

A Cayley-Hamilton tétel és a vektor-mátrixok algebrája

Péntek Kálmán

Eötvös Loránd Tudományegyetem, Savaria Egyetemi Központ, Berzsényi Dániel
Pedagógusképző Központ, Matematikai Tanszék, Szombathely, Magyarország
pentek.kalman@sek.elte.hu, 0000-0002-9467-7025

ÖSSZEFOGLALÓ. A lineáris algebrában a Cayley-Hamilton tétel kimondja, hogy egy kommutatív gyűrű feletti minden négyzetes mátrix (pl. valós vagy komplex számok) kielégíti saját karakterisztikus egyenletét. Áttekintjük az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$, az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ és az általánosított szedeniók $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebráját. Bebizonyítjuk a Cayley-Hamilton tételt a $\mathbb{C}_\alpha$, $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ asszociatív és az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nem asszociatív algebrákban.

ABSTRACT. In linear algebra, the Cayley-Hamilton theorem states that every square matrix over a commutative ring (such as the real or complex numbers) satisfies its own characteristic equation. We review the algebra of generalized complex numbers $\mathbb{C}_\alpha$, generalized quaternions $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$, generalized octonions $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ and generalized sedenions $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$. We prove the Cayley-Hamilton theorem in the associative algebras $\mathbb{C}_\alpha$, $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ and non-associative algebras $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$.

1. Bevezetés

A Cayley-Dickson-féle megkettőzési eljárás [3] Albert, A.A. [1] által bevezetett általánosítása lehetőséget kínál egymásra épülő algebrák egy szép és fontos sorozatának felépítésére.

Első lépésként a valós számok $\mathbb{R}$ struktúrájából, mint önmaga feletti 1-dimenziós algebrából kiindulva a megkettőzési eljárással az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) 2-dimenziós, neutrális elemes, kommutatív és asszociatív algebráját nyerjük [6]. Az $\alpha = 1$ speciális esetben az eljárás a klasszikus Gauss-féle komplex számok $\mathbb{C}$ algebráját eredményezi [4], [5].

A $\mathbb{C}_\alpha$ algebrára megismételve a megkettőzési eljárást az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ ($\beta \in \mathbb{R}$) 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, viszont asszociatív algebrájához juthatunk [6]. Az $\alpha = \beta = 1$ különleges esetben az eljárás eredményeként így a klasszikus Hamilton-féle kvaterniók $\mathbb{H}$ algebráját kaphatjuk [4], [5].

A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrából kiindulva a megkettőzési eljárással az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ ($\gamma \in \mathbb{R}$) 8-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, nem asszociatív, de alternáló

ENGLISH TITLE. The Cayley-Hamilton theorem and the algebra of vector matrices

KULCSSZAVAK. Cayley-Hamilton tétel, klasszikus általánosított algebra, Zorn-féle vektor-mátrix.

KEYWORDS. Cayley-Hamilton theorem, classical generalized algebra, Zorn vector matrix.

©2025 the Author(s). Published by University of Sopron Press. This is an open access article under the CC BY-NC-SA 4.0 license.

algebráját állíthatjuk elő [7], [8]. Az $\alpha = \beta = \gamma = 1$ választással ezen a módon a klasszikus Cayley-Graves-féle $\mathbb{O}$ oktoniók származtathatók [4], [5].

Ezután a megismételt megkettőzési eljárással az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrából állíthatjuk elő az általánosított szedeniók $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ($\delta \in \mathbb{R}$) 16-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, nem asszociatív, nem is alternáló, viszont flexibilis algebráját [9], [10]. E négy említett, a megkettőzési eljárással felépülő struktúra közül az első kettő véges dimenziós asszociatív algebra, így alkalmas mátrixok segítségével reprezentálható. A második kettő viszont nem asszociatív algebra, ezek a Zorn, M.A. [12], [13] által bevezetett vektor-mátrixok struktúrájával reprezentálhatók eredményesen.

A lineáris algebra nevezetes tétele a Cayley-Hamilton tétel, amely azt állítja, hogy egy kommutatív, neutrális elemes R gyűrű feletti n -edrendű négyzetes mátrixok $M_n(R)$ struktúrájában minden mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét [2], [11]. E tétel egy különleges esetét először Hamilton, W.R. (1805 – 1865) író matematikus, fizikus és csillagász bizonyította be 1853-ban a kvaterniók algebrájára. Ez a struktúra bizonyos negyedrendű valós, vagy alkalmas másodrendű komplex komponensű mátrixok felhasználásával reprezentálható. Cayley, A. (1821 – 1895) angol matematikus a tételt a legfeljebb harmadrendű mátrixokra 1858-ban tárgyalta, de csupán a másodrendű mátrixokra publikált bizonyítást. Ami az n -edrendű mátrixokat illeti, Cayley kijelentette: „... nem tartottam szükségesnek a tétel formális bizonyítását bármilyen rendű mátrix általános esetére.” A Cayley-Hamilton tételt általánosan először Frobenius, F.G. (1849 – 1917) német matematikus bizonyította be 1878-ban.

Dolgozatunkban azt a kérdést vizsgáljuk meg, hogy ez a fontos tétel bizonyítható-e a fentiekben említett négy nevezetes algebrában.

2. A Cayley-Hamilton tétel a $\mathbb{C}_\alpha$ algebrában

Ebben a fejezetben bebizonyítjuk, hogy az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ algebráját reprezentáló mátrixok struktúrájában érvényes a Cayley-Hamilton tétel.

Legyen $\{\mathbb{R}, +, \cdot\}$ a valós számok teste a 0 összeadási és az 1 szorzási neutrális elemmel. A

$$\mathbb{C}_\alpha := \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{R}, i \notin \mathbb{R}\} \quad (1)$$

alakú kifejezéseket az általánosított komplex számok halmazának nevezzük, ha az $\{1, i\}$ általánosított komplex-egységek eleget tesznek a következő szorzási szabályoknak:

$$1 \cdot 1 := 1, \quad 1 \cdot i = i \cdot 1 := i, \quad i^2 := -\alpha \quad (2)$$

ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ egy rögzített valós paraméter.

A $\mathbb{C}_\alpha$ halmazban értelmezhetünk az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzást, egy összeadást és a (2) összefüggések felhasználásával az algebrák szerkesztésének homogén és disztributív szabályait követve egy szorzást is [6]. Tetszőleges $r \in \mathbb{R}, a + b \cdot i, c + d \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ esetén

$$\text{skalárral való szorzás: } r \cdot (a + b \cdot i) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i \quad (3)$$

$$\text{összeadás: } (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) := (a + c) + (b + d) \cdot i \quad (4)$$

$$\text{szorzás: } (a + b \cdot i) \cdot (c + d \cdot i) := (a \cdot c - \alpha \cdot b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c) \cdot i. \quad (5)$$

Az általánosított komplex számok $\mathbb{C}_\alpha$ halmaza a rajta értelmezett (3), (4) és (5) műveletekkel egy 2-dimenziós, neutrális elemes, kommutatív és asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

A $\mathbb{C}_\alpha$ algebra részletes tárgyalása a szerző [6] munkájában megtalálható.

A $\mathbb{C}_\alpha$ struktúra mátrix-reprezentációjának meghatározásához az (5) felhasználásával tetszőleges $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ esetén

$$1 \cdot z = (1 + 0 \cdot i) \cdot (a + b \cdot i) = a + b \cdot i \quad (6)$$

$$i \cdot z = (0 + 1 \cdot i) \cdot (a + b \cdot i) = -\alpha \cdot b + a \cdot i \quad (7)$$

adódik, ezen összefüggéseket az

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot z \\ i \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (8)$$

mátrixegyenlet formájában írhatjuk fel. Ezt felhasználva tekintsük ezért az

$$M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad (9)$$

alakú mátrixok halmazát. Ha $r \in \mathbb{R}, A, B \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, akkor egyszerű számolással beláthatjuk, hogy $r \cdot A, A + B, A \cdot B \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ teljesül, így $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ részalgebrát alkot az $\mathbb{R}$ feletti másodrendű négyzetes mátrixok $M_2(\mathbb{R})$ teljes mátrixalgebrájában.

Tekintsük most az

$$F_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}_\alpha \rightarrow M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}), a + b \cdot i \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \quad (10)$$

leképezést! Az $F_{\mathbb{C}}$ bijektív, hiszen $F_{\mathbb{C}}^{-1}$ is leképezés. Ha $r \in \mathbb{R}, z, t \in \mathbb{C}_\alpha$ tetszőleges elemek, akkor az $F_{\mathbb{C}}$ leképezésre teljesül a homogén:

$$F_{\mathbb{C}}(r \cdot z) = r \cdot F_{\mathbb{C}}(z) , \quad (11)$$

additív:

$$F_{\mathbb{C}}(z + t) = F_{\mathbb{C}}(z) + F_{\mathbb{C}}(t) , \quad (12)$$

multiplikatív:

$$F_{\mathbb{C}}(z \cdot t) = F_{\mathbb{C}}(z) \cdot F_{\mathbb{C}}(t) \quad (13)$$

tulajdonság. Így a (10) leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus. Ebben, a $\mathbb{C}_\alpha$ algebrával izomorf $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ mátrixalgebrában bizonyítjuk, hogy igaz a Cayley-Hamilton tétel.

Ha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ egy tetszőleges mátrix, akkor

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} = a^2 + \alpha \cdot b^2 \in \mathbb{R} \quad (14)$$

teljesül. Legyen $\lambda \in \mathbb{R}$ és $E \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ az egységmátrix, akkor

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ -\alpha \cdot b & a - \lambda \end{pmatrix}, \quad (15)$$

így az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} k_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E) = \lambda^2 - 2 \cdot a \cdot \lambda + (a^2 + \alpha \cdot b^2) = \\ &= \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) + \det(A) \in \mathbb{R}[x], \end{aligned} \quad (16)$$

ahol $\operatorname{tr}(A)$ az A mátrix nyoma.

1. Tétel. Ha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \in M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$, akkor $k_A(A) = \mathcal{O}$, tehát az A mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.

BIZONYÍTÁS. A (14) - (16) összefüggések felhasználásával

$$\begin{aligned} k_A(A) &= \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} - 2 \cdot a \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -\alpha \cdot b & a \end{pmatrix} + (a^2 + \alpha \cdot b^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a^2 - \alpha \cdot b^2 & 2 \cdot a \cdot b \\ -2 \cdot \alpha \cdot a \cdot b & a^2 - \alpha \cdot b^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \cdot a^2 & 2 \cdot a \cdot b \\ -2 \cdot \alpha \cdot a \cdot b & 2 \cdot a^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 + \alpha \cdot b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + \alpha \cdot b^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \end{aligned} \quad (17)$$

teljesül, vagyis az A mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét. Ez pedig pontosan a Cayley-Hamilton tétel az $M_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$ algebrában. ■

3. A Cayley-Hamilton tétel a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrában

Ezután belátjuk, hogy az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebráját reprezentáló mátrixok struktúrájában is érvényes a Cayley-Hamilton tétel.

A

$$\mathbb{H}_{\alpha\beta} := \{a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k : a, b, c, d \in \mathbb{R}; i, j, k \notin \mathbb{R}; i \neq j \neq k \neq i\} \quad (18)$$

alakú kifejezéseket általánosított kvaterniók halmazának nevezzük, ha az $\{1, i, j, k\}$ általánosított kvaternió-egységek között teljesülnek az alábbi szorzási szabályok

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &:= 1, 1 \cdot i = i \cdot 1 := i, 1 \cdot j = j \cdot 1 := j, 1 \cdot k = k \cdot 1 := k \\ i^2 &:= -\alpha, j^2 := -\beta, k^2 := -\alpha \cdot \beta \\ i \cdot j &= -j \cdot i := k, j \cdot k = -k \cdot j := \beta \cdot i, k \cdot i = -i \cdot k := \alpha \cdot j, \end{aligned} \quad (19)$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ rögzített valós paraméterek.

A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ halmazban értelmezhetünk az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzást, egy összeadást és a (19) összefüggések felhasználásával az algebrák szerkesztésének homogén és disztributív szabályait követve egy szorzást is [6]. Tetszőleges $r \in \mathbb{R}, a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k, a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén a

skalárral való szorzás:

$$r \cdot (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) := (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i + (r \cdot c) \cdot j + (r \cdot d) \cdot k \quad (20)$$

összeadás:

$$(a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) + (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) :=$$

$$:= (a + a') + (b + b') \cdot i + (c + c') \cdot j + (d + d') \cdot k \quad (21)$$

szorzás:

$$\begin{aligned} (a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k) \cdot (a' + b' \cdot i + c' \cdot j + d' \cdot k) := \\ := (a \cdot a' - \alpha \cdot b \cdot b' - \beta \cdot c \cdot c' - \alpha \cdot \beta \cdot d \cdot d') + \\ + (a \cdot b' + b \cdot a' + \beta \cdot c \cdot d' - \beta \cdot d \cdot c') \cdot i + \\ + (a \cdot c' - \alpha \cdot b \cdot d' + c \cdot a' + \alpha \cdot d \cdot b') \cdot j + \\ + (a \cdot d' + b \cdot c' - c \cdot b' + d \cdot a') \cdot k \end{aligned} \quad (22)$$

Az általánosított kvaterniók $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ halmaza a rajta értelmezett (20), (21) és (22) műveletekkel egy 4-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, de asszociatív algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

A (19) összefüggésben szereplő $i \cdot j = k$ felhasználásával a tetszőleges $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ általánosított kvaternió egyértelműen írható fel

$$q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k = (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) \cdot j = z_1 + z_2 \cdot j \quad (23)$$

alakban, ahol $z_1 = a + b \cdot i, z_2 = c + d \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$, ez a q kvaternió komplex-algebrai alakja. A (20) – (23) összefüggések felhasználásával az általánosított kvaterniók komplex-algebrai alakjára levezethetők az alábbi számolási szabályok:

Ha $r \in \mathbb{R}, z_1 + z_2 \cdot j, w_1 + w_2 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, akkor

$$r \cdot (z_1 + z_2 \cdot j) = (r \cdot z_1) + (r \cdot z_2) \cdot j \quad (24)$$

$$(z_1 + z_2 \cdot j) + (w_1 + w_2 \cdot j) = (z_1 + w_1) + (z_2 + w_2) \cdot j \quad (25)$$

$$(z_1 + z_2 \cdot j) \cdot (w_1 + w_2 \cdot j) = (z_1 \cdot w_1 - \beta \cdot z_2 \cdot \overline{w_2}) + (z_1 \cdot w_2 + z_2 \cdot \overline{w_1}) \cdot j. \quad (26)$$

A (26) összefüggésben szereplő felülvonás az adott általánosított komplex szám konjugáltját jelenti, ahol a $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ konjugáltján a $\bar{z} = a - b \cdot i \in \mathbb{C}_\alpha$ általánosított komplex számot értjük. A $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebra részletes tárgyalása a [6] dolgozatban megtalálható.

Az általánosított kvaterniók mátrixokkal történő reprezentációjának meghatározásához tetszőleges $q = z_1 + z_2 \cdot j \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ esetén (26) és a $\mathbb{C}_\alpha$ struktúrában a konjugált képzésének tulajdonságai [6] alapján

$$1 \cdot q = (1 + 0 \cdot j) \cdot (z_1 + z_2 \cdot j) = z_1 + z_2 \cdot j \quad (27)$$

$$j \cdot q = (0 + 1 \cdot j) \cdot (z_1 + z_2 \cdot j) = -\beta \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot j \quad (28)$$

következik, amely összefüggéseket a

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot q \\ j \cdot q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} \quad (29)$$

mátrixegyenlet formájában is felírhatjuk. Tekintsük ezután az

$$M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha) := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} : z_1, z_2 \in \mathbb{C}_\alpha \right\} \quad (30)$$

alakú mátrixok halmazát! Ha $r \in \mathbb{R}$, $A, B \in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$, akkor a $\mathbb{C}_\alpha$ algebrában levő konjugálási szabályok felhasználásával egyszerű számolással igazolhatjuk, hogy $r \cdot A, A + B, A \cdot B \in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ teljesül, ezért $M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ részalgebrát alkot a $\mathbb{C}_\alpha$ feletti másodrendű négyzetes mátrixok $M_2(\mathbb{C}_\alpha)$ teljes mátrixalgebrájában.

Vizsgáljuk most az

$$F_{\mathbb{H}}: \mathbb{H}_{\alpha\beta} \rightarrow M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha), z_1 + z_2 \cdot j \mapsto \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \quad (31)$$

leképezést! Az $F_{\mathbb{H}}$ bijektív, hiszen $F_{\mathbb{H}}^{-1}$ is leképezés. Ha $r \in \mathbb{R}; p, q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ tetszőleges elemek, akkor az $F_{\mathbb{H}}$ leképezésre teljesül az

$$F_{\mathbb{H}}(r \cdot p) = r \cdot F_{\mathbb{H}}(p) \quad (32)$$

homogén,

$$F_{\mathbb{H}}(p + q) = F_{\mathbb{H}}(p) + F_{\mathbb{H}}(q) \quad (33)$$

additív,

$$F_{\mathbb{H}}(p \cdot q) = F_{\mathbb{H}}(p) \cdot F_{\mathbb{H}}(q) \quad (34)$$

multiplikatív tulajdonság. Ezért igaz, hogy a (31) összefüggésben szereplő $F_{\mathbb{H}}$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus.

Ebben, a $\mathbb{H}_{\alpha\beta}$ algebrával izomorf $M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ mátrixok alkotta algebrában bizonyítjuk, hogy igaz a Cayley-Hamilton tétel.

Ha $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ egy tetszőleges mátrix, akkor

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} = z_1 \cdot \bar{z}_1 + \beta \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \in \mathbb{R}. \quad (35)$$

Legyen $\lambda \in \mathbb{C}_\alpha$, továbbá $E \in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ az egységmátrix, akkor

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 - \lambda & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 - \lambda \end{pmatrix}, \quad (36)$$

ezért az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = \det \begin{pmatrix} z_1 - \lambda & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - (z_1 + \bar{z}_1) \cdot \lambda + (z_1 \cdot \bar{z}_1 + \beta \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2) = \lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) \in \mathbb{R}[x]. \quad (37)$$

2. Tétel. Ha $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$, akkor $k_A(A) = \mathcal{O}$, vagyis az A mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.

BIZONYÍTÁS. A (35) – (37) összefüggések felhasználásával

$$k_A(A) = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} - (z_1 + \bar{z}_1) \cdot \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\beta \cdot \bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{aligned}
& + (z_1 \cdot \bar{z}_1 + \beta \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^2 - \beta \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 & z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 \\ -\beta \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 - \beta \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 & (\bar{z}_1)^2 - \beta \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \end{pmatrix} - \\
& - \begin{pmatrix} z_1^2 + z_1 \cdot \bar{z}_1 & z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot \bar{z}_1 \\ -\beta \cdot z_1 \cdot \bar{z}_2 - \beta \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 & z_1 \cdot \bar{z}_1 + (\bar{z}_1)^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \cdot \bar{z}_1 + \beta \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 & 0 \\ 0 & z_1 \cdot \bar{z}_1 + \beta \cdot z_2 \cdot \bar{z}_2 \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \in M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha), \tag{38}
\end{aligned}$$

vagyis az A mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét. Ez pedig azt jelenti, hogy a Cayley-Hamilton tétel igaz az $M_2^{\mathbb{H}}(\mathbb{C}_\alpha)$ algebrában. ■

4. A Cayley-Hamilton tétel az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrában

Most belátjuk, hogy az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebráját reprezentáló vektor-mátrixok struktúrájában szintén érvényes a Cayley-Hamilton tétel.

Az

$$\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} := \{\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i : e_0 = 1, e_i \notin \mathbb{R} (1 \leq i \leq 7), e_i \neq e_j (i \neq j)\} \tag{39}$$

alakú kifejezéseket az általánosított oktoniók halmazának nevezzük, ha az $\{e_i\}_{i=0}^7$ általánosított oktonió-egységek között teljesülnek a [8] dolgozat végén szereplő műveleti táblázatban megadott $e_i \cdot e_j$ szorzási szabályok, ahol továbbá $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ rögzített valós paraméterek.

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ halmazban értelmezhetünk az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzást, egy összeadást és az $\{e_i\}_{i=0}^7$ elemek felhasználásával az algebrák szerkesztésének szabályait követve egy szorzást is [8].

Tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $o_1 = \sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i$, $o_2 := \sum_{i=0}^7 b_i \cdot e_i \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ esetén legyen skalárral való szorzás:

$$r \cdot (\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i) := \sum_{i=0}^7 (r \cdot a_i) \cdot e_i, \tag{40}$$

összeadás:

$$\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i + \sum_{i=0}^7 b_i \cdot e_i := \sum_{i=0}^7 (a_i + b_i) \cdot e_i, \tag{41}$$

szorzás:

$$(\sum_{i=0}^7 a_i \cdot e_i) \cdot (\sum_{j=0}^7 b_j \cdot e_j) := \sum_{i,j=0}^7 (a_i \cdot b_j) \cdot (e_i \cdot e_j). \tag{42}$$

Az általánosított oktoniók $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ halmaza a rajta értelmezett (40), (41) és (42) műveletekkel egy 8-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, nem asszociatív, alternáló algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Minden $o = \sum_{i=0}^7 a_i e_i$ általánosított oktonió egyértelműen írható fel

$$o = q_1 + q_2 \cdot E \tag{43}$$

alakban, ahol $q_1, q_2 \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ és $E = e_4$, ez az általánosított oktonió kvaternió-algebrai alakja.

A (40) – (43) összefüggések felhasználásával az általánosított oktoniók kvaternió-algebrai alakjára levezethetők a következő számolási szabályok:

ha $r \in \mathbb{R}$, $p_1 + p_2 \cdot E, q_1 + q_2 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, akkor

$$r \cdot (p_1 + p_2 \cdot E) = (r \cdot p_1) + (r \cdot p_2) \cdot E \tag{44}$$

$$(p_1 + p_2 \cdot E) + (q_1 + q_2 \cdot E) = (p_1 + q_1) + (p_2 + q_2) \cdot E \quad (45)$$

$$(p_1 + p_2 \cdot E) \cdot (q_1 + q_2 \cdot E) = (p_1 \cdot q_1 - \gamma \cdot \overline{q_2} \cdot p_2) + (p_2 \cdot \overline{q_1} + q_2 \cdot p_1) \cdot E. \quad (46)$$

A (46) összefüggésben szereplő felülvonás az adott általánosított kvaternió konjugáltját jelenti. Minden $q = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ egyértelműen írható fel

$$q = a + U \quad (47)$$

alakban, ahol $a = S(q) \in \mathbb{R}$ a q valós része, $U = b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k = V(q) \in \text{Im}(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ a q képzetes része. Ez a $q \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$ Hamilton-féle alakja.

Minden $o = q_1 + q_2 \cdot E \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ pedig egyértelműen írható fel a (47) felhasználásával

$$o = (a + U) + (b + V) \cdot E \quad (48)$$

alakban, ahol $q_1 = a + U, q_2 = b + V \in \mathbb{H}_{\alpha\beta}$, itt $a, b \in \mathbb{R}$ és $U, V \in \text{Im}(\mathbb{H}_{\alpha\beta})$ teljesül. Ez az $o \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ Hamilton-féle alakja.

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra részletes tárgyalása az [7], [8] és [9] dolgozatokban található.

Az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebra reprezentálásához tekintsük a

$$\text{Zorn}(3, \mathbb{C}_\gamma) := \left\{ \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, U, V \in \text{Im}(\mathbb{H}_{\alpha\beta}), i \notin \mathbb{R}, i^2 = -\gamma \right\} \quad (49)$$

halmazt, amelynek elemei a Zorn-féle vektor-mátrixok. Látható, hogy e vektor-mátrixok fő-átlójában a $\mathbb{C}_\gamma$, mellékátlójában pedig a $\mathbb{C}_\gamma^3$ elemei találhatók. E vektor-mátrixok között értelmezhetünk egy komponensenként elvégzendő $\mathbb{R}$ -beli elemmel, mint skalárral való szorzást és egy összeadást, valamint egy $*$ szorzást is a [9] dolgozatban bemutatott módon. Ha $r \in \mathbb{R}$ és $A, B \in \text{Zorn}(3, \mathbb{C}_\gamma)$, akkor $r \cdot A, A + B, A * B \in \text{Zorn}(3, \mathbb{C}_\gamma)$, tehát e vektor-mátrixok halmaza zárt a közöttük értelmezett műveletekre nézve.

Tekintsük most az

$$F_\mathbb{O} : \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow \text{Zorn}(3, \mathbb{C}_\gamma), (a + U) + (b + V) \cdot E \mapsto \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} \quad (50)$$

leképezést! Az $F_\mathbb{O}$ bijektív, hiszen $F_\mathbb{O}^{-1}$ inverze is leképezés. Ha $r \in \mathbb{R}, o_1, o_2 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ tetszőleges elemek, akkor az $F_\mathbb{O}$ leképezésre teljesül az

$$F_\mathbb{O}(r \cdot o_1) = r \cdot F_\mathbb{O}(o_1) \quad (51)$$

homogén, az

$$F_\mathbb{O}(o_1 + o_2) = F_\mathbb{O}(o_1) + F_\mathbb{O}(o_2) \quad (52)$$

additív és az

$$F_\mathbb{O}(o_1 \cdot o_2) = F_\mathbb{O}(o_1) * F_\mathbb{O}(o_2) \quad (53)$$

multiplikatív tulajdonság.

Ezért az (50) összefüggésben szereplő $F_\mathbb{O}$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus. Ebben, az $\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ algebrával izomorf $\text{Zorn}(3, \mathbb{C}_\gamma)$ Zorn-féle vektor-mátrixok alkotta algebrában bizonyítjuk, hogy igaz a Cayley-Hamilton tétel.

Legyen most

$$A = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} \in \text{Zorn}(3, \mathbb{C}_\gamma) \quad (54)$$

egy tetszőleges Zorn-féle vektor-mátrix, ekkor

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} = (a + i \cdot b) \cdot (a - i \cdot b) - \\ -(U + i \cdot V) \circ (-U + i \cdot V) = a^2 + \gamma \cdot b^2 + U \circ U + \gamma \cdot (V \circ V) \in \mathbb{R} \quad (55)$$

teljesül, itt $\circ$ a [9] dolgozatban értelmezett $\mathbb{C}_\gamma^3$ -beli általánosított skaláris szorzat. Ha $\lambda \in \mathbb{C}_\gamma$, továbbá $E \in \text{Zorn}(3, \mathbb{C}_\gamma)$ az egység vektor-mátrix, akkor

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 + i \cdot 0 & 0 + i \cdot 0 \\ 0 + i \cdot 0 & 1 - i \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (a + i \cdot b) - \lambda & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & (a - i \cdot b) - \lambda \end{pmatrix}, \quad (56)$$

ezért az A mátrix karakterisztikus polinomja

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = \det \begin{pmatrix} (a + i \cdot b) - \lambda & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & (a - i \cdot b) - \lambda \end{pmatrix} = \\ = [(a + i \cdot b) - \lambda] \cdot [(a - i \cdot b) - \lambda] - (U + i \cdot V) \circ (-U + i \cdot V) = \quad (57) \\ = \lambda^2 - [(a + i \cdot b) + (a - i \cdot b)] \cdot \lambda + [a^2 + \gamma \cdot b^2 + U \circ U + \gamma \cdot (V \circ V)] = \\ = \lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) \in \mathbb{R}[x].$$

3. Tétel. Ha $A = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} \in \text{Zorn}(3, \mathbb{C}_\gamma)$, akkor $k_A(A) = \mathcal{O}$, tehát az A vektor-mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.

BIZONYÍTÁS. Az (54) – (57) összefüggések felhasználásával

$$k_A(A) = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} - \\ - 2 \cdot a \cdot \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} + \quad (58) \\ + [a^2 + \gamma \cdot b^2 + U \circ U + \gamma \cdot (V \circ V)] \cdot \begin{pmatrix} 1 + i \cdot 0 & 0 + i \cdot 0 \\ 0 + i \cdot 0 & 1 + i \cdot 0 \end{pmatrix}.$$

Az (58) összefüggésben kijelölt, vektor-mátrixok közötti műveletek elvégzése után a [9] dolgozatban szereplő $\mathbb{C}_\gamma^3$ -beli $\times$ általánosított vektoriális szorzat tulajdonságai és e dolgozatban levő Lemmák alapján

$$\begin{pmatrix} a^2 - \gamma b^2 + i \cdot 2ab - U \circ U - \gamma \cdot (V \circ V) & -2aU + i \cdot 2aV \\ 2aU + i \cdot 2aV & a^2 - \gamma b^2 - i \cdot 2ab - U \circ U - \gamma \cdot (V \circ V) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -2a^2 - i \cdot 2ab & 2aU - i \cdot 2aV \\ -2aU - i \cdot 2aV & -2a^2 + i \cdot 2ab \end{pmatrix} + \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{pmatrix} a^2 + \gamma b^2 + U \circ U + \gamma \cdot (V \circ V) & O + i \cdot O \\ O + i \cdot O & a^2 + \gamma b^2 + U \circ U + \gamma \cdot (V \circ V) \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} O + i \cdot O & O + i \cdot O \\ O + i \cdot O & O + i \cdot O \end{pmatrix} = O
\end{aligned}$$

adódik, tehát az A mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét. Ez pedig azt jelenti, hogy a Cayley-Hamilton tétel igaz a $Zorn(3, \mathbb{C}_\gamma)$ vektor-mátrix algebrában. ■

5. A Cayley-Hamilton tétel az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebrában

Végül megmutatjuk, hogy az általánosított szedeniók $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebráját reprezentáló vektor-mátrixok struktúrájában is igaz a Cayley-Hamilton tétel.

Az

$$\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta} := \left\{ \sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i : E_0 := 1, E_i \notin \mathbb{R} (1 \leq i \leq 15), E_i \neq E_j (i \neq j) \right\} \quad (60)$$

alakú kifejezéseket az általánosított szedeniók halmazának nevezzük, ha az $\{E_i\}_{i=0}^{15}$ általánosított szedenió-egységek között érvényesek a [10] dolgozat végén levő műveleti táblázatban szereplő $E_i \cdot E_j$ szorzási szabályok, itt $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ rögzített valós paraméterek.

Az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ halmazban értelmezhetjük az $\mathbb{R}$ elemeivel, mint skalárokkal való szorzást, egy összeadást, valamint az általánosított szedenió-egységek elempárjai szorzatainak felhasználásával az algebrák általános megszerkesztésének szabályait követve egy szorzási műveletet is [10].

Tetszőleges $r \in \mathbb{R}$, $s_1 = \sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i$, $s_2 = \sum_{i=0}^{15} b_i \cdot E_i \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ esetén skalárral való szorzás:

$$r \cdot \left(\sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i \right) := \sum_{i=0}^{15} (r \cdot a_i) \cdot E_i, \quad (61)$$

összeadás:

$$\sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i + \sum_{i=0}^{15} b_i \cdot E_i := \sum_{i=0}^{15} (a_i + b_i) \cdot E_i, \quad (62)$$

szorzás:

$$\left(\sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{15} b_j \cdot E_j \right) := \sum_{i,j=0}^{15} (a_i \cdot b_j) \cdot (E_i \cdot E_j). \quad (63)$$

Az általánosított szedeniók (60) összefüggéssel értelmezett halmaza a (61), (62) és (63) műveletekkel egy 16-dimenziós, neutrális elemes, nem kommutatív, nem asszociatív, nem is alternáló, viszont flexibilis algebrát alkot a valós számok $\mathbb{R}$ teste felett.

Minden $s = \sum_{i=0}^{15} a_i \cdot E_i$ általánosított szedenió egyértelműen írható fel

$$s = o_1 + o_2 \cdot F \quad (64)$$

alakban, ahol $o_1, o_2 \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$ és $F = E_8$, ez az általánosított szedeniók oktonió-algebrai alakja. A (61) – (63) összefüggések felhasználásával az általánosított szedeniók oktonió-algebrai alakjára bizonyíthatók a következő számolási szabályok:

ha $r \in \mathbb{R}$, $u_1 + u_2 \cdot F$, $v_1 + v_2 \cdot F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, akkor

$$r \cdot (u_1 + u_2 \cdot F) = (r \cdot u_1) + (r \cdot u_2) \cdot F, \quad (65)$$

$$(u_1 + u_2 \cdot F) + (v_1 + v_2 \cdot F) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \cdot F, \quad (66)$$

$$(u_1 + u_2 \cdot F) \cdot (v_1 + v_2 \cdot F) = (u_1 \cdot v_1 - \delta \cdot \overline{v_2} \cdot u_2) + (u_2 \cdot \overline{v_1} + v_2 \cdot u_1) \cdot F \quad (67)$$

teljesül. A (67) összefüggésben szereplő felülvonás az adott általánosított oktonió konjugáltját jelenti. A (47) és (48) összefüggések gondolatait folytatva minden $s = o_1 + o_2 \cdot F \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ egyértelműen írható fel

$$s = (a + U) + (b + V) \cdot F \quad (68)$$

alakban, ahol $o_1 = a + U, o_2 = b + V \in \mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}$, itt $a, b \in \mathbb{R}, U, V \in \text{Im}(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma})$. Ez a (68) előállítás az s általánosított szedenió Hamilton-féle alakja.

Az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebra részletes tárgyalása a [10] dolgozatban megtalálható.

Az általánosított szedeniók algebrájának reprezentációjához tekintsük a

$$\text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta) := \left\{ \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, U, V \in \text{Im}(\mathbb{O}_{\alpha\beta\gamma}), i \notin \mathbb{R}, i^2 = -\delta \right\} \quad (69)$$

halmazt, amelynek elemei a Zorn-féle vektor-mátrixok. Figyeljük meg, hogy e vektor-mátrixok főátlójában a $\mathbb{C}_\delta$, míg mellékátlójában a $\mathbb{C}_\delta^7$ elemei állnak. E vektor-mátrixok között értelmezhetünk egy komponensenként elvégzendő $\mathbb{R}$ -beli elemmel, mint skalárral való szorzást és egy összeadást, valamint egy $*$ szorzást is a [10] dolgozatban bevezetett módon.

Ha $r \in \mathbb{R}, A, B \in \text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta)$, akkor $r \cdot A, A + B, A * B \in \text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta)$, vagyis az ilyen típusú vektor-mátrixok halmaza zárt ezen műveletekre nézve.

Tekintsük ezután az

$$F_\mathbb{S}: \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta), (a + U) + (b + V) \cdot F \mapsto \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} \quad (70)$$

leképezést! Az $F_\mathbb{S}$ bijektív, mert $F_\mathbb{S}^{-1}$ inverz is leképezés. Ha $r \in \mathbb{R}, s_1, s_2 \in \mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ tetszőleges elemek, akkor az $F_\mathbb{S}$ leképezésre teljesül az

$$F_\mathbb{S}(r \cdot s_1) = r \cdot F_\mathbb{S}(s_1) \quad (71)$$

homogén,

$$F_\mathbb{S}(s_1 + s_2) = F_\mathbb{S}(s_1) + F_\mathbb{S}(s_2) \quad (72)$$

additív, és

$$F_\mathbb{S}(s_1 \cdot s_2) = F_\mathbb{S}(s_1) * F_\mathbb{S}(s_2) \quad (73)$$

multiplikatív tulajdonság. Így a (70) összefüggésben szereplő $F_\mathbb{S}$ leképezés egy $\mathbb{R}$ algebra-izomorfizmus.

Ebben, az $\mathbb{S}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ algebrával izomorf $\text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta)$ Zorn-féle vektor-mátrixok alkotta algebrában bizonyítjuk, hogy érvényes a Cayley-Hamilton tétel.

Legyen most

$$A = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} \in \text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta) \quad (74)$$

egy tetszőleges vektor-mátrix, ekkor az előző fejezettel teljesen analóg okoskodással

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} = a^2 + \delta \cdot b^2 + U \circ U + \delta \cdot (V \circ V) \in \mathbb{R} \quad (75)$$

teljesül. Ha $\lambda \in \mathbb{C}_\delta$, továbbá $E \in \text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta)$ az egység mátrix, akkor

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} (a + i \cdot b) - \lambda & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & (a - i \cdot b) - \lambda \end{pmatrix}, \quad (76)$$

ezért az A vektor-mátrix karakterisztikus polinomja

$$\begin{aligned} k_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E) = \lambda^2 - 2 \cdot a \cdot \lambda + [a^2 + \delta \cdot b^2 + U \circ U + \delta \cdot (V \circ V)] = \\ &= \lambda^2 - \text{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) \in \mathbb{R}[x]. \end{aligned} \quad (77)$$

Ezután már az előző fejezet 3. Tételével teljesen analóg módon könnyen bizonyíthatjuk a következő állítást.

4. Tétel. Ha $A = \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} \in \text{Zorn}(7, \mathbb{C}_\delta)$, akkor $k_A(A) = \mathcal{O}$ teljesül, vagyis az A vektor-mátrix kielégíti saját karakterisztikus egyenletét.

BIZONYÍTÁS. A (74) – (77) összefüggések felhasználásával

$$\begin{aligned} k_A(A) &= \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} - \\ &- 2 \cdot a \cdot \begin{pmatrix} a + i \cdot b & -U + i \cdot V \\ U + i \cdot V & a - i \cdot b \end{pmatrix} + [a^2 + \delta \cdot b^2 + U \circ U + \delta \cdot (V \circ V)] \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} 1 + i \cdot 0 & 0 + i \cdot 0 \\ 0 + i \cdot 0 & 1 + i \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + i \cdot 0 & 0 + i \cdot 0 \\ 0 + i \cdot 0 & 0 + i \cdot 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \end{aligned} \quad (78)$$

adódik a 3. Tétel bizonyításával megegyező okoskodással, ez pedig tételünk állítását bizonyítja. ■

6. Összefoglaló

Dolgozatunkban a klasszikus lineáris algebra egy nevezetes tételének, a Cayley-Hamilton tételnek négy nevezetes, $\mathbb{R}$ feletti algebrában való érvényességével foglalkoztunk.

Tudjuk, hogy a véges dimenziós asszociatív algebrák alkalmas mátrixok struktúráival reprezentálhatók. Ilyen asszociatív algebrák az általánosított komplex számok és az általánosított kvaterniók is. Egyszerű direkt bizonyítást mutatunk be dolgozatunk első felében arra, hogy ezen algebrákat leíró mátrixok struktúráiban – valójában nem is meglepő módon – teljesül a Cayley-Hamilton tétel.

Érdekesebb kérdés, hogy az általánosított oktoniók és általánosított szedeniók nem asszociatív algebrájában, amelyek Zorn nyomán alkalmas vektor-mátrixok struktúráival reprezentálhatók, vajon érvényes-e ez a fontos klasszikus tétel? A szerző korábbi [7] - [10] dolgozataira támaszkodva igazoltuk munkánk fő eredményét, hogy az említett két nevezetes nem asszociatív algebrákat leíró vektor-mátrix struktúrákban is igaz a Cayley-Hamilton tétel.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetét fejezi ki Prof. Dr. Nagy Péter Tibor egyetemi tanárnak az algebrák témakörében folytatott konzultációkért és szakmai támogatásáért, segítségéért.

Irodalomjegyzék

- [1] Albert, A.A.: *Quadratic forms permitting composition*. Annals of Mathematics. **43** (1942), 161-177.
- [2] Curtis, M.L.: *Abstract Linear Algebra*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1990.
- [3] Dickson, L.E.: *On quaternions and their generalization and the history of eight square theorem*. Annals of Mathematics, 2nd. **20**(3), (1919), 155-171. doi: [10.2307/1967865](https://doi.org/10.2307/1967865).
- [4] Ebbinghaus, H.D. – Hermes, H. – Hirzebruch, F. – Koecher, M. – Mainzer, M. – Mainzer, K. – Neukirch, J. – Prestel, A. – Remmert, R.: *Numbers*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.
- [5] Kantor, I.L. – Szolodovnyikov, A.Sz.: *Hiperkomplex számok*. Gondolat, Budapest, 1985
- [6] Péntek, K.: Az általánosított kvaternióalgebrák és egy új felépítéséről. Dimenziók. Matematikai Közlemények, **6** (2018), 25-30. doi: [10.20312/dim.2018.03](https://doi.org/10.20312/dim.2018.03).
- [7] Péntek, K.: Az általánosított oktonióalgebrák egy új felépítéséről. Dimenziók. Matematikai Közlemények, **7** (2019), 19-27. doi: [10.20312/dim.2019.03](https://doi.org/10.20312/dim.2019.03).
- [8] Péntek, K.: Az általánosított oktonióalgebrákról. Savaria Természettudományi és Sporttudományi Közlemények, **18**, Szombathely, (2020), 7-20.
- [9] Péntek, K.: Az általánosított oktoniók és a vektor-mátrixok algebrája. Dimenziók. Matematikai Közlemények, **11** (2023), 11-20. doi: [10.312/dim.2023.02](https://doi.org/10.312/dim.2023.02).
- [10] Péntek, K.: Az általánosított szedeniók és a vektor-mátrixok algebrája. Dimenziók. Matematikai Közlemények, **12** (2024), 91-103. doi: [10.20312/dim.2024.10](https://doi.org/10.20312/dim.2024.10).
- [11] Praszolov, V.V.: *Lineáris algebra*. TypoTEX, Budapest, 2005.
- [12] Zorn, M.A.: *Theorie der alternativen Ringe*. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1931) 123-147.
- [13] Zorn, M.A.: *Alternativkörper und quadratische Systeme*. In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, (1933), 395-402.