendszerből!
2. Helyettesítsük az (I_S, R_S) áramgenerátort egy ekvivalens feszültséggenerátorral!
3. Határozzuk meg az R_6 ellenálláson átfolyó áramot a Thèvenin-tétellel!
4. Határozzuk meg az R_3 ellenálláson átfolyó áramot a Thèvenin-tétellel!
5. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!



3.2-1. ábra

Eredmények a megoldások ellenőrzéséhez:

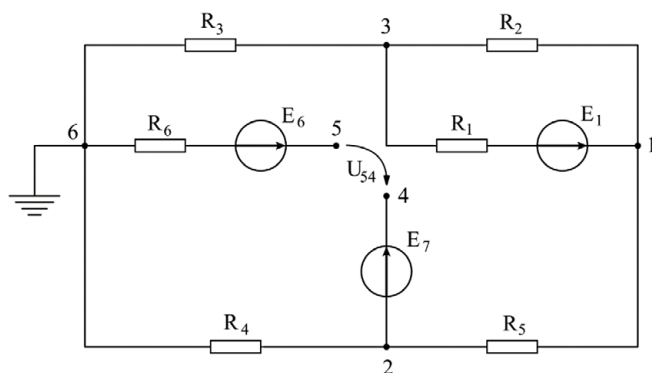
1. 1,5A; 1,25A; 0,25A; 0,75A; 0,5A; 0,75A; 1,5A;
2. 40V elektromotoros feszültség; 5Ω belső ellenállás;
3. ld. 1.;
4. ld. 1.;
5. $P_{gen} = 425\text{W}$; $P_{fogy} = 425\text{W}$.

3.3. feladat

A 3.3-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott: $E_1 = 10\text{V}$, $E_6 = 20\text{V}$, $E_7 = 40\text{V}$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 7,6\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $R_5 = 6\Omega$, $R_6 = 8\Omega$.

Feladatok:

1. Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff-egyenlet-rendszerből!
2. Helyettesítsük az R_2 , R_1 és E_1 kétpólusokból alkotott összetett kétpólust egy ekvivalens feszültségforrással!
3. Számítsuk ki az U_{54} feszültséget!
4. Számítsuk ki az 1-es pont potenciálját, ha a 6-os pont potenciálja $V_6 = 0\text{V}$!
5. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!



3.3-1. ábra

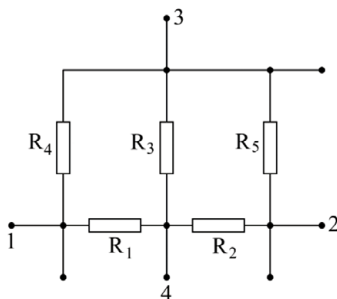
Eredmények a megoldások ellenőrzéséhez:

1. 1,18A; 0,88A; 0,3A;
2. 15V elektromotoros feszültség; 2,4Ω belső ellenállás;
3. -61,2V;
4. 3V;
5. $P_{gen} = 11,8\text{W}$; $P_{fogy} = 11,8\text{W}$.

3.4. feladat

A 3.4-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott: $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 16\Omega$ és $R_5 = 16\Omega$. Számítsuk ki a kapcsolás eredő ellenállását:

1. az 1 és 3 pontok között (R_{13}),
2. a 2 és 3 pontok között (R_{23}),
3. az 1 és 2 pontok között (R_{12}),
4. a 3 és 4 pontok között (R_{34}),
5. az 1 és 4 pontok között (R_{14}),
6. a 2 és 4 pontok között (R_{24}).



3.4-1. ábra

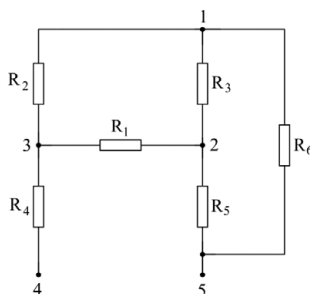
Eredmények a megoldások ellenőrzéséhez:

1. $6,67\Omega$;
2. $6,67\Omega$;
3. $10,7\Omega$;
4. 3Ω ;
5. $5,67\Omega$;
6. $5,67\Omega$.

3.5. feladat

A 3.5-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott: $R_1 = 32\Omega$, $R_2 = 16\Omega$, $R_3 = 16\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 12\Omega$ és $R_6 = 4\Omega$. Számítsuk ki a kapcsolás eredő ellenállását:

1. a 4 és 5 pontok között (R_{45}),
2. az 1 és 5 pontok között (R_{15}),
3. a 3 és 4 pontok között (R_{34}),
4. az 1 és 3 pontok között (R_{13}),
5. a 3 és 5 pontok között (R_{35}).



3.5-1. ábra

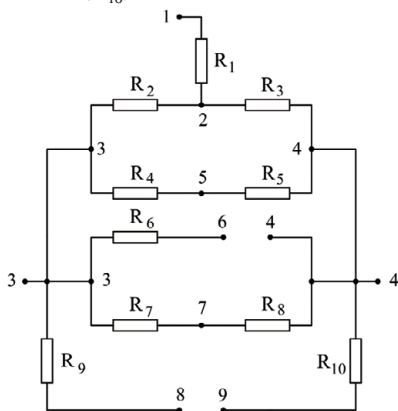
Eredmények a megoldások ellenőrzéséhez:

1. $15,7\Omega$;
2. $3,43\Omega$;
3. 2Ω ;
4. $11,42\Omega$;
5. $13,7\Omega$.

3.6. feladat

Tekintsük a 3.6-1. ábra által szemléltetett ellenállás-kapcsolást, amelyben adott: $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 12\Omega$, $R_3 = 8\Omega$, $R_4 = 4\Omega$, $R_5 = 16\Omega$, $R_6 = 4\Omega$, $R_7 = 2\Omega$, $R_8 = 8\Omega$, $R_9 = 16\Omega$ és $R_{10} = 24\Omega$. Számítsuk ki:

1. az 1 és 4 pontok között (R_{14}),
2. a 8 és 9 pontok között (R_{89}),
3. a 6 és 8 pontok között (R_{68}),
4. a 4 és 6 pontok között (R_{46}).



3.6-1. ábra

Eredmények a megoldások ellenőrzéséhez:

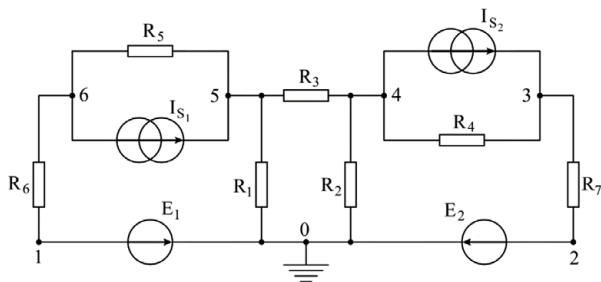
1. $15,6\Omega$;
2. 45Ω ;
3. 20Ω ;
4. 9Ω .

3.7. feladat

A 3.7-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott: $E_1 = 40\text{ V}$, $E_2 = 20\text{ V}$, $I_{S1} = 4\text{ A}$, $I_{S2} = 2\text{ A}$, $R_1 = 40\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 30\Omega$, $R_6 = 10\Omega$ és $R_7 = 20\Omega$.

Feladatok:

1. Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff-egyenlet-rendszerből!
2. Számítsuk ki az R_2 ellenálláson átfolyó áramot a Norton-tétellel!
3. Számítsuk ki az R_1 ellenálláson átfolyó áramot a Thèvenin-tétellel!
4. Helyettesítsük egy-egy ekvivalens feszültséggenerátorral az (I_{S1}, R_5) és (I_{S2}, R_4) áramgenerátorokat!
5. Számítsuk ki az R_3 ellenálláson átfolyó áramot a Millman-tétel alkalmazásával!
6. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!



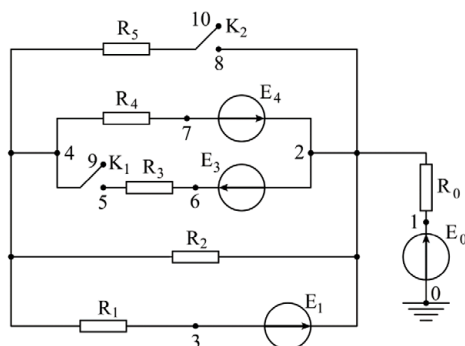
3.7-1. ábra

Eredmények a megoldások ellenőrzéséhez:

1. $1,55\text{ A}$; $1,2\text{ A}$; $1,1\text{ A}$; $0,1\text{ A}$; $2,45\text{ A}$; $0,8\text{ A}$;
2. ld. 1.;
3. ld. 1.;
4. 120 V elektromotoros feszültség és 30Ω belső ellenállás;
 20 V elektromotoros feszültség és 10Ω belső ellenállás;
5. ld. 1.;
6. $P_{\text{gen}} = 272\text{ W}$; $P_{\text{foggy}} = 272\text{ W}$.

3.8. feladat

A 3.8-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott: $E_0 = 10\text{V}$, $E_1 = 20\text{V}$, $E_3 = 40\text{V}$, $E_4 = 30\text{V}$, $R_0 = 2\Omega$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 12\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $R_4 = 12\Omega$ és $R_5 = 40\Omega$.



3.8-1. ábra

Feladatok:

1. Abban az esetben, amikor a K_1 és K_2 kapcsolók nyitva vannak:
 - 1.1. Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff-egyenletrendszerből!
 - 1.2. Ellenőrizzük az 1.1. alponthban számított áramértékeket a következő módszerekkel:
 - 1.2.1. az R_1 ellenálláson a Thèvenin-tétel felhasználásával,
 - 1.2.2. az R_2 ellenálláson a Norton-tétel felhasználásával,
 - 1.2.3. az R_4 ellenálláson a Millman-tétel felhasználásával!
 - 1.3. Számoljuk ki a K_1 és K_2 kapcsolón lévő feszültségeket!
 - 1.4. Számoljuk ki minden jelölt pont potenciálját, ha a referenciapont potenciáljának értéke $V_0 = 0\text{V}$!
 - 1.5. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!
2. Abban az esetben, amikor a K_1 kapcsoló zárva van, a K_2 pedig nyitva van:
 - 2.1. Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff-egyenletrendszerből!
 - 2.2. Ellenőrizzük a 2.1. alponthban számított áramértékeket a következő módszerekkel:
 - 2.2.1. az R_1 ellenálláson a Norton-tétel felhasználásával,
 - 2.2.2. az R_2 ellenálláson a Thèvenin-tétel felhasználásával,
 - 2.2.3. az R_3 és az R_4 ellenállásokon a Millman-tétel felhasználásával!
 - 2.3. Számoljuk ki a K_2 kapcsolón lévő feszültséget!

- 2.4. Számoljuk ki minden jelölt pont potenciálját, ha a referenciapont potenciáljának értéke $V_0 = 0\text{V}$!
- 2.5. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!
3. Abban az esetben, amikor a K_1 kapcsoló nyitva van, a K_2 pedig zárva van:
 - 3.1. Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff-egyenletrendszerből!
 - 3.2. Ellenőrizzük a 3.1. alpontban számított áramértékeket a következő módszerekkel:
 - 3.2.1. az R_1 ellenálláson a Thèvenin-tétel felhasználásával,
 - 3.2.2. az R_2 és az R_5 ellenálláson a Norton-tétel felhasználásával,
 - 3.2.3. az R_4 ellenállásokon a Millman-tétel felhasználásával!
 - 3.3. Számoljuk ki a K_1 kapcsolón lévő feszültséget!
 - 3.4. Számoljuk ki minden jelölt pont potenciálját, ha a referenciapont potenciáljának értéke $V_0 = 0\text{V}$!
 - 3.5. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!
4. Abban az esetben, amikor a K_1 és K_2 kapcsolók zárva vannak:
 - 4.1. Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff-egyenletrendszerből!
 - 4.2. Ellenőrizzük a 4.1. alpontban számított áramértékeket a következő módszerekkel:
 - 4.2.1. az R_1 és az R_3 ellenálláson a Thèvenin-tétel felhasználásával,
 - 4.2.2. az R_2 és az R_5 ellenálláson a Norton-tétel felhasználásával,
 - 4.2.3. az R_4 ellenálláson a Millman-tétel felhasználásával!
 - 4.3. Számoljuk ki minden jelölt pont potenciálját, ha a referenciapont potenciáljának értéke $V_0 = 0\text{V}$!
 - 4.4. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!

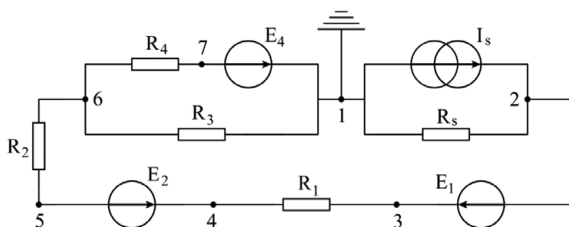
Eredmények a megoldások ellenőrzéséhez:

- 1.1. $0,5\text{A}; 1,5\text{A}; 1\text{A};$
- 1.2. *ld.* 1.1.;
- 1.3. $58\text{V}; 18\text{V};$
- 1.4. $V_1 \equiv V_2 \equiv V_8 = 10\text{V}; V_3 = -10\text{V};$
 $V_4 \equiv V_9 \equiv V_{10} = -8\text{V}; V_5 = 50\text{V}; V_6 = 50\text{V}; V_7 = -20\text{V};$
- 1.5. $P_{gen} = 40\text{W}; P_{fogy} = 40\text{W};$
- 2.1. $2,054\text{A}; 982,14\text{mA}; 2,589\text{A}; 1,518\text{A};$
- 2.2. *ld.* 2.1.;
- 2.3. $11,786\text{V};$
- 2.4. $V_1 \equiv V_2 \equiv V_8 = 10\text{V}; V_3 = -10\text{V};$
 $V_4 \equiv V_9 \equiv V_{10} \equiv V_5 = -1,786\text{V}; V_6 = 50\text{V}; V_7 = -20\text{V};$
- 2.5. $P_{gen} \cong 190,1\text{W}; P_{fogy} \cong 190,1\text{W};$

- 3.1. 754,72 mA; 1,451 A; 1,085 A; 424,53 mA;
 3.2. ld. 3.1.;
 3.3. 56,981 V;
 3.4. $V_1 \equiv V_2 \equiv V_8 \equiv V_{10} = 10 \text{ V}$; $V_3 = -10 \text{ V}$;
 $V_4 \equiv V_9 = -6,981 \text{ V}$; $V_6 \equiv V_5 = 50 \text{ V}$; $V_7 = -20 \text{ V}$;
 3.5. $P_{gen} \cong 47,6 \text{ W}$; $P_{fogy} \cong 47,6 \text{ W}$;
 4.1. 2,203 A; 0,932 A; 2,559 A; 1,586 A; 0,279 A;
 4.2. ld. 4.1.;
 4.3. $V_1 \equiv V_2 \equiv V_8 \equiv V_{10} = 10 \text{ V}$; $V_3 = -10 \text{ V}$;
 $V_4 \equiv V_5 \equiv V_9 = -1,186 \text{ V}$; $V_6 = 50 \text{ V}$; $V_7 = -20 \text{ V}$;
 4.4. $P_{gen} \cong 195,6 \text{ W}$; $P_{fogy} \cong 195,6 \text{ W}$;

3.9. feladat

A 3.9-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott: $E_1 = 8 \text{ V}$, $E_2 = 38 \text{ V}$, $E_4 = 8 \text{ V}$, $I_s = 2 \text{ A}$, $R_s = 100 \Omega$, $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 80 \Omega$, $R_3 = 4 \Omega$ és $R_4 = 4 \Omega$.



3.9-1. ábra

Feladatok:

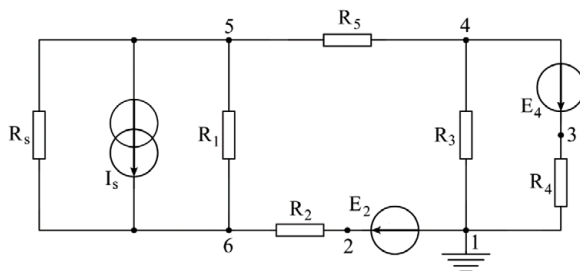
1. Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff-egyenlet-rendszerből!
2. Helyettesítsük az R_3 , R_4 és E_4 áramköri elemekből alkotott összetett kétpólust egy helyettesítő feszültséggenerátorral!
3. Számítsuk ki az U_{16} feszültséget a Millman-tétellel!
4. Számítsuk ki az U_{21} feszültséget a Millman-tétellel!
5. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!

Eredmények a megoldások ellenőrzéséhez:

1. 1,45 A; 0,275 A; 0,55 A; 1,725 A;
2. 4 V elektromotoros feszültség és 2Ω belső ellenállás;
3. 1,1 V;
4. 55 V;
5. $P_{gen} = 135,4 \text{ W}$; $P_{fogy} = 135,4 \text{ W}$.

3.10. feladat

A 3.10-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott: $E_2 = 80\text{ V}$, $E_4 = 200\text{ V}$, $I_s = 2,5\text{ A}$, $R_s = 240\ \Omega$, $R_1 = 80\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$ és $R_5 = 10\ \Omega$.



3.10-1. ábra

Feladatok:

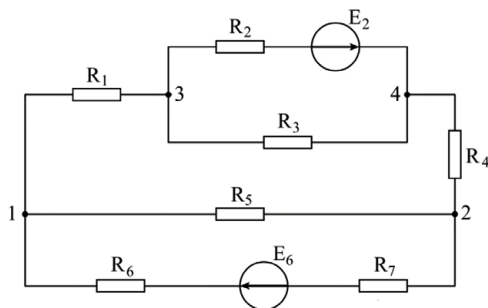
1. Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff-egyenlet-rendszerből!
2. Helyettesítsük az R_3 , R_4 és E_4 áramköri elemekből alkotott összetett kétpólust egy helyettesítő feszültséggenerátorral!
3. Helyettesítsük az R_s , I_s és R_1 áramköri elemekből alkotott összetett kétpólust egy helyettesítő feszültséggenerátorral!
4. Számítsuk ki az U_{65} feszültséget a Millman-tétellel!
5. Számítsuk ki az U_{41} feszültséget a Millman-tétellel!
6. Alkalmazzuk a Norton-tételt az R_2 ellenálláson átfolyó áram kiszámításához!
7. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!

Eredmények a megoldások ellenőrzéséhez:

1. $2,1\text{ A}$; $0,3\text{ A}$; $2,35\text{ A}$; $2,65\text{ A}$; $0,7\text{ A}$;
2. 100 V elektromotoros feszültség és $20\ \Omega$ belső ellenállás;
3. 150 V elektromotoros feszültség és $60\ \Omega$ belső ellenállás;
4. -94 V ;
5. 168 V ;
6. *ld.* 1.;
7. $P_{\text{gen}} = 974\text{ W}$; $P_{\text{fog}} = 974\text{ W}$.

3.11. feladat

A 3.11-1. ábra egy egyenáramú áramkört szemléltet, amelyben adott: $E_2 = 24\text{ V}$, $E_6 = 20\text{ V}$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 12\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $R_5 = 10\Omega$, $R_6 = 6\Omega$ és $R_7 = 4\Omega$.



3.11-1. ábra

Feladatok:

1. Számítsuk ki az áramkör ágaiban folyó áramokat a Kirchhoff-egyenlet-rendszerből!
2. Helyettesítsük az R_1 , R_2 , E_2 és R_3 áramköri elemekből alkotott összetett kétpólust egy helyettesítő feszültséggenerátorral!
3. Helyettesítsük az R_1 , R_2 , E_2 , R_3 és R_5 áramköri elemekből alkotott összetett kétpólust egy helyettesítő áramgenerátorral!
4. Számítsuk ki az U_{12} feszültséget a Millman-tétellel!
5. Számítsuk ki az U_{34} feszültséget a Millman-tétellel!
6. Ellenőrizzük a teljesítménymérleg egyenletének teljesülését!

Eredmények a megoldások ellenőrzéséhez:

1. $1,2\text{ A}$; $1,733\text{ A}$; $0,533\text{ A}$; $0,4\text{ A}$; $1,6\text{ A}$;
- 8 V elektromotoros feszültség és 4Ω belső ellenállás;
- $0,8\text{ A}$ forrásáram és 5Ω belső ellenállás;
- 4 V ;
- $3,2\text{ V}$;
- $P_{gen} = 73,59\text{ W}$; $P_{fogy} = 73,59\text{ W}$.

REZUMAT

Electrotehnică. Ghid de rezolvare a problemelor și culegere de probleme

Douăzeci de ani de experiență în predarea electrotehnicii au stat la baza elaborării acestei culegeri de probleme. Având în vedere că metodele de analiză a circuitelor electrice sunt bine stabilite și nu permit inovații majore, scopul principal al acestei lucrări este de a aduce un plus de claritate în explicații și în ilustrarea conceptelor.

În ultimii ani, s-a observat o tendință tot mai accentuată în rândul studenților de a aborda rezolvarea problemelor fără o bază teoretică solidă sau cu lacune în cunoștințele de specialitate. Această concluzie se bazează pe douăzeci de ani de predare a Electrotehnicii și pe experiența examinării a sute de studenți. Cu toate acestea, fiind o disciplină cu principii bine definite de mult timp, metodele de învățare rămân aceleași: înțelegerea teoriei, însușirea legilor fundamentale, familiarizarea cu metodele de rezolvare a problemelor și consolidarea cunoștințelor prin exercițiu constant.

Primul capitol al acestei culegeri oferă o sinteză clară a informațiilor teoretice esențiale pentru rezolvarea problemelor de curent continuu și a circuitelor electrice de curent continuu. Acest rezumat tehnic prezintă strict informațiile necesare, fără a se angaja în explicații detaliate despre conceptele teoretice, care pot fi găsite și în alte surse de specialitate.

Al doilea capitol conține probleme rezolvate pas cu pas, însoțite de explicații detaliate. Aceste soluții sunt structurate astfel încât să reflecte cele mai eficiente practici de rezolvare („best practices”), oferind nu doar pașii concreți, ci și explicații despre cum și de ce este recomandat să se procedeze într-un anumit fel. De asemenea, sunt evidențiate și situațiile în care utilizarea unor metode mai complicate poate îngreuna inutil procesul de rezolvare, fără a fi însă considerată greșită.

Al treilea capitol propune o serie de probleme structurate pe mai multe sub-categorii, explorând diverse metode de rezolvare a circuitelor electrice. Aceste exerciții sunt însoțite doar de valorile rezultate, în ideea că teoria din primul capitol și problemele rezolvate detaliat din al doilea capitol vor oferi suportul necesar pentru găsirea soluțiilor corecte.

ABSTRACT

Theoretical Electrical Engineering: A Comprehensive Problem-Solving Manual and Exercise Collection

This collection of exercises is the result of twenty years of experience in teaching electrical engineering. Given that the fundamental principles and methodologies for analysing electrical circuits have been well established, the primary objective of this work is to introduce new approaches to explanation and illustration rather than to propose novel analytical methods.

A persistent trend has emerged whereby students attempt to solve problems without a solid foundation in theoretical knowledge or with significant gaps in their understanding. This observation is based on two decades of teaching electrical engineering and assessing the performance of hundreds of students. However, since the foundational principles of the subject have long been established and the methods for mastering them remain unchanged, the most effective approach continues to be structured progression: understanding theoretical concepts, mastering the fundamental laws, learning and practising problem-solving techniques, and reinforcing this knowledge through systematic exercises.

The first chapter of this collection concisely summarizes the theoretical knowledge necessary for solving direct current (DC) circuit problems at a technical level, without delving into extensive theoretical explanations. It should be noted that most of this information is available in numerous other publications.

The second chapter presents problem solutions accompanied by detailed explanations. These solutions are designed to reflect best practices by not only outlining the appropriate methods but also explaining their application. Additionally, where relevant, the explanations highlight instances in which certain methods may lead to unnecessary complexity, making them less suitable for a given problem. However, it should be emphasized that while alternative approaches may be more intricate, they are not necessarily incorrect.

The third chapter contains a collection of recommended exercises, supplemented with numerous subcategories to explore various circuit-solving strategies. These exercises provide only the final computed results, with the expectation that mastery of the theoretical content in the first chapter, along with the detailed problem solutions in the second chapter, will offer sufficient guidance for their resolution.

A SZERZŐRŐL

Kenéz Lajos 1996-ban szerzett BSc-oklevelet a Babeş–Bolyai Tudományegyetem Fizika Karán Kolozsváron, majd ugyanitt MSC-oklevelet 1997-ben. 1998-ban felvételt nyert a Debreceni Egyetem Természettudományi Karának Fizika Doktori Programjába, ahol 2003-ban szerzett PhD-oklevelet. Kutatási területe az Elektron Ciklotron Rezonancia (ECR) ionforrás lokális plazmadiagnosztikai kutatása volt, és kutatói munkáját a debreceni Atommagkutató Intézet ECR-csoportjának tagjaként végezte.

Oktatói pályafutását 1996-ban kezdte Kolozsváron a Babeş–Bolyai Tudományegyetem Fizika Karán. Kezdetben óraadó tanárként dolgozott, majd 1998-ban főállású gyakornok lett. Oktatói tevékenységét 2004-ig folytatta a kolozsvári egyetemen, ahol tanársegédi, majd pedig adjunktusi munkakörben dolgozott. 2004-től a Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem alkalmazottja lett, ugyancsak adjunktusként, 2008-tól pedig előadótanárként. Oktatási tevékenysége keretében a fizika és az elméleti villamosság tantervét tanítja.

Kutatóként folytatta a plazmák lokális diagnosztikai vizsgálatát, kapcsolatokat ápolva a debreceni Atommagkutató Intézet ECR-csoportjával, illetve a frankfurti Johann Wolfgang Goethe Universität, a berlini Hahn-Meitner Institut és a tokiói National Institute for Radiological Sciences ECR-csoportjaiban. Hazai szinten a Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem Marosvásárhelyi Karán működő plazmanitridálási kutatócsoportban végezte kutatói tevékenységét.

Scientia Kiadó

400112 Kolozsvár (Cluj-Napoca)

Mátyás király (Matei Corvin) u. 4. sz.

Tel./fax: +40-364-401454

E-mail: scientia@kpi.sapientia.ro

www.scientiakiado.ro

Műszaki szerkesztés:

Ruzsa István

Borítóterv:

Tipotéka Kft.

Korrektúra:

Szenkovics Enikő

Tipográfia:

Könczey Elemér

Kijelenthetjük-e egyértelműen, hogy a fizika feladatok megoldása nem könnyű? Ez nyilvánvalóan így van, amennyiben nem rendelkezünk megfelelő elméleti tudással, és nincs elegendő jártasságunk sem a feladatmegoldás terén. Sokan és gyakran szembesülünk ezzel a kihívással az oktatás minden szintjén, függetlenül attól, hogy a katedra melyik oldalán állunk. Diákéveim alatt, majd oktatói pályámon én is megtapasztaltam az elméleti ismeretek és a gyakorlás összekapcsolásának fontosságát a hatékony feladatmegoldásban.

Ez a könyv azért jött létre, hogy az egyenáram és egyenáramú áramkörök esetében egy helyen legyen összefoglalva az elméleti tudástár, amelyet ugyanakkor elegendő megoldott feladat is szemléltet, és amelynek együttes tanulmányozása segít kialakítani a feladatmegoldó készséget, a megfelelő megoldási stratégiák megtalálását, lehetőséget kínálva az olvasónak, hogy próbára tegye megszerzett tudását.

ISBN 978-606-975-105-3



9 786069 751053