



sapientia
tankönyvek

Kátai Zoltán

Kapcsolatok hálójában: gráfelmélet a társadalmi hálózatok szolgálatában

Scientia Kiadó

Kátai Zoltán

**Kapcsolatok
hálójában:
gráfelmélet
a társadalmi
hálózatok
szolgálatában**

Káta Zoltán

Kapcsolatok hálójában: gráfelmélet a társadalmi hálózatok szolgálatában

Scientia Kiadó
Kolozsvár ■ 2025



DOI: 10.47745/SAPVOL.2025.05

Kiadja a

Scientia Kiadó

400112 Kolozsvár, Mátyás király (Matei Corvin) u. 4.

Tel./fax: +40-364-401454, e-mail: scientia@kpi.sapientia.ro

www.scientiakiado.ro

Felelős kiadó:

Sorbán Angella

Lektor:

Kása Zoltán (Kolozsvár)

Borítóterv:

Tipotéka Kft.

Kiadói koordinátor:

Szabó Beáta

A szakmai felelősséget teljes mértékben a szerző vállalja.

© Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

KÖNYV-ÉRTÉKELÉS

Kapcsolódások: valamilyen fordítást igénylő, az egyes fejezeteket illetően is /

Kátai Zoltán. - Cluj-Napoca : Scientia, 2025

Continue bibliografie

ISBN 978-606-975-107-7

004

51

316

Tartalomjegyzék

1. Gráfok: kapcsolatok és struktúrák nyomában	21
1.1. A gráfelmélet reneszánsza	22
1.2. Hogyan guglizunk? Gráfalgoritmika a Big Data világában	25
1.2.1. Gráfalgoritmus a futballpályán.	26
1.3. Gráfelméleti alapfogalmak	27
1.4. A gráfok néhány alapvető tulajdonsága.	33
1.4.1. Prüfer-kód	33
1.5. Euler gráfja nem bizonyult eulerinek	36
1.6. Hamilton és az utazó ügynök probléma	37
1.6.1. Gráfok és algoritmusok bonyolultsága: a Hamilton-kör mint NP-útikalauz	38
1.7. Nagy valós gráfok	40
1.7.1. Nagy összefüggő komponens jelensége	40
1.7.2. Kisvilág-tulajdonság	41
1.8. Összegzés és kitekintés	43
2. Fókuszban az élek: a társadalmi kapcsolatok szerkezete és szerepe a hálózatokban	44
2.1. A Granovetter-kísérlet	44
2.2. Hálózatok dinamikája	44
2.3. Tranzitivitás / Triadikus bezáródás	45
2.4. Csomósodási együttható	46
2.5. Híd, lokális híd, majdnem lokális híd	48
2.6. Erős triadikus bezáródás	50
2.7. Gyenge/erős kötések fogalmának általánosítása	52
2.8. Kohéziós tőke és hídépítő tőke	52
2.9. Gráfok particionálása	54
2.9.1. Élközpontúság és forgalom	55
2.9.2. Girvan–Newman-módszer	57
2.10. Összegzés	59
3. Pozitív és negatív kapcsolatok	60
3.1. Háromszögek egyensúlya	61
3.2. Teljes gráfok egyensúlya	62
3.3. A strukturális egyensúly dinamikája	63
3.3.1. Strukturális egyensúly a nemzetközi kapcsolatokban	63
3.3.2. Strukturális egyensúly az online közösségekben	64
3.4. Gyengén kiegyensúlyozott hálózatok	65
3.5. Strukturális kiegyensúlyozottság általános (nem teljes) gráfokban	66

6 ■ Tartalomjegyzék

3.6. Majdnem kiegyensúlyozott előjeles gráfok	68
3.7. Összegzés	68
4. Fókuszban a pontok: hálózatok és kontextusuk	69
4.1. A homofília és hatása a hálózat struktúrájára	69
4.2. A homofília számszerűsítése	70
4.3. Szelekció és szocializáció: a homofília két mechanizmusa	72
4.3.1. Longitudinális vizsgálat a kamaszkori barátságokról	72
4.3.2. Christakis és Fowler elhízási kutatása	73
4.4. Hovatartozás a hálózatokban	74
4.4.1. Hovatartozási hálózatok és fókuszpontok	75
4.4.2. A szociális és hovatartozási hálózatok együttes fejlődése	76
4.4.3. Több közös barát, több közös tevékenység	78
4.5. Szegregáció: a Schelling-modell	79
4.5.1. A Schelling-modell működése	80
4.5.2. A Schelling-modell alkalmazása a szegregáció vizsgálatára	81
4.6. Összegzés	82
5. Az artikulációs pontok szerepe és stratégiai fontossága a hálózatok működésében	83
5.1. Az artikulációs pontok meghatározása és azonosítása	84
5.2. Artikulációs pontokra irányuló támadási stratégia	84
5.3. Többszörösen összefüggő gráfok	85
5.4. Mohó artikulációs pont eltávolítási módszer	86
5.5. Artikulációs pontok és maradék óriás bikomponens valós hálózatokban	88
5.5.1. Valós versus randomizált hálózatok	88
5.6. Összegzés	89
6. Fák a hálózatok szolgálatában: a feszítőfák szerepe és alkalmazásai	90
6.1. Feszítőfák madártávlatból	90
6.2. Minimális feszítőfa (MST)	91
6.2.1. Kruskal-algoritmus	93
6.2.2. MST-alapú klaszterezési módszer	94
6.2.3. Prim-algoritmus	96
6.2.4. A minimális feszítőfák alkalmazásai	98
6.3. Legrövidebb utak fája (SPT)	98
6.3.1. Legrövidebb utak algoritmusok az SPT meghatározására	99
6.3.2. Körmentes gráfok esetén – Viterbi szellemében	99
6.3.3. Negatív él nélküli gráfok esetén – Dijkstra-algoritmus	100
6.3.4. Negatív élű, de negatív kört nem tartalmazó gráfok esetén – Bellman–Ford-algoritmus	100
6.4. Legrövidebb utak minden pontpár között	101
6.4.1. Floyd–Warshall-algoritmus	101
6.4.2. Johnson-algoritmus (Dijkstra + Bellman–Ford)	101

6.5. A legrövidebb utak problémájának alkalmazásai	102
6.6. Leghosszabb utak fája	103
6.7. Összegzés	103
7. Útvonalak a genom szövetében – Hamilton- és Euler-stratégiák	104
7.1. Humán genom-projekt	104
7.2. Biológiai csepp – hogyan kódolja a testünk titkait a DNS?	106
7.3. Genomszekvenálás és -összeállítás	107
7.3.1. A genomszekvenálás algoritmikus szemmel	107
7.4. Genomrekonstrukció mint Hamilton-út probléma	109
7.5. Genomszekvenálás mint Euler-vonal probléma	111
7.5.1. Euler tétele és az Euler-vonal algoritmus	112
7.6. Genom-összeállítás töredékpárokkal és párosított De Bruijn-gráfokkal	113
7.7. Összegzés	115
8. Maximális folyam: klasszikus probléma, modern alkalmazások	116
8.1. A folyamfeladat formális definíciója	116
8.1.1. A probléma matematikai modellje	117
8.2. Ford–Fulkerson-előzetes: váratlan és sokoldalú alkalmazások	118
8.3. Ford–Fulkerson-algoritmus	119
8.3.1. Az algoritmus lényege	120
8.4. Bajnoksági kiesések és a Ford–Fulkerson-algoritmus	124
8.4.1. A <i>San Francisco Chronicle</i> története – a Detroit Tigers esete	125
8.4.2. Gráfelméleti modellezés – a Ford–Fulkerson-algoritmus alkalmazása	126
8.4.3. A bajnoksági kiesések megoldási módszereinek fejlődése	129
8.5. A Ford–Fulkerson-algoritmus kiterjesztése és további alkalmazásai	130
8.6. Összegzés	131
9. Versengő hálózatok: hálózattudomány a futballban	133
9.1. Gráfelméleti szempont	133
9.1.1. Klaszterezettség együttható	133
9.1.2. Átlagos távolság (legrövidebb úthossz)	134
9.1.3. A kapcsolati mátrix legnagyobb sajátértéke (angolul: eigenvalue)	134
9.1.4. Algebrai összefüggőség	134
9.1.5. Sajátvektor-központság	135
9.2. Miért FC Barcelona? Miért Guardiola?	135
9.3. Elemzések az átlagértékek és a játék dinamikájának figyelembevételével	136
9.4. Átlagolt passzhálózatok elemzése	137
9.5. N-passzos hálózatszekvenciák vizsgálata	138
9.6. Következtetések az átlagospassz-hálózatok elemzése nyomán	139
9.7. Következtetések a hálózati mutatók időbeli változásának vizsgálata nyomán	142
9.8. Kiegészítő implementációs szempontok	144

9.8.1. A hálózati mutatók sajátosságai passzhálózatok esetében	144
9.9. Összegzés	146
10. Döntések hálózatban: a játékelmélet alapjai	147
10.1. Egy első példa: szóló vagy duett	147
10.2. A játék alapvető elemei és stratégiai elemzése	148
10.2.1. Racionális döntés, domináns stratégia és egy paradoxon	149
10.3. Kapcsolódó történet: a fogolydilemma	150
10.3.1. A fogolydilemma határai és alternatívái	151
10.4. Amikor csak az egyik játékosnak van szigorúan domináns stratégiája	152
10.5. Nash-egyensúly	153
10.5.1. Egy álláspályázati verseny példája	153
10.5.2. A Nash-egyensúly megtalálása	154
10.6. Pareto-optimalitás és társadalmi optimális állapot	155
10.6.1. A Pareto-optimalitás és társadalmi optimális állapot kapcsolata	156
10.7. Egy alkalmazás: hálózati forgalom modellezése játékelmélet segítségével	156
10.7.1. Braess-paradoxon: amikor egy új út ront a helyzeten	157
10.8. Összegzés	159
11. Piaci hálózatok: párosítás és közvetítők	160
11.1. Párosító piacok	160
11.1.1. Páros gráfok és teljes párosítások	160
11.1.2. Értékelések és optimális hozzárendelések	161
11.1.3. Az árak és a piac egyensúlyi állapota	163
11.1.4. A piaci egyensúlyi állapot tulajdonságai	166
11.2. Hálózati modellek közvetítőkkal működő piacokra	167
11.2.1. A kereskedelem hálózati modellje	167
11.2.2. Hálózati struktúra	169
11.2.3. Árak és az áruk áramlása	170
11.2.4. Kifizetések	172
11.2.5. A játék szerkezete	172
11.2.6. Egyensúlyi megfontolások: monopólium és tökéletes verseny	173
11.2.7. További komplex hálózati hatások	176
11.3. Összegzés	177
12. Információs hálózatok és a világháló	178
12.1. Az információs hálózatok története	178
12.1.1. A világháló szerepe az információs társadalomban	178
12.1.2. A világháló és az internet	179
12.1.3. Idézési rendszerek: visszafelé mutató hálózatok	179
12.1.4. Egy ősi precedens információs hálózatra	180
12.1.5. Szemantikai hálózatok	182

12.1.6. Vannevar Bush és a Memex: a modern információs hálózatok előfutára	183
12.2. A világháló fejlődése: 1.0, 2.0, 3.0	184
12.3. A világháló linkjeinek fejlődése: navigációs csontváz versus tranzakciós motor.	186
12.4. A világháló mint irányított gráf	187
12.5. Linkelemzés és webes keresés	189
12.5.1. Linkelemzés mértékadó és központi oldalak alapján: HITS-algoritmus	190
12.5.2. PageRank: a világháló „szavazási” rendszere.	194
12.6. A linkelemzés szerepe a modern világhálón.	197
13. A viselkedésterjedés anatómiája	198
13.1. Információs hatás	198
13.2. Közvetlen haszon: hálózati hatás	200
13.3. A népszerűség hálózati dinamikája.	201
13.3.1. A „gazdag még gazdagabb lesz” modell	201
13.4. Viselkedési zuhatagok hálózatokban.	203
13.4.1. Az innovációk terjedése	203
13.4.2. Viselkedési zuhatagok mint koordinációs játék.	204
13.4.3. Zuhatagok és klaszterek	208
13.4.4. Viselkedési zuhatagok és a gyenge kapcsolatok.	209
13.5. Összegzés és kitekintés	210
14. Irodalomjegyzék	211
15. A függelék: alapalgoritmusok	219
16. B függelék: algoritmikai kihívások	236
Rezumat	245
Abstract	246
A szerzőről.	247

Conținut

1. Grafuri: În căutarea conexiunilor și structurilor	21
1.1. Renașterea teoriei grafurilor	22
1.2. Cum funcționează căutările pe Google? Algoritmi de grafuri în era Big Data	25
1.2.1. Algoritmi de graf pe terenul de fotbal	26
1.3. Noțiuni fundamentale din teoria grafurilor	27
1.4. Proprietăți de bază ale grafurilor	33
1.4.1. Codul Prüfer	33
1.5. Graful lui Euler nu era eulerian.	36
1.6. Hamilton și problema comis-voiajorului.	37
1.6.1. Grafuri și complexitatea algoritmilor: ciclul hamiltonian ca problemă NP-completă.	38
1.7. Grafuri de mari dimensiuni în lumea reală.	40
1.7.1. Fenomenul componentei conexe gigante.	40
1.7.2. Proprietatea „lumii mici”	41
1.8. Concluzii și perspective.	43
2. În prim-plan: Muchiile – Structura și rolul legăturilor sociale în rețele.	44
2.1. Experimentul lui Granovetter	44
2.2. Dinamica rețelelor sociale	44
2.3. Tranzitivitate și închidere triadică	45
2.4. Coeficientul de aglomerare (clustering)	46
2.5. Poduri, poduri locale și aproape poduri locale	48
2.6. Închiderea triadică puternică	50
2.7. Generalizarea conceptului de legături slabe și tari.	52
2.8. Capital social: bonding și bridging	52
2.9. Partajarea grafurilor	54
2.9.1. Centralitatea muchiilor și fluxul informațional.	55
2.9.2. Metoda Girvan–Newman	57
2.10. Concluzii	59
3. Relații pozitive și negative în rețele	60
3.1. Echilibrul triunghiurilor	61
3.2. Echilibrul în grafurile complete	62
3.3. Dinamica echilibrului structural	63
3.3.1. Echilibrul structural în relații internaționale	63
3.3.2. Echilibrul structural în comunitățile online	64
3.4. Rețele slab echilibrate	65
3.5. Echilibrul structural în grafuri parțiale.	66
3.6. Grafuri plus/minus aproape echilibrate	68

3.7. Concluzii	68
4. În prim-plan: Nodurile – Rețelele și contextul lor	69
4.1. Homofilia și influența ei asupra structurii rețelei.	69
4.2. Măsurarea homofiliei	70
4.3. Selecția și socializarea – două mecanisme ale homofiliei	72
4.3.1. Studiu longitudinal al prietenilor în adolescență.	72
4.3.2. Studiul lui Christakis și Fowler despre obezitate	73
4.4. Afilierea în rețele	74
4.4.1. Rețele de afiliere și focare sociale	75
4.4.2. Coevoluția rețelelor sociale și de afiliere	76
4.4.3. Mai mulți prieteni comuni, mai multe activități comune.	78
4.5. Segregarea: modelul Schelling.	79
4.5.1. Cum funcționează modelul Schelling	80
4.5.2. Aplicarea modelului Schelling în studiul segregării.	81
4.6. Concluzii	82
5. Punctele de articulație – Rol strategic în funcționarea rețelelor.	83
5.1. Identificarea punctelor de articulație	84
5.2. Strategia APTA: atacarea punctelor de articulație	84
5.3. Grafuri k-conexe.	85
5.4. Algoritmul GAPR – eliminare greedy a punctelor de articulație	86
5.5. Puncte de articulație și bicomponentele reziduale în rețele reale	88
5.5.1. Rețele reale vs. rețele randomizate.	88
5.6. Concluzii	89
6. Arbori parțiali în rețele: Roluri și aplicații	90
6.1. Arborii parțiali – o privire generală.	90
6.2. Arborele parțial de cost minim (MST)	91
6.2.1. Algoritmul Kruskal	93
6.2.2. Clustering bazat pe MST	94
6.2.3. Algoritmul Prim	96
6.2.4. Aplicații ale arborilor parțiali de cost minim	98
6.3. Arborele drumurilor minime (SPT).	98
6.3.1. Algoritmi pentru SPT	99
6.3.2. Grafuri fără cicluri – metoda Viterbi	99
6.3.3. Grafuri fără muchii negative – algoritmul Dijkstra	100
6.3.4. Grafuri cu muchii negative, dar fără cicluri negative – algoritmul Bellman-Ford	100
6.4. Drumuri minime între toate perechile de noduri	101
6.4.1. Algoritmul Floyd-Warshall	101
6.4.2. Algoritmul Johnson.	101
6.5. Aplicații ale drumurilor minime	102
6.6. Arborele drumurilor maxime.	103
6.7. Concluzii	103

7. Drumuri în țesătura genomului – Strategii hamiltoniene și euleriene . . .	104
7.1. Proiectul Genomului Uman	104
7.2. Picătura biologică – Cum codifică ADN-ul secretele corpului nostru.	106
7.3. Secvențierea și asamblarea genomului	107
7.3.1. Secvențierea genomului din perspectivă algoritmică	107
7.4. Reconstrucția genomului ca problemă de drum hamiltonian	109
7.5. Secvențierea genomului ca problemă de drum eulerian	111
7.5.1. Teorema lui Euler și algoritmul drumului eulerian.	112
7.6. Asamblarea genomului cu citiri pereche și grafuri De Bruijn pereche	113
7.7. Concluzii	115
8. Flux maxim: Problemă clasică, aplicații moderne.	116
8.1. Definirea formală a problemei de flux.	116
8.1.1. Modelul matematic al problemei	117
8.2. Prezentarea Ford–Fulkerson: aplicații surprinzătoare și versatile . . .	118
8.3. Algoritmul Ford–Fulkerson	119
8.3.1. Esența algoritmului.	120
8.4. Problema eliminării baseball și algoritmul Ford–Fulkerson	124
8.4.1. Povestea San Francisco Chronicle – cazul Detroit Tigers	125
8.4.2. Modelare graf-teoretică – aplicarea algoritmului Ford–Fulkerson. .	126
8.4.3. Evoluția metodelor de eliminare baseball	129
8.5. Extensii și alte aplicații ale algoritmului Ford–Fulkerson.	130
8.6. Concluzii	131
9. Rețele în competiție: Știința rețelor în fotbal.	133
9.1. Perspectivă de teoria grafurilor	133
9.1.1. Coeficient de aglomerare	133
9.1.2. Distanța medie	134
9.1.3. Valoarea proprie maximă a matricei de adiacență.	134
9.1.4. Conectivitatea algebrică	134
9.1.5. Centralitatea vectorului propriu.	135
9.2. De ce FC Barcelona? De ce Guardiola?	135
9.3. Analiză bazată pe medii și dinamica jocului	136
9.4. Analiza rețelor de pase calculate prin mediere	137
9.5. Studiul secvențelor de rețele N-pass	138
9.6. Concluzii din analiza rețelor de pase calculate prin mediere	139
9.7. Concluzii privind variația în timp a indicatorilor de rețea	142
9.8. Aspecte suplimentare de implementare	144
9.8.1. Particularități ale indicatorilor de rețea în rețelele de pase.	144
9.9. Concluzii	146
10. Decizii în rețea: Bazele teoriei jocurilor	147
10.1. Un prim exemplu: solo sau duet	147

10.2. Elemente de bază și analiză strategică	148
10.2.1. Decizie rațională, strategie dominantă și un paradox	149
10.3. Poveste asociată: dilema prizonierului	150
10.3.1. Limitele și alternativele dilemei prizonierului	151
10.4. Când doar un jucător are o strategie strict dominantă	152
10.5. Echilibrul Nash	153
10.5.1. Un exemplu de competiție pentru un post	153
10.5.2. Găsirea echilibrului Nash	154
10.6. Optimalitatea Pareto și starea social optimă	155
10.6.1. Relația dintre optimalitatea Pareto și starea social optimă	156
10.7. O aplicație: Modelarea traficului de rețea folosind teoria jocurilor	156
10.7.1. Paradoxul Braess: când un drum nou înrăutățește traficul	157
10.8. Concluzii	159
11. Rețele în economia de piață: Alocare bipartită și intermediari	160
11.1. Piețe de alocare bipartită	160
11.1.1. Grafuri bipartite și potriviri perfecte	160
11.1.2. Evaluări și alocări optime	161
11.1.3. Prețuri și echilibru de piață	163
11.1.4. Proprietățile echilibrului de piață	166
11.2. Modele de rețea pentru piețele cu intermediari	167
11.2.1. Model de rețea pentru comerț	167
11.2.2. Structura rețelei	169
11.2.3. Prețuri și fluxul mărfurilor	170
11.2.4. Plăți	172
11.2.5. Structura jocului	172
11.2.6. Concepte de echilibru: monopol și concurență perfectă	173
11.2.7. Alte efecte complexe în rețele	176
11.3. Concluzii	177
12. Rețele informaționale și Web-ul	178
12.1. Istoria rețelelor informaționale	178
12.1.1. Rolul Web-ului în societatea informațională	178
12.1.2. Web-ul și Internetul	179
12.1.3. Sisteme de citare: rețele orientate înapoi	179
12.1.4. Un precedent antic al rețelelor informaționale	180
12.1.5. Rețele semantice	182
12.1.6. Vannevar Bush și Memex-ul: precursorul rețelelor moderne	183
12.2. Evoluția Web-ului: 1.0, 2.0, 3.0	184
12.3. Evoluția linkurilor web: schelet navigațional vs. motor tranzacțional	186
12.4. Web-ul ca graf orientat	187
12.5. Analiza linkurilor și căutarea pe web	189
12.5.1. Algoritmi hub/authority – pagini influente și centrale	190

14 ■ Conținut

12.5.2. PageRank – sistemul de „vot” al Web-ului	194
12.6. Rolul analizei linkurilor în Web-ul modern	197
13. Anatomia răspândirii comportamentului.	198
13.1. Influența informațională	198
13.2. Beneficii directe: efectele de rețea.	200
13.3. Dinamica popularității în rețele	201
13.3.1. Modelul „cei bogați devin și mai bogați”	201
13.4. Cascade comportamentale în rețele.	203
13.4.1. Răspândirea inovațiilor.	203
13.4.2. Cascadele comportamentale ca jocuri de coordonare	204
13.4.3. Cascade și clustere	208
13.4.4. Cascadele comportamentale și legăturile slabe	209
13.5. Concluzii și perspective.	210
14. Bibliografie	211
15. Anexa A	219
16. Anexa B	236
Rezumat	245
Abstract	246
Despre autor	247

Contents

1. Graphs: Tracing Connections and Structures	21
1.1. The Renaissance of Graph Theory.	22
1.2. How Do We Google? Graph Algorithms in the World of Big Data	25
1.2.1. Graph Algorithm on the Football Field	26
1.3. Basic Concepts of Graph Theory	27
1.4. Some Fundamental Properties of Graphs	33
1.4.1. The Prüfer Code	33
1.5. Euler's Graph Turned Out Not to Be Eulerian.	36
1.6. Hamilton and the Travelling Salesman Problem	37
1.6.1. Graphs and Algorithmic Complexity: The Hamiltonian Cycle as an NP-Complete Guide.	38
1.7. Real-World Large Graphs	40
1.7.1. The Giant Connected Component Phenomenon.	40
1.7.2. The Small-World Property	41
1.8. Summary and Outlook.	43
2. Focus on Edges: The Structure and Role of Social Ties in Networks	44
2.1. The Granovetter Experiment	44
2.2. Network Dynamics.	44
2.3. Transitivity / Triadic Closure.	45
2.4. Clustering Coefficient	46
2.5. Bridge, Local Bridge, Almost Local Bridge	48
2.6. Strong Triadic Closure.	50
2.7. Generalizing the Concept of Strong/Weak Ties.	52
2.8. Bonding Capital and Bridging Capital.	52
2.9. Graph Partitioning	54
2.9.1. Edge Betweenness and Traffic	55
2.9.2. The Girvan–Newman Method	57
2.10. Summary	59
3. Positive and Negative Relationships	60
3.1. Triangle Balance.	61
3.2. Balance in Complete Graphs	62
3.3. The Dynamics of Structural Balance.	63
3.3.1. Structural Balance in International Relations	63
3.3.2. Structural Balance in Online Communities.	64
3.4. Weakly Balanced Networks	65
3.5. Structural Balance in General (Non-Complete) Graphs	66
3.6. Nearly Balanced Signed Graphs	68
3.7. Summary	68

4. Focus on Nodes: Networks and Their Contexts	69
4.1. Homophily and Its Impact on Network Structure	69
4.2. Quantifying Homophily	70
4.3. Selection and Socialization: Two Mechanisms of Homophily	72
4.3.1. Longitudinal Study on Adolescent Friendships	72
4.3.2. Christakis and Fowler's Obesity Research	73
4.4. Affiliation in Networks	74
4.4.1. Affiliation Networks and Foci	75
4.4.2. Co-Evolution of Social and Affiliation Networks	76
4.4.3. More Mutual Friends, More Shared Activities	78
4.5. Segregation: The Schelling Model	79
4.5.1. How the Schelling Model Works	80
4.5.2. Using the Schelling Model to Examine Segregation	81
4.6. Summary	82
5. The Role and Strategic Importance of Articulation Points	
in Network Functioning	83
5.1. Definition and Identification of Articulation Points	84
5.2. Attack Strategy Targeting Articulation Points (APTA)	84
5.3. k-Connected Graphs	85
5.4. Greedy Articulation Point Removal Method (GAPR)	86
5.5. Articulation Points and Residual Giant Bicomponent	
in Real Networks	88
5.5.1. Real vs Randomized Networks	88
5.6. Summary	89
6. Trees in Service of Networks: The Role and Applications	
of Spanning Trees	90
6.1. Spanning Trees from a Bird's Eye View	90
6.2. Minimum Spanning Tree (MST)	91
6.2.1. Kruskal's Algorithm	93
6.2.2. MST-Based Clustering Method	94
6.2.3. Prim's Algorithm	96
6.2.4. Applications of Minimum Spanning Trees	98
6.3. Shortest Path Tree (SPT)	98
6.3.1. Shortest Path Algorithms for Finding the SPT	99
6.3.2. For Acyclic Graphs – In the Spirit of Viterbi	99
6.3.3. For Graphs Without Negative Edges – Dijkstra's Algorithm	100
6.3.4. For Graphs with Negative Edges but No Negative Cycles –	
The Bellman–Ford Algorithm	100
6.4. All-Pairs Shortest Paths	101
6.4.1. The Floyd–Warshall Algorithm	101
6.4.2. Johnson's Algorithm (Dijkstra + Bellman–Ford)	101
6.5. Applications of the Shortest Path Problem	102

6.6. Longest Path Tree	103
6.7. Summary	103
7. Paths in the Fabric of the Genome – Hamiltonian and Eulerian Strategies	104
7.1. The Human Genome Project	104
7.2. Biological Drop – How DNA Encodes the Body’s Secrets.	106
7.3. Genome Sequencing and Assembly	107
7.3.1. Genome Sequencing from an Algorithmic Perspective.	107
7.4. Genome Reconstruction as a Hamiltonian Path Problem	109
7.5. Genome Sequencing as an Eulerian Path Problem	111
7.5.1. Euler’s Theorem and the Eulerian Path Algorithm	112
7.6. Genome Assembly with Read Pairs and Paired De Bruijn Graphs	113
7.7. Summary	115
8. Maximum Flow: Classical Problem, Modern Applications	116
8.1. Formal Definition of the Flow Problem	116
8.1.1. The Mathematical Model of the Problem.	117
8.2. Ford–Fulkerson Preview: Surprising and Versatile Applications	118
8.3. The Ford–Fulkerson Algorithm	119
8.3.1. The Core of the Algorithm	120
8.4. Baseball Elimination and the Ford–Fulkerson Algorithm.	124
8.4.1. The San Francisco Chronicle Story – The Case of the Detroit Tigers	125
8.4.2. Graph-Theoretical Modeling – Application of Ford–Fulkerson.	126
8.4.3. Evolution of Baseball Elimination Methods	129
8.5. Extensions and Further Applications of Ford–Fulkerson	130
8.6. Summary	131
9. Competing Networks: Network Science in Football.	133
9.1. Graph-Theoretic Perspective	133
9.1.1. Clustering Coefficient	133
9.1.2. Average Shortest Path	134
9.1.3. Largest Eigenvalue of the Adjacency Matrix	134
9.1.4. Algebraic Connectivity	134
9.1.5. Eigenvector Centrality	135
9.2. Why FC Barcelona? Why Guardiola?	135
9.3. Analysis Based on Averages and Game Dynamics	136
9.4. Analysis of Averaged Passing Networks	137
9.5. Studying N-Pass Network Sequences	138
9.6. Conclusions from the Analysis of Average Passing Networks	139
9.7. Conclusions from the Temporal Dynamics of Network Metrics	142
9.8. Additional Implementation Aspects	144
9.8.1. Specific Features of Network Metrics in Passing Networks	144
9.9. Summary	146

10. Decisions in a Network: Fundamentals of Game Theory	147
10.1. A First Example: Solo or Duet	147
10.2. Basic Elements of Games and Strategic Analysis	148
10.2.1. Rational Decision, Dominant Strategy, and a Paradox.	149
10.3. Related Story: The Prisoner's Dilemma.	150
10.3.1. Limits and Alternatives of the Prisoner's Dilemma.	151
10.4. When Only One Player Has a Strictly Dominant Strategy	152
10.5. The Nash Equilibrium	153
10.5.1. A Job Application Competition Example.	153
10.5.2. Finding the Nash Equilibrium	154
10.6. Pareto Optimality and Socially Optimal State	155
10.6.1. Relationship Between Pareto and Social Optimality.	156
10.7. An Application: Modelling Network Traffic Using Game Theory . . .	156
10.7.1. Braess's Paradox: When a New Road Makes Things Worse. . .	157
10.8. Summary	159
11. Market Networks: Matching and Intermediaries	160
11.1. Matching Markets.	160
11.1.1. Bipartite Graphs and Perfect Matchings	160
11.1.2. Valuations and Optimal Assignments	161
11.1.3. Prices and Market Equilibrium.	163
11.1.4. Properties of Market Equilibria	166
11.2. Network Models for Intermediated Markets	167
11.2.1. A Network Model of Trade	167
11.2.2. Network Structure	169
11.2.3. Prices and Flow of Goods	170
11.2.4. Payouts	172
11.2.5. Game Structure.	172
11.2.6. Equilibrium Concepts: Monopoly and Perfect Competition . . .	173
11.2.7. Additional Complex Network Effects.	176
11.3. Summary	177
12. Information Networks and the Web	178
12.1. The History of Information Networks	178
12.1.1. The Role of the Web in the Information Society	178
12.1.2. The Web and the Internet.	179
12.1.3. Citation Systems: Backward-Linking Networks	179
12.1.4. An Ancient Precedent for Information Networks	180
12.1.5. Semantic Networks.	182
12.1.6. Vannevar Bush and the Memex: A Precursor of Modern Information Networks.	183
12.2. The Evolution of the Web: 1.0, 2.0, 3.0	184
12.3. The Evolution of Web Links: Navigational Skeleton vs Transaction Engine	186

12.4. The Web as a Directed Graph	187
12.5. Link Analysis and Web Search	189
12.5.1. Link Analysis Based on Hubs and Authorities	190
12.5.2. PageRank: The Web's "Voting" System	194
12.6. The Role of Link Analysis in the Modern Web	197
13. The Anatomy of Behavioural Spread	198
13.1. Informational Influence	198
13.2. Direct Benefits: Network Effects	200
13.3. The Network Dynamics of Popularity	201
13.3.1. The "Rich Get Richer" Model	201
13.4. Behavioural Cascades in Networks	203
13.4.1. The Spread of Innovations	203
13.4.2. Behavioural Cascades as Coordination Games	204
13.4.3. Cascades and Clusters	208
13.4.4. Behavioural Cascades and Weak Ties	209
13.5. Summary and Outlook	210
14. References	211
15. Appendix A	219
16. Appendix B	236
Rezumat	245
Abstract	246
About the Author	247

1. Gráfok: kapcsolatok és struktúrák nyomában

Az utóbbi évtizedekben egyre fokozódó érdeklődés övezi a modern társadalom összetett kapcsolódását, behálózottságát. Ez a kapcsolódás számos formában jelenik meg: az internet és a világháló rohamos fejlődésében, a globális kommunikáció egyszerűsödésében, valamint abban a képességben, hogy a hírek és információk – akár csak a járványok és pénzügyi válságok – meglepően gyorsan és nagy intenzitással képesek elterjedni a világban. Ezek a jelenségek hálózatokat, ösztönző erőket és emberek csoportjainak együttes viselkedését foglalják magukban; alapjuk az összekötő kapcsolatok rendszere és az a tény, hogy minden egyes döntésünk „beláthatatlan” hatással lehet mások életére is. Ezzel a gondolattal indít David Easley és Jon Kleinberg *Networks, Crowds, and Markets: Reasoning About a Highly Connected World* című, 2010-ben megjelent könyve, és próbál belátást nyújtani abba, amit az imént beláthatatlannak neveztünk (Easley–Kleinberg 2010).

Bár ez a bevezetés nem említi közvetlenül a gráf szót, mégis a gráfelmélet lényegére irányítja a figyelmet, hiszen ez a tudományág a gráfok – azaz pontok és az ezeket összekötő élek által alkotott struktúrák – vizsgálatával foglalkozik. Ráadásul a megfogalmazott gondolatok ma is érvényesek, kiemelve a gráfelmélet megújult jelentőségét a modern társadalomban, és rámutatva arra, miként került az elmúlt évtizedekben a tudományos és technológiai érdeklődés középpontjába.

A jelen könyv is ebből a gyakorlatorientált perspektívából közelíti meg a gráfelmélet témakörét: a fogalmak száraz ismertetése helyett valós jelenségek kontextusában tárgyalja azokat, közvetlen kapcsolatot teremtve a mindennapi élet és a gyakorlati alkalmazások között. Ez a megközelítés előtérbe helyezi a gráfok algoritmikáját, vagyis a gráfelmélet gyakorlati megvalósítását, olyan módszerekkel és eljárásokkal, amelyek hatékonyan segítik valós problémák megoldását gráfok alkalmazásával. Noha a könyv több fejezetében is merít Easley és Kleinberg (2010) alpművéből, az ott tárgyalt témákat nemcsak további nézőpontokkal, új megfigyelésekkel és alkalmazásokkal gazdagítja, hanem felépítésében is eltér attól: más logika mentén szervezi az anyagot, és számos olyan kapcsolódó területet is tárgyal, amelyek az eredeti műben nem kaptak hangsúlyt.

Ez a bevezető fejezet lefekteti a gráfelmélet alapvető fogalmait, és átfogó képet ad a gráfelmélet és a társadalmi hálózatok közötti kapcsolatáról. A második fejezet az éleket helyezi a középpontba mint a gráfok kulcselemeit, és bemutatja a gyenge és erős kapcsolatok jelentőségét. A harmadik fejezet a pozitív és negatív kapcsolatok világába kalauzol, különös tekintettel a klikk fogalmára. A negyedik fejezetben a figyelem a pontokra és azok tulajdonságaira irányul. Az ötödik fejezet kifejezetten az artikulációs pontok szerepét vizsgálja. A hatodik fejezet specifikus

fastruktúrákat tárgyal, mint például a minimális feszítőfák és a minimális utak fái. A hetedik fejezet sajátos gráfokat elemmez, ezek bioinformatikai alkalmazásaira helyezve a hangsúlyt. A nyolcadik fejezet a klasszikus folyamproblémákat járja körül, előkészítve a később tárgyalt áramlási jelenségek – információ- és viselkedésterjedés – hálózatokban való értelmezését. Ezt követi egy választóvonal-fejezet, amely Guardiola Barcelonájának játékát vizsgálja hálózattudományi szempontból.

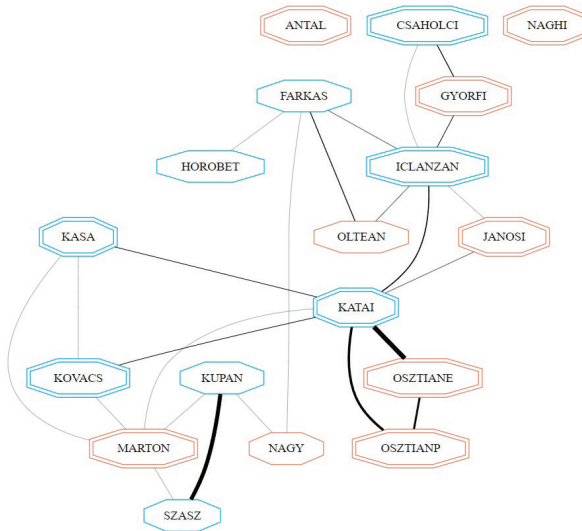
A tizedik fejezet a játékelmélet alapjaiba vezeti be az olvasót, bemutatva, hogyan értelmezhetőek stratégiai döntések hálózatok kontextusában. A tizenegyedik fejezet ezeket az elméleti fogalmakat ülteti át a gyakorlatba, különös tekintettel a gazdasági hálózatokra, például párosító piacokra és az erőforrás-allokáció kérdéseire. A tizenkettedik fejezet az információs hálózatok sűrűjébe repít, középpontba állítva a web strukturális sajátosságait a keresés, kapcsolódás és fontosság fogalmaival. Végül a tizenharmadik fejezet a viselkedés- és információterjedés hálózati mechanizmusait tárgyalja, feltárva, hogyan alakulhat ki kollektív viselkedés vagy terjedhetnek el ötletek a kapcsolatok sűrű szövedékében.

1.1. A gráfelmélet reneszánsza

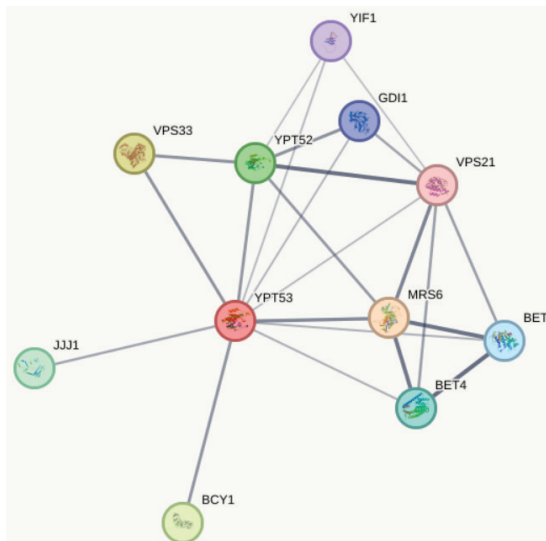
A gráfelmélet története Leonhard Euler königsbergi hídproblémájához vezethető vissza, amely megalapozta a modern hálózatelméletet és a gráfok elemzését. A 18. században született elmélet azóta meghatározó eszközzé vált a matematikán túl számos tudományterületen. Míg eredetileg elméleti kérdéseket vizsgált, napjainkban a gráfelmélet a komplex kapcsolati rendszerek – mint a társadalmi hálózatok, a biológiai folyamatok és az ökoszisztémák – megértésének alapvető eszköze lett.

A közösségimédia-platformok – mint a Facebook, az X (korábban Twitter) vagy az Instagram – gráfmodelleket alkalmaznak a felhasználók kapcsolati hálójának elemzésére, és ezek alapján jelenítenek meg személyre szabott ajánlásokat és tartalmakat. Ezekben a hálózatokban a csomópontok felhasználókat, az élek pedig a köztük lévő kapcsolatokat reprezentálják (példaként lásd az 1.1. ábra bemutatott együttműködési gráfot). A gráfelmélet segítségével olyan fontos kérdésekre adhathunk választ, mint a befolyásos felhasználók azonosítása vagy a különböző hálózati jelenségek (például a dezinformáció) terjedésének elemzése. A gráfelmélet így lehetőséget ad a globális kommunikációs mintázatok megértésére és formálására.

Az orvostudományban szintén fontos szerepet játszik a gráfelmélet (szemléltetésül lásd az 1.2. ábrát). A biológiai hálózatok elemzése, például a génhálózatok vagy a fehérjekapcsolatok vizsgálata lehetőséget nyújt a betegségek molekuláris hátterének jobb megértésére. A biológiai rendszerek bonyolult kapcsolati hálói ugyanis gyakran skálafüggetlen szerkezetet mutatnak, ami arra utal, hogy bizonyos csomópontok (gének vagy fehérjék) kiemelt szerepet játszanak. Ezek a kritikus csomópontok megfelelő célpontok lehetnek a gyógyszerfejlesztésben, mivel befolyásolásuk akár az egész rendszer működését megváltoztathatja.

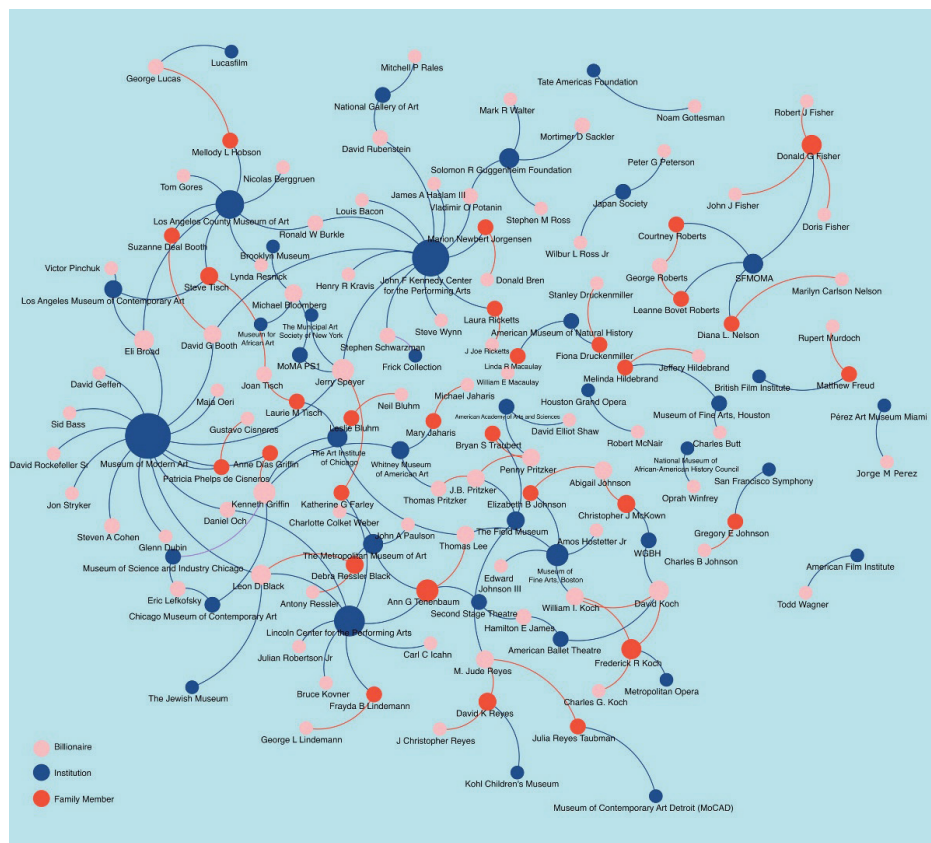


1.1. ábra. A Sapiientia EMTE Matematika–Informatika Tanszék oktatóinak együttműködési gráfja egy adott időpillanatban. A csúcsok színe a nemet, a szimpla és dupla keret a szakterületet (matematika/informatika) jelöli. Az élek vastagsága arányos a közös publikációk számával.



1.2. ábra. A *Saccharomyces cerevisiae* (sörélesztő) fehérje interakciós hálózata (STRING Consortium 2025)

A hálózatkutatás másik fontos területe a közlekedési rendszerek optimalizálása. A városi tömegközlekedési hálózatok vagy a nemzetközi légi közlekedési kapcsolatok gráfok segítségével ábrázolhatók, ahol a csomópontok a városokat vagy állomásokat, az élek pedig az ezeket összekötő útvonalakat jelölik. A gráfelmélet eszközeivel elemezhetjük az útvonalak hatékonyságát, az esetleges hálózati hibák (például egy járat kimaradása) hatását, valamint optimalizálhatjuk a forgalmi mintázatokat a hatékonyság és megbízhatóság növelése érdekében.



1.3. ábra. Művészeti intézményekhez kapcsolódó milliárdos családok hálózata. A csomópontok egyéneket és intézményeket jelölnek. A rózsaszín élek adományokat, a kék élek kuratóriumi tagságot, míg a piros élek családi kapcsolatot (milliárdosok és hozzátartozóik között) reprezentálnak (Barabási–Shekhtman 2023; Barabasi Lab 2025)

Barabási Albert László hálózati elmélete, amely bemutatja a skálafüggetlen hálózatok struktúráját, különösen érdekes színfoltot jelent a gráfelmélet modern alkalmazásai között (szemléltetésül lásd az 1.3. ábrát). Barabási és kutatótársai

kimutatták, hogy számos valós hálózat, beleértve az internetet és a sejtbiológiai rendszereket is, bizonyos csomópontok köré szerveződik, amelyek jelentős szerepet játszanak a hálózat stabilitásában és ellenálló képességében. Ez a felismerés alapvető fontosságú a nagy rendszerek biztonságos és hatékony működéséhez.

Kijelenthető, hogy a gráfelmélet reneszánszát éli, mivel egyre több tudományterület találja meg a maga sajátos alkalmazási lehetőségeit benne. Legyen szó a közösségi hálózatok vizsgálatáról, a betegségek megértéséről, a közlekedési rendszerek optimalizálásáról vagy a globális kommunikáció modellezéséről, a gráfelmélet biztos alapot nyújt a komplex rendszerek átfogó elemzéséhez. Euler öröksége így nemcsak fennmaradt, hanem napjainkra kritikus fontosságú eszközzé vált a tudomány és a technológia területén.

1.2. Hogyan guglizunk? Gráfalgoritmika a Big Data világában

A digitális korszak adatrobbanása új kihívások elé állítja az adatfeldolgozás módszereit: nemcsak az adatok mennyisége növekszik drámai mértékben, hanem az azok közötti kapcsolatok is egyre összetettebbé válnak. Ebben a környezetben válnak különösen jelentőssé a gráfelmélet algoritmikus vonatkozásai, amelyek hatékony eszköztárat kínálnak a mögöttes szerkezetek és mintázatok feltárásához. Legyen szó közösségimédia-hálózatokról, ügyfélkapcsolati rendszerekről vagy a weboldalakat összekötő hiperhivatkozások világáról, a gráfok és az ezeket elemző algoritmusok segítenek struktúrát és összefüggéseket találni az adatok sokaságában. A gráfalgoritmika tehát kulcsszerepet játszik a Big Data jelenség megértésében, rendszerezésében és gyakorlati hasznosításában.

Például a Google a gráfelmélet egyik legismertebb gyakorlati alkalmazásával, a PageRank algoritmussal hozott újat a világba, amikor 1998-ban elindította keresőmotorját. A PageRank algoritmus arra épül, hogy a weboldalakat gráfként értelmezi, ahol a csomópontok a weboldalak, az élek pedig a linkek, amelyek a weboldalakot összekötik. Az algoritmus célja, hogy meghatározza a weboldalak relevanciáját azáltal, hogy figyelembe veszi, hány másik oldal hivatkozik rájuk, és hogy ezek a hivatkozások mennyire „értékesek”. Minél több magas rangú oldal hivatkozik egy adott oldalra, annál magasabb PageRank-pontszámot kap az oldal, és annál valószínűbb, hogy a Google találatai között előkelőbb helyen jelenik meg.

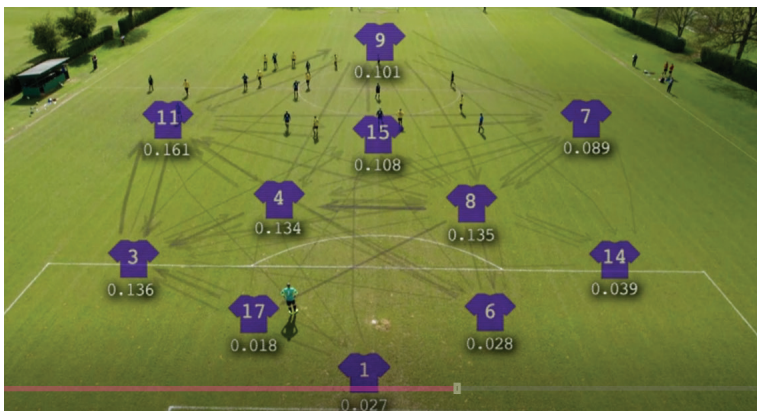
A Google nevéhez kapcsolódó egyik érdekes jelenség az angol nyelvben kialakult új ige, a „to google” (vagyis „guglizni”). Ez a kifejezés arra utal, hogy valaki információt keres az interneten, elsősorban a Google keresőmotorjának használatával. Az, hogy a „Google” márka neve köznyelvi igévé vált, egyértelműen mutatja, milyen mélyreható hatást gyakorolt a vállalat és technológiája a mindennapi életünkre. Az emberek számára a Google által biztosított információkeresési

lehetőségek olyan központi szerepet kaptak, hogy maga az információszerzés aktusa is egyet jelentett a Google használatával.

A gráfelmélet és a Google által bevezetett PageRank algoritmus tehát nemcsak a technológiai fejlődésre, hanem a nyelvre és a kultúrára is nagy hatással volt. Az, hogy a kapcsolatokon alapuló modellek segítenek a releváns információk gyors megtalálásában, továbbá hogy egy keresőmotor ilyen globális szintű hatást tudott gyakorolni, jól mutatja, milyen nagy szerepe van a gráfelméletnek a Big Data korszakában. A Google PageRank algoritmusa révén világossá vált, hogy a nagy adathalmazok közötti kapcsolatok elemzése új perspektívát nyithat a rendszerek és hálózatok megértésében, és alapvetően formálhatja a digitális kor információkezelési módszereit.

1.2.1. Gráfalgoritmus a futballpályán

A BBC algoritmusokról szóló dokumentumfilmje (BBC 2015) látványos módon mutatja be a PageRank algoritmus működését azzal, hogy egy focimeccs játékosait elemzi aszerint, milyen gyakran és milyen irányba passzolják egymásnak a labdát (1.4. ábra). A film készítői egy olyan szituációt választottak, amely könnyen megérthető a nézők számára: ahogy a weboldalak között linkek húzódnak, úgy a focipályán is kapcsolatok alakulnak ki a játékosok között a passzok révén. Azok a játékosok, akik gyakran kapják a labdát más, jelentős szerepű játékosoktól, magasabb „PageRank-pontszámmal” rendelkeznek, mivel a rendszerben központi szerepet töltenek be.



1.4. ábra. A Page Rank-algoritmus a focipályán (BBC 2015)

Ez a megközelítés nemcsak a PageRank alapötletét teszi szemléletessé, hanem azt is megmutatja, hogyan alkalmazható az algoritmus a gyakorlatban olyan területeken, amelyek első ránézésre távolinak tűnhetnek a webes keresés világától. Az algoritmus képes értékelni a csapatban betöltött szerepeket, így megmutatja, hogy a

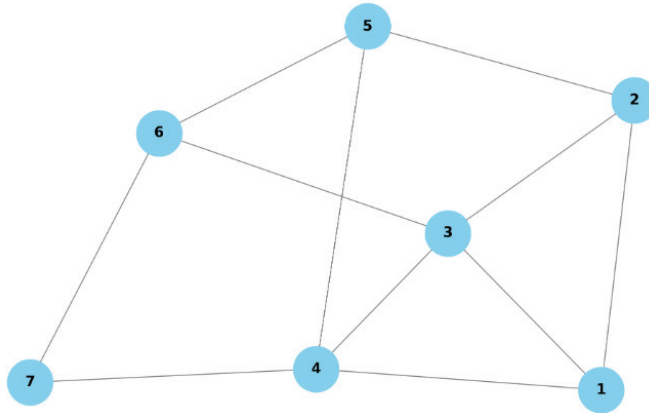
leginkább központi pozícióban lévő játékosok – akiket a legtöbb releváns passz ér – mekkora hatást gyakorolnak a játék dinamikájára. A BBC ezen innovatív szemléltetése rámutat, hogy a PageRank nemcsak a weboldalak rangsorolásában hasznos, hanem más komplex hálózatok központi elemeinek azonosítására is alkalmazható.

1.3. Gráfelméleti alapfogalmak

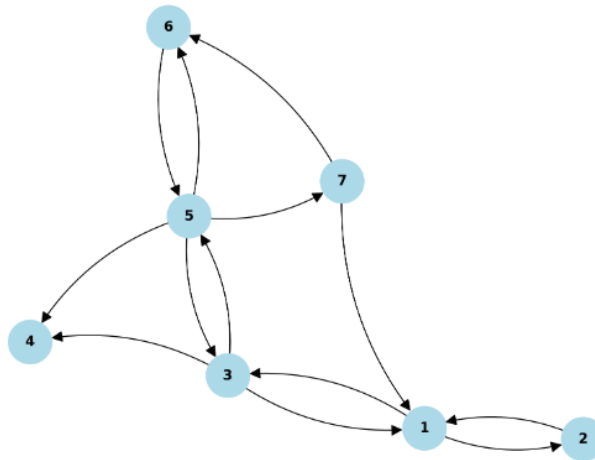
A következőkben röviden bemutatjuk a gráfelmélet alapvető fogalmait, amelyek a későbbi elemzések megértéséhez elengedhetetlenek.

A *gráf* (*irányítatlan gráf*, *nem irányított gráf*) egy matematikai struktúra, amelyet egy pontokból és az ezeket összekötő élekből álló hálózatként ábrázolhatunk. Formálisan egy gráf (G) két halmazból áll: a pontok halmazából (V , az angol „vertex” szó nyomán) és az élek halmazából (E , „edge”), amely az éleket a pontpárokon keresztül határozza meg. Egy él tehát két pont közötti kapcsolatot vagy összeköttetést jelképez. A továbbiakban a pontok számát n -nel, az élek számát pedig m -mel fogjuk jelölni.

- *Pont* (csomópont, csúcs): a gráf egy alapvető eleme, amely egy konkrét objektumot jelképez. Ahogy fennebb már láthattuk, a pontok lehetnek például városok egy térképen vagy emberek egy közösségi hálózatban. Egy közösségi hálózatban egy pont egy felhasználót jelképez, aki kapcsolatban áll más felhasználókkal.
- *Él*: a pontokat összekötő vonal, amely a közöttük lévő kapcsolatot vagy viszonyt mutatja meg. Egy közösségi hálózatban egy él a barátságot jelentheti két felhasználó között.
- *Irányítatlan gráf* (1.5. ábra): az élek nem rendelkeznek iránnyal, tehát a kapcsolat mindkét irányban egyenértékű. Például egy közlekedési hálózat, ahol az utak kétirányúak, vagyis bármely két város között szabadon lehet közlekedni oda-vissza. A szociális hálókbán a baráti kapcsolatokat általában irányítatlan gráf modellezi, mivel a barátság jellemzően kölcsönös kapcsolat: ha valaki a másik barátja, akkor ez fordítva is igaz.
- *Irányított gráf* (1.6. ábra): az éleknek irányuk van, ami azt jelenti, hogy egy pontból csak meghatározott irányba lehet eljutni egy másik pontba. Egy irányított gráf jól ábrázolhatja egy weboldal linkrendszerét, ahol az egyik oldalról át lehet navigálni egy másikra. A szerelmi kapcsolatok modellezésére is előnyösebb lehet az irányított gráf, mert a valóságban a romantikus kapcsolatok gyakran nem teljesen kölcsönösek vagy egyenértékűek. Az irányított gráf lehetőséget ad a kapcsolatok aszimmetriájának kifejezésére (egyoldalú érzelmek, különböző érzelmi intenzitás, különböző kapcsolati státusz, kezdeményezés iránya stb.). A továbbiakban, ha csak *gráfot* írunk, akkor az mindig *nem irányított* gráfot jelent.



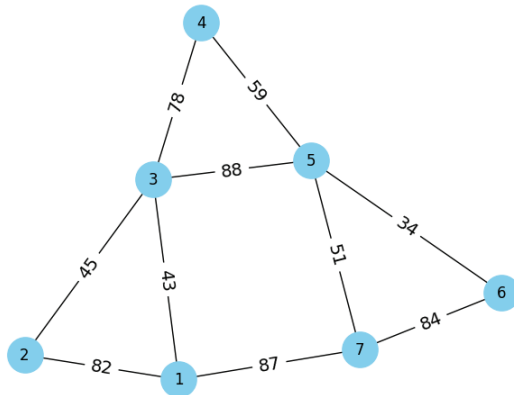
1.5. ábra. Egy $n=7$ pontú és $m=11$ élű irányítatlan gráf: $G(V,E)$; $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}$



1.6. ábra. Irányított gráf: $G(V,E)$; $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $E = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 5), (3, 4), (5, 3), (5, 6), (5, 7), (5, 4), (6, 5), (7, 6), (7, 1)\}$

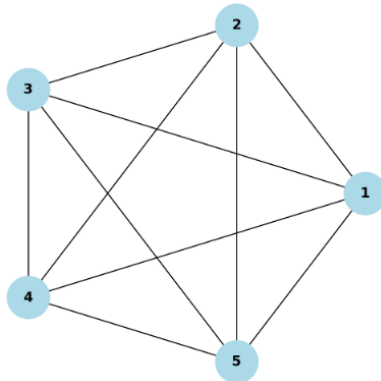
– *Egyszerű gráf:* olyan gráf, amelyben nincs több él ugyanazon két pont között, és nincsenek hurokélek, vagyis egy pontból önmagába mutató élek. Egy osztály tanulói közötti barátsági hálózat egyszerű gráf lehet, ahol minden tanuló legfeljebb egy éllel (barátsággal) kapcsolódik egy másik tanulóhoz.

- *Multigráf*: olyan gráf, amely tartalmazhat több élt ugyanazon pontok között (párhuzamos élek) vagy hurokél(eke)t (kezdőpontjuk és végpontjuk ugyanaz). Például egy város közlekedési hálózata, ahol több buszútvonal is vezethet két állomás között.
- *Súlyozott gráf* (1.7. ábra): az élekhez hozzá van rendelve egy súlyérték, ami egy adott kapcsolat intenzitását vagy költségét jelképezi. Egy térképen egy-egy út hosszát, költségét vagy időigényét mutathatja az élhez rendelt súly.

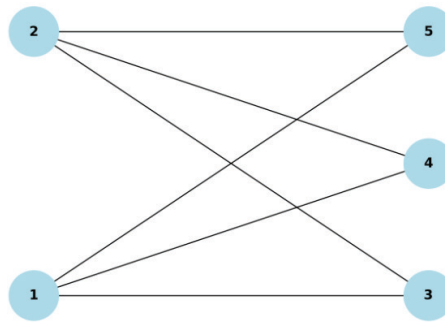


1.7. ábra. Súlyozott, irányítatlan gráf

- *Teljes gráf* (1.8. ábra): olyan egyszerű gráf, amelyben minden egyes csúcs összeköttetésben van az összes többi csúccsal. Ha egy irányítatlan teljes gráfnak n csúcsa van, akkor az éleinek száma: $n(n-1)/2$. A teljes gráfokat általában K_n -nel jelölik, ahol n a csúcsok száma.

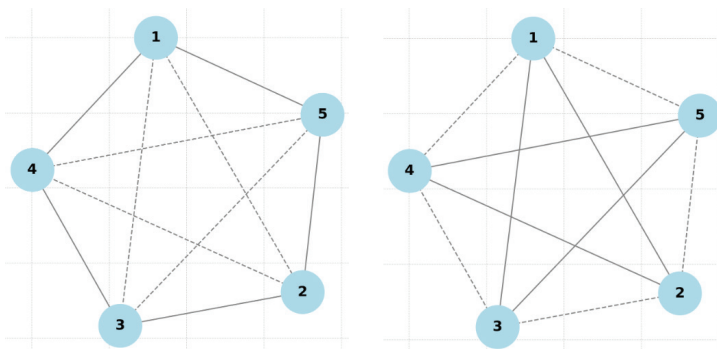
1.8. ábra. A K_5 gráf (ötpon t ű teljes gráf)

- A *páros gráf* olyan egyszerű gráf, amelyben a csúcsok halmaza két diszjunkt részhalmazra osztható úgy, hogy minden él egyik végpontja az egyik, a másik végpontja pedig a másik részhalmazba tartozik. A teljes páros gráfokat $K_{p,q}$ -val szokás jelölni, ahol p és q a két halmaz elemszáma (1.9. ábra). Példa páros gráfra a munkahelyi projektcsapatok rendszere, ahol két elkülönült csoport van: az alkalmazottak és a projektek. Az élek azok között a munkavállalók és projektek között jönnek létre, amelyekben az alkalmazottak részt vesznek.



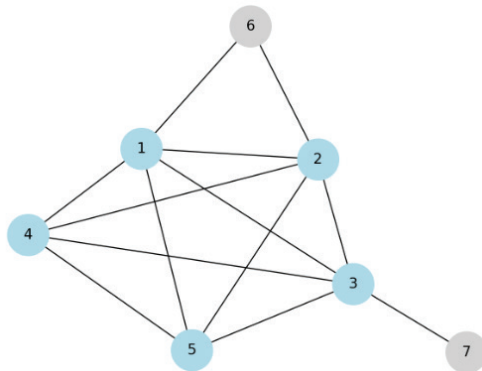
1.9. ábra. A $K_{2,3}$ gráf (teljes páros gráf)

- *Komplementer gráf* (1.10. ábra): egy adott gráf (G) kiegészítő gráfja, amelyet úgy kapunk meg, hogy a gráf csúcsainak halmaza ugyanaz marad, de azok az élek, amelyek G -ben vannak, kimaradnak, míg azok, amelyek G -ben nincsenek, bekerülnek.



1.10. ábra. Komplementer gráfok K_5 -re nézve. A folytonos vonalak képezte gráfra nézve, a szaggatott vonalak gráfja jelenti a komplementer gráfot

- *Részgráf*: a G gráf részgráfja olyan gráf, melynek csúcs- és élhalmazai részhalmazai G -éinek.
- *Feszítő és feszített részgráf*: *feszítő részgráfot* úgy kapunk, hogy csak éleket törölünk a gráfból (a pontok halmaza ugyanaz marad). *Feszített részgráf* az, amelyet pontok és a rájuk illeszkedő élek törlésével nyerünk (kizárólag olyan éleket törölünk, amelyek a törölt pontokra illeszkednek). A feszített részgráf tehát az adott csúcshalmazra „feszített” kapcsolatokat foglalja magában, az élek teljes halmaza alapján.
- Két gráf akkor *izomorf*, ha létezik köztük egy egyértelmű megfeleltetés a csúcsok között, amely megőrzi az éleket. Következmény: Az izomorf gráfok szerkezete azonos, bár vizuálisan különbözőnek tűnhetnek.
- A *klika* olyan részgráfot jelent, amelyben minden csúcs össze van kötve minden más csúccsal, azaz teljes részgráfnak tekinthető (1.11. ábra). A klikkek jelentőségét különösen kiemeli a fogalomnak a szociális hálók területére való levetítése, mivel egy olyan szociális csoportot reprezentál, amelyben az összetartozás, a lojalitás és gyakran az exkluzivitás jellemző a tagok között. Ezek a csoportok a tagjaik számára erős kohéziót biztosítanak, miközben a kívülállók számára rendszerint nehezen megközelíthetők vagy elérhetők maradnak.



1.11. ábra. Az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ pontok a köztük futó élekkel együtt klikket alkotnak

- *Fokszám*: egy pontból kiinduló élek száma. Irányított gráf esetében különbséget teszünk a bejövő és a kimenő élek száma között. A K_n -ben minden pont fokszáma $n-1$. Ha egy pont fokszáma 0, akkor *izolált pontnak* nevezzük.
- A forrás és a nyelő fogalma az irányított gráfok esetében játszik fontos szerepet. Egy gráfban *forrásnak* nevezünk egy olyan csomópontot, amelyből csak kimenő élek indulnak (nincs bejövő éle). *Nyelő* az a csomópont, amelybe csak bejövő élek vezetnek (nincsenek kimenő élei). A *szuperforrás* egy olyan csomópont, amelyből élek indulnak a gráf minden egyéb csomópontja felé. *Szupernyelőnek* nevezünk egy olyan csomópontot, amelybe minden egyéb csomópontból élek vezetnek.

- *Út, vonal, séta*: *útnak* nevezünk egy olyan él-, illetve pontsorozatot, amely mentén nem ismétlődnek pontok. Ha a kezdőpont egybeesik a végponttal, akkor *körről* beszélünk. A *vonat* sajátossága, hogy élek nem ismétlődnek rajta. *Zárt vonalról* beszélünk akkor, ha a kezdőpont megegyezik a végponttal. A *séta* a pontok és élek egy olyan sorozata, ahol megengedett, hogy egy pontot vagy élt többször is bejárjunk. Példa körkapcsolatra egy szociális hálóban: a feleségem unokatestvérének egykori iskolatársa a testvérem munkatársa.
- Egy gráfban a *legrövidebb út* két csúcs között azon útvonal, amelynek teljes hossza minimális. Az út hosszát az élsúlyok összege adja, súlyozatlan gráf esetén pedig az élek száma. A legrövidebb út hossza felfogható a két csúcs közötti *távolságként*. Ha a két csúcs azonos, a távolságuk 0. Ha nincs köztük összeköttetés, a távolságuk végtelennek tekintendő.
- *Zárt Euler-vonal*: olyan vonal, amely minden élen pontosan egyszer halad át, és a kiindulási ponthoz visszatér. Például egy postás, aki minden utcában pontosan egyszer kézbesít, majd visszatér a kiindulási pontra, zárt Euler-vonalat jár be. Ha egy gráfban van zárt Euler-vonal, akkor Euler-gráfnak nevezzük. A K_5 Euler-gráfnak számít.
- *Hamilton-kör*: olyan kör, amely minden pontot pontosan egyszer érint, majd a kezdőpontban ér véget. Például egy turista, aki minden nevezetiséget egyszer látogat meg, majd visszatér a szállására, Hamilton-kört jár be. Ha egy gráfban van Hamilton-kör, akkor Hamilton-gráfnak nevezzük. A K_5 Hamilton-gráfnak is számít.
- *Összefüggőség*: egy irányítatlan gráf *összefüggő*, ha bármely két pont között létezik út. Egy irányított gráf akkor *erősen összefüggő*, ha bármely két pont között mindkét irányban létezik út. A gráf különálló összefüggő részeit, amelyek között nincs él, *összefüggő komponenseknek* nevezzük.
- A *híd* (elvágo él) olyan él egy gráfban, amelynek eltávolítása a gráf összefüggőségét megváltoztatja. Egy híd eltávolítása után a gráf új összefüggő komponensekre esik szét. Az *artikulációs pont* (elvágo pont) olyan csúcs egy gráfban, amelynek eltávolítása (a hozzá kapcsolódó élekkel együtt) az eredeti gráfot több, egymástól elkülönülő összefüggő komponensre bontja. A hidak és az artikulációs pontok kritikus szerepet játszanak a gráf összefüggőségében, mivel nélkülük a gráf „szétesik”.
- *Fa*: összefüggő gráf, amely nem tartalmaz köröket. A fában bármely két pont között pontosan egy út vezet. Ha csak az a feltétel teljesül, hogy nem tartalmaz köröket, akkor *erdőről* beszélünk. A fa 1-fokszámú éleit leveleknek is szokás nevezni.
- *Feszítő fa*: olyan részgráf, amely a gráf minden csúcsát tartalmazza és fa. Ez a gráfkapcsolatok minimális halmaza, amely megőrzi az összefüggőséget.
- Egy *gyökeres fa* egy kijelölt csúccsal rendelkezik (a gyökérrel), amelyből minden más csúcs elérhető egy irányított útvonalon. A gyökeres fa szintjei

a gyökértől számított távolságot jelölik; a fa magassága pedig a leghosszabb út a gyökértől egy levélhez.

Természetesen a gráfok algoritmikai elemzése feltételezi azok ábrázolását a számítógép memóriájában. Az A függelék 1. pontja ehhez nyújt részletes ismertetést.

1.4. A gráfok néhány alapvető tulajdonsága

Alább felsoroljuk a gráfok és fák néhány alapvető tulajdonságát, amelyek segítenek megérteni struktúrájukat és felhasználási lehetőségeiket:

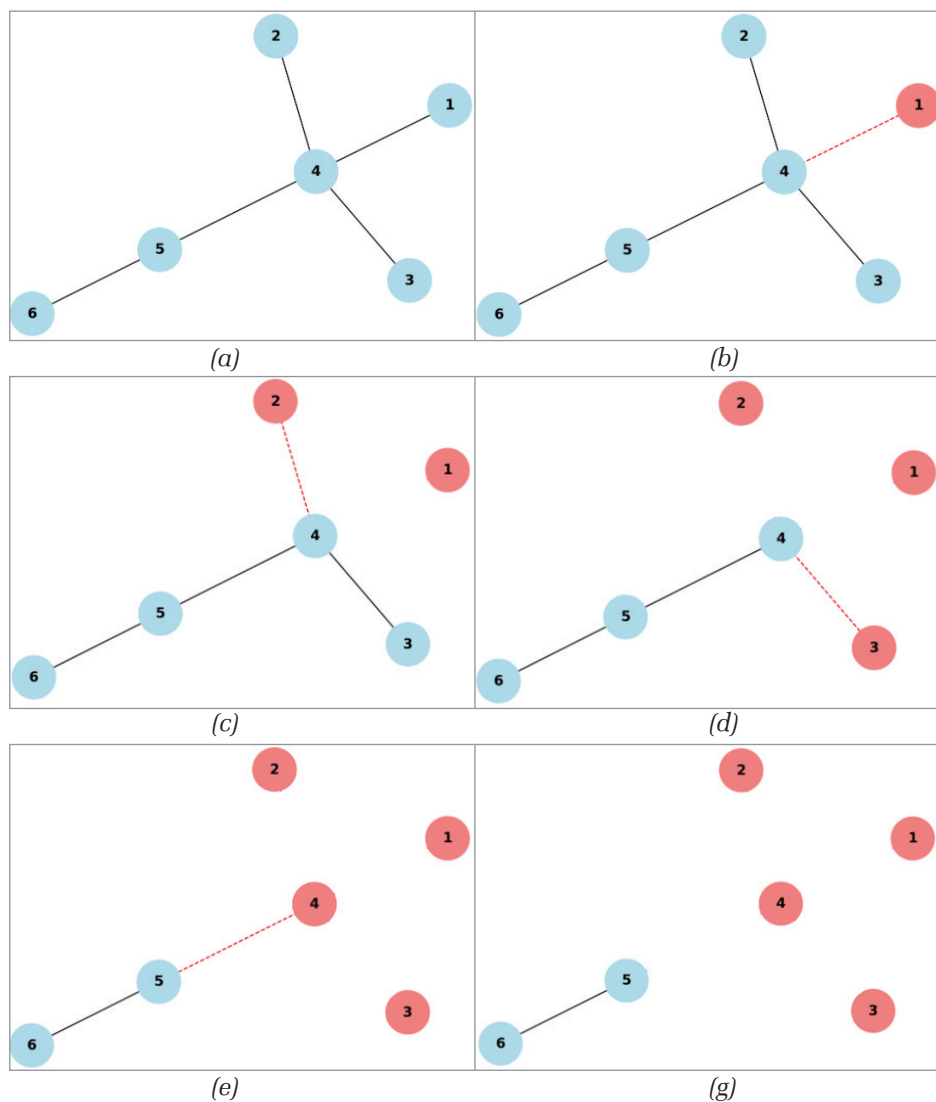
- T_1 : egy gráf minden csúcsa fokszámainak összegével kétszer kapjuk meg a gráf éleinek számát. Következmény: egy gráfban a páratlan fokszámú csúcsok száma mindig páros.
- T_2 : egy összefüggő, irányítatlan gráf pontosan akkor rendelkezik zárt Euler-vonallal, ha minden csúcsának fokszáma páros. Következmény: ha egy gráfnak két páratlan fokszámú csúcsa van, akkor található benne Euler-vonal, amely nem zárt, hanem a két páratlan fokszámú csúcs között halad.
- T_3 : minden n csúcsú fában pontosan $n-1$ él van. Minden n pontú k komponensű erdő éleinek száma $n-k$.
- T_4 : egy fa, amelyben legalább egy él van, legalább két levéllel rendelkezik.
- T_5 (Cayley-tétel): a különböző n pontú fák száma n^{n-2} .

Matematikai szempontból az összes fenti tulajdonság tételként értelmezhető. Itt azonban a tulajdonság kifejezést használjuk, mivel ez a könyv a gráfelméleti fogalmak gyakorlati alkalmazhatóságára helyezi a hangsúlyt, és a gráfok algoritmikus kezelésére fókuszál, így inkább egy informatikai szemléletet képvisel. Ezt jól illusztrálja a következő példa is, amely egy tétel bizonyítását úgymond algoritmikus megközelítéssel mutatja be, és kiemeli annak gyakorlati jelentőségét.

1.4.1. Prüfer-kód

A Cayley-tétel bizonyítása szorosan összefügg a Prüfer-kód fogalmával. Ennek a kódolási és dekódolási eljárásnak a bemutatásával bevezetjük a gráfok algoritmikájának fogalmát is. A Cayley-tétel megadja, hányféleképpen kapcsolható össze n személy egy minimális összefüggő struktúrává, vagyis fává. A Prüfer-kód pedig egy hatékony módszert kínál e fák egyedi generálására és reprezentációjára is, így fontos eszközt jelent a különféle gráfstruktúrák kezelése terén.

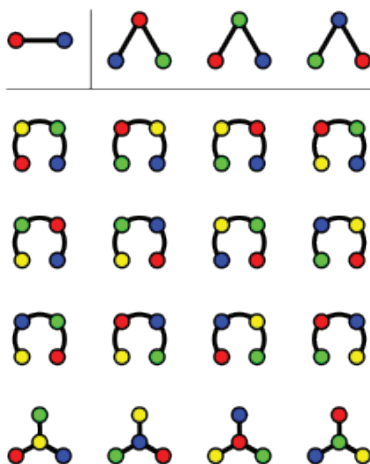
A Prüfer-kód egy olyan módszer, amely lehetővé teszi, hogy egy n csúcsú fát egy egyedi sorozattal kódoljunk. A Prüfer-kód segít egyszerűen és hatékonyan reprezentálni a fák szerkezetét, és minden egyedi Prüfer-kód egyedi fát jelöl. Egy n csúcsú fa Prüfer-kódja pontosan $n-2$ hosszúságú. Az eljárás során a leveleket iteratívan eltávolítjuk, és ezzel egyedi kódot hozunk létre. Egy adott Prüfer-kódból egyértelműen rekonstruálható az eredeti fa.



1.12. ábra. Adott 6-pontú fa Prüfer-kódjának generálása 4 lépésben: (a) a kódolandó fa; (b) töröljük az 1-es levelet, leírjuk a 4-est; (c) töröljük az 2-es levelet, leírjuk a 4-est; (d) töröljük a 3-as levelet, leírjuk a 4-est; (e) töröljük a 4-es levelet, leírjuk az 5-öst; (g) a maradék, 2-csomópontú fa. A kapott kód: 4,4,4,5.

Prüfer-kód generálása egy fára.

- Kezdetben a kód üres.
- Válasszuk ki a legkisebb címkéjű levelet a fából.
- Adjuk hozzá a kódhoz azt a csúcsot, amelyhez ez a levél kapcsolódik.
- Távolítsuk el a levelet a fából.
- Ismételjük meg a folyamatot, amíg csak két csúcs marad a fán. Az így kapott sorozat a fa Prüfer-kódja. (Ha az utolsó élt, azaz levelet is eltávolítanánk, akkor e ráadás lépésben minden n csúcsú fa esetén ugyanazt az n értéket adnánk hozzá a kód végéhez, ami nyilvánvalóan nem hordozna releváns információt.)



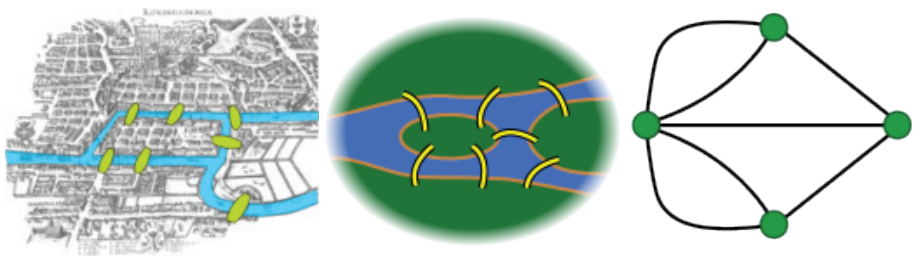
1.13. ábra. Az összes 2-, 3- és 4-pontú fa (Cayley-formula, 2025)

Mivel n^{n-2} darab $n-2$ hosszú kód létezik, ezért az n pontú különböző fák száma ugyanennyi. Az 1.12. ábra a kódolás folyamatát mutatja be egy 5-pontú fára. Hogy a kapott számsorozat egy tényleges kód, abból is látszik, hogy egyértelműen dekódolható. A visszafejtés alapötlete, hogy elemről elemre haladva a kódban, meghatározzuk, hogy melyik csomópontot vágtuk le az aktuális elemről: a legkisebb címkéjűt azok közül, amelyek nem lettek már levágva, és amelyekről nem kellett később levágnunk csomópontot vagy csomópontokat. Minden így kapott csomópontpár a fa egy-egy élét adja meg. Az utolsó él magától értetődően adódik. Ha előállítjuk az összes $n-2$ hosszúságú kódot, amelyekben az $1, 2, \dots, n$ számok szerepelhetnek minden pozícióban, és ezeket dekódoljuk a Prüfer-kódoknak megfelelően, akkor megkapjuk az összes lehetséges n -pontú fát. Az 1.13. ábra a 2-, 3- és 4-pontú különböző fákat mutatja be. További implementációs részletek végett lásd a B függelék 1. pontját.

1.5. Euler gráfja nem bizonyult eulerinek

A gráfelméleti fogalmak bemutatásakor két fontos típushoz kapcsoltunk nevet: az Euler- és Hamilton-gráfokhoz. Ez jól szemlélteti, hogyan nyúlnak vissza a tudományterület gyökerei a régmúltba, és hogyan találkozunk itt a múlt, a jelen és a jövő. E gráfok például évszázadok óta ismert matematikai kihívásokat képviselnek, ugyanakkor alapvető szerepet játszanak a modern alkalmazásokban is. A 7. fejezet ezek mentén vezeti be az olvasót a genetikai kutatások világába, bemutatva, hogy a gráfelmélet hogyan segíti az innovációt olyan élvonalbeli területeken, mint a biológia és az orvostudomány.

Egyelőre egy kis történelmi kószolással vizsgáljuk meg a königsbergi hídproblémaként elhíresült problémát, amelyet Leonhard Euler a 18. században vizsgált meg, és amely a gráfelmélet alapjait fektette le. Königsberg (ma Kaliningrád, Oroszország) városában hét híd kötötte össze a Pregel folyó két partját és két szigetét. A lakosokat az a kérdés foglalkoztatta, hogy vajon lehet-e egy olyan sétát tenni a városban, amely során minden hídon pontosan egyszer haladnak át, és visszatérnek kiindulási pontjukhoz.



1.14. ábra. A königsbergi hidak problémájának gráfos megközelítése (Königsbergi hidak problémája, 2025)

Euler a várost és a hidakat gráffal modellezte, ahol a csomópontok a városrészeket (a két szigetet és a két partot) jelképezik (1.14. ábra). Az élek a hidakat reprezentálják, amelyek összeköttetést biztosítanak a városrészek között. Az így kapott gráf tulajdonságainak vizsgálata során Euler felfedezte, hogy a probléma megoldása az élek és a csúcsok fokszámainak elemzését igényli. Euler bebizonyította, hogy a szóban forgó sétára csak akkor van lehetőség, ha a gráf összefüggő, és minden csúcs páros fokszámú (1.4 szakasz, T_2 tétel).

A königsbergi gráf esetében azonban négy csúcs volt, és mindegyik csúcshoz páratlan számú él kapcsolódott. Ez azt jelentette, hogy nem létezik olyan útvonal, amely minden hídon pontosan egyszer halad át, és ugyanabba a pontba tér vissza, ahonnan indult. Mai, gráfelméleti nyelvezettel úgy is fogalmazhatnánk, hogy az

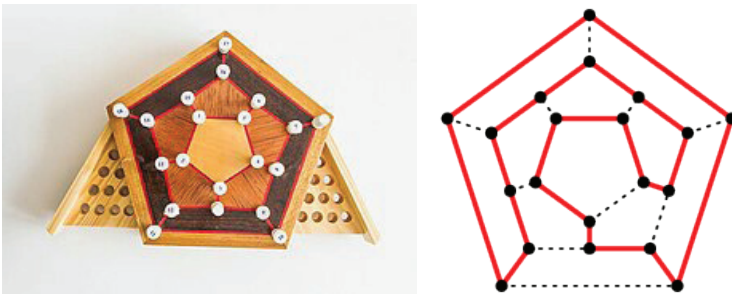
Euler által vizsgált königsbergi gráf nem tartalmaz zárt Euler-vonalat, azaz nem bizonyult eulerinek.

Ezzel szemben a 7. fejezetben tárgyalt genomszekvenálási gráfok jellemzően olyan szerkezetűek, hogy teljesül bennük az Euler-vonal létezésének feltétele. Amint látni fogjuk, az Euler-vonal algoritmus kulcsfontosságú szerepet játszik a genom feltérképezésében, mivel hatékonyan képes rekonstruálni a DNS-szekvenciát az átfedő szakaszból. Ez a megközelítés gyorsabb és kezelhetőbb, mint a Hamilton-út alapú módszerek, és jelentősen növeli a szekvenálás hatékonyságát – ami alapvető fontosságú a modern biológiai kutatásokban.

1.6. Hamilton és az utazó ügynök probléma

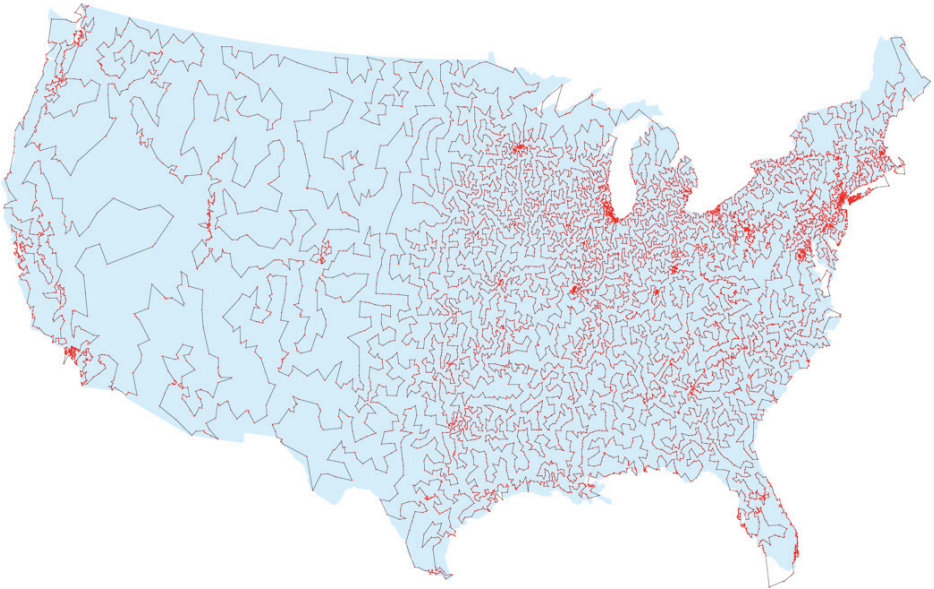
A Hamilton-gráf fogalma a 19. századból származik, és William Rowan Hamilton ír matematikus nevéhez kötődik. Hamilton a gráfelmélet egyik kulcsproblémájával foglalkozott, amely az úgynevezett Hamilton-kör megtalálása: olyan zárt út keresése a gráfban, amely minden csúcsot pontosan egyszer érint, és visszatér a kiindulási ponthoz.

Hamilton egy „Icosian” nevű társasjátékot alkotott, amely egy huszáros mozgást (mint a sakktábla huszárlépése) szimulált egy dodekaéderen, és amelynek célja az volt, hogy a játékos egy zárt útvonalat találjon, amely minden csúcsot pontosan egyszer érint (1.15. ábra). Ez a játék bemutatta a Hamilton-kör alap gondolatát, és megalapozta a Hamilton-gráf fogalmát.



1.15. ábra. A Hamilton alkotta „Icosian” játék (Icosian-game 2025)

A Hamilton-kör fogalma közvetve az utazó ügynök probléma révén vált híressé. Az utazó ügynök probléma egy optimalizálási probléma, amelyben egy kereskedőnek minden várost egyszer meg kell látogatnia, és vissza kell térnie a kiindulási városba, miközben az út teljes hosszát minimalizálni kell (1.16. ábra). Az utazó ügynök probléma tehát nemcsak a Hamilton-kör követelményét tartalmazza, hanem a legrövidebb ilyen kör keresését is.



1.16. ábra. Az Amerikai Egyesült Államok összefüggő területén található összes, legalább 500 fős (1998-as adat) városon áthaladó legrövidebb utazóügynök-útvonal, összesen 13 509 településsel (Browne 2013)

Ez a probléma rendkívül fontos szerepet játszik a számítástechnikában és az optimalizálásban, mivel gyorsan megoldhatatlanná válik nagyobb csúcsszámok esetén – nem véletlenül tartják az egyik legismertebb és legtanulmányozottabb NP-teljes problémának (lásd lentebb). Az utazó ügynök problémával kapcsolatos kutatások sok fontos eredményt és algoritmust inspiráltak a gráfelméletben, a számítógépes tudományban és a mesterséges intelligenciában.

1.6.1. Gráfok és algoritmusok bonyolultsága: a Hamilton-kör mint NP-útikalauz

Amikor komplex rendszerekről beszélünk, gyakran jutnak eszünkbe bonyolult hálózatok. Ám nemcsak a hálózatok lehetnek komplexek, hanem az is, ahogyan feldolgozzuk őket – vagyis az őket kezelő algoritmusok bonyolultsága is kulcskérdés. A Hamilton-kör probléma kiváló példa erre a kettősségre: egyszerre szól egy gráf szerkezeti tulajdonságáról és annak kiszámíthatóságáról. A kérdés, hogy létezik-e olyan kör, amely minden csúcst pontosan egyszer érint, elsőre ártatlannak tűnik, mégis az egyik legismertebb NP-teljes problémává vált. Ezen keresztül bevezetést nyerhetünk a P, NP, NP-teljes és NP-nehéz fogalmak világába – vagyis abba, hogy nemcsak az számít, hogy mit kérdezzünk egy hálózatról, hanem az is,

hogy milyen áron tudjuk meg a választ (Garey–Johnson 1979). E négy fogalom segít megérteni, hogy egy probléma megoldása mennyire „könnyű” vagy „nehéz” algoritmikusan – és mit is jelent ez valójában.

A *P osztályba* azok a problémák tartoznak, amelyekre léteznek hatékony, azaz polinomiális időben működő algoritmusok. Ezek a problémák jól „kezelhetők”, gyorsan megoldhatók.

Az *NP osztály* (azaz: nemdeterminisztikus polinomiális idő) olyan *eldöntési* problémákat foglal magában, amelyekre – ha valaki megad egy jelölt megoldást – azt gyorsan, polinomiális idő alatt ellenőrizni tudjuk. Ha például valaki bemutat egy utat, amely minden csúcstól egyszer érint, könnyen leellenőrizhető, hogy valóban Hamilton-kör-e.

Az *NP-teljes* problémák olyan *eldöntési* problémák, amelyek egyrészt az NP osztályba tartoznak (vagyis a megoldásaik polinomiális időben ellenőrizhetők), másrészt pedig bármely más NP-probléma polinomiális időben redukálható rájuk. Ez azt jelenti, hogy ezek a problémák a legnehezebbek az NP osztályon belül: ha egy NP-teljes problémát hatékonyan meg tudunk oldani, akkor az összes NP-probléma is hatékonyan megoldható. Más szóval, ha létezne hatékony algoritmus egy NP-teljes problémára, akkor az NP osztály azonos lenne a P osztállyal, azaz minden NP-beli probléma polinom időben megoldható lenne.

Az *NP-nehéz* problémák olyan problémák, amelyekre minden NP-probléma polinomiális időben redukálható, tehát legalább olyan nehezek, mint az NP osztály bármely problémája. Ugyanakkor az NP-nehéz problémáknak nem kell az NP-ben lenniük – nem feltétel, hogy eldöntési problémák legyenek, vagy hogy a megoldásaik polinomiális időben ellenőrizhetők legyenek.

A Hamilton-kör problémának három alapvető változata különböztethető meg számítási nehézség szerint. Az *ellenőrzési változat* esetén adott egy gráf és egy kör, és azt kell eldönteni, hogy a megadott kör Hamilton-kör-e; ez a probléma polinomiális időben megoldható, tehát a P osztályba tartozik. Az *eldöntési változat* arra a kérdésre keresi a választ, hogy létezik-e Hamilton-kör az adott gráfban; ez a probléma NP-teljes, mivel egy lehetséges megoldás gyorsan ellenőrizhető, de a hatékony megoldhatósága nem ismert. A *keresési változat* célja egy konkrét Hamilton-kör megtalálása; ez NP-nehéz, mert legalább olyan nehéz, mint az NP-teljes döntési változat, és nem feltétlenül tartozik az NP osztályba, mivel nem eldöntési probléma.

Az algoritmusbonyolultság talán legmélyebb kérdése, hogy vajon az NP osztályba tartozó problémák megoldhatók-e, eldönthetők-e hatékonyan – másként fogalmazva: $P = NP$ igaz-e. A Millennium Prize Problems részeként a Clay Mathematics Institute 2000-ben 1 millió dolláros díjat ajánlott fel a P- és NP-kérdés megoldásáért. A Hamilton-kör probléma szorosan kapcsolódik ehhez: ha valaki találna egy hatékony, polinomiális idejű algoritmust a Hamilton-kör létezésének problémájára, azzal azt is bizonyítaná, hogy $P = NP$. Ennek következtében a Hamilton-kör probléma megoldása nemcsak a gráfelméletben, hanem az egész számítástudományban

óriási áttörést jelentene – és a Millennium-problémák egyikének megoldásával a felfedezője 1 millió dolláros díjat nyerne.

E fogalmak tehát nem csupán elméleti jelentőséggel bírnak, hanem azt is meghatározzák, hogy egy valós hálózati probléma esetén milyen módszerekben érdemes gondolkodnunk: gyors algoritmusban, közelítő eljárásban vagy akár heurisztikában. A Hamilton-kör így valóban útikalauzzá válik – nemcsak a gráfok világában, hanem a számításelmélet rejtett ösvényein is. További részletek és egy kifejező ábra végett lásd a (Kátai 2008) tankönyv *A* függelékét.

1.7. Nagy valós gráfok

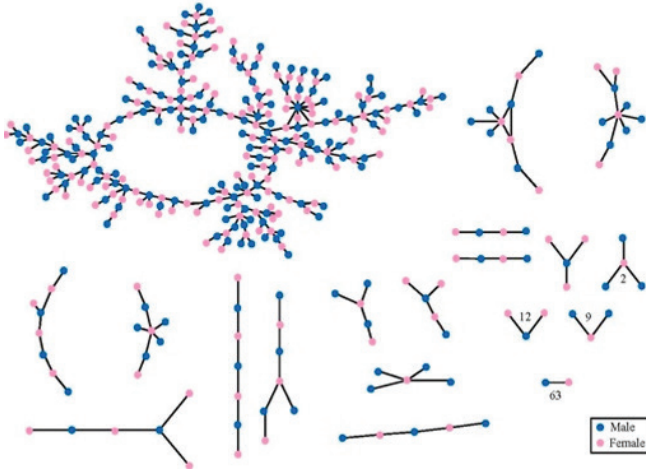
A gráfelmélet 20–21. századi alkalmazása a nagy és összetett hálózatok elemzésének szükségességét hozta magával, hiszen napjainkban, ahogy már utaltunk is rá, számos rendszert – a társadalmi hálózatoktól a biológiai hálózatokon át az internet szerkezetéig – rengeteg összekapcsolódó elem alkot. Az alábbiakban két meglepő tulajdonságát mutatjuk be a nagy valós gráfoknak: a nagy összefüggő komponens jelenséget és a kisvilág-tulajdonságot. A nagy összefüggő komponens arra utal, hogy a hálózat nagy része egyetlen, szorosan kapcsolódó egységet alkot, míg a kisvilág-tulajdonság azt jelenti, hogy a hálózat bármely két pontja között viszonylag kis számú lépés van. Ezek a jellemzők alapvetőek a komplex hálózatok struktúrájának és működésének megértésében, és fontos következményekkel járnak a gyakorlati alkalmazásokra nézve.

1.7.1. Nagy összefüggő komponens jelensége

Egy nagy összefüggő komponens olyan hatalmas, összekapcsolt részhálózat, amely az összes csúcs jelentős részét magában foglalja, gyakran egymástól távol eső, látszólag különálló csoportokat vagy régiókat összekötve. Például egy hipotetikus globális barátsághálózatban, bár nem mindenki kapcsolódik közvetlenül egymáshoz, a legtöbb ember egyetlen nagy komponens része, amely különböző kultúrákat és háttérű embereket kapcsol össze, lefedve ezzel a világ népességének jelentős részét.

A nagy összefüggő komponensekkel rendelkező hálózatok egyik jellemzője, hogy szinte mindig csak egy ilyen komponensük van, hiszen egyetlen kapcsolat két nagy csoport között elegendő ahhoz, hogy egyesítse ezeket. Ha viszont több nagy komponens tudna egymástól függetlenül kialakulni és hosszú ideig elkülönülten fennmaradni, az esetleges későbbi összekapcsolódásuk súlyos mellékhatásokkal járhat – hiszen ilyenkor hirtelen találkoznak olyan rendszerek, amelyek addig teljesen eltérő fejlődési pályát jártak be, és nem volt idejük fokozatosan alkalmazkodni egymáshoz. Történelmi példa erre a Kolumbusz előtti Amerika és az eurázsiai civilizációk esete, amelyek sokáig különálló nagy komponensekként léteztek.

Ezeknek az egyesülése az európai felfedezések során drámai, gyakran katasztrofális következményekkel járt – például a betegségek gyors és pusztító terjedése révén.



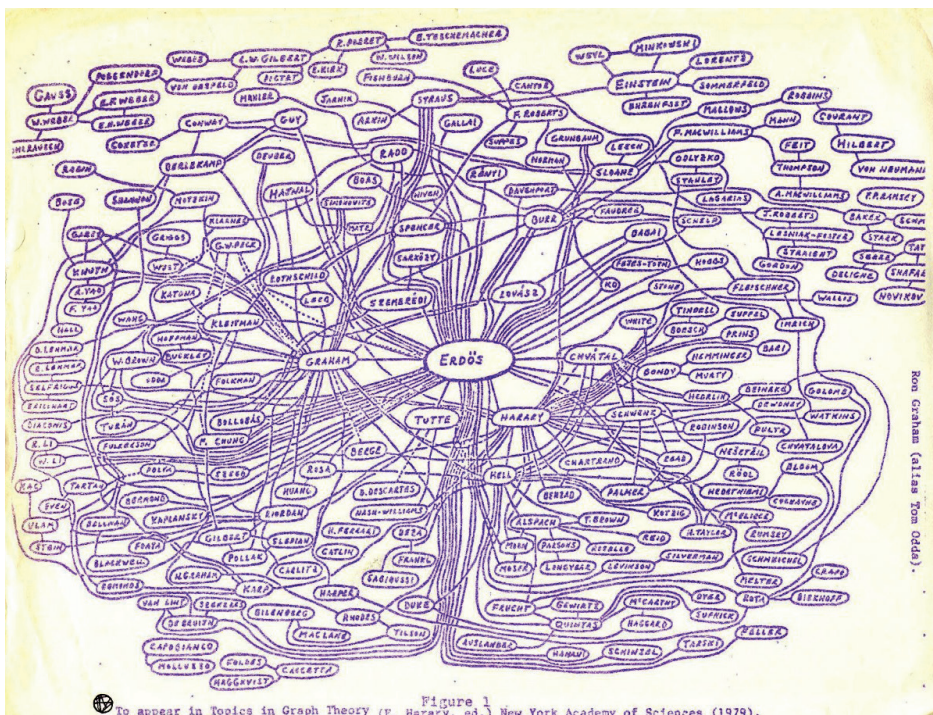
1.17. ábra. *Romantikus kapcsolatok hálózata egy amerikai középiskolában (Bearman–Moody–Stovel 2004)*

A nagy összefüggő komponensek kisebb léptékben is jelentősek. Egy amerikai középiskolában végzett kutatásban (Bearman–Moody–Stovel 2004), amely egy 18 hónapos időszak alatti romantikus kapcsolatokat vizsgálta, egyetlen nagy komponens alakult ki, amely számos tanulót közvetetten összekapcsolt (1.17. ábra). Ennek a struktúrának komoly hatása lehet a betegségek terjedésére, mivel olyan diákok is részesei lehetnek egy kiterjedt átviteli láncnak, akiknek csak kevés közvetlen kapcsolatuk volt. A nagy összefüggő komponensek tehát olyan láthatatlan, ám jelentős társadalmi struktúrákat alkotnak, amelyek egyéni kapcsolatokból épülnek fel, és valós következményekkel járnak hálózati szinten mind nagyobb, mind kisebb léptékben.

1.7.2. Kisvilág-tulajdonság

A kisvilág-jelenség arra utal, hogy nagy társadalmi hálózatokban meglepően rövid útvonalak kötik össze az embereket, lehetővé téve, hogy mindössze néhány közvetítőn keresztül szinte bárki elérhessen bárkit. Ezt a gondolatot a „hat lépés távolság” kifejezés tette híressé, amely John Guare (1990) azonos című színdarabjából származik. A darab egyik szereplője szerint „ezen a bolygón mindenkit csak hat másik ember választ el egymástól” – ez a kifejezés ma már a társadalmi kapcsolatok világméretű összefonódásának szimbólumává vált. Megjegyzendő viszont, hogy ezt a jelenséget Karinthy Frigyes már legalább 61 évvel hamarabb leírta a *Láncszemek* című novellájában (Karinthy 1929).

A jelenséget először Stanley Milgram és munkatársai vizsgálták kísérleti úton az 1960-as években (Milgram 1967; Travers–Milgram 1969). Mivel nem álltak rendelkezésére modern hálózati adatok, Milgram egy olyan tanulmányt készített, amelyben véletlenszerűen kiválasztott résztvevőket kért meg arra, hogy egy bostoni címzettnek juttassanak el leveleket úgy, hogy azokat közvetlen ismerősöknek adják tovább. Meglepő módon a sikeresen kézbesített levelek átlagos láncossza hat volt, így vált népszerűvé a „hat lépés” elmélete. Bár a kutatásnak voltak korlátai, alapvető felismerést hozott: a társadalmi hálózatok valóban „kis világok”.



1.18. ábra. Ronald Graham kézzel rajzolt ábrája a matematikai együttműködési gráf egy részletéről, Erdős Pál köre szerkesztve (Graham 1979)

Azóta számos kiterjedtebb adatfelhasználású kutatás igazolta a jelenséget. Például a néhai Microsoft Instant Messenger felhasználói között végzett egyik tanulmány – amely 240 millió embert vizsgált – kimutatta, hogy a felhasználók közötti átlagos távolság körülbelül 6.6 (Leskovec–Horvitz 2008). Hasonló eredményeket kaptak az akadémiai együttműködési hálózatokban is, ahol, például, a matematikusok rövid láncokon keresztül kapcsolódnak a híres Erdős Pálhoz, kialakítva az úgynevezett Erdős-számot – ezzel megmutatva, hogy a legtöbb tudóst csak néhány lépés választja el egymástól (1.18. ábra) (Graham 1979; Grossman–Ion 1995). Mivel Kása Zoltánnak, a Sapientia EMTE informatikaprofesszorának

Erdős-száma 3, a jelen könyv szerzője e tekintetben 4 lépésre van Erdős Páltól (1.1. ábra).

Bár a kisvilág-jelenséget a modern hálózati vizsgálatok mára alaposan dokumentálták, Marvel és munkatársai (2013) amellett érvelnek, hogy ez a tulajdonság nem volt mindig jellemző az emberi társadalmakra. Érvelésük szerint a kisvilág-hatás egy viszonylag újkori fejlemény, amely csupán az elmúlt néhány száz év során alakult ki. Az emberi történelem túlnyomó részében a társadalmi hálózatok sokkal „nagyobbak” voltak – azaz az egyének többségét hosszú, akár többtucatnyi kapcsolaton átívelő láncok választották el egymástól, ha egyáltalán kapcsolódtak. Mindezt, közvetett módon, a járványok terjedési mintázatai is alátámasztják, mivel ezek a betegségek az emberek közötti kontaktushálózatokon keresztül terjednek. Például a 14. századi európai pestisjárvány (a fekete halál) hullámszerűen söpört végig a kontinensen, ami arra utal, hogy a távolságon átívelő kapcsolatok rendkívül ritkák voltak. Járványtani modellek alapján ilyen terjedés csak akkor jöhet létre, ha a távol élők közötti kapcsolatok exponenciálisan ritkák, ez pedig hosszú láncokat eredményez. Mindez arra utal, hogy a kisvilág-hatás nem univerzális és örök érvényű, hanem történetileg és technológiailag is kialakuló tulajdonság.

Visszatérve a jelenhez, jól látható, hogy a kisvilág-struktúra felismerése és tanulmányozása kiemelten fontos: hiszen ez a hálózati jelleg jelentősen felgyorsítja az információk, betegségek és lehetőségek terjedését, és rávilágít a rövid útvonalak meghatározó szerepére – mind az egyéni kapcsolathálóokban, mind a társadalmi rendszerek egészében.

1.8. Összegzés és kitekintés

A gráfelmélet napjainkra a modern tudomány és technológia egyik meghatározó eszköztárává vált, különösen az adatelemzés és a hálózattudomány területén. E fejezet rövid betekintést nyújtott abba, hogyan segíthet a gráfelmélet a komplex rendszerek szerkezetének megértésében és modellezésében. A gráfok elemzése azonban nem csupán elméleti jelentőségű: a Big Data korszakában a gráfelméleti megközelítések kulcsszerepet játszanak az adatok közötti kapcsolatok feltárásában, vizualizálásában és értelmezésében.

A következő fejezetekben mélyebbre merülünk a gráfelmélet gyakorlati alkalmazásaiba, bemutatva, hogyan járulhatnak hozzá e fogalmak és algoritmusok a valós jelenségek elemzéséhez és a problémák hatékony megoldásához. A gráfelmélet dinamikus fejlődő tudományterület, amely újabb és újabb lehetőségeket tár fel – új kapukat nyitva a kutatás, az adatvezérelt döntéshozatal és a technológiai innováció előtt. Mindez azt mutatja, hogy a hálózatok rejtett összefüggéseinek feltérképezése nem csupán tudományos kihívás, hanem egy olyan folyamatosan fejlődő gondolkodási keret, amely inspirálja és ösztönzi a jövő megoldásait.

2. Fókuszban az élek: a társadalmi kapcsolatok szerkezete és szerepe a hálózatokban

2.1. A Granovetter-kísérlet

Mark Granovetter szociológus egyik híres kísérlete és elmélete a „gyenge kötések ereje” (The Strength of Weak Ties) néven vált ismertté, és alapvető változást hozott a szociális hálózatokról való gondolkodásban (Granovetter 1973, 1974).

Granovetter az 1970-es években kutatta, hogyan terjed az információ a társadalomban, különösen az álláskeresés területén. Az volt az alapfelvetése, hogy az emberek leginkább a közvetlen, szoros kapcsolataikon keresztül szereznek információt, például a barátok vagy a család által. Ezzel szemben azonban azt találta, hogy a gyengébb kapcsolatok, azaz az ismerősök, munkatársak vagy akár távoli rokonok sokkal hatékonyabb információforrások lehetnek. Rámutatott, hogy a szoros kapcsolatok gyakran ugyanazokkal az információkkal rendelkeznek, mint mi magunk. Ezzel szemben a gyenge kapcsolatok más csoportokhoz kötnek, és ezért újabb, másfajta információkat tudnak közvetíteni.

Granovetter fő megállapítása az volt, hogy a gyenge kapcsolatok híd szerepet töltenek be a társadalomban. Ezek a kapcsolatok hidat képeznek különböző szociális csoportok között, és lehetővé teszik az információ áramlását a társadalmi hálózatok széles körében. A gyenge kötések nem olyan erősek érzelmi szempontból, de sokkal hatékonyabbak lehetnek új információk megszerzésében, mert az emberek eltérő társadalmi környezetekből jönnek.

Granovetter kísérlete nagy hatással volt a szociológiai kutatásokra, és az elmélete azóta számos más területre is kiterjedt. Az ötlet, hogy a gyenge kapcsolatok jelentős szerepet játszanak az információáramlásban, továbbra is fontos szempont a hálózatkutatásban, különös tekintettel a hálózatok dinamikájának vizsgálatára.

2.2. Hálózatok dinamikája

A hálózatok dinamikája a hálózatok kialakulásának és fejlődésének szabályszerűségeit vizsgálja. A szociális hálózatok olyan kapcsolatokból állnak, amelyeket emberek, csoportok, szervezetek alkotnak, és ezeket a kapcsolódásokat vizsgáljuk, amikor megpróbáljuk feltárni, hogyan áramlik az információ, hogyan alakulnak ki új kapcsolatok, és milyen struktúrák jönnek létre.

A hálózatok dinamikájával kapcsolatos néhány fontos kérdés az alábbiak.

- Hogyan alakulnak ki a hálózatok? Kezdetben kis csoportok formálódnak, majd ezek a csoportok kapcsolódhatnak más csoportokhoz, így egyre bonyolultabb hálózati struktúrák jönnek létre. Ez a növekedés lehet véletlenszerű vagy szisztematikus, amikor bizonyos csomópontok (emberek vagy szervezetek) kiemelkedő szerephez jutnak.
- Milyen szabályszerűségek vezetnek a kapcsolatok kialakulását? Például az emberek hajlamosak kapcsolatba kerülni azokkal, akikkel közös tulajdonságaik vannak (homofília, lásd a 4. fejezetet), akik közeli fizikai vagy társadalmi helyzetben vannak, illetve akikkel közös ismerősökkel rendelkeznek.
- Milyen szerepe van a hálózatoknak az információ terjedésében? A hálózatok szerkezetén keresztül lehet megérteni az információ vagy más erőforrások (pl. támogatás, bizalom) terjedését. Szoros kapcsolatok gyors és mélyreható információcserét tesznek lehetővé, míg gyenge kapcsolatok új információkat hozhatnak be más csoportokból.
- Hogyan változnak a hálózatok az idő múlásával? Az emberek és szervezetek kapcsolatai nem statikusak: új kapcsolatok jönnek létre, míg mások megszűnnek. A változás dinamikája különféle tényezőktől függ, például a kapcsolódók közös érdekeitől, a társadalmi normáktól vagy akár technológiai változásoktól (mint a közösségi média megjelenése).

2.3. Tranzitivitás / Triadikus bezáródás

A hálózatok dinamikájában a triadikus bezáródás (triadic closure) egy alapvető mechanizmus. A *tranzitivitás* vagy *triadikus bezáródás* az a jelenség, amely akkor következik be, amikor egy háromszögszerű kapcsolat alakul ki a hálózatban: ha *X* személy ismeri *Y*-t és *X* ismeri *Z*-t, akkor növekszik az esély arra, hogy *Y* és *Z* is kapcsolatba kerülnek egymással. Ez az egyszerű, de mélyreható mechanizmus alapvető szerepet játszik a szociális hálózatok növekedésében és stabilizálásában. Míg a gyenge kötések új információt hozhatnak be távolabbi csoportokból, addig a triadikus bezáródás segíti a szociális hálózatok belső kohézióját. A hálózat növekedésével és a kapcsolatok szorosabbá válásával egyre több ilyen háromszögszerű struktúra alakul ki, ami elősegíti a csoport stabilitását és az információk gyors terjedését.

Legalább három tényező járul hozzá a triadikus bezáródás jelenségéhez (azon túlmenően, hogy ha van egy közös ismerősünk, akkor ez már önmagában is megteremti a találkozás és a kapcsolatfelvétel lehetőségét):

- Szociális nyomás: Ha két ember közös ismerőssel/baráttal rendelkezik, egy idő után erősödhet a nyomás, hogy kapcsolatba lépjenek egymással. Ez egyfajta szociális egyensúlyt teremt, hiszen mindkét fél számára kényelmesebb, ha közös barátjuk révén „egymásra találnak”. A harmadik fejezet foglalkozik a „barátaim ellenségei” jelenséggel és más rokon szituációkkal is.

- Bizalom: A triadikus bezáródás segíthet a bizalom kialakításában. Ha két ember közös ismerősen keresztül ismeri egymást, nagyobb a valószínűsége, hogy megbíznak egymásban, hiszen az ismerős közös kapcsolata révén „ellenőrizhetik” egymást.
- Kölcsönös érdekek: Gyakran a triadikus bezáródásnak az is az oka, hogy az emberek hajlamosak közös érdeklődési körök alapján kapcsolatba lépni, különösen, ha közös ismerőseik hasonló dolgokkal foglalkoznak.

A triadikus bezáródás fontos társadalmi jelenség, amely több szempontból is jelentős hatással van a hálózatok működésére. Elősegíti a közösségek kialakulását, mivel az egymással háromszögszerűen összekapcsolódó emberek szorosabb, erősebb csoportokat alkothatnak, amelyeket több kapcsolat is összetart. Ez a jelenség emellett gyorsítja az információ terjedését is, hiszen ha a hálózat tagjai közvetlenül is ismerik egymást, az információ útja rövidebbé válik, és hatékonyabban jut el egyik pontból a másikba. Továbbá a triadikus bezáródás a kapcsolatok stabilitását is növeli, mivel a háromszögek csökkentik annak esélyét, hogy a kapcsolatok gyorsan megszakadjanak, így erősebb és tartósabb hálózatok jönnek létre.

Kijelenthető tehát, hogy összességében a hálózatok dinamikája és a triadikus bezáródás egymásra épülő jelenségek, amelyek segítenek megérteni, hogyan formálódnak és fejlődnek a szociális hálózatok, valamint hogyan alakulnak ki erős és gyenge kapcsolatok (lásd lentebb), amelyek formálják a modern társadalom szerkezetét.

2.4. Csomósodási együtttható

A *csomósodási együtttható* (angolul clustering coefficient) a hálózatelmélet egyik fontos mérőszáma, amely azt mutatja meg, hogy egy adott hálózatban vagy csomópont környezetében mennyire vannak a kapcsolatok „csomósodva” – vagyis mennyire hajlamosak a csomópont szomszédjai egymással is kapcsolatba kerülni. Ez a mérőszám a szociális hálózatokban jól használható arra, hogy leírjuk, milyen mértékben zárulnak háromszög alakú struktúrák (mint a triadikus bezáródás), és mennyire „sűrű” a hálózat egy adott részén belül.

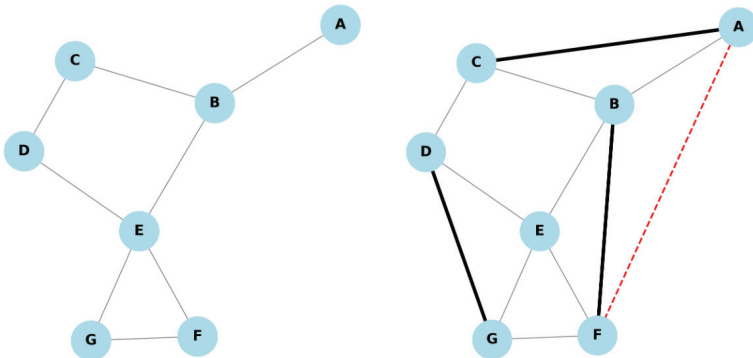
A csomósodási együttthatót két szinten szokás meghatározni: globálisan (az egész hálózatra vonatkozóan), illetve lokálisan (egy-egy csomópont szintjén). A globális csomósodási együtttható azt fejezi ki, hogy a hálózatban előforduló tripletek – azaz háromcsúcsú struktúrák, amelyek legalább két élt tartalmaznak – mekkora hányada alkot tényleges háromszöget. Mivel minden háromszög három különböző tripletet foglal magában (mindegyik csúcsra nézve egyet), a háromszögek számát háromszorosán kell figyelembe venni a mutató kiszámításakor.

A lokális csomósodási együtttható egy adott csomópontra nézve azt jelzi, hogy az adott csomópont szomszédjai mennyire kapcsolódnak egymáshoz. Tegyük fel, hogy van egy X csomópontunk, és ennek k szomszédja van. A lokális csomósodási együtttható azt mutatja meg, hogy a lehetséges $k(k-1)/2$ kapcsolatból (k csomópont

közül ennyi különböző pár választható) ténylegesen hány kapcsolat létezik a csomópont szomszédjai között. Mivel úgy definiáljuk, hogy a tényleges kapcsolatok számát osztjuk a lehetséges kapcsolatok számával, a lokális csomósodási együtttható azt is kifejezi, hogy mekkora a valószínűsége annak, hogy X két szomszédja egymással is kapcsolatban áll, tehát barátai egymásnak is. Ez az érték 0 és 1 között mozog: a 0 azt jelenti, hogy a szomszédok között nincs kapcsolat, míg az 1 azt jelzi, hogy az összes szomszéd egymással is összeköttetésben áll (lásd a 2.1. ábrát).

A csomósodási együtttható segítségével megérthetjük, mennyire „szorosan kapcsolódik” egy hálózat. Ha egy hálózatban magas a globális csomósodási együtttható, akkor az azt jelenti, hogy sok háromszög alakú kapcsolat található benne, azaz az emberek közötti kapcsolatok nagyon szorosak, és sok „barát barátja is barát” kapcsolat létezik. Ez jellemző lehet például közösségekre, baráti társaságokra vagy kollégák szoros munkacsoportjaira.

Ezzel szemben egy alacsony csomósodási együttthatójú hálózatban a kapcsolatok inkább szétszórtak, és az emberek kevesebb közös kapcsolattal rendelkeznek. Az ilyen hálózatokban kevesebb háromszög alakú kapcsolat van, és inkább gyenge kötések uralkodnak, amelyek Granovetter elmélete szerint az új információk beáramlását segíthetik.



2.1. ábra. A két gráf ugyanazt a hálózatot mutatja be két különböző időpillanatban. A jobb oldali ábrán új kapcsolatok jelentek meg, a vastagított élek triadikus bezáródás nyomán, a szaggatott pedig valamilyen más okból. A bal oldali állapotban az E pont csomósodási együttthatója $1/6$, mert négy barátja (B, D, G, F) között 6 kapcsolat létezhetne ($B-D, B-G, B-F, D-G, D-F, G-F$), de ezek közül csak 1 jött létre, a $G-F$. A jobb oldali állapotban az E pont csomósodási együttthatója $3/6$ -ra nőtt.

A csomósodási együtttható szorosan kapcsolódik a triadikus bezáródáshoz, mivel mindkettő azt vizsgálja, hogy mennyire hajlamosak a kapcsolatok háromszögszerűen lezáródni. Egy magas csomósodási együttthatójú hálózatban nagyobb

a triadikus bezáródás valószínűsége, ami azt jelenti, hogy az emberek jobban összekapcsolódnak egymással, és erősebb közösségi szerkezetek alakulnak ki.

2.5. Híd, lokális híd, majdnem lokális híd

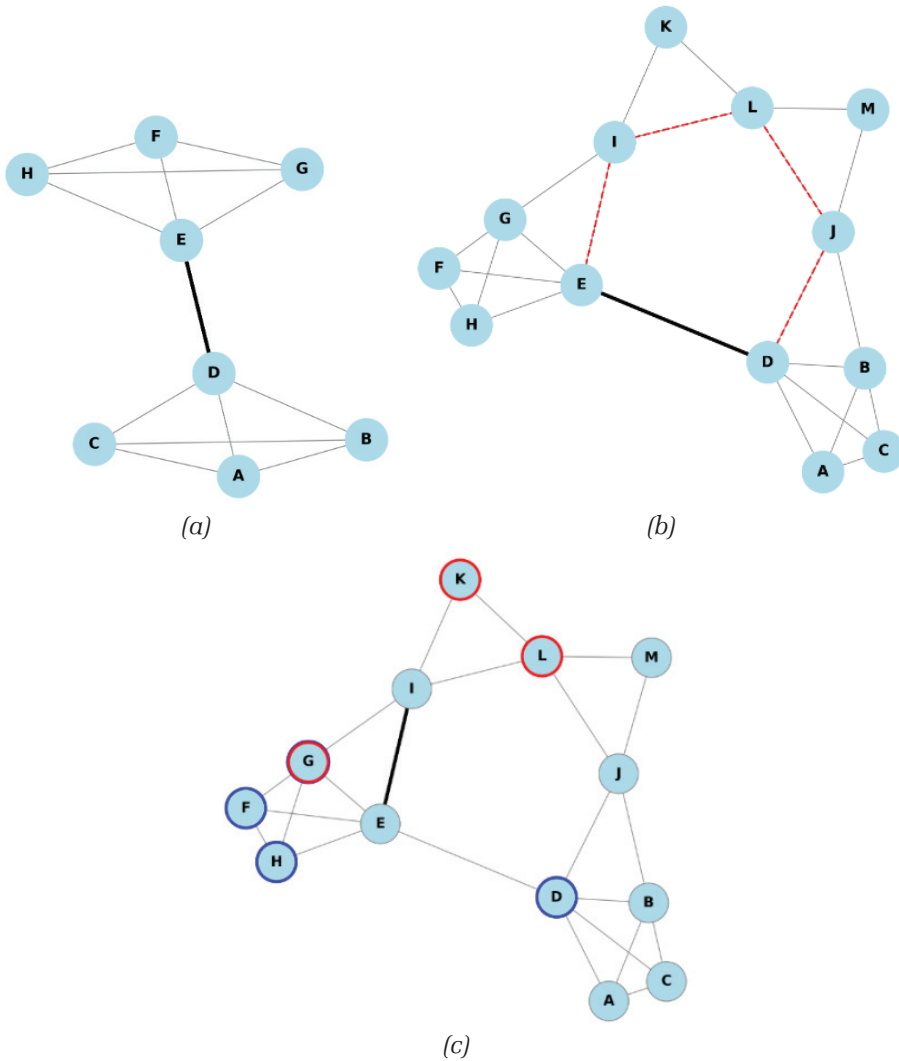
A szociális hálózatok vizsgálata során a híd, lokális híd és majdnem lokális híd fogalmak arra vonatkoznak, hogy egy-egy kapcsolat hogyan köti össze a hálózat különböző csoportjait (2.2. ábra). Ezek a fogalmak a hálózat topológiáját és a kapcsolatok funkcióját segítenek megérteni, különösen az információ áramlása, a közvetítés és a befolyás szempontjából.

A *híd* (bridge) egy olyan él (kapcsolat) a hálózatban, amely két olyan csomópontot (személyt) köt össze, amelyek különböző csoportokhoz vagy közösségekhez tartoznak, és a hídon kívül nincs alternatív út. Ez azt jelenti, hogy ha a híd megszűnne, az érintett két csoport között nem lenne kapcsolat. A híd tehát egy egyedülálló és pótolhatatlan kapcsolat, amely egyesíti a különböző hálózati részeket. (Az A függelék 4. pontja algoritmikai részleteket közöl arról, hogy miként azonosíthatók be hatékonyan egy gráf hídjai.)

Mivel a valós hálózatokban ritkák az „abszolút hidak”, bevezették a lokális híd fogalmát. A *lokális híd* (local bridge) egy olyan kapcsolat két csomópont között, amelynek törlésével legalább kettő vagy több él távolságra kerülnének egymástól az érintett csomópontok. Egy ilyen kapcsolat hiányában ugyan lenne alternatív út, de az hosszabb lenne, és ez lassítaná az információ terjedését vagy bonyolultabbá tenné a hálózat működését.

Ide kapcsolódik a fesztávolság mint mérőszám. A *fesztávolság* (span) fogalma a szociális hálózatokban egy él fontosságát méri abból a szempontból, hogy mennyire lenne hosszabb a hálózatban lévő legrövidebb út két csomópont között, ha az adott élt eltávolítanánk. A hidak fesztávolsága végtelen, a lokális hidaké pedig nagyobb, mint 2. Általában a kis fesztávolság azt jelzi, hogy a kapcsolat nem kulcsfontosságú a hálózat kohéziójában, és az eltávolítása nem változtat sokat az információ áramlásán. Nagy fesztávolság esetén viszont kijelenthető, hogy a kapcsolat fontos közvetítő szerepet tölt be, mivel más utak lényegesen hosszabbak vagy nehezen elérhetők.

A lokális híd és a triadikus bezáródás „ellentétes fogalmak” a szociális hálózatok szerkezetében abban az értelemben, hogy eltérő dinamikákat tükröznek a kapcsolatok létrejötte és fenntartása szempontjából. A lokális híd a különálló csoportokat összekötő „ritka kapcsolat”, és azt feltételezi, hogy nincs közös szomszéd a két érintett csomópont között. Ezzel szemben a triadikus bezáródás közös szomszédokra épít, és azt feltételezi, hogy két csomópont hajlamos kapcsolatba lépni, ha van egy közös ismerősük. Ez a lokális hidak kialakulása ellen hat, hiszen egy lokális híd létezése éppen arra utal, hogy nincs triadikus bezáródás.



2.2. ábra. Az (a) ábrán az E-D él híd, a (b)-n viszont lokális híd, amelynek fesztávolsága 4. A (c) ábrán az E-I él majdnem lokális hídnak számít, hiszen szomszédság-átfedési foka $1/6$ (a végpontjainak együtt 6 szomszédjuk van, de ezek közül csupán 1 közös, a G pont).

Mivel sok valós hálózatban a lokális hidak is kevesek, ezért a kutatók definiáltak egy további, rokon fogalmat, a majdnem lokális híd fogalmát. A *majdnem lokális híd* (almost local bridge) olyan kapcsolat, amely két csoport vagy személy

között húzódik, és bár nem teljesen híd vagy lokális híd, mégis kulcsfontosságú az információ áramlásában és a kapcsolati sűrűség csökkentésében. A majdnem lokális híd létezéséhez az kell, hogy az adott kapcsolat megszűnése esetén a két csoport között még elérhető legyen másik út, de az lényegesen hosszabb vagy kevésbé hatékony lenne.

E fogalomhoz kapcsolódóan is létezik egy mérőszám, a „szomszédságátfedési fok”. Az él *szomszédság-átfedési foka* (neighborhood overlap) egy szociális hálózatban azt méri, hogy két, egy adott él által összekötött csomópont közös ismerőseinek aránya mennyire nagy a két csomópont összes szomszédjához képest. Ezzel a mutatóval azt lehet megvizsgálni, hogy a két csomópont milyen mértékben osztozik a kapcsolataikon, vagyis mennyire szoros és koherens a kapcsolati hálójuk.

Az él szomszédság-átfedési foka a következőképpen számítható ki két csomópont, mondjuk A és B esetén, amelyeket egy él (A,B) összeköt: $|N(A) \cap N(B)| / |N(A) \cup N(B)| - 2$, ahol $N(A)$ az A szomszédjainak halmaza, $N(B)$ a B szomszédjainak halmaza, $|N(A) \cap N(B)|$ a közös szomszédok száma és $|N(A) \cup N(B)| - 2$ az A és B összes szomszédja, kivéve magukat. Az osztályozó értéke 0 lesz, ha nincs közös szomszéd, azaz A és B kapcsolata gyenge vagy kevésbé integrált a közös hálózatukba. Az érték 1 lesz, ha az összes szomszédjuk közös, ami azt jelenti, hogy A és B nagyon szorosan integrált ugyanazon közösségbe vagy csoportba. A hidak és lokális hidak szomszédságátfedési foka nyilván 0, a majdnem lokális hidaké pedig kicsi.

Összefoglalásként: a híd egy olyan kapcsolat, amely nélkül a hálózat két része szétválna, pótolhatatlan közvetítő szereppel bír; a lokális híd ugyan nem szétválasztó, de az adott két pont között az egyetlen „gyors kapcsolat”; a majdnem lokális híd egy adott csoport két részét köti össze, és bár nem egyedülálló vagy nélkülözhetetlen, megszűnése hosszabb, kevésbé hatékony kapcsolatokat eredményezne. Mindhárom fogalom kulcsszerepet játszik a hálózat elemzésében, különösen az információ, a befolyás és a kapcsolati dinamika szempontjából. Ahogy később látni fogjuk, az ilyen hidak az innováció, a tudás és az erőforrások terjedésében is kritikusak lehetnek, mivel az eltérő csoportok közötti kapcsolatokat biztosítják.

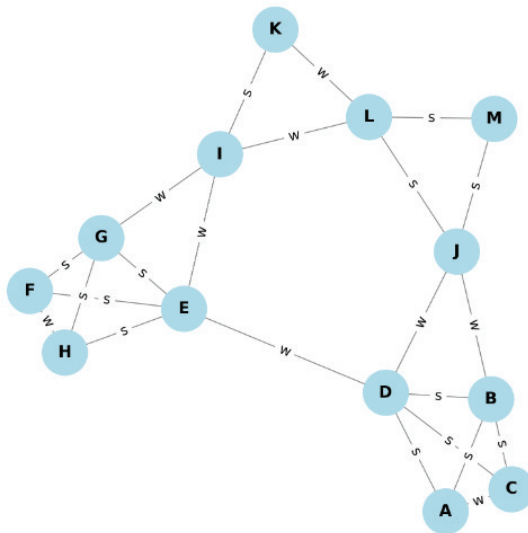
2.6. Erős triadikus bezáródás

Az eddigi elemzésünk során, bár használtuk a „barát” és „ismerős” fogalmakat, a gráfelmélet szempontjából mégis súlyozatlan, irányítatlan gráfokkal foglalkoztunk. Vagyis két pont között vagy volt kapcsolat, vagy nem. Most azonban, összhangban Granovetter kutatásaival, súlyozzuk a gráf éleit, azaz a hálózati kapcsolatokat gyenge vagy erős kötések szerint különböztetjük meg.

- Erős kapcsolatok: ezek általában baráti vagy szoros családi viszonyok, ahol a kapcsolatok gyakoriak, intenzívek és érzelmileg fontosak. Az ilyen kapcsolatok mély kötődést és több interakciót takarnak.

- Gyenge kapcsolatok: az ismerősökhöz fűződő kötelékek, amelyek ritkább interakciókon alapulnak, és kevésbé intenzívek. Ahogy már utaltunk rá, bár érzelmileg távolibbak, a gyenge kapcsolatok mégis rendkívül fontosak a különböző társadalmi csoportok közötti összekötésben.

Ebben az összefüggésben bevezetjük az *erős triadikus bezáródás* (strong triadic closure) fogalmát, amely a triadikus bezáródás egyik sajátos formája. Az erős triadikus bezáródás elve kimondja, hogy ha valakinek van két erős kapcsolata (például két barátja), akkor nagy valószínűséggel ezek a barátok is legalább ismerősök lesznek egymással (2.3. ábra). Ennek oka, hogy az erős kötések gyakrabban eredményeznek közös ismerősöket, mivel az érintett felek gyakrabban találkoznak, több interakció zajlik közöttük, és nagyobb az érzelmi közelség.



2.3. ábra. Példahálózat, amelyben érvényesül az erős triadikus bezáródás elve.

Minden olyan pontra, amelyhez két baráti kapcsolat (*s* – az angol *strong* alapján) tartozik, igaz, hogy a két barát egymással legalább ismeretségben áll (*w* – az angol *weak* alapján).

Egy fontos következmény: ha elfogadjuk az erős triadikus bezáródás elvét, akkor az a személy, akinek van legalább két erős kötése (például az *E* pont a 2.3. ábrán), gyenge kapcsolatokon keresztül kapcsolódhat olyan társadalmi csoportokhoz vagy személyekhez, amelyek új információforrásokat jelenthetnek számára. Más szóval, az ilyen egyének hídjai gyenge kötések (az *E-D* él a 2.3. ábrán), amelyek az eltérő csoportok közötti információáramlást segítik elő.

2.7. Gyenge/erős kötések fogalmának általánosítása

A korábbi megközelítésünk éles határvonalat húzott a hálózatban a kapcsolatok erőssége tekintetében: minden él vagy erős, vagy gyenge kapcsolatként volt definiálva. Ahogyan azonban a valós, nagy léptékű adatok elemzéséhez bevezettük a „majdnem lokális híd” fogalmát, szükséges lehet ugyanezt az átmenetességet alkalmazni az élek erőssége esetében is, fokozatosabb megközelítést kínálva.

Példaként említhető Onnela és munkatársai (2007) átfogó tanulmánya, amely egy mobilszolgáltató által fenntartott „ki kivel beszél” hálózatot vizsgált, lefedve egy országos populáció mintegy 20%-át. A hálózatban a csomópontok mobiltelefon-használókat képviseltek, és két csomópont között akkor jött létre él, ha a 18 hetes megfigyelési időszak alatt mindkét irányban telefonhívást bonyolítottak le. Az él erősségét numerikus értéként határozták meg, ami a két végpont között hívással eltöltött összes percet jelöli. Hasznos lehet továbbá az éleket kapcsolatok erőssége szerint sorba rendezni, így egy adott él esetében meghatározhatjuk, hogy hányadik percentilisbe esik az erősség szerinti rangsorban.

A vizsgálat jelentősége abban rejlik, hogy a mobiltelefonokat ebben a populációban jellemzően személyes kommunikációra használták, nem üzleti célokra, és a központi címjegyzék hiánya miatt a telefonszámokat többnyire már egymást ismerő emberek cserélték ki. Így a hálózat reális mintavételeként értelmezhető az adott ország társadalmi hálózatának beszélgetéseire vonatkozóan. Továbbá, az adatok olyan általános szerkezeti jellemzőket mutattak, amelyek a nagy társadalmi hálózatokra jellemzőek, beleértve az óriás komponens is – egy összefüggő hálózati részt, amely a hálózat legtöbb egyedét (ebben az esetben 84%-át) tartalmazza.

A kutatók azt is vizsgálták, hogyan viselkedik a hálózat, ha az éleket eltávolítják. Először a legerősebb kötések törlésével kezdték, és haladtak a gyengébbek felé. Ez alatt az óriás komponens fokozatosan zsugorodott, ahogy a csomópontok közötti kapcsolatok megszűntek. Ezután ugyanezt a folyamatot a leggyengébb kötések eltávolításával kezdték, és ekkor azt tapasztalták, hogy az óriás komponens sokkal gyorsabban zsugorodott, és a maradványai hirtelen estek szét, amikor egy kritikus mennyiségű gyenge kapcsolatot eltávolítottak. Ez a megfigyelés alátámasztja, hogy a gyenge kötések adják az alapvető szerkezeti kapcsolatot, amelyek összetartják a különböző közösségeket, és megőrzik az óriás komponens globális szerkezetét.

Az elemzés továbbá igazolta azt is, hogy minél kisebb súlya van egy élnek, annál kisebb a szomszédsági átfedése, azaz a „majdnem lokális hidak” távoli ismerősök közötti kapcsolatokat képviselnek.

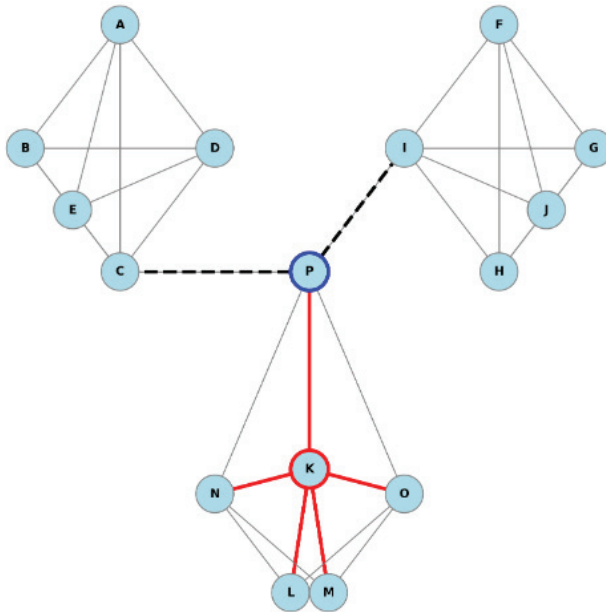
2.8. Kohéziós tőke és hídépítő tőke

A társadalmi tőke két alapvető típusa, a *kohéziós* vagy *összetartó tőke* (bonding capital) és a *hídépítő* vagy *kapcsolatteremtő tőke* (bridging capital),

meghatározó szerepet játszik a hálózatban elfoglalt pozícióink és kapcsolati struktúráink értékében.

A kohéziós tőke a mély, erős kapcsolatokra épül, amelyek szoros kötődést biztosítanak egy közösségen vagy csoporton belül. Ezek az erős kapcsolatok gyakran közeli barátokhoz vagy családtagokhoz kötődnek, és a gyakori interakciók, valamint az érzelmi közelség jellemzik őket. A kohéziós tőke erősíti a csoport összefonódását, mivel ezek a kapcsolatok nagyobb bizalmat és kölcsönös támogatást eredményeznek.

Ezeket az erős kapcsolatokat általában magas *beágyazottsági fok* jellemzi. A beágyazottság egy él közös szomszédjainak számából adódik (megegyezik a szomszédságátfedési fok számlálójával): minél több közös ismerősük van az él két végpontjának, annál nagyobb a beágyazottsági foka. Magas beágyazottsági fokú élek erősen beágyazott kapcsolatokra utalnak, amelyek szilárd alapot biztosítanak a bizalomra és a biztonságos együttműködésre. Az ilyen kapcsolatok erősítik a csoport normáit és szabályait, hozzájárulva a megbízhatósághoz és az együttműködéshez.



2.4. ábra. A K pont a piros kapcsolatai révén jelentős kohéziós tőkével rendelkezik, míg a P pont – a szaggatott vonalakkal jelölt hídjai révén – jelentős hídépítő tőkével

A hídépítő tőke ezzel szemben gyenge kapcsolatokon alapul, amelyek különböző közösségeket kötnek össze. Ezek a kapcsolatok kevésbé intenzívek, viszont

rendkívül fontosak, mivel különálló csoportokat kapcsolnak össze, és új információkat, lehetőségeket kínálnak. A hídépítő tőke révén lehetőség nyílik új ötletekhez, különböző társadalmi csoportok nézőpontjaihoz és forrásaihoz való hozzáférésre, amelyek az egyén számára innovációs előnyöket biztosítanak.

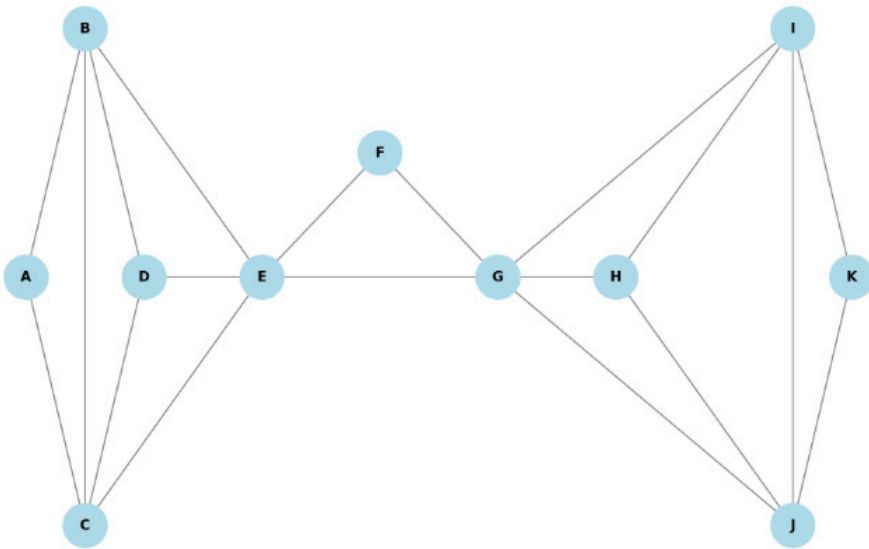
Ahogy a neve is utal rá, a hidak különösen fontosak a hídépítő tőke szempontjából, mivel két különböző közösséget kapcsolnak össze úgy, hogy az él két végpontjának nincsenek közös szomszédjai. Az ilyen élek beágyazottsági foka nulla, hiszen nincs átfedés a végpontok kapcsolati hálói között. Az ilyen helyzetekben a végpontok strukturális lyukat töltenek be, és az egyén, aki híd szerepet játszik, előnyös helyzetbe kerül, mert ő szabályozza az információ áramlását a csoportok között. Ezáltal hozzáférése van több információforráshoz, ami fokozott kreativitást és kontrollt biztosít számára a kapcsolati hálózatában.

A hálózati pozíciók szempontjából mindkét tőketípus fontosnak számít: a kohéziós tőke erősíti a csoport egybefonódását, növeli a bizalmat és a stabilitást a szoros kapcsolatok révén; a hídépítő tőke pedig szélesebb látókört és új lehetőségeket nyújt, mivel különböző csoportokat kapcsol össze, és így új információforrásokhoz nyújt hozzáférést.

Az egyénnek hasznos mindkét tőketípusra építenie: a kohéziós tőke támogatást és biztonságot nyújt a közvetlen kapcsolatokon keresztül, míg a hídépítő tőke révén az egyén hozzáférhet új információkhoz és lehetőségekhez, amelyeket a különálló közösségek közötti hidak biztosítanak. Az optimális pozíció elérése érdekében fontos, hogy az egyén tudatosan megővje híd szerepét a túlzott triadikus bezáródásoktól, amelyek csökkentenék a kapcsolati hálója általi hozzáférés előnyeit.

2.9. Gráfok particionálása

Egy gráf particionálása alatt azt értjük, hogy a gráf csúcshalmazát felosztjuk nem átfedő részhalmazokra (partíciókra) bizonyos célok vagy feltételek szerint. A gráfok particionálása és a gyengén összekötött gócek azonosítása fontos probléma a hálózatelemzésben, hiszen gyakran az a cél, hogy egy komplex hálózatot kisebb, jól elkülöníthető részekre bontsunk. Ilyen feladat például a közösségek keresése szociális hálókból vagy biológiai hálózatok moduljainak azonosítása stb. Az ilyen struktúrák feltárására gyakran nem elegendő csupán a hidak vagy lokális hidak eltávolítása, mivel ezek egyrészt ritkák a nagy, valós hálózatokban, másrészt a gráfok szerkezete gyakran összetettebb, és ezek az egyszerű beavatkozások nem feltétlenül fedik fel a mélyebb alstruktúrákat (2.5. ábra). Árnyaltabb módszerekre van szükség, amelyek jobban figyelembe veszik a hálózaton belüli kapcsolatok fontosságát.



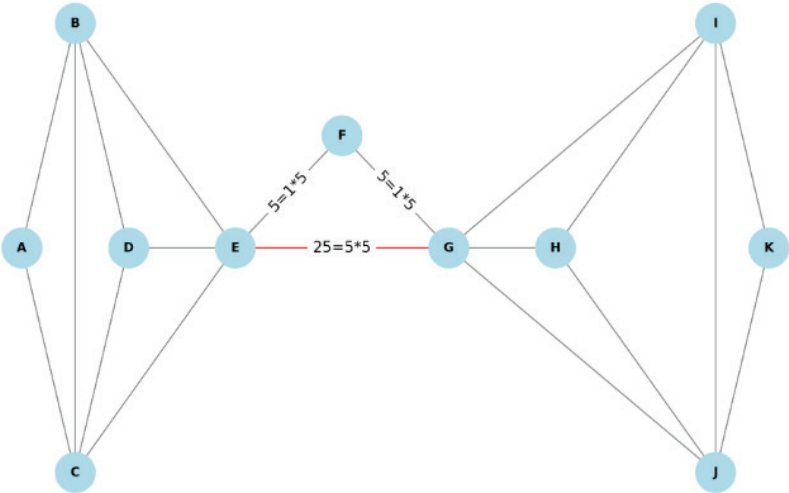
2.5. ábra. Egy hálózat akkor is mutathat szorosan összetartozó régiókat, ha nincsenek benne hidak vagy lokális hidak, amelyek mentén szét lehetne választani.

2.9.1. Élközpontúság és forgalom

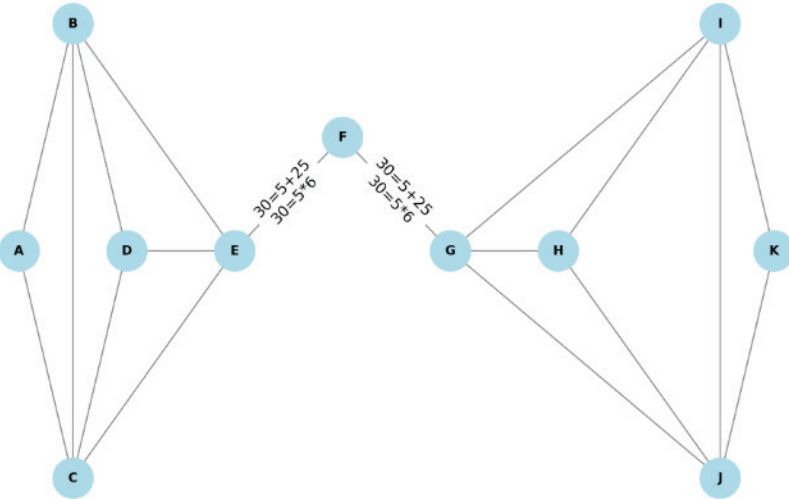
Az *élközpontúság* (edge betweenness) olyan mérőszám, amely azt fejezi ki, hogy egy adott él mennyire fontos a hálózat különböző részei közötti kapcsolatok fenntartásában. Ennek kiszámításához a *forgalom* (fluxus, traffic) fogalmára építünk, amelyet a hálózat két pontja között a következőképpen definiálunk:

- két pont közötti forgalom alapértelmezés szerint 1 egység, és az élszámban legrövidebb utakon „áramlik”;
- ha a két pont között több legrövidebb út létezik (mondjuk k darab), akkor a forgalom egyenletesen oszlik el a legrövidebb utak között, így minden úton $1/k$ forgalom halad át.

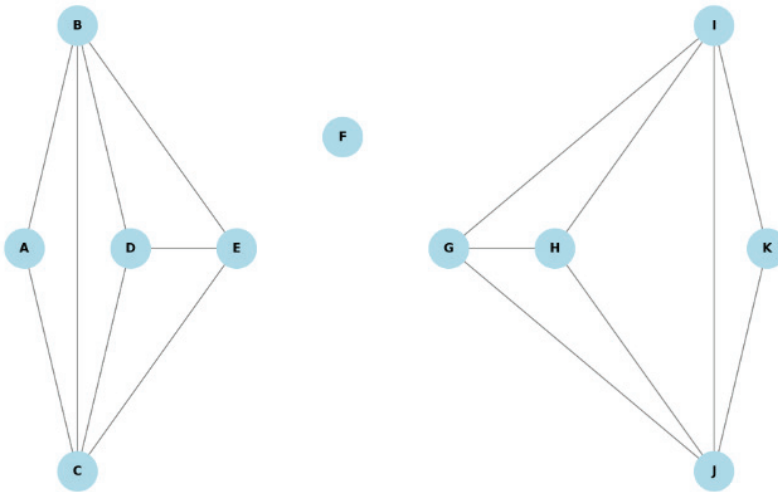
Az élközpontúság egy adott él esetén az összes legrövidebb út forgalmának összegét jelenti, amely áthalad ezen az élen (2.6.a. ábra). Vagyis ha sok legrövidebb út halad át egy élen, akkor annak az élnak nagy az élközpontúsági értéke.



(a)



(b)



(c)

2.6. ábra. (a) Az $\{A,B,C,D,E\}$ és $\{G,H,I,J,K\}$ 5-elemű pontthalmazok 5×5 pontpárja közötti legrövidebb utak mindegyike áthalad az E-G élen, ezért ennek élközpontúsági értéke 25. Az E-F élen az $\{A,B,C,D,E\}$ halmaz elemei és az F pont közötti legrövidebb utak haladnak át, ezért ennek élközpontúsági értéke $5 \times 1 = 5$. Hasonló a helyzet az F-G él esetében is. (b) Az itt látható 30-as értékekhez úgy is eljuthatunk, hogy figyelembe vesszük, hogy az E-F él eltávolítása nyomán, az eredetileg ezen áthaladó forgalom átirányítódik az E-F-G szakaszra. (c) A Girvan–Newman-féle particionálási algoritmus (lásd lentebb) alkalmazása eredményezte komponensek (két lépés után).

2.9.2. Girvan–Newman-módszer

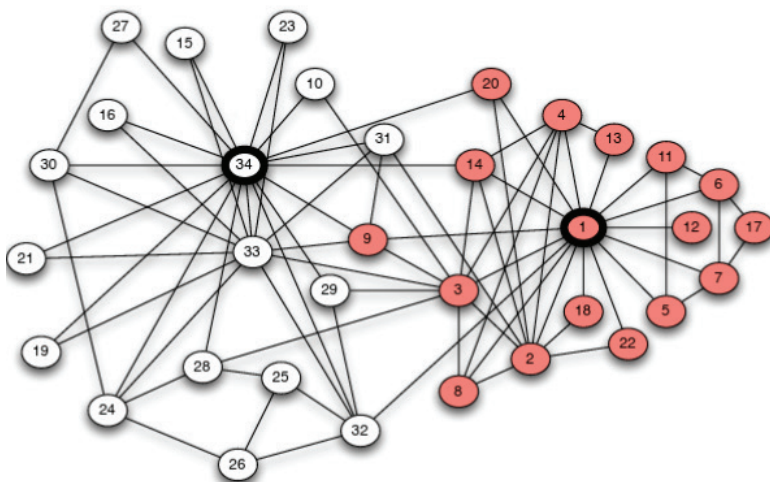
A Girvan–Newman-módszer (Girvan–Newman 2002; Newman–Girvan 2004) népszerű algoritmus a gráfok közösségeinek azonosítására, amely az élközpontúságot használja a gyengén összekötött részek azonosítására. Az eljárás lényege, hogy fokozatosan eltávolítjuk a hálózathoz a legnagyobb élközpontúságú éleket, mivel ezek az élek valószínűleg fontosak a különböző közösségek közötti kapcsolatokban. Ahogy ezeket az éleket eltávolítjuk, a gráf fokozatosan felbomlik kisebb, sűrűn összekötött részekre, amelyek potenciálisan jól azonosítható közösségek.

Az algoritmus lépései a következők (2.6. ábra).

- Számítsuk ki az összes él élközpontúsági fokát! Ez az első lépés az egész gráfra vonatkozik és a gráf szélességi bejárásán (BFS) alapszik.

- Távolítsuk el a legmagasabb élközpontúságú élt/éleket! Az az él kerül eltávolításra, amelyen a legtöbb legrövidebb út halad át, hiszen ez valószínűleg két külön közösséget köt össze.
- Frissítsük az élközpontúsági fokokat! Az él/élek eltávolítása után újra kell számítani ezeket az értékeket, mivel a gráf szerkezete megváltozott.
- Ismételjük a folyamatot! A lépések folyamatos ismétlésével a gráf fokozatosan szétesik, és egyre több közösség jelenik meg.

Az algoritmus megállítása általában akkor történik, amikor a hálózat elég sok komponensre esett szét (amelyek belső szerkezete sűrűn összekötött), vagy amikor már minden élt töröltünk. További implementációs részletek végett lásd a B függelék 2. pontját.



2.7. ábra. Barátkapcsolati háló egy egyetemi karateklub 34 tagja között. Az oktató (1) és az elnök (34) között kialakult konfliktus nyomán a klub kettészakadt a fehér és sötét pontok ábrázolta csoportokra (Zachary 1977).

A Girvan–Newman-algoritmus alkalmazása a 2.7. ábrán látható Zachary karateklub-hálózatán kiváló példát nyújt arra, hogyan tárhatók fel a közösségi struktúrák pusztán a hálózati kapcsolatok elemzésével (Zachary 1977). Annak ellenére, hogy az ellentétes csoportok között jelentős átfedés és sűrű kapcsolati háló állt fenn, az algoritmus képes volt felismerni azt a rejtett törésvonalat, amely mentén a klub végül kettészakadt – mindössze egyetlen személy, a 9-es csomópont esetében tért el a valós eseményektől. Ez az eltérés azonban jól magyarázható: a 9-es csomópontot képviselő klubtag a szakadás idején mindössze három hétre volt attól, hogy befejezze egy négyéves folyamat eredményeként a fekete öv megszerzését, amit kizárólag az oktatóval (1-es csomópont) tudott elérni. Ez a személyes motiváció felülírta a hálózati kapcsolataiból következő „logikus” hovatartozását,

amely inkább az elnök (34-es csomópont) oldalára sorolta volna. Az eset nemcsak az algoritmus pontosságát és gyakorlati hasznosságát emeli ki, hanem azt is hangsúlyozza, hogy a hálózatelemzés során a strukturális mintázatok értelmezését érdemes kiegészíteni a kontextuális, emberi tényezők figyelembevételével.

A Girvan–Newman-módszer különösen hasznos nem túl nagy gráfok esetén. Azáltal, hogy az élközpontúságot vizsgáljuk, az algoritmus képes felismerni azokat az éleket, amelyek a különböző közösségek közötti gyenge kapcsolatokra utalnak, és ezek eltávolításával szétbontja a hálózatot.

2.10. Összegzés

A társadalmi hálózatok és kapcsolatok vizsgálata világosan mutatja, hogy a különböző kötődések – legyenek azok gyenge vagy erős kapcsolatok, híd vagy lokális híd jellegűek – meghatározó szerepet játszanak a közösségek kialakulásában és működésében. A hálózatok dinamikája és a triadikus bezáródás folyamatai hozzájárulnak a közösségek belső kohéziójának megerősítéséhez, míg a hidak és gyenge kötések biztosítják a kapcsolódást a különálló közösségek között, lehetővé téve az információáramlást és a hálózat egészének integráltságát. A fejezetben tárgyalt módszerek, mint például a Girvan–Newman-algoritmus, segítenek mélyebben megérteni és azonosítani ezeket a struktúrákat, lehetőséget adva a hálózatok optimalizálására és a közösségek szerkezetének hatékonyabb feltárására.

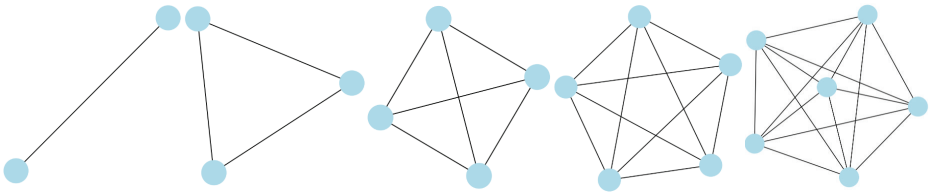
3. Pozitív és negatív kapcsolatok

A gráfelméleti modellekben a kapcsolatok jellemzésére gyakran használnak különböző osztályozásokat. Az előző fejezetben a hálózatokat gyenge és erős kötések alapján elemeztük, ahol az erős kötések a szoros, személyes kapcsolatokra (barátok) utaltak, míg a gyenge kötések az alkalmi, ismerősi kapcsolatokat jellemezték. Ezt a megközelítést kiterjesztve a kapcsolatok minőségét is bevezethetjük, azaz hogy a kötések harmonikusak vagy konfliktusosak, barátságosak vagy ellenségesek.

Az *előjeles* (signed graphs) vagy *plusz-mínusz gráfok* fogalma ezt a kiterjesztést valósítja meg, mivel az élek előjele (+ vagy -) nemcsak a kapcsolat meglétét, hanem annak jellegét is kifejezi:

- pozitív kapcsolat (+): harmóniát, együttműködést, barátságot vagy támogatást fejez ki,
- negatív kapcsolat (-): konfliktust, ellenségeskedést vagy versengést jelent.

E fejezet a *strukturális egyensúly* (structural balance) fogalmát járja körbe teljes és nem teljes gráfok esetében. A strukturális egyensúly egy gráfelméleti fogalom, amely előjeles gráfok stabilitását és kiegyensúlyozottságát vizsgálja. A fogalom alapját a szociálpszichológiából származó Heider-féle egyensúlyelmélet adja (Heider 1946), amely azt mondja ki, hogy a kapcsolatok egy hálózaton belül stabilak vagy kiegyensúlyozottak, ha az érintett szereplők (csúcsok) közötti viszonyok konzisztens mintázatot követnek.



3.1. ábra. A K_2 , K_3 , K_4 , K_5 és K_6 teljes gráfok

A fejezet hangsúlyosan épít a teljes gráf és klikk fogalmakra (lásd az 1. fejezetet). Emlékezzünk, hogy a teljes gráf egy olyan gráf (általában irányítatlan), amelyben minden csúcs össze van kötve minden más csúccsal egy él révén (3.1. ábra). Az n -csúcsú teljes gráfot K_n -nel jelölünk, és $n(n-1)/2$ éle van. A legkisebb nem triviális teljes gráf a háromszög gráf (K_3). Mivel az előjeles gráfok esetében minden él vagy +, vagy - címkét kap, ezért, értelemszerűen, $2^{n(n-1)/2}$ különböző plusz-mínusz gráf létezik. Továbbá, egy klikk egy olyan részgráf, amely teljes gráf. Ez azt jelenti, hogy a klikkben szereplő csúcsok között minden lehetséges él megtalálható.

Úgy is fogalmazhatunk, hogy a gráf csúcsainak olyan halmaza, melyek feszített részgráfja teljes. Egy klikket maximálisnak nevezünk, ha nem lehet további csúcsot hozzáadni anélkül, hogy elvesztené a teljes gráf tulajdonságát. Egy gráf klikkszámának (ω) tekintjük a legnagyobb klikk méretét, azaz a legnagyobb klikk csomópontjainak számát.

3.1. Háromszögek egyensúlya

A Heider-féle egyensúlyelmélet a társas kapcsolatok legegyszerűbb struktúráit, a háromszögeket (triádokat) vizsgálja. Egy háromszög akkor tekinthető kiegyensúlyozottnak, ha a kapcsolatok összessége logikailag és érzelmileg koherens. Matematikai megfogalmazásban ez azt jelenti, hogy az élek előjeleinek szorzata pozitív. Amennyiben az élek szorzata negatív, a háromszög kiegyensúlyozatlan, ami feszültséget teremt és instabil állapotot eredményez.

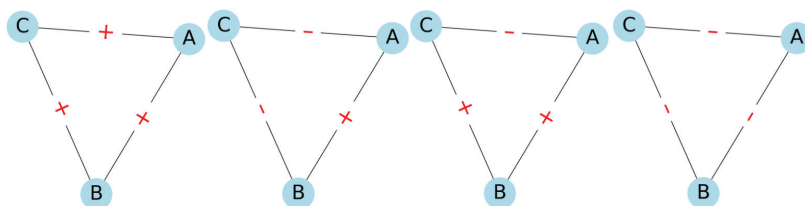
Kiegyensúlyozott háromszögek

Kétféle konfiguráció tekinthető kiegyensúlyozottnak (3.2. ábra).

- Mindhárom kapcsolat pozitív (+ + +): ebben az esetben a három szereplő baráti viszonyban áll egymással. Ez a háromszög a harmónia és az együttműködés modellje.
- Két kapcsolat negatív, egy pedig pozitív (+ - -): itt „az ellenségem ellensége a barátom” logika érvényesül. A két szereplő közötti ellenséges viszony egy harmadik személyhez fűződő pozitív kapcsolat révén stabilizálódik.

Kiegyensúlyozatlan háromszögek

A kiegyensúlyozatlanság kétféle módon jelentkezhet (3.2. ábra).



3.2. ábra. Háromszögek egyensúlya. Az első és második kiegyensúlyozott, a harmadik és negyedik kiegyensúlyozatlan.

- Két pozitív és egy negatív kapcsolat (- + +): ez a konfiguráció feszültséget okoz, hiszen felveti a kérdést: „Hogy lehet az, hogy a barátaim ellenségek egymással?” Az érzelmi diszharmónia kiküszöbölése érdekében a kapcsolati rendszer változásra kényszerül.

- Mindhárom kapcsolat negatív (---): itt teljes a harmónia hiánya, hiszen „az ellenségem ellensége sem a barátom”. Az ilyen háromszögek szélsőséges feszültséget hordoznak, és hosszú távon instabilak, mert az érintett felek természetes módon törekednek a kapcsolatok újrarendezésére.

A háromszögek egyensúlya a kapcsolati stabilitás és harmónia alapvető feltétele. A kiegyensúlyozott háromszögek stabil és természetes formák a társas kapcsolatok hálózatában, míg a kiegyensúlyozatlan háromszögek feszültséget szülnek és dinamikus változásokat indítanak el. Az emberi kapcsolatok egyik alapvető mozgatórugója a belső diszharmónia megszüntetése, vagyis a feszültség minimalizálása és az egyensúly helyreállítása.

3.2. Teljes gráfok egyensúlya

Egy teljes előjeles gráf egyensúlyának vizsgálatakor az alapvető követelmény, hogy a gráf minden háromszöge kiegyensúlyozott legyen. Ez azt jelenti, hogy bármely háromszögben az élek előjeleinek szorzata pozitív, azaz nincs olyan triád, amely érzelmi vagy logikai ellentmondást hordozna.

Tétel: Bármely **kiegyensúlyozott teljes gráf** esetén az alábbi két állapot egyike valósul meg.

1. Mindenki barát: a gráf minden csúcsa között pozitív kapcsolat áll fenn. Azaz mindenki baráti viszonyban van mindenkivel. Ez a teljes harmónia állapota.
2. Két barát-klikk ellenséges viszony: a gráf két diszjunkt csoportra (klikkre) osztható, ahol (i) a csoporton belüli kapcsolatok pozitívak (a klikk tagjai mind baráti viszonyban állnak egymással), és (ii) a klikkek közötti kapcsolatok negatívak (a két csoport tagjai kölcsönösen ellenségesek egymással).

A tétel első pontja nyilvánvaló: ha minden él pozitív, akkor minden háromszög kiegyensúlyozott. A második pont belátásához vegyük észre, hogy ha három csúcs ugyanazon csoportban van, akkor mindhárom él pozitív (+++), míg ha a három csúcs két csoport között oszlik meg, két csúcs ugyanabban a csoportban van (pozitív él), a harmadik pedig a másik csoportban (két negatív él), ami ugyancsak kiegyensúlyozott (+--) háromszöget eredményez. Így a két barát-klikk ellenséges viszonyban konfigurációban minden háromszög vagy (+++), vagy (+--), tehát a gráf kiegyensúlyozott. Fordítva, ha a gráfban kiegyensúlyozatlan háromszög (++- vagy ---) található, akkor könnyen belátható, hogy sem a „mindenki barát”, sem a „két barát-klikk” állapot nem teljesülhet.

A tétel meglepő következménye, hogy egy lokális feltétel – nevezetesen az, hogy minden háromszög kiegyensúlyozott – egy globális, szigorúan rendezett struktúrát eredményez: a gráf vagy teljes harmóniát mutat, ahol mindenki baráti viszonyban áll mindenkivel, vagy két csoportra oszlik, ahol a csoporton belüli kapcsolatok barátiak, a csoportok közötti viszonyok pedig ellenségesek. Másként fogalmazva, a háromszögek lokális egyensúlya elégséges ahhoz, hogy a teljes gráf

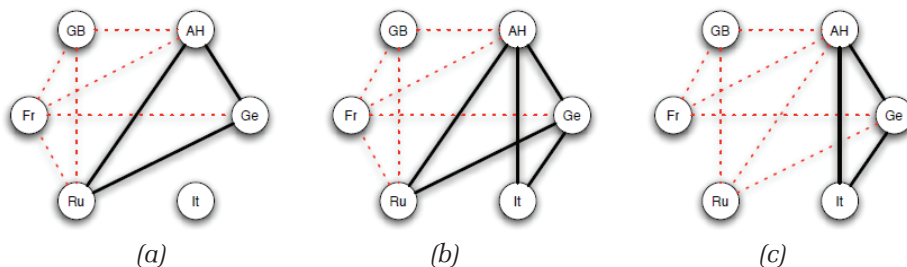
globálisan két jól definiált, stabil állapot egyikébe rendeződjön. Ez kiválóan szemlélteti, hogyan vezethetnek az egyének közötti egyszerű kapcsolati mintázatok a társas rendszerek magasabb szintű, strukturált és stabil állapotaihoz.

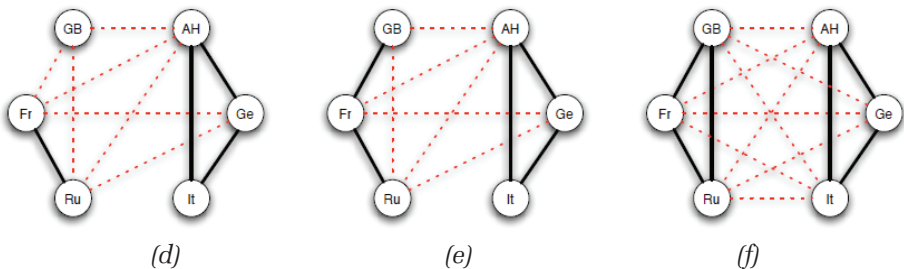
3.3. A strukturális egyensúly dinamikája

A strukturális egyensúly elméletének dinamikai aspektusait vizsgáló kutatások azt modellezik, hogyan alakulhatnak a barátságok és ellenségeskedések egy teljes gráfban, azaz hogyan változhat az élek előjelének címkézése az idő múlásával, miközben a társas hálózat a strukturális egyensúly elérésére törekszik. Például kiindulhatunk egy véletlenszerű címkézésből (minden élhez véletlenszerűen rendelünk + vagy – jelet), ezután pedig ismételten keresünk egy kiegyensúlyozatlan háromszöget, és megváltoztatjuk egyik élének előjelét, hogy a háromszög egyensúlyba kerüljön. Ez a modell azt tükrözi, hogy az emberek folyamatosan újraértékelik egymás iránti szimpátiájukat és ellenszenvüket a strukturális egyensúly elérése érdekében.

3.3.1. Strukturális egyensúly a nemzetközi kapcsolatokban

Antal, Krapivsky és Redner (2006) példaként említik az első világháborút megelőző szövetségi rendszerek alakulását, amelyek jól illusztrálják a strukturális egyensúly elméletét. Az 1872–1907 közötti időszakban az európai hatalmak (Nagy-Britannia, Franciaország, Oroszország, Olaszország, Németország és az Osztrák–Magyar Monarchia) között kialakuló baráti és ellenséges kapcsolatok hálózata fokozatosan kiegyensúlyozott állapotba rendeződött, miközben két egymással szemben álló szövetségi blokk formálódott: a Központi Hatalmak szövetsége (Németország, Osztrák–Magyar Monarchia, később Olaszország) és az Antant (Franciaország, Nagy-Britannia és Oroszország). A 3.3. ábra a szövetségek dinamikáját mutatja be.





3.3. ábra. Az európai hatalmak közti szövetségek alakulása az I. világháborút megelőzően: Nagy-Britannia (GB), Franciaország (Fr), Oroszország (Ru), Olaszország (It), Németország (Ge) és az Osztrák–Magyar Monarchia (AH). (a) Három Császár Egyezménye-Szövetsége (1872–1881); (b) Hármass Szövetség (1882); (c) Német–Orosz viszontbiztosítási szerződés megszűnése (1890); (d) Francia–Orosz Szövetség (1891–1894); (e) Entente Cordiale (1904); (f) Brit–Orosz Szövetség (1907). A fekete élek a barátságot, míg a szaggatott piros élek az ellenséges viszonyt jelzik. (Antal et al. 2006)

Ez a történelmi példa rámutat arra, hogy a strukturális egyensúly nem feltétlenül jelent pozitív dolgot: globálisan egy feloldhatatlan ellentétet eredményezett a két szövetségi blokk között, ami végül az első világháború kitöréséhez vezetett.

3.3.2. Strukturális egyensúly az online közösségekben

A strukturális egyensúly elmélete az online közösségi hálózatokban is megfigyelhető, ahol a felhasználók pozitív vagy negatív véleményeket formálhatnak egymásról. Ez megnyilvánulhat például abban, hogy megbíznak-e vagy sem mások értékeléseiben bizonyos termékek kapcsán, ami befolyásolhatja a hálózati kapcsolatok dinamikáját és az egyének döntéshozatalát.

Egy alapos vizsgálat azonban rámutat, hogy a bizalom és a bizalmatlanság dinamikája részben eltér a barát/ellenség dichotómiától (Guha–Kumar–Raghavan–Tomkins 2004). Az egyik lényeges különbség az irányítottságban rejlik: míg a strukturális egyensúly elmélete irányítatlan gráfokkal dolgozik, addig az online értékelések rendszerint irányított gráfokat alkotnak. Például ha egy felhasználó megbízik egy másikban, ebből nem következik egyértelműen, hogy a másik fél mit gondol az elsőről. Ez a különbség jelentős hatással van az ilyen hálózatok szerkezetére és működésére.

A bizalom és bizalmatlanság értelmezése kontextustól függően is eltérő lehet. Ha *A* nem bízik *B*-ben, és *B* nem bízik *C*-ben, akkor két lehetséges forgatókönyv adódik.

Ha a bizalmatlanság ellenségességgként értelmezhető, a strukturális egyensúly elmélete szerint *A*-nak bíznia kellene *C*-ben (+ – – háromszög).

Ha a bizalmatlanság inkább a kompetencia- vagy tudásbeli különbségekre vezethető vissza, akkor valószínű, hogy A C -ben sem fog megbízni. Amennyiben B kevésbé kompetens az adott kérdésben, mint A , és C még kevésbé kompetens, mint B , logikusan következik, hogy C A -hoz képest is alacsonyabb kompetenciával rendelkezik, ami tovább erősíti a bizalmatlanságot.

A Guha et al. (2004) tanulmány szerzői az akkoriban népszerű Epinions közösségi oldal felhasználóit vizsgálták, és arra a megállapításra jutottak, hogy a bizalom és bizalmatlanság kettőssége egy adott környezetben párhuzamosan is megjelenhet. Például azok között a felhasználók között, akik hangsúlyosan politikai témájú könyveket értékelték, a strukturális egyensúly elmélete jól érvényesül, mivel a politikai nézetek mentén alakulnak ki az egymáshoz való kapcsolódások. Ezzel szemben a műszaki termékek értékelése során a bizalom inkább a szakértelemhez kötődik, és a bizalmatlanság hajlamos áttérjedni a felhasználók között, ami eltérő dinamikát eredményez a hálózatban.

Az irányított előjeles gráfok lehetővé teszik az aszimmetrikus kapcsolatok és polarizált viszonyok (pl. bizalom/bizalmatlanság) modellezését, ami különösen hasznos komplex hálózatok, például közösségi platformok, gazdasági rendszerek vagy politikai kapcsolatok elemzésében. Az irányítottság révén ábrázolhatók a transzferhatások, mint a bizalom terjedése, míg az előjelek segítenek a pozitív és negatív kapcsolatok feltárásában. Ezek a gráfok részletesebb topológiai és dinamikus elemzést tesznek lehetővé, miközben valósághűen tükrözik a modern hálózatok bonyolultságát.

3.4. Gyengén kiegyensúlyozott hálózatok

A *gyengén kiegyensúlyozott hálózatok* olyan előjeles gráfok, amelyekben a kiegyensúlyozottság egy kevésbé szigorú feltétel alapján definiálható a strukturális egyensúly elméletéhez képest. Míg a hagyományos strukturális egyensúly szerint egy hálózat kiegyensúlyozott, ha minden háromszögében vagy minden kapcsolat baráti ($+++$), vagy pontosan egy kapcsolat ellenséges ($+-$), a gyengén kiegyensúlyozott hálózatok engedélyezik a teljesen negatív háromszögeket is ($---$). Ugyanakkor kizárják azokat a konfigurációkat, amelyekben két él pozitív és egy él negatív ($++-$).

Tehát egy előjeles teljes gráf gyengén kiegyensúlyozottnak tekinthető, ha nem tartalmaz olyan háromszögeket, amelyekben két pozitív ($+$) és egy negatív ($-$) kapcsolat található. Ez a feltétel abból a megfigyelésből fakad, hogy a „barátaim ellenségek” típusú háromszögek ($++-$) inkább instabilak, és idővel természetesen kiegyensúlyozódnak, például teljes barátsággá alakulva (a barátaim kibékülnek egymással). Ezzel szemben a teljesen negatív háromszögek ($---$) stabilabbak, mivel az ezek kiegyensúlyozódását (például két fél összefog a harmadik ellen) előidéző erők általában gyengébbek, és így ezek a háromszögek kevésbé hajlamosak gyors átalakulásra.

A gyengén kiegyensúlyozott hálózatok egyik alapvető, akár tételként is megfogalmazható tulajdonsága, hogy *mindig felbonthatók két vagy több, egymással ellenséges barátklikkre*. Az egyes klikkeken belül kizárólag pozitív kapcsolatok találhatóak, azaz a tagok között baráti viszony uralkodik, míg a klikkek közötti kapcsolatok kizárólag negatívak, tehát a különböző csoportok tagjai egymással ellenséges viszonyban állnak. Ez a tulajdonság a hálózat globális polarizáltságát tükrözi: a lokális háromszögszintű kapcsolatok mintázata (+++, +-- vagy ---) stabil szerkezeti rendet eredményez.

A tétel belátásához elegendő figyelembe venni, hogy ha három csúcs mindegyike egyazon klikkhez tartozik, akkor azok kapcsolatai +++ háromszöget alkotnak. Ha két csúcs egy klikkben van, a harmadik pedig egy másikban, akkor +- - háromszög alakul ki. Végül, ha mindhárom csúcs különböző klikkhez tartozik, a kapcsolataik --- háromszöget formálnak. Ez a logika garantálja, hogy a hálózat mindig felbontható olyan klikkekre, amelyek között kizárólag negatív, míg a klikkeken belül kizárólag pozitív kapcsolatok vannak, ezzel biztosítva a szerkezeti stabilitást.

A gyengén kiegyensúlyozott hálózatok nem csupán két, hanem több elkülönülő klikkbe rendeződhetnek, ami rugalmasabb értelmezést tesz lehetővé a kapcsolati dinamikák és konfliktusok modellezésében. Ez a hálózattípus segít feltárni a társadalmi rendszerek többpólusú viszonyait és azok strukturális jellemzőit.

3.5. Strukturális kiegyensúlyozottság általános (nem teljes) gráfokban

Általános (nem teljes) gráfok esetében a kiegyensúlyozottság fogalma két ekvivalens definíció alapján érthető meg, amelyek a gráf lokális és globális tulajdonságaira fókuszálnak.

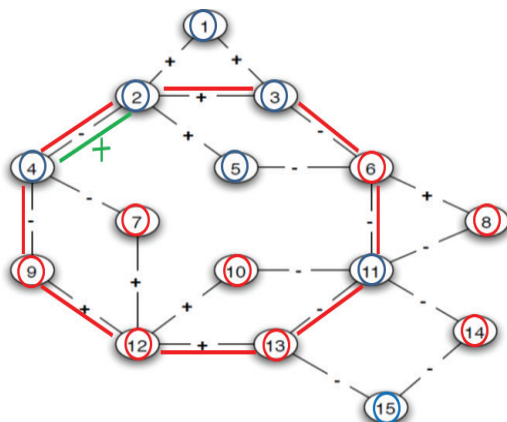
Lokális jellegű definíció: egy nem teljes gráf kiegyensúlyozott, ha kiegészíthető egy kiegyensúlyozott teljes gráffá. Ez azt jelenti, hogy a hiányzó éleket úgy adhatjuk hozzá a gráfhoz, hogy az eredményül kapott teljes gráf megfeleljen a strukturális kiegyensúlyozottság kritériumainak (minden háromszöge vagy + + +, vagy + - - típusú).

Globális jellegű definíció: egy gráf akkor kiegyensúlyozott, ha pontjai két csoportba oszthatók úgy, hogy csoporton belül minden kapcsolat baráti, a csoportok között pedig minden kapcsolat ellenséges.

E két definíció ekvivalens, mert ha egy gráf kiegészíthető egy kiegyensúlyozott teljes gráffá, akkor a pontok szükségszerűen megfelelnek a globális csoportosítási szabálynak is.

Egy fontos szerkezeti tulajdonságot fogalmaz meg az a tétel, miszerint *egy gráf akkor és csak akkor kiegyensúlyozott, ha minden körében (nem csak a*

háromszögekben) a negatív élek száma páros (3.4. ábra). Ez a kritérium biztosítja, hogy minden lokális kapcsolatmintázat kiegyensúlyozott, és nincs ellentmondásos háromszög vagy kör. A B függelék 3. pontja részletesebben tárgyalja a gráfok körbázisának feltárását, amit az érdeklődő olvasók figyelmébe ajánlunk.



3.4. ábra. A piros élek által alkotott körben a negatív élek száma páratlan. Ha a 2–4 él előjelét pozitívvá változtatjuk, akkor megfigyelhető, hogy a kék és piros pontok két csoportot alkotnak, melyekre igaz: a csoportokon belüli kapcsolatok mind pozitívak, míg a két csoport közötti élek negatívak.

A tétel könnyen belátható mindkét irányba:

- Ha a gráf kiegyensúlyozott, akkor definíció szerint felbontható két csoportra úgy, hogy a csoportokon belül minden kapcsolat pozitív és csoportok közt minden kapcsolat negatív. Minden körre, amely csoporton belüli, igaz, hogy csak pozitív éleket tartalmaz. Ha valamely kör átmegy a másik csoportba, akkor vissza is kell jöjjön, hogy bezáruljon, ami páros számú csoportközi negatív élet jelent.
- A fordított irányú bizonyítás összecseng azzal a megfigyeléssel, hogy ha egy kör páratlan számú negatív élet tartalmaz, akkor lehetetlen a gráf csúcsait két ellentétes barátcsoportra osztani, ami a kiegyensúlyozottság definíció szerinti feltétele. Válasszunk ki egy kezdő csúcsot a körön, és helyezzük azt valamelyik halmazba. Ahogy végighaladunk a körön, a pozitív élek végpontjai ugyanabba a halmazba kerülnek, amelybe a kezdőpontjuk is tartozik, míg a negatív élek végpontjai a másik halmazba kerülnek, azaz halmazváltást okoznak. Ha a kör páratlan számú negatív élet tartalmaz, akkor ez páratlan számú halmazváltást jelent, ami azt eredményezi, hogy a kiindulási csúcs az ellenkező halmazba kerülne, mint ahová eredetileg helyeztük. Ezzel ellentmondásra jutunk. Tehát mivel az ilyen körök ellehetetlenítik a két ellentétes baráthalmazra való bontást, jelenlétük szükségszerűen kiegyensúlyozatlan gráfra utal.

3.6. Majdnem kiegyensúlyozott előjeles gráfok

Visszatérve a teljes gráfokhoz, az általánosítás egy másik lehetséges irányát a *majdnem kiegyensúlyozott előjeles gráfok* fogalma jelenti. Az ide kapcsolódó tétel így szól:

Ha egy gráfban a háromszögek 99,9%-a kiegyensúlyozott, akkor teljesül az alábbiak egyike:

- vagy létezik egy olyan pontokból álló halmaz, amely a gráf legalább 90%-át lefedi, és amelyen belül a kapcsolatok legalább 90%-a baráti (pozitív),
- vagy a gráf felosztható két pont-halmazra úgy, hogy mindkét halmazon belül a kapcsolatok legalább 90%-a pozitív, míg a két halmaz közötti kapcsolatok legalább 90%-a ellenséges (negatív).

3.7. Összegzés

Ahogy egyre mélyebbre ásunk a társas hálózatok szerkezetébe, világossá válik, hogy a pozitív és negatív kapcsolatok dinamikája nem csupán lokális szinten fejti ki hatását – ezek az „apró kölcsönhatások” a teljes hálózat arculatát formálják. A strukturális egyensúly elmélete nemcsak azt segít megérteni, hogyan törekszenek az emberek belső egyensúlyra a barátságok és ellenségeskedések mentén, hanem azt is, hogyan bomlanak ki ebből a törekvésből előrejelezhető, globális mintázatok. Ez az összefonódás a lokális döntések és a globális struktúrák között rávilágít arra, hogy a társas világ összetettsége mögött időnként egészen letisztult, matematikailag megragadható törvényszerűségek húzódnak meg.

4. Fókuszban a pontok: hálózatok és kontextusuk

A hálózatelemzés egy másik központi kérdése, hogy a kapcsolati struktúrák és a hálózat pontjainak (például egyének) tulajdonságai hogyan tükröződnek a rendszer szerkezetében és dinamikájában. A hálózatok nem csupán az összeköttetések szövevényes mintázatait jelentik; fontos szerepet játszik az a környezet is, amelyben ezek a kapcsolatok kialakulnak és működnek. E kontextus megértése segíti a hálózati mintázatok, valamint az egyéni és közösségi viselkedés közötti összefüggések feltárását.

A hálózatok vizsgálatakor két fő szempont különíthető el: (i) Az élek ábrázolják, hogy ki kivel áll kapcsolatban, és ez a hálózat *belső szerkezetére* és dinamikájára utal. (ii) A pontok (csúcsok) tulajdonságai pedig a *külső kontextust* tükrözik, mint például az egyének érdeklődése, társadalmi helyzete vagy lakóhelye.

4.1. A homofília és hatása a hálózat struktúrájára

Ezen összefüggések vezetnek el a *homofília* fogalmához, amely arra utal, hogy az emberek általában azokhoz vonzódnak, és velük alakítanak ki kapcsolatokat, akik hasonlóak hozzájuk. A homofília a hálózati struktúra egyik alapvető jellemzője, amely gyakran megerősíti a hasonló emberek közötti kapcsolatokat, például iskolai vagy munkahelyi barátságok esetében.

E kérdéskör aktualitását és társadalmi jelentőségét hangsúlyozza Au (2023), aki szerint a homofília kulcsfontosságú, például a nyugati társadalmakat érintő nagy kihívások megértésében, mivel feltárja az ezeket tápláló mechanizmusokat. Az etnikai konfliktusok, amelyek a Közel-Kelet destabilizációja miatti menekült-hullám hatására alakultak ki, jól szemléltetik, hogyan fokozhatja a homofília a feszültségeket. Ha az emberek hasonló jellemzőik alapján csoportosulnak, de a társadalmi sokszínűség nő, az egyenlőtlen feltételek mellett zajló csoportközi interakciók konfliktusokat szülhetnek.

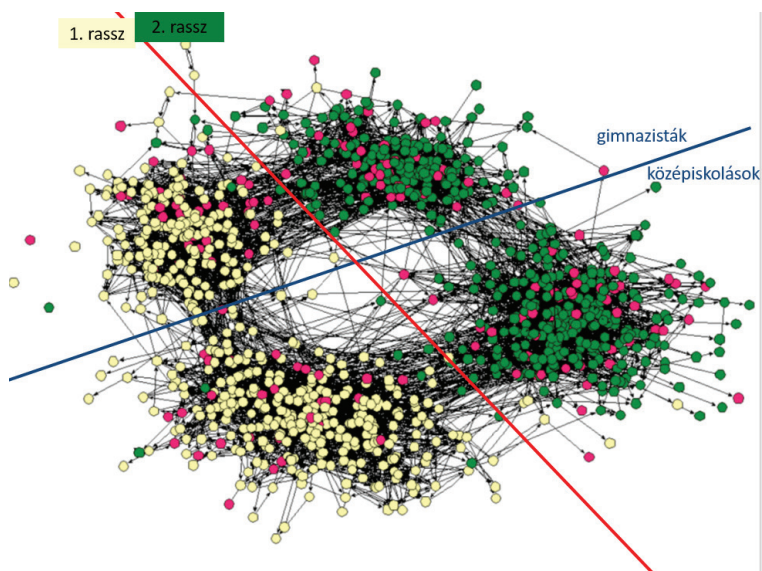
A homofília hatását jól szemlélteti a 4.1. ábra, amely egy városi gimnázium (6–8. osztályok) és középiskola (9–12. osztályok) diákjainak társas kapcsolathálóját ábrázolja (Moody 2001). Az ábra különböző színekkel jelöli a diákok rasszát, ami vizuálisan is kiemeli a hálózaton belüli csoportosulásokat.

Az ábrán két fő csoportosulás figyelhető meg:

1. rassz szerinti elkülönülés: a diákok rassz alapján különböző színű körökkel jelennek meg. A hasonló etnikai háttérrel rendelkező tanulók között sűrűbbek a kapcsolatok, míg az eltérő rasszú csoportok között kevesebb a

kapcsolat. Ez a homofília egy tipikus példája, amelyben a diákok hajlamosak saját etnikai csoportjukon belül kapcsolatokat kialakítani, így sűrűn összekapcsolódó, homogén csoportokat alkotnak.

2. kor és iskolai szint szerinti elkülönülés: az ábrán jól látható elkülönülés van a középiskolás és gimnazista tanulók között. A diákok inkább a saját iskolai szintjükhöz tartozó társakkal alakítanak ki barátságokat, ami további rétegződést eredményez.



4.1. ábra. Baráti kapcsolatok különböző rasszú és eltérő iskolai szintű diákok között. A hálózati gócpontokat hasonlóság jellemzi. (Moody 2001)

Ez a példa világosan mutatja, hogyan hozhat létre a homofília sűrűn összekapcsolt, homogén részeket a hálózatban, amelyek csak gyengén kapcsolódnak más csoportokhoz. A rassz és az iskolai szint szerinti elkülönülés globális szinten is kiemelkedik, és rávilágít arra, hogy a hasonló tulajdonságokkal rendelkező egyének közötti kapcsolatok miként formálják a hálózat általános struktúráját.

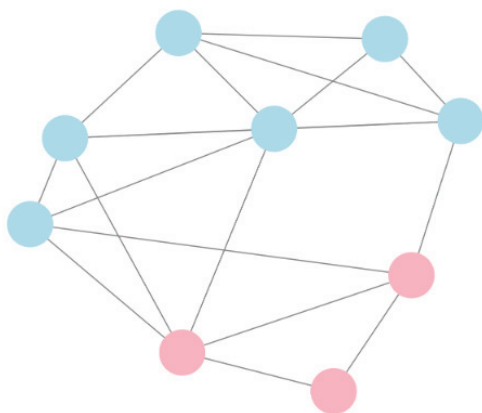
4.2. A homofília számszerűsítése

A homofília mérése kulcsfontosságú, különösen olyan esetekben, amikor a vizuális ábrázolásból nem egyértelmű a hasonló tulajdonságú egyének csoportosulása. A homofília számszerűsítéséhez általánosan az alábbi megközelítést alkalmazzuk, ha a csoport két különböző típusú egyént tartalmaz, például fiúkat és lányokat.

Tegyük fel, hogy egy hálózatban az egyének két csoportba sorolhatók: az egyik csoporthoz tartozók aránya p , a másik csoporthoz tartozók aránya $q=1-p$. A különböző kapcsolatok véletlenszerű eloszlása esetén a kapcsolattípusok várható aránya a következőképpen számítható ki:

- az első csoporton belüli kapcsolatok aránya: p^2 ,
- a második csoporton belüli kapcsolatok aránya: q^2 ,
- a két csoport közötti kapcsolatok aránya: $2pq$.

Ha például egy valós hálózatban a két csoport közötti kapcsolatok száma jelentősen alacsonyabb a $2pq$ -nál, akkor erős homofíliára utal, míg ha magasabb, az inverz homofília jele lehet.



4.2. ábra. A homofília jelenségét szemléltető ábra. A kék pontok fiúkat, a rózsaszínek lányokat, az élek pedig baráti kapcsolatokat ábrázolnak.

Most vegyük a 4.2. ábra bemutatott konkrét példát, amelyben a hálózatban $N = 6$ fiú és $M = 3$ lány van, így a hálózatban a fiúk aránya $p = 6/9 = 2/3$, a lányok aránya pedig $q = 3/9 = 1/3$. Véletlenszerű eloszlás esetén a fiú-lány kapcsolatok várható aránya a következőképpen alakulna: $2pq = 4/9 = 8/18 = 0,44$.

Az ábrán megjelenített hálózatban ténylegesen 18 kapcsolat van, amiből 10 fiú-fiú kapcsolat, 3 lány-lány kapcsolat és 5 fiú-lány kapcsolat. Tehát a tényleges fiú-lány kapcsolatok aránya: $5/18 = 0,27$, ami jelentősen alacsonyabb, mint a véletlenszerűen várt $8/18 = 0,44$ -as érték. Ez arra utal, hogy a két csoport között viszonylag kevesebb tényleges kapcsolat van, mint a véletlen eloszlás szerinti várható érték, vagyis a hálózatban erős homofília figyelhető meg.

Az inverz homofília akkor jelentkezik, amikor az emberek különböző tulajdonságú egyénekkel alakítanak ki kapcsolatokat. Például a romantikus viszonyokra jellemző az inverz homofília, hiszen az ellenkező neműek között alakulnak ki kapcsolatok. A fenti példában, ha a fiú-lány kapcsolatok száma nagyobb lenne, mint a $2pq$ -val számított várható érték, az inverz homofíliára utalna. No-homofíliáról

beszélünk, ha a kapcsolatok véletlenszerűen oszlanak meg a hasonló és különböző tulajdonságú egyének között.

4.3. Szelekció és szocializáció: a homofília két mechanizmusa

A homofília két fő mechanizmuson alapul:

- *szelekció*: az egyének tudatosan olyan emberekkel alakítanak ki kapcsolatot, akik hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, azaz „madarat tolláról, embert barátjáról”. Itt az egyének eredeti tulajdonságai határozzák meg, hogy kivel barátkoznak.
- *szocializáció*: a barátok hatnak egymásra, és idővel egyre hasonlóbbá válnak. „Aki bölcssekkkel jár, maga is bölcs lesz, de aki ostobákhoz társul, az rosszul jár” – az emberek alkalmazkodnak barátaik tulajdonságaihoz és viselkedéséhez.

4.3.1. Longitudinális vizsgálat a kamaszkori barátságokról

Egyetlen hálózati pillanatkép alapján nehéz felismerni, hogy a homofília (azaz a hasonló tulajdonságú emberek közötti kapcsolat kialakulása) milyen mértékben tulajdonítható a szelekciónak vagy a szocializációnak. Felmerül a kérdés, hogy a hálózat résztvevői a barátaik hatására kezdtek hasonlóan viselkedni (szocializáció), vagy eleve olyan embereket választottak barátjuknak, akik már hasonlítottak rájuk (szelekció). Ezt a kérdést longitudinális tanulmányokkal lehet vizsgálni, ahol egy társas hálózat kapcsolatait és az azon belüli viselkedésmintákat időben követik. Így megfigyelhetővé válik, hogy az egyének viselkedése miként változik új kapcsolatok megjelenése után, illetve hogyan alakulnak a kapcsolatok, amikor az egyén viselkedése megváltozik.

Példaként említhetjük a kamaszok közötti barátságokat, ahol a viselkedés (például tanulmányi teljesítmény vagy szabályszegő magatartás) hosszú távú tanulmányozása során kiderült, hogy a tinédzserek mind szelekció, mind szociális befolyás hatására mutatnak hasonló viselkedésmintákat. A kamaszok gyakran olyan barátokat választanak, akik hasonló érdeklődési körrel rendelkeznek (szelekció), ugyanakkor a közösség normáihoz való alkalmazkodás is jelentős szerepet játszik, ami miatt hajlamosak átvenni a csoport viselkedési mintáit (szocializáció). A kutatások viszont azt is kimutatták, hogy bár mindkét hatás jelen van, a szelekció sok esetben jelentősebb, mint a társas nyomásból eredő szociális befolyás (Cohen 1977; Kandel 1978, 2017).

Ez a különbségtétel nemcsak az alapvető okok feltárása szempontjából lényeges, hanem annak megértéséhez is fontos, hogy miként lehet hatékonyan

beavatkozni egy adott rendszerben. Ha például a kábítószer-fogyasztás egy társas hálózatban homofíliás mintázatot mutat, akkor egy, az érintett diákokat célzó program sikeresen visszaszoríthatja a drogfogyasztást (Cairns–Cairns 1995). Amennyiben a homofília szociális befolyás révén jön létre, akkor a célzott diákok leszokása pozitívan hat barátaik viselkedésére is, így a program szélesebb körű eredményességet érhet el a hálózat egészére nézve.

Ellenben ha a homofília nagyrészt szelekciós hatásokból fakad, a program eredményei korlátozottabbak lehetnek. Ebben az esetben azok a diákok, akik leszoknak a drogfogyasztásról, valószínűleg új, nem drogfogyasztó barátokat keresnek, anélkül, hogy lényegesen megváltoztatnák az eredeti társas kör viselkedését. Ez a példa rávilágít arra, hogy a szelekció és a szociális befolyás közötti különbségek megértése elengedhetetlen ahhoz, hogy egy beavatkozás valóban hatékony legyen a hálózat egészében.

4.3.2. Christakis és Fowler elhízási kutatása

A szelekció és szocializáció megkülönböztetésének fontosságát jól példázza Christakis és Fowler (2007) munkája is, amely a társadalmi hálózatok egészségügyi hatásait vizsgálta. Egy hosszú távú, 32 éven át zajló kutatás során, amelyben mintegy 12 000 személyt követtek nyomon, a kutatók az elhízás állapotát és a kapcsolati hálózat szerkezetét elemezték. A kutatók azt találták, hogy az elhízott és nem elhízott személyek olyan módon csoportosulnak a hálózatban, amely a homofíliával összhangban áll: az emberek jobban hasonlítottak társaikra elhízási állapotuk szerint, mint egy olyan hálózatban, ahol az elhízottsági állapotot véletlenszerűen osztották volna ki.

Az elhízással összefüggő klaszterek hátterének feltárása érdekében a kutatók hangsúlyosan két hipotézis tesztelésére összpontosítottak:

- szelekció hatása: az emberek hasonló elhízottsági státusszal rendelkező barátokat választanak;
- szociális befolyás: az egyén barátainak elhízási állapota viselkedési befolyást gyakorolhat, ami később kihat az egyén saját elhízási állapotára.

Továbbá, korrekt módon azt is vizsgálták, hogy a homofília más jellemzők mentén jelentkező „zavaró hatása” magyarázhatja-e az eredményeket, vagyis hogy a hálózat szerkezete olyan hasonlósági mintázatokat tükröz-e más dimenziókban, amelyek korrelálnak az elhízás státuszával.

Christakis és Fowler statisztikai elemzései szerint, az összes észlelt hatás figyelembevétele mellett is jelentős bizonyíték van arra, hogy az elhízás egyfajta „szociális fertőzésszerű” jelenségként terjedhet. Az eredmények azt sugallják, hogy a szociális befolyás révén az elhízás elterjedhet egy társadalmi hálózatban, hasonlóan ahhoz, ahogy egy viselkedési minta vagy szokás terjed. Bár az elhízás nem fertőző betegség, a társadalmi normák és az étkezési szokások révén „átterjedhet” egyik egyénről a másikra.

A Christakis és Fowler kísérlet eredményei különböző címekkel jelentek meg az Egyesült Államokban és az Egyesült Királyságban, amelyek figyelemre méltó kulturális különbségekre világítanak rá a felelősségvállalás és a társas befolyás értelmezése terén.

A *The New York Times* címe – „*Find Yourself Packing It On? Blame Friends*” – közvetlenül a barátokra hárítja a felelősséget, sugallva, hogy a túlsúly elsősorban szociális, külső hatások eredménye. Ez a narratíva azt az üzenetet közvetíti, hogy az egyén egészségi állapotát nagymértékben meghatározza a társas környezete, és kevésbé esik szó a személyes felelősségről. Az ilyen megközelítés az amerikai kulturális mintázatokra utalhat, ahol gyakran hangsúlyosabb szerepet kapnak a külső befolyásoló tényezők, míg az egyéni döntések és következményeik háttérbe szorulnak.

Ezzel szemben a *The Guardian* címe – „*Are your friends gaining weight? Perhaps you are to blame*” – sokkal inkább az egyén felelősségére koncentrál. A cím azt sugallja, hogy viselkedésünk nemcsak ránk van hatással, hanem közvetve a barátaink testi állapotát is befolyásolhatja, tehát akár „miattunk” is hízhatnak. Ez a szemléletmód az angolszász kultúrában mélyen gyökerező önreflexiót és felelősségvállalást tükrözi. A cím arra ösztönzi az olvasót, hogy elgondolkodjon saját hatásain másokra, és tudatosabban viszonyuljon a társas kapcsolataiban betöltött szerepéhez.

A két cím különböző értelmezése jól mutatja, hogy bár ugyanazt a tudományos eredményt közvetítik, a kulturális különbségek miatt eltérő módon teszik azt érthetővé és befogadhatóvá. Ez rávilágít arra, hogy a társas befolyásra vonatkozó kutatási eredmények nemcsak új információt adnak a közönség számára, hanem formálhatják is az emberek gondolkodását a felelősségvállalásról és társas kapcsolataik hatásairól.

A fentebb bemutatott példák kiemelik, hogy a homofília megfigyelése önmagában gyakran csak kiindulópont a mélyebb kutatásokhoz, amelyek célja annak megértése, hogy miért van jelen a homofília, hogyan befolyásolják az alapvető mechanizmusok a hálózat fejlődését, és hogy ezek a mechanizmusok miként lépnek kölcsönhatásba az egyének viselkedésének befolyásolására irányuló külső beavatkozásokkal. A szelekció és a szociális befolyás közötti különbségek megértése nélkül egy beavatkozás nem lehet teljes mértékben hatékony a hálózat egészére nézve.

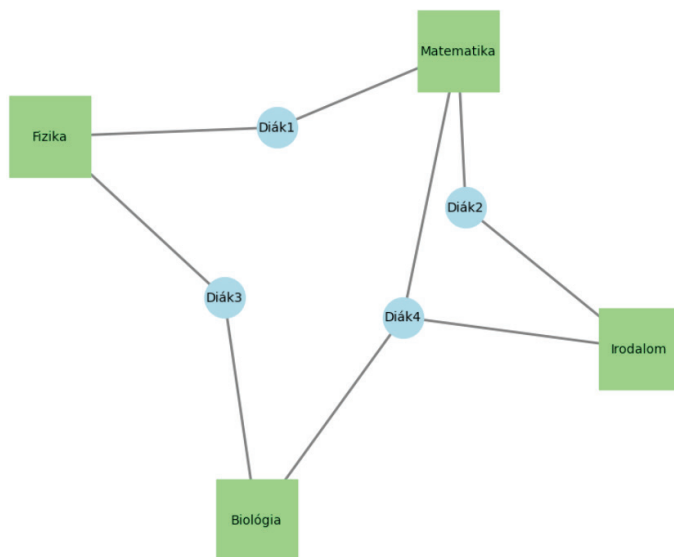
4.4. Hovatartozás a hálózatokban

Eddig a hálózatokban létrejövő kapcsolatok kialakulását befolyásoló külső tényezőkről volt szó, amelyek a csomópontok hasonló jellemzőin, viselkedésén és tevékenységein alapulnak, és így „kívül” helyezkednek el a hálózaton.

A hovatartozási vagy affilációs hálózatok fogalmával azonban ezek a tényezők közvetlenül beépíthetők a hálózatba. Ennek érdekében nemcsak az emberek, hanem a „kontextusok” (mint tevékenységi helyszínek, társadalmi csoportok stb.) is csomópontként szerepelnek. Ez a megközelítés mélyebb megértést tükröz a homofília különböző vetületeiről, és lehetővé teszi annak vizsgálatát, hogy miként fejlődnek együtt a baráti kapcsolatok és a közös tevékenységek a hálózaton belül.

4.4.1. Hovatartozási hálózatok és fókuszpontok

A *hovatartozási hálózatokban* az emberek és a közös tevékenységek is csomópontként jelennek meg. Az olyan közös pontokat, mint például közös munkahely, szervezet, hobbik vagy találkozóhelyek, *fókuszpontoknak* nevezzük (angolul „foci”, „focal points”) (Feld 1981). Ezek a fókuszpontok olyan társadalmi, pszichológiai, jogi vagy fizikai entitások, amelyek köré társas tevékenységek szerveződnek. A hovatartozási hálózatban az egyének és a fókuszpontok közötti kapcsolatokat úgy ábrázoljuk, hogy minden egyénhez és fókuszponthoz egy-egy csomópont tartozik, és élek kötik össze az egyéneket azokkal a fókuszpontokkal, amelyekben részt vesznek vagy amelyekhez tartoznak.



4.3. ábra. Négy diák és négy kurzus hovatartozási hálózata

Ez a hálózati forma tehát a személyek és a fókuszpontok közötti kapcsolatok szerkezetét mutatja meg, két különböző típusú csomópontot tartalmazva:

embereket és fókuszpontokat. A hovatartozási hálózatokat páros (bipartit) gráf-ként ábrázoljuk, ahol az élek mindig az egyik típusú csomópontból a másikba vezetnek (tehát nincs kapcsolat két egyén vagy két fókuszpont között). A 4.3. ábra négy diák és négy kurzus hovatartozási hálózatát ábrázolja. A gráf páros, mivel minden él diák-csomópontot köt össze egy kurzus-csomóponttal, így bemutatva, hogy mely diákok vették fel az egyes kurzusokat. A diákok között, illetve a kurzusok között nem szerepelnek közvetlen kapcsolatok. A páros gráf fogalmát az első fejezetben ismertettük. Algoritmikai részleteket pedig az A függelék 2. pontja tárgyal.

4.4.2. A szociális és hovatartozási hálózatok együttes fejlődése

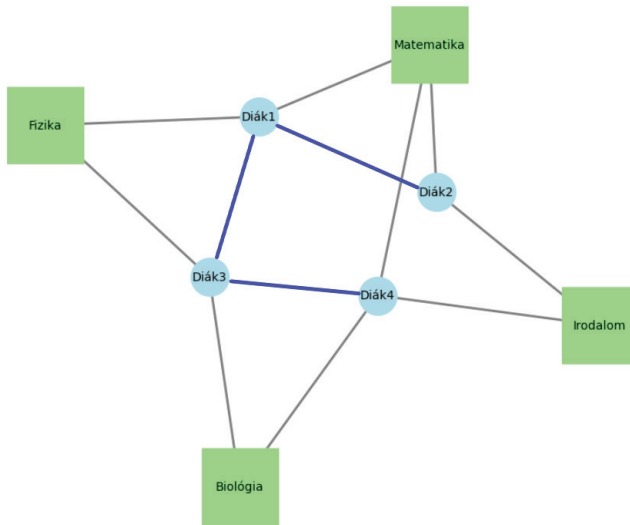
A szociális és hovatartozási hálózatok idővel változnak: új barátságok alakulnak ki, és az emberek új tevékenységekben vesznek részt. Ez a folyamat a szelekció és a társadalmi befolyás együttes hatását tükrözi: ha két ember ugyanahhoz a fókuszponthoz tartozik, valószínűbb, hogy barátok lesznek, míg a barátok befolyásolhatják egymás tevékenységválasztását. A 4.4.a. ábra szociális hovatartozási hálózatnak tekinthető, hiszen megjelenít diák-diák barátságokat is (kék élek).

Ezen szociális hovatartozási hálózatok vizsgálata során három fő mechanizmust különböztethetünk meg, amelyek a kapcsolatokat háromszögszerű mintázatokban zárják le. A háromszögek jelentése attól függ, hogy az adott csomópontok embereket vagy fókuszpontokat képviselnek:

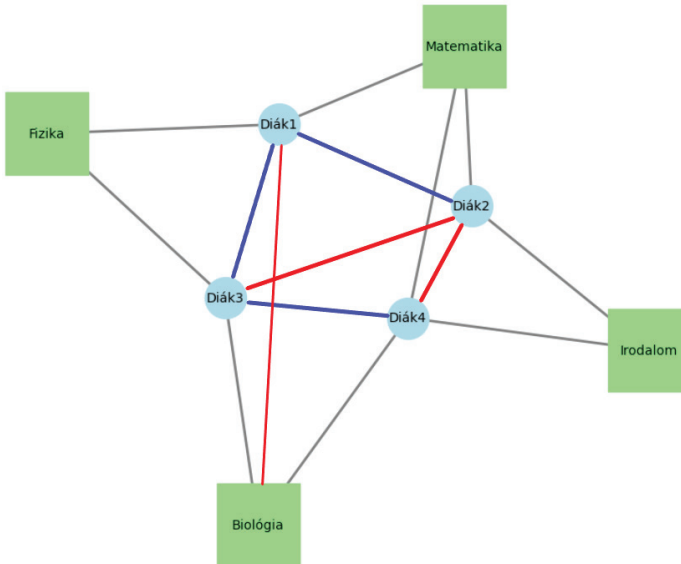
1. *triadikus bezáródás*: ha három személy között már van két barátság, akkor valószínű, hogy a harmadik is kialakul. Ez a triadikus bezáródás elve.
2. *fókuszpont-bezáródás*: ha két embernek van egy közös fókuszpontja, könnyebben lépnek kapcsolatba egymással, mivel a fókuszpont közvetítőként működik.
3. *tagsági bezáródás*: ha egy személy barátja részt vesz egy fókuszpontban, nagyobb eséllyel fog ő maga is csatlakozni ehhez a fókuszponthoz.

A 4.3.b. ábrán látható piros élek létrejöttének hátterében különböző mechanizmusok állhatnak: *Diák2* és *Diák3* barátsága egy közös barátira vezethető vissza; *Diák2* és *Diák4* barátsága pedig abból fakad, hogy mindketten ugyanarra a kurzusra járnak. *Diák1* a biológiakurzust azért veszi fel, mert barátja, *Diák3* is felvette.

Ez a három mechanizmus – a triadikus bezáródás, a fókuszpont-bezáródás és a tagsági bezáródás – mind a kapcsolatok háromszögszerű záródásán keresztül működik, de eltérő kontextusokban és különböző jelentéssel. A hovatartozási hálózatok elemzése így betekintést nyújt a társas kapcsolatok, tevékenységek és közösségi csoportok összefonódó dinamikájába, valamint a közösségek és baráti kapcsolatok kialakulásának alapvető mozgatórugóiba.



(a)



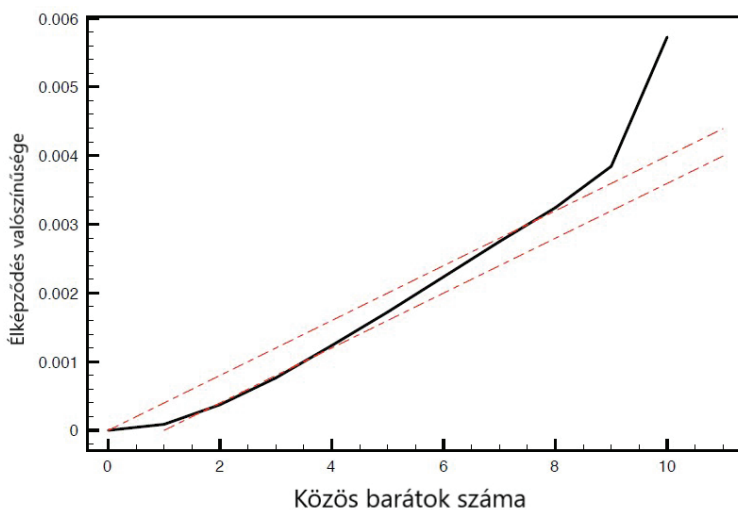
(b)

4.4. ábra. Négy diák és négy kurzus szociális hovatartozási hálózata két különböző időpontban, (a) és (b) ábrák

4.4.3. Több közös barát, több közös tevékenység

Érdekes kérdés, hogy a közös barátok vagy a közös tevékenységek számának növekedése hozzájárul-e a kapcsolatok kialakulása valószínűségének növekedéséhez.

Triadikus bezáródás és közös barátok. A vizsgálatok feltárták, hogy két személy között a kapcsolat kialakulásának valószínűsége növekszik a közös barátok számával, ami a nagyobb bizalom, a több interakciós lehetőség és az erősödő homofília hatására következik be. Kossinets és Watts (2006) egy amerikai egyetem 22 000 hallgatójának egyéves e-mail-kommunikációját elemezve végeztek kísérletet, napi hálózati pillanatképek alapján kiszámítva a $T(k)$ értéket – a kapcsolat kialakulásának valószínűségét két ember között k közös barát esetén (4.5. ábra). Az eredmények alapján $T(0)$ (azaz nincs közös barát) közel nulla volt, míg $T(k)$ szinte lineárisan nőtt a k növekedésével. Különösen markáns növekedést tapasztaltak egy és két közös barát esetén, ami kiemeli a triadikus bezáródás erejét. Ezen kívül nyolctól tíz közös barátig szintén felfelé mutató hatás jelentkezett, bár ez egy kisebb alcsoportot érintett, mivel kevés olyan pár volt, akiknek ennyi közös barátjuk volt, anélkül, hogy már kapcsolatban álltak volna egymással.

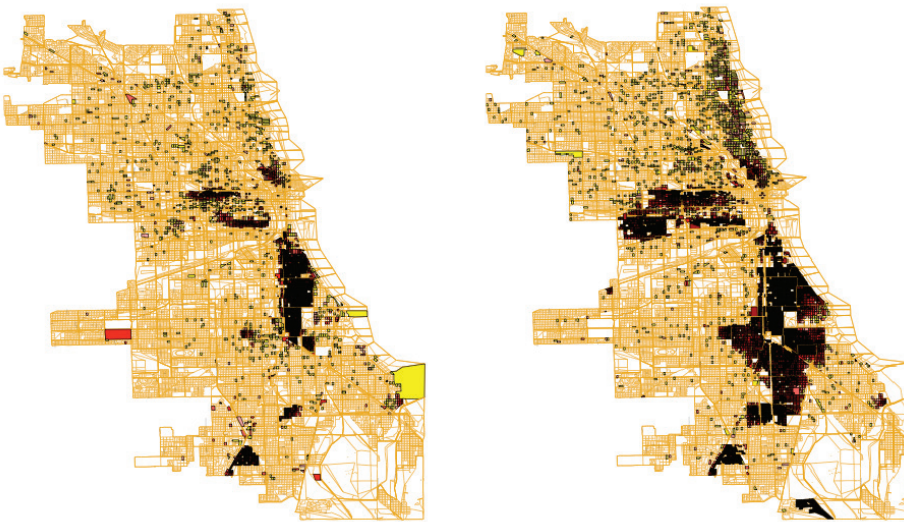


4.5. ábra. A triadikus bezáródás hatásainak számszerűsítése egy e-mail-adatállomány alapján (Kossinets–Watts 2006). Az adatokból származó görbét a fekete folytonos vonal ábrázolja, míg a szaggatott vonalak két egyszerű alpmódel alapján számított valószínűségeket mutatnak, amelyek feltételezik, hogy a közös barátok független valószínűséggel járulnak hozzá a kapcsolat kialakulásához.

Kossinets és Watts a „fókuszbezáródást” is vizsgálták, ahol a közös tevékenységek alapját közös órák jelentették. A hallgatók órarendjét alapul véve minden egyes óra egy „fókuszpontnak” minősült, és kiszámították a kapcsolat kialakulásának valószínűségét a megosztott órák száma alapján. Míg egy közös óra hasonló hatást gyakorolt a kapcsolat kialakulására, mint egy közös barát, a további közös órák hatása csökkenő hozadékot mutatott.

Az eredmények azt mutatják, hogy bár a közös barátok száma jelentősen növeli a kapcsolat kialakulásának valószínűségét, a közös tevékenységek számának növekedésével egyre kevésbé nő a kapcsolatok kialakulása. Emellett a nyolctól tíz közös barátig megfigyelt növekedés, bár egy kisebb alcsoportot érint, kiemeli, hogy a magas számú közös kapcsolatok továbbra is elősegítik a kapcsolatok létrejöttét. Ez a különbség rámutat, hogy a társadalmi és tevékenységalapú kapcsolatok eltérő módon járulnak hozzá a hálózat fejlődéséhez.

4.5. Szegregáció: a Schelling-modell

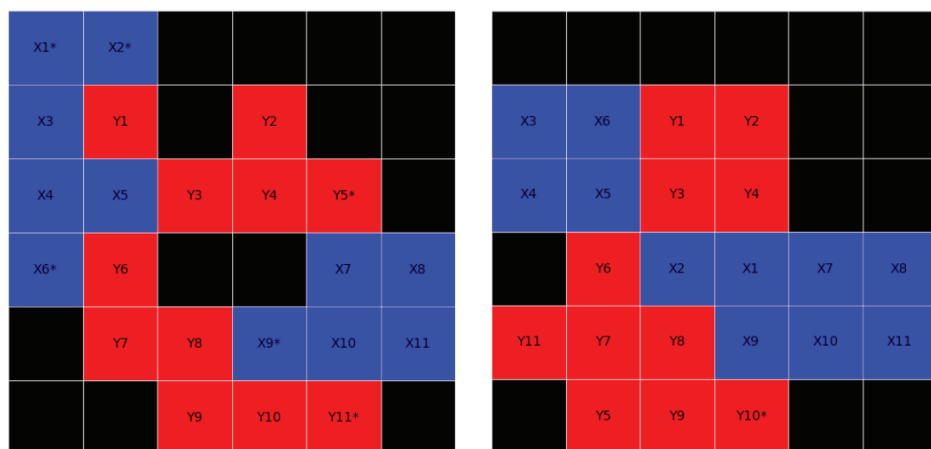


4.6. ábra. Az emberek azon hajlama, hogy etnikailag homogén környékeken éljenek, jól látható térbeli szegregációs mintázatokat hoz létre – amint az a Chicago 1940-es (bal) és 1960-as (jobb) évekbeli térképein is megfigyelhető (Möbius–Rosenblat 2001). A sárga és narancssárga színnel jelölt blokkokban az afroamerikaiak aránya 25% alatt marad, míg a barna és fekete blokkokban ez az arány meghaladja a 75%-ot.

A Schelling-modell egy egyszerű, ám rendkívül szemléletes módja annak, hogy bemutassuk, hogyan alakulhat ki szegregáció egy társadalomban, még akkor is, ha az egyének csekély mértékű, de határozott preferenciákat táplálnak saját csoportjuk iránt. Thomas Schelling amerikai közgazdász fejlesztette ki a modellt a 20. század második felében, hogy a városi szegregáció és az emberi elvándorlási minták vizsgálatára szolgáljon (Schelling 1972, 1978). A 4.6. ábra Chicagóra vetíti le ezt a jelenséget. A modell alapján szemléletesen megérthetjük, hogyan vezethetnek a társadalomban jelen lévő kisebb preferenciák és apró döntések nagy léptékű eloszlási mintázatokhoz.

4.5.1. A Schelling-modell működése

A Schelling-modellben az egyének egy rácsszerkezetű hálózaton helyezkednek el, ahol minden egyes pont egy „lakos” (például egy személy vagy család). A rács egy meghatározott részét két különböző csoport képviseli (például kékek és pirosak, vagy két különböző etnikai csoport), és a többi rácspont üres helyet jelöl, ahová a lakosok költözhetnek.



4.7. ábra. A Schelling-modell szimulálása 6×6 méretű rácson (bal: kezdeti állapot; jobb: egy kör utáni állapot). Megelégedettségi küszöbérték: legalább 3 hasonló szomszéd. (*)-gal jelöltük az „elégedetlen” lakosokat.

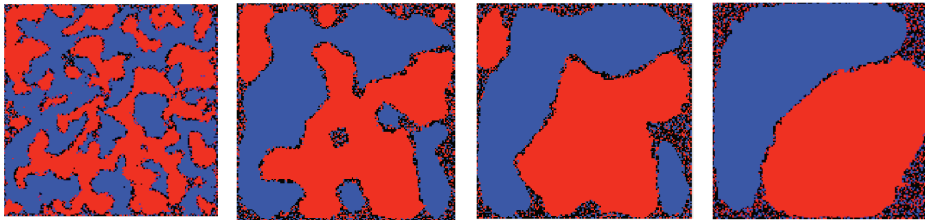
A modell lényege, hogy minden egyes lakosnak van egy meghatározott küszöbértéke, amely meghatározza, hogy milyen arányban szeretné, ha szomszédjai a saját csoportjából valók lennének. Amennyiben egy lakos szomszédságában lévő saját csoportjabeliek aránya nem éri el ezt a küszöbértéket, a lakos költözni fog egy olyan helyre, ahol ez a feltétel teljesül. Ezt a folyamatot iterálva a lakosok egy

idő után stabil eloszlást érnek el, amelyet a modell révén tanulmányozhatunk. A 4.7. ábra szemléletesen mutatja be, milyen jelentős változást idézhet elő akár egyetlen költözési hullám is, egy csupán 3-as küszöbérték mellett. Míg a bal oldalon, a kiindulási állapotban csak egyetlen lakosnak nem volt „idegen” szomszédja (Y2), a jobb oldali állapotban már hat ilyen lakos van (X3,Y2,X8,Y11,X11,Y5), pedig ez nem volt szándékos cél. A vizsgált jelenséget még szemléletesebben ábrázolja a 4.8. ábra, ahol a szimuláció 150x150 méretű rácson zajlik 800 körön keresztül, 4-es küszöbértékkel. További algoritmikai részleteket talál az olvasó a B függelék 4. pontja keretében.

4.5.2. A Schelling-modell alkalmazása a szegregáció vizsgálatára

A modell különösen hasznos a városi szegregáció, az iskolai szegregáció és a lakossági megoszlás különböző formáinak tanulmányozására. Segítségével megérthetjük az alábbi jelenségeket.

Kis preferenciák nagy léptékű hatása: a modell érzékelteti, hogy az egyéni szinten jelentéktelennek tűnő preferenciák hogyan vezethetnek önkéntelenül társadalmi szintű, erőteljes szegregációhoz. Az emberek nem feltétlenül akarnak teljes elkülönülést, ám a saját csoportjukkal kapcsolatos kisebb preferenciák is elegendők ahhoz, hogy szinte homogén csoportok alakuljanak ki.



4.8. ábra. A Schelling-modell szimulációjának négy köztes állapota (20, 150, 350 és 800 kör után) egy 150×150-es rácson, ahol a küszöbérték 4, és mindkét típusból 10 000 lakos található. A költözési hullámok előrehaladtával a rácson a nagy homogén területek fokozatosan növekednek, kiszorítva a kisebb, keskenyebb régiókat.

Dinamikus stabilitás és mobilitás: a Schelling-modell megmutatja, hogy a társadalmi stabilitás elérhető ugyan, de csak akkor, ha a lakosság nagy része megtalálja az általa preferált környezetet. Ha ez nem teljesül, akkor nagyarányú költözések és átrendeződések zajlanak, ami további szegregációhoz vezethet.

Városfejlesztési döntések támogatása: a modell segíthet a városfejlesztési politikák kialakításában, hiszen megmutatja, hogy miként hatnak az egyének lakóhelyválasztási preferenciái a városi szintű mintázatokra. A helyi és kormányzati

beavatkozások során érdemes figyelembe venni a szegregáció kialakulásának a mechanizmusát, különösen a vegyes lakóterületek fenntartása vagy a lakásprogramok kialakítása során.

A Schelling-modell tehát egy rendkívül egyszerű, de mélyreható eszköz arra, hogy feltárjuk a szegregáció dinamikáját. Megmutatja, hogy a csoportok közötti kisebb preferenciák is végső soron nagy léptékű szegregációhoz vezethetnek, amennyiben ezek a preferenciák az egyének döntéseit rendszeresen befolyásolják.

4.6. Összegzés

Mintegy konklúzióként ehhez a fejezethez kijelenthetjük, hogy a hálózati kutatások és a kontextuális tényezők közötti összefüggések vizsgálata rávilágít arra, hogy a kapcsolatok nemcsak az összeköttetések mentén szerveződnek, hanem az egyének tulajdonságai és környezetük is jelentős szerepet játszanak. A homofília, a triadikus bezáródás, a szociális és hovatartozási hálózatok, valamint a szegregációs modellek mind azt mutatják, hogy a hálózati struktúra és a kontextus szorosan összefonódnak, és közösen alakítják a társadalmi rendszerek működését.

5. Az artikulációs pontok szerepe és stratégiai fontossága a hálózatok működésében

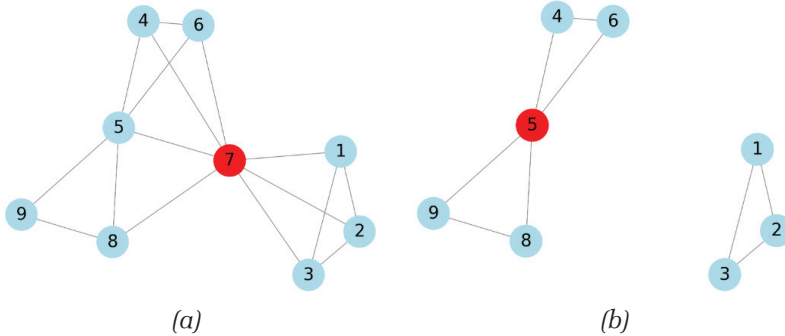
A komplex hálózati rendszerek vizsgálatának egyik alapvető kihívása a hálózat szerkezete és működése közötti kölcsönhatás feltárása. Ezt a kérdést a gráfelmélet egy klasszikus fogalmán, az artikulációs pontokon keresztül közelíthetjük meg. Ahogy már az első fejezetben definiáltuk, az artikulációs pont (AP) egy olyan csomópont a hálózatban, amelynek eltávolítása megszakítja a hálózat összefüggését, vagy jelentősen csökkenti annak szerkezeti integritását. Az ilyen pontok elemzése különösen fontossá válik olyan rendszerek esetében, ahol a hálózat gyors és célzott megbontása vagy éppen védelme a cél. Rosszindulatú hálózatok, például terroristacsoportok kommunikációs hálózatainak esetében az artikulációs pontok azonosítása lehetőséget ad a hálózat gyors és hatékony szétrombolására. Ezzel szemben jótékony, létfontosságú hálózatok, mint az infrastruktúrák, katonai rendszerek vagy kiberhálózatok esetében ezek a pontok gyenge láncszemként működhetnek, amelyek azonosítása hozzájárulhat a hálózat biztonságának és ellenálló képességének megerősítéséhez.

Ez a témakör szervesen kapcsolódik az előző fejezet gondolatmenetéhez, mivel a hálózat kontextusának és a pontok tulajdonságainak mélyreható megértése alapvető a hálózat működésének feltárásához, valamint annak megerősítéséhez vagy éppen a felszámolásához. A negyedik fejezet rávilágított arra is, hogy a hálózat elemei és azok közötti kapcsolatok a hálózat környezetének és céljainak megfelelően formálódnak, és ez a tudás elengedhetetlen a hálózat sérülékeny pontjainak, vagyis a gyenge láncszemeknek az azonosításához.

Ennek a fejezetnek a célja, hogy bemutassa, hogyan azonosíthatók és értékelhetők az artikulációs pontok különböző típusú hálózatokban, és hogyan építhetők célzott stratégiák ezekre a pontokra, akár a hálózat megsemmisítése, akár a védelme érdekében. A fejezet többek között a *Nature Communication* szaklapban megjelent *Artikulációs pontok komplex hálózatokban* (Tian et al. 2017) című cikkből merít, ahol a szerzők, miután feltérképezték az elérhető módszereket, az alábbi kérdéseket vizsgálták.

- Tervezhető-e olyan, artikulációs pontokon alapuló támadási stratégia, amely hatékonyabban képes megsemmisíteni rosszindulatú hálózatokat?
- Kifejleszhető-e olyan, AP-alapú módszer, amely eredményesebben feltárja a komplex hálózatok szerkezeti felépítését és szerveződési elveit?
- Mi történik, ha folyamatosan eltávolítjuk az artikulációs pontokat egy véletlen gráfból vagy egy valós hálózatból? Marad-e egy „mag” a végén? Ha

AP-t – azt a csomópontot, amely a hálózat legnagyobb összefüggő komponenséből (GCC – giant connected component) a legtöbb csomópont leválását eredményezi.



5.2. ábra. Miután a bal oldali gráfból eltávolítjuk az egyetlen artikulációs pontot (a 7-es csúcsot), egy másik pont, az 5-ös válik új artikulációs ponttá.

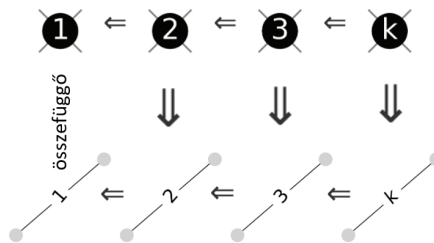
Korlátozott „költségvetés” (azaz az eltávolítandó csomópontok száma) mellett ez a stratégia rendkívül hatékony a GCC csökkentésében, különösen más, központiságon alapuló stratégiákhoz képest, mint amilyenek például a foksám alapú megközelítések (elsőként a nagy foksámú pontokat távolítjuk el). A bevezetőben említett cikk szerzőinek megfigyelései szerint, az APTA-stratégia kis számú csomópont eltávolításával eléri a GCC gyors csökkenését számos valós hálózatban, ideértve a technológiai, infrastrukturális, biológiai, kommunikációs és társadalmi hálózatokat.

A hálózat kezdeti szerkezetétől függően az APTA vagy teljesen felbonthatja a hálózatot, vagy létrehozhat egy maradék GCC-t, amely a hálózat egy korlátozott részét képviseli. Ez a maradék GCC egy „bikomponens” – olyan részhalmaz, amelyben bármely két csomópont között legalább két független út létezik, és így artikulációs pontok már nincsenek jelen. Ezt a szerkezetet „maradék óriás bikomponensként” (RGB – residual giant bicomponent) fogjuk nevezni. Az RGB egy olyan magot képvisel, amely fenntartja a hálózat szerkezeti integritását, és kulcsszerepet játszik a hálózat fennmaradásában még célzott támadások esetén is.

5.3. Többszörösen összefüggő gráfok

A „bikomponens” elnevezés arra utal, hogy az adott komponens kétszeresen összefüggő, vagyis bármely két csomópontja között legalább két, egymástól független (pontfüggetlen) út létezik. Általában egy gráfot akkor nevezünk k -összefüggőnek, ha legalább k csomópont eltávolítására van szükség ahhoz, hogy a gráf széteső komponensekre hulljon. Ez azt jelenti, hogy amennyiben kevesebb mint k csomópontot távolítunk el, a gráf továbbra is összefüggő marad.

Más megfogalmazásban: egy véges gráf akkor k -összefüggő, ha legalább $k+1$ csúcsa van, és bármely két csúcs között létezik k pontdiszjunkt út. A k -összefüggőség fogalma kiterjeszthető az él-összefüggőségre is: egy gráf akkor k -szeresen él-összefüggő, ha bármilyen módon távolítunk el kevesebb mint k élt, a gráf összefüggő marad. Az ilyen típusú gráfok különösen ellenállóak, mivel több kapcsolatot is biztosítanak a csomópontok között. Az 5.3. ábra a különböző összefüggőségi fogalmak viszonyait foglalja össze.



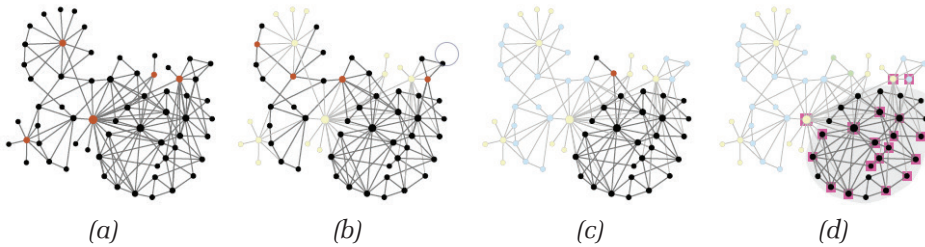
5.3. ábra. A felső ikonsor az 1-, 2-, 3-, ..., k -szeres pont-összefüggőséget képviseli, az alsó sor pedig az 1-, 2-, 3-, ..., k -szeres él-összefüggőséget. A diagram bemutatja, hogy mi mit implikál.

5.4. Mohó artikulációs pont eltávolítási módszer

Bár az APTA módszert „nyers-erő” megközelítésnek tekinthetjük, tartalmaz egy mohó elemet is, mivel minden lépésben azt az artikulációs pontot távolítjuk el, amely a legtöbb csomópont leválását eredményezi a legnagyobb összefüggő komponensről, ezzel a legígéretesebben támogatva a hálózat felszámolásának célját. Egy alternatív mohó megközelítés az lehetne, ha minden lépésben az összes létező artikulációs pontot eltávolítanánk, gyorsítva ezzel a hálózat fragmentálódását. Erre az elvre épül a GAPR-módszer (Greedy Articulation Points Removal).

Az artikulációs pontok azonosítása és szisztematikus eltávolítása új megvilágításba helyezi a komplex hálózatok szerveződési alapelveit. Például a 9/11-es terrortámadásokhoz kapcsolódó kommunikációs hálózatban (5.4. ábra) minden AP-ként jelölt csomópont (pirossal kiemelve) egy-egy alhálózat „hírvivője”, mivel minden információcsere ezen csomópontokon keresztül zajlik az adott alhálózat és a teljes hálózat többi része között. Az eredeti hálózat összes AP-ja és az általuk kapcsolt alhálózatok együtt alkotják a terrorhálózat első, központi rétegét. Miután minden AP-t eltávolítottunk az eredeti hálózatból, ez az első réteg „lehántódik”, újabb AP-k tárulnak fel, és így megjelenik a hálózat második rétege. A GAPR-folyamatot addig ismételjük, amíg már nem marad AP a hálózatban.

Fontos megjegyezni, hogy minden lépés során egyszerre távolítjuk el az összes aktuális AP-t. További algoritmikai részletek végett lásd a B függelék 5. pontját.



5.4. ábra. (a) A 2001. szeptember 11-i, Egyesült Államok elleni terrortámadásokhoz kapcsolódó kommunikációs hálózat (62 pont, 153 él, az artikulációs pontokat pirosak) (Krebs 2002). **(b, c)** Minden lépésben eltávolítjuk a hálózat összes aktuális artikulációs pontját, valamint az azokhoz kapcsolódó éleket. A hálózat három rétegből áll (világossárga, kék, zöld). **(d)** A maradék óriás bikomponens (RGB), 26 csomóponttal (a 16 géprabló négyzettel kiemelve). (Tian et al. 2017)

Az 5.4. ábra illusztrálja ezt a rétegezési folyamatot a 9/11-es támadások hálózatán, amely 62 terroristát foglal magában. Tian és munkatársai (2017) elemzése értelmében ez a hálózat három rétegből és egy maradék óriás bikomponensből (RGB) áll, amely 26 csomópontot tartalmaz. (Megjegyzendő, hogy a GAPR során létrejövő RGB hasonló, de nem feltétlenül azonos az APTA-módszerrel kapott RGB-vel.) Érdekes módon a 26 RGB-csomópont közül 16 közvetlen résztvevője volt a 9/11-es támadásoknak, amelyekben összesen 19 gépeltérítő vett részt. Ez az RGB tehát egy olyan magot alkot, amely a hálózat működőképességének megőrzését szolgálja, és támogatja annak konkrét célját – jelen esetben a gépeltérítést. Fontos megjegyezni, hogy az RGB-ben szereplő egyes gépeltérítők nem központi csomópontok (nem „hub”-ok), hanem csupán két-három kapcsolattal rendelkeznek a hálózatban, így hagyományos hálózatbontási módszerekkel nehezen azonosíthatók.

Érdekes módon az APTA- és a GAPR-eljárások során kapott RGB-k számos valós hálózat esetében jelentős átfedést mutatnak. Fontos különbség azonban, hogy míg az APTA optimalizálja az eltávolítási folyamat hatását, addig a GAPR determinisztikus, így egyszerűbben elemezhető matematikai szempontból. A továbbiakban a GAPR során kapott RGB-re összpontosítunk, mivel ez a mag alapvető szerepet játszik a hálózat strukturális integritásának megőrzésében, és pontosan feltárja a hálózat szerveződésének alapvető szerkezeti jellemzőit.

5.5. Artikulációs pontok és maradék óriás bikomponens valós hálózatokban

A fentebb bemutatott algoritmusok fókuszba helyezik az artikulációs pontok arányát ($n_{AP} = N_{AP} / N$) és az RGB relatív méretét ($n_{RGB} = N_{RGB} / N$) különféle valós hálózatokban. Itt n_{AP} , n_{RGB} és N rendre az artikulációs pontok, az RGB (a GAPR-módszerrel nyert maradék óriás bikomponens) csomópontjainak számát, illetve a teljes hálózat csomópontjainak számát jelenti.

Az e gondolatmenetben végzett vizsgálatok feltárták, hogy sok valós hálózatban az AP-k aránya jelentős, míg az RGB aránya kicsi. Infrastruktúra-hálózatok esetén azt várnánk, hogy az AP-k aránya alacsony és az RGB nagy, mivel ezek a hálózatok elvileg ellenállóak az artikulációs pontok eltávolításával szemben. Megleő módon azonban ez nem így van: két amerikai régió villamosenergia-hálózatainak elemzése azt mutatja, hogy ezek rendelkeznek az összes vizsgált hálózat közül az egyik legnagyobb AP-aránnyal (kb. 24%), és szinte alig van bennük RGB. Hasonlóképpen, három amerikai állam úthálózataiban közel 20%-os az AP-arány, míg az RGB aránya mindössze $n_{RGB} \approx 0,08$. Ezek az eredmények azt sugallják, hogy az infrastruktúra-hálózatokat nem optimalizálták az artikulációs pontok eltávolításával szembeni ellenállóságra. Ez valószínűleg az új kapcsolatok kialakításának magas költségével magyarázható (például két erőmű összekötése nagyfeszültségű vezetékkel vagy két város összekapcsolása autópályával), így ezek a hálózatok jellemzően nem rendelkeznek nagymértékű redundanciával, hanem más szempontok, például a társadalmi hasznosság figyelembevételével optimalizálták őket.

Ezzel szemben a vizsgált 28 táplálékháló közül 22 nem tartalmazott AP-t, vagyis $n_{RGB} = 1$, ami azt jelzi, hogy ezek a hálózatok bikapcsoltak. Így egyetlen faj kihalása sem szakítaná szét az egész közösséget. Érdekes módon tehát a legtöbb vizsgált valós hálózat vagy nagyon kis RGB-vel, vagy igen nagy RGB-vel rendelkezik.

5.5.1. Valós versus randomizált hálózatok

A topológiai jellemzők feltárására, amelyek befolyásolják az n_{AP} és n_{RGB} értékeit, a kutatók összehasonlították a valós hálózatok n_{AP} és n_{RGB} értékeit azok randomizált megfelelőivel. Ehhez teljes randomizálási eljárást alkalmaztak, amely a hálózatot Erdős-Rényi (ER) típusú véletlen gráffá alakította úgy, hogy a csomópontok száma N és az élek száma L változatlan maradt. A vizsgálat feltárta, hogy teljesen randomizált hálózatokban az n_{AP} és n_{RGB} értékei lényegesen eltértek a valós hálózatok megfelelő értékeitől. Ez arra utal, hogy a teljes randomizálás megszünteti azokat a topológiai jellemzőket, amelyek befolyásolják az n_{AP} és n_{RGB} értékeket.

Másrészt, amikor a kutatók fokszámmegőrző randomizálást alkalmaztak –, amely során az élek átrendezésével megőrizték minden csomópont fokszámát,

az n_{AP} és n_{RGB} értékei lényegesen nem változtak. Ez azt sugallja, hogy egy hálózat n_{AP} és n_{RGB} szempontjából jellemző tulajdonságai nagyrészt a fokszámeloszlásban rejtőznek. A valós hálózatok többsége kisebb n_{AP} -t és nagyobb n_{RGB} -t mutat a fokszámmegőrző randomizált változatokhoz képest, ami kiemeli a valós hálózatok egyedi szerkezeti stabilitását és redundanciáját.

5.6. Összegzés

Az ebben a fejezetben bemutatott fogalmak és algoritmusok egy sajátos nézőpontot kínálnak a komplex hálózatok szerveződési elveinek megértéséhez, és rávilágítanak ellenállóbb infrastruktúra-hálózatok tervezésére és hatékonyabb módszerekre a rosszindulatú hálózatok szétrombolásában.

Két, artikulációs pontokon alapuló alkalmazást vizsgáltunk meg: egy hálózati támadási stratégiát (APTA) és egy hálózatbontási módszert (GAPR). Megállapítottuk, hogy korlátozott „költségvetés” mellett az APTA-stratégia hatékonyabban csökkenti a hálózat legnagyobb összefüggő komponensét (GCC), mint sok egyéb stratégia. A komplex hálózatok mag-periféria szerkezetének feltárásában a javasolt GAPR-módszer jelentősen különbözik a hagyományos hálózatbontási módszerektől, mivel az általa azonosított mag alacsony fokszámú csomópontokat is tartalmazhat. Ezek a gyéren kapcsolódó csomópontok funkcionálisan nagyon fontosak lehetnek, de a hagyományos bontási módszerek általában figyelmen kívül hagyják őket.

A fejezet alapjául szolgáló cikk elméleti oldalról is megvizsgálja a szóban forgó témakört, és egy analitikus keretrendszert javasol, amellyel különféle, artikulációs pontokhoz kapcsolódó tulajdonságok számíthatók ki. Ezek között az egyik legnagyobb elméleti érdeklődésre számot tartó eredmény a maradék óriás bikomponens (RGB) megjelenése. A szerzők szerint elemzésük elméleti magyarázatot ad arra az empirikus megfigyelésre, hogy a valós hálózatok többségében az RGB vagy nagyon kicsi, vagy igen nagy.

6. Fák a hálózatok szolgálatában: a feszítőfák szerepe és alkalmazásai

A feszítőfák a gráfelmélet egyik alapvető struktúráját képezik, amelyek lehetővé teszik, hogy egy összefüggő gráf minimális élszámú részgráfját hozzuk létre úgy, hogy minden csúcs elérhető maradjon. Míg az előző fejezetekben a hálózatok dinamikájára, a kapcsolatok erősségére, a strukturális egyensúlyra és a kritikus csomópontok szerepére koncentráltunk, addig ebben a fejezetben a hálózatok egyszerűsített reprezentációjára helyezzük a hangsúlyt. A feszítőfák lehetőséget nyújtanak arra, hogy a komplex hálózatokban rejlő szerkezeti mintázatokat – például közvetítő szerepeket, hierarchikus viszonyokat vagy terjedési útvonalakat – redukált formában, de mégis reprezentatívan vizsgáljuk. Különböző típusai más-más tulajdonságokat emelnek ki a hálózat szerkezetéből, így kulcsszerepet játszanak optimalizációs és analitikai feladatokban. Ebben a fejezetben áttekintjük a feszítőfák legfontosabb típusait, azok algoritmusait és gyakorlati alkalmazásait.

6.1. Feszítőfák madártávlatból

A gráfbejárások (DFS, BFS) önmagukban is feszítőfákat generálnak, segítve ezzel a hálózat struktúrájának feltérképezését. A DFS mélységi keresés során egy olyan feszítőfát hoz létre, amely az egyes csomópontokat egy lehetséges elérési sorrend szerint rendezi, így jól alkalmazható körök és összefüggő komponensek keresésére. Például weboldalak linkstruktúrájának feltérképezésében hasznos eszköz lehet. A BFS-feszítőfa ezzel szemben szintek szerint halad, mindig a legközelebbi, még be nem járt csúcsokat veszi fel. Az így kapott fa minimális mélységű, azaz a kezdőcsúcsból minden más csúcsba a lehető legkevesebb lépéssel jutunk el. Ezáltal a gráf terjedési mintázata is láthatóvá válik. Jól alkalmazható navigációs rendszerekben, például tömegközlekedési hálózatok útvonalainak optimalizálására. A gráfbejárásokról részletesebb leírást adunk az A függelék 2. és 3. pontjai alatt.

A súlyozott gráfokban a feszítőfa kiválasztása különösen fontos, hiszen az optimális struktúra kialakítása jelentős költség- és hatékonysági tényező lehet. A minimális feszítőfa (MST – Minimum Spanning Tree) olyan feszítőfa, amelyben az élek összsúlya minimális, így a hálózat kiépítése a lehető legkisebb költséggel történik. Ennek ellentéte a maximális feszítőfa (MaxST – Maximum Spanning Tree), amely a legerősebb kapcsolatokat emeli ki, a lehető legnagyobb súlyú élek kiválasztásával. Ebben a fejezetben két algoritmust mutatunk be ezek meghatározására: a Kruskal-algoritmus a növekvő vagy csökkenő súly szerint rendezett éllistából választja ki a fa éleit, míg a Prim-algoritmus egy kezdőcsúcsból kiindulva

mindig a legkisebb vagy legnagyobb súlyú új élt csatolja hozzá. Ezek az algoritmusok jól alkalmazhatók telekommunikációs és elektromos hálózatok tervezésében, városok energiaellátásának optimalizálásában, valamint ellátási láncok és közlekedési hálózatok modellezésében.

A legrövidebb utak feszítőfa (SPT – Shortest Paths Tree) olyan feszítőfa, amelyben minden csomópontot a legrövidebb úton érünk el egy adott forrásból. Ennek meghatározására három híres algoritmus létezik: a Viterbi-algoritmus körmentes irányított gráfok esetén, a Dijkstra-algoritmus pozitív súlyú élek esetén, valamint a Bellman–Ford-algoritmus, amely negatív súlyú éleket is kezel. Ezeket az algoritmusokat gyakran alkalmazzák navigációs rendszerekben és internethálózatok optimalizálásában, például GPS-alapú útvonaltervezésben. A leghosszabb utak feszítőfáját (LPT – Longest Paths Tree) szintén használják, főként projektmenedzsmentben, ahol az úgynevezett kritikus út módszere (CPM – Critical Path Method) segíti az ütemezést.

Bizonyos esetekben az alapvető feszítőfatípusok nem elegendőek, így sajátos feszítőfákat használunk. Ilyen például a „minimális üvegnyak feszítőfa” (Minimum Bottleneck Spanning Tree – MBST), amelyben a legnagyobb súlyú él minimalizálására törekszünk, például adatátviteli hálózatoknál. A Steiner-fa olyan részfeszítőfa, amely egy előre meghatározott csomóponthalmazt köt össze minimális költséggel, és főként távközlési hálózatok és ellátási rendszerek optimalizálásában használják. A fokszámkorlátozott feszítőfa (Degree-Constrained Spanning Tree – DCST) biztosítja, hogy egy csomópont maximális kapcsolati száma ne haladjon meg egy előre definiált értéket, például szerverhálózatok vagy energiaelosztó rendszerek esetén.

A különböző feszítőfatípusok lehetővé teszik a hálózatok hatékony strukturalását, legyen szó minimális költségű hálózatépítésről, maximális teljesítmény eléréséről vagy speciális feltételek kielégítéséről. Tehát az ebben a fejezetben bemutatott módszerek széles körben alkalmazhatók az informatika, közlekedés, ipar és gazdaság különböző területein, biztosítva a rendszerek optimális működését.

6.2. Minimális feszítőfa (MST)

Annak szemléltetésére, hogy a minimális feszítőfa (MST) meghatározásának milyen messzemenő gyakorlati haszna lehet, tekintsünk egy alkalmazást az archeológia területéről. 1937-ben Burrows egy átfogó régészeti elemzés eredményeit publikálta a polinéziai szigetekről. A kulturális jegyek és komplexumok – beleértve a tárgyi leleteket (eszközök, kenutípusok, kéregszövet stb.), a társadalmi szerveződés aspektusait (nyelvek, rokonsági rendszerek) és a vallási elképzeléseket – vizsgálata alapján négy alcsoportot különített el Polinéziában (az eredeti angol elnevezéseket meghagytuk):

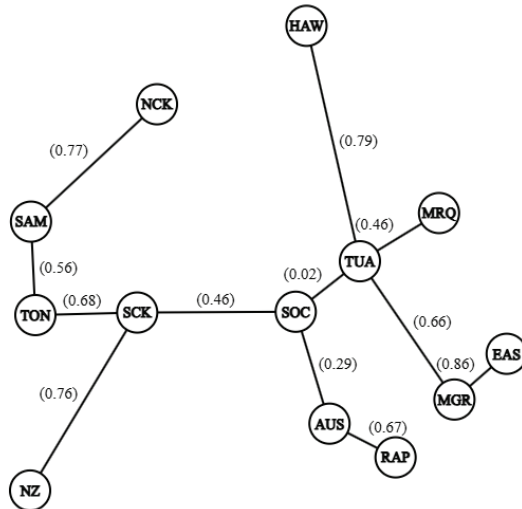
- Western Polynesia (Samoa, Tonga),
- Central Polynesia (Society Islands, Tuamotus, Southern Cooks, Australs, Rapa, Hawaii),

- Marginal Polynesia (New Zealand, Easter Island, Marquesas, Mangareva),
- Intermediate Polynesia (Northern Cooks).

1992-ben Irwin azt javasolta, hogy a polinéz kultúrák közötti hasonlóság mértéke arányos az utazás könnyedségével. Másképpen fogalmazva, minél „távolabb” helyezkedik el egymástól két sziget, annál kisebb a kulturális hasonlóság köztük. A 6.1. táblázat a vizsgálat során számított kölcsönös hozzáférhetőséget mutatja a szigetek között Irwin számításai alapján.

6.1. táblázat. *Polinéziai kölcsönös hozzáférhetőségi mátrix. Forrás: Irwin (1992)*

	TON	SAM	SCK	NCK	SOC	MRQ	TUA	MGR	AUS	RAP	HAW	EAS	NZ
TON		0,56	0,68	0,82	0,78	0,82	0,76	0,91	0,84	0,90	0,89	0,97	0,77
SAM	0,56		0,73	0,77	0,83	0,85	0,83	0,90	0,81	0,89	0,81	0,95	0,76
SCK	0,68	0,73		0,77	0,46	0,70	0,54	0,86	0,62	0,82	0,85	0,92	0,76
NCK	0,82	0,77	0,77		0,77	0,85	0,79	0,89	0,82	0,86	0,89	0,95	0,90
SOC	0,78	0,83	0,46	0,77		0,59	0,02	0,78	0,29	0,79	0,80	0,91	0,80
MRQ	0,82	0,85	0,70	0,85	0,59		0,46	0,80	0,66	0,85	0,87	0,90	0,88
TUA	0,76	0,83	0,54	0,79	0,02	0,46		0,66	0,37	0,79	0,79	0,89	0,76
MGR	0,91	0,90	0,86	0,89	0,78	0,80	0,66		0,77	0,79	0,92	0,86	0,92
AUS	0,84	0,81	0,62	0,82	0,29	0,66	0,37	0,77		0,67	0,81	0,94	0,79
RAP	0,90	0,89	0,82	0,86	0,79	0,85	0,79	0,79	0,67		0,95	0,90	0,91
HAW	0,89	0,81	0,85	0,89	0,80	0,87	0,79	0,92	0,81	0,95		0,97	0,91
EAS	0,97	0,95	0,92	0,95	0,91	0,90	0,89	0,86	0,94	0,90	0,97		1,00
NZ	0,77	0,76	0,76	0,90	0,80	0,88	0,76	0,92	0,79	0,91	0,91	1,00	



6.1. ábra. Az Irwin hasonlósági mátrixának megfelelő teljes gráf minimális feszítőfája

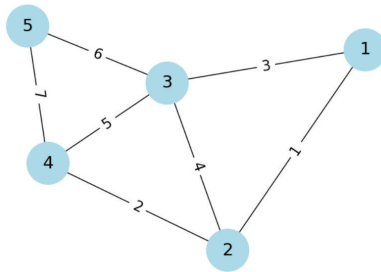
Ezekre az előzményekre alapozva Hage, Harary és James (1996) bemutatták, hogyan alkalmazható Kruskal minimális feszítőfa algoritmus az archeológiai adatelemzésben. Egy MST-alapú klaszterezési módszer segítségével algoritmikusan is összekapcsolták Burrows és Irwin következtetéseit, megmutatva, hogy a gráfelmélet eszközei hatékonyan alkalmazhatók a kulturális és történeti kapcsolatok modellezésére (6.1. ábra).

6.2.1. Kruskal-algoritmus

A Kruskal-algoritmus egy hatékony módszer a minimális feszítőfa (MST) meghatározására egy összefüggő, súlyozott gráfban. Az algoritmus egy **élsúlyalapú mohó stratégia**, amely minden lépésben a még be nem választott legkisebb súlyú élt veszi fel a feszítőfába, feltéve, hogy ezzel nem alakít ki kört.

Az algoritmus lépései:

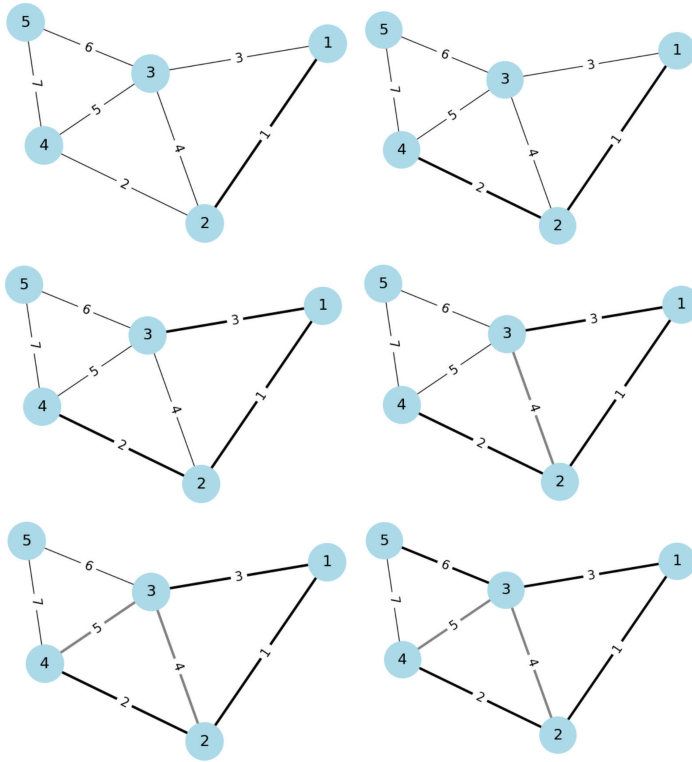
- adatok előkészítése: rendezzük az összes élt növekvő súly szerint;
- körmentes élhozzáadás: egyesével adjuk hozzá a legkisebb súlyú élt a feszítőfához, feltéve, hogy nem alakít ki kört;
- megállás: amikor a fa már $n-1$ élt tartalmaz (ahol n a csúcsok száma), az algoritmus befejeződik.



6.2. ábra. 5 pontú és 7 élű súlyozott gráf

A 6.3. ábra az algoritmus működését mutatja be a 6.2. ábrán látható példa-gráfon. Az éleket súlyuk szerint növekvő sorrendben tekintjük, átugorva azokat (vastagított szürke élek), amelyek kört alkotnának a már kiválasztottakkal (vastagított fekete élek). Ha sikerült kiválasztani $(n-1) = 4$ élt, az algoritmus leáll, hisz az MST garantáltan összeállt. Lásd továbbá az A függelék 6. pontját.

A Kruskal-algoritmus hatékonysága leginkább az élsor rendezésétől függ, ami $O(m \log m)$ időbonyolultságú, ahol m az élek száma.



6.3. ábra. A Kruskal-algoritmus működés közben: $(1,2:1)$, $(2,4:2)$, $(1,3:3)$, $(2,3:2)$, $(3,4:5)$, $(3,5:6)$, $(4,5:7)$.

6.2.2. MST-alapú klaszterezési módszer

A minimális feszítőfa nemcsak optimális hálózatok tervezésére használható, hanem hatékony eszköz lehet az adathalmazok klaszterezésére is. Az MST-alapú klaszterezés egyszerű, mégis eredményes módszer, amely különösen jól alkalmazható hierarchikus klaszterezési problémák esetén. A lényege, hogy ha megfelelő pontokon megszakítjuk az MST-t, természetes klasztereket kapunk. Egyszerűbben fogalmazva, ha elvágjuk a leghosszabb éleket, megszüntetjük azokat a kapcsolatokat, amelyek valószínűleg különböző klaszterek között állnak fenn. Így a nagy súlyú élek által elválasztott komponensek önálló klaszterekként viselkednek.

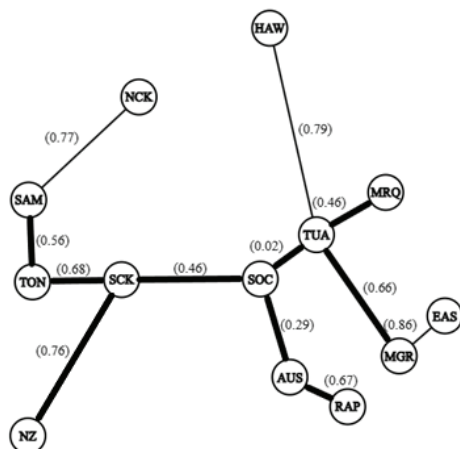
Az MST-alapú klaszterezés folyamata a következő lépésekből áll:

- építsük meg az MST-t az adathalmazhoz tartozó hasonlósági vagy súlyozott gráfon.
- távolítsuk el a leghosszabb éleket (például a $k-1$ leghosszabb élt, ha k klaszter szeretnénk létrehozni).

– a visszamaradó komponensek természetes klaszterekké alakulnak.

A Kruskal-algoritmus különösen jól illeszkedik ehhez a megközelítéshez. Nem kell mást tennünk, mint az algoritmust abban a pillanatban leállítani, amikor már $(n-1)-(k-1)$, vagyis $n-k$ élt válogattunk be. Így a gráf k összefüggő komponensre esik szét, amelyek a végső klasztereket alkotják.

Ha a fent ismertetett módszert közvetlenül alkalmazzuk a 6.1. ábrán bemutatott polinéziai minimális feszítőfára, akkor a 6.4. ábrán látható eredményhez jutunk. Mivel a gráfnak (fának) 13 csomópontja van, és Burrows 4 klaszterbe sorolta a szigeteket, ezért a Kruskal-algoritmust akkor kell leállítanunk, amikor 9 élt már kiválasztottunk. Ez a minimális fán olyan felosztást eredményez, amelyben NCK, HAW és EAS önálló komponensként szerepelnek, míg az összes többi sziget egy nagyobb összefüggő klasztert alkot.



6.4. ábra. A polinéziai szigetek MST-alapú, négy klaszterbe sorolása: {EAS}, {HAW}, {NCK}, {többi sziget}

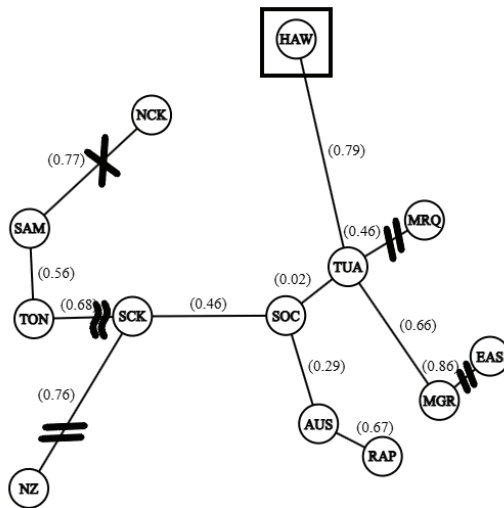
Hage és munkatársai (1996) azonban fordított megközelítést alkalmaztak: azt vizsgálták, hogy a minimális feszítőfa (MST) bizonyos éleinek eltávolításával rekonstruálható-e a Burrows-féle besorolás (6.5. ábra). Elemzésük során további régészeti és történelmi forrásokat is figyelembe vettek.

Első lépésként abból indultak ki, hogy a fa levelei nem befolyásolják a belső szerkezetet, így először ezeket távolították el, és megvizsgálták, hogy ezzel milyen burrowsi kategóriák alakíthatók ki. Megfigyelték, hogy a 0,77 súlyú él eltávolításával (X olló az ábrán) máris Intermediate Polynesia elkülöníthető, amely mindössze egy szigetből, Northern Cooks (NCK)-ből áll.

Ezután a 0,86, 0,76 és 0,46 súlyú élek eltávolításával (// olló az ábrán) sikerült Marginal Polynesia három szigetét – Easter Island (EAS), New Zealand (NZ) és Marquesas (MRQ) – elhatárolni. Ugyanakkor Mangareva (MGR) besorolása problémát

jelentett, mivel a levélalapú megközelítés szerint a 0,66-os él nem levélél, és ráadásul a TUA-csomópontnak van még egy levele, HAW, amelyet egy 0,79-es él kapcsol a fához.

Hawaii esetében rendhagyó módon jártak el, és bizonyos külső, Tahiti felől érkező kulturális hatásokra hivatkozva kezelték külön. A maradék összefüggő komponensben a TON-SCK él (0,68 súlyú) volt a legnagyobb, amelynek eltávolítása ($\approx$ olló) egy olyan klaszterezési eredményt adott, amely csak Mangareva (MGR) besorolásában tért el Burrows eredeti felosztásától.



6.5. ábra. A polinéziai szigetek Hage és munkatársai (1996) szerinti, négy klaszterbe sorolása: {NCK}, {EAS,NZ,MRQ}, {SAM,TON}, {SCK,SOC,AUS,RAP,TUA,MGR}. (HAW-tól eltekintettek)

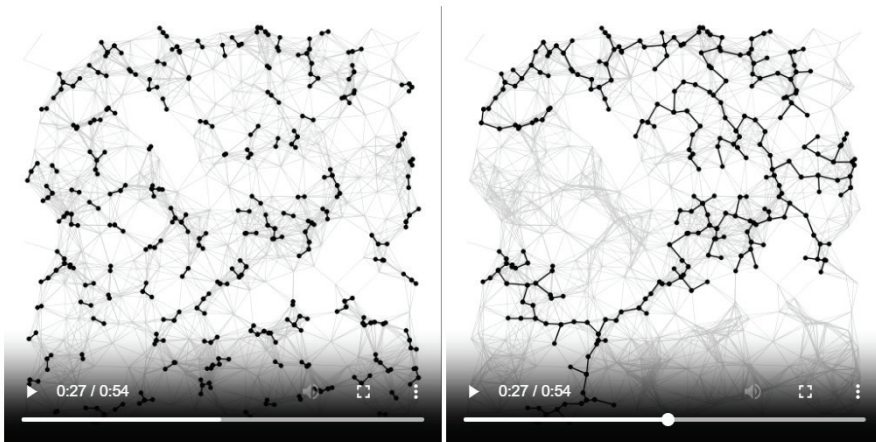
6.2.3. Prim-algoritmus

A minimális feszítőfa megkeresésére egy másik híres algoritmus a Prim-algoritmus. A Kruskal-algoritmussal ellentétben, amely az éleket súly szerint rendezzi, és a legkisebbeket hozzáadva építi fel a feszítőfát, a Prim-algoritmus egyetlen csúcsból indul ki, majd fokozatosan bővíti a minimális feszítőfát. Minden lépésben mindig azt a legkisebb súlyú élt választja, amely egy már meglátogatott csúcsot egy még nem meglátogatott csúcsához kapcsol. Ez egy lokálisan optimalizált megközelítés, amely a következő stratégia mentén halad. (További részletek végezt lásd az A függelék 7. pontját.)

- A folyamat egy tetszőlegesen kiválasztott kezdőcsúccsal indul.
- Minden lépésben a már kiválasztott halmazhoz egy olyan új csúcsot ad hozzá, amelyhez a legkisebb súlyú él kapcsolódik a gráfban.

- Az algoritmus addig folytatódik, amíg minden csúcs szerepel az MST-ben. A 6.2. példagráfon a lépéssorozat a következő.
- Kezdőcsúcs kiválasztása: Legyen a kezdőcsúcs az 1-es. Az MST egyelőre egy csúcsú.
- Új csúcs bevonása: Kiválasztjuk a legkisebb súlyú élt, amely a kezdőcsúcsot egy másik csúcsához kapcsolja. A lehetőségek: (1,2:1), (1,3:3). Az (1,2) él súlya a legkisebb, így ezt választjuk. Ezzel a 2-es csúcs bekerült az MST-be.
- Újabb csúcs bevonása: Megvizsgáljuk, hogy a már csatolt csomópontoktól mely élek vezetnek még be nem kötött csúcsokhoz: (2,4:2), (1,3:3), (2,3:4). A (2,4) él a legkisebb súlyú, így ezt adjuk az MST-hez. Ezzel a 4-es csúcs is bekerült az MST-be.
- További csúcs bevonása: Most a lehetőségek: (1,3:3), (2,3:4), (3,4:5), (4,5:7). Az (1,3) él a legkisebb súlyú, így ezt adjuk az MST-hez. Ennek nyomán a 3-as csúcs is az MST részévé vált.
- Utolsó csúcs bevonása: A jelenleg elérhető élek: (3,5:6), (4,5:7). A (3,5) él a legkisebb, így ezt választjuk. És ezzel összeállt a minimális feszítőfa, hisz $n-1=4$ él révén becsatoltuk mind az $n=5$ csomópontot.

A Prim-algoritmus bonyolultsága az implementálás megvalósításától függ. Szomszédsági mátrixból $O(n^2)$, szomszédsági listából bináris kupac használatával $O(m \log n)$, valamint szomszédsági listából Fibonacci-kupac használatával $O(m + n \log n)$.



6.6. ábra. *Kruskal versus Prim: MST-építés félútján egy 500 pontú euklideszi gráfban (Sedgewick–Wayne 2025)*

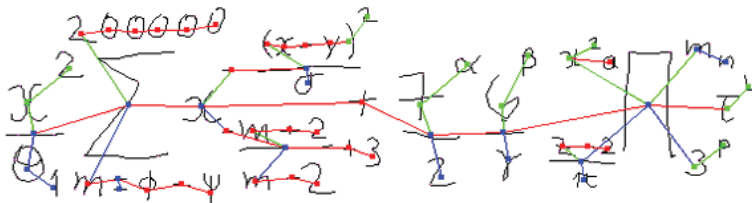
A 6.6. ábra szemléletesen mutatja be, hogy a Kruskal- és a Prim-algoritmus miként jut ugyanahhoz az eredményhez eltérő módon. A Kruskal-algoritmus egy n pontú erdőből indul ki, és minden lépésben összevon két fát. Ezzel szemben a Prim-algoritmus esetében a minimális feszítőfa egy pontból növekszik.

Bizonyítható, hogy mindkét algoritmus garantáltan minimális feszítőfát eredményez. Ha az MST egyedi, akkor mindkettő ugyanazt találja meg, viszont ha több egyenértékű MST is létezik, akkor eltérő minimális feszítőfákhoz is eljuthatnak.

6.2.4. A minimális feszítőfák alkalmazásai

Ahogy már a bevezetőben is említettük, a minimális feszítőfák (MST-k) alapvető szerepet töltenek be a hálózatok tervezésében és optimalizálásában, mivel lehetővé teszik összefüggő struktúrák kialakítását minimális költség mellett. Az MST-k alkalmazása kulcsfontosságú a távközlési rendszerekben, az energiaelosztásban és az infrastruktúra fejlesztésében, de szerepük messze túlmutat ezeken a hagyományos területeken. Íme egy válogatás tudományos dolgozatokból, amely szemlélteti, miként bővül folyamatosan a minimális feszítőfák (MST-k) alkalmazási köre:

- online kézzel írt matematikai kifejezések felismerése minimális feszítőfa-konstrukció és szimbólumdominancia alkalmazásával (Tapia–Rojas 2003);
- a minimális feszítőfa (MST) módszer heurisztikus alkalmazhatósága a toxikológiában (Devillers–Doré 1989);
- valós idejű kiemelt objektumfelismerés minimális feszítőfa segítségével (Tu et al. 2016);
- hatékony regionalizációs technikák társadalmi-gazdasági földrajzi egységekhez minimális feszítőfák alkalmazásával (Assunção et al. 2006);
- nem invazív rákok: észlelési módszer minimális feszítőerdőn alapulva hiperspektrális képalkotással (Pike et al. 2015).



6.7. ábra. Kézzel írt matematikai kifejezéshez társított minimális feszítőfa (Tapia–Rojas 2003)

6.3. Legrövidebb utak fája (SPT)

A modern navigációs rendszerek működésének egyik alapját egy hatékony gráfelméleti struktúra, a legrövidebb utak fája (Shortest Path Tree, SPT) képezi. Az olyan alkalmazások, mint a Google Maps, a Waze vagy egyéb útvonaltervező

rendszerek, a közlekedési hálózatot gráfként modellezzük, ahol a csomópontok a helyszíneket, az élek pedig az útszakaszok közötti kapcsolatokat reprezentálják. Az algoritmusok az ilyen struktúrákon belül keresik meg a kiindulópontból induló, minimális költségű (idő, távolság vagy egyéb súlyozó tényezők alapján számolt) útvonalakat, így létrehozva egy olyan fastruktúrát, amely minden elérhető célhoz vezet.

E mechanizmus révén a navigációs rendszerek valós időben képesek meghatározni az optimális útvonalakat, figyelembe véve nemcsak a távolságokat, hanem a dinamikusan változó tényezőket is, mint például a forgalmi viszonyok. Az alábbiakban bemutatjuk a legrövidebb utak fájának alapelveit, felépítését és működését, továbbá rávilágítunk alkalmazási területeire a valós világban – az intelligens navigációs rendszerektől az adathálózatok optimalizálásáig.

6.3.1. Legrövidebb utak algoritmusok az SPT meghatározására

A legrövidebb utak fája egy adott forráspontból kiinduló legrövidebb utak összessége, amely az összes többi csúcshoz vezető minimális költségű útvonalat tartalmazza. Az SPT meghatározására különböző algoritmusok alkalmazhatók, attól függően, hogy a gráf milyen szerkezeti és súlyozási tulajdonságokkal rendelkezik.

Minden legrövidebb utakat kereső algoritmus elviekben dinamikus programozást alkalmaz, mivel az optimális szerkezet elvére építenek: ha egy adott útvonal legrövidebb, akkor annak bármely részútja is szükségszerűen a lehető legrövidebb kell hogy legyen. Ez az alapelv biztosítja, hogy az algoritmusok a rövidebb legrövidebb utakból építik fel a hosszabbakat, fokozatosan haladva az optimális megoldás felé.

Ez a megfigyelés magyarázza azt is, hogy az egy adott forráspontból induló legrövidebb utak mindig gyökeres fát alkotnak: minden csúcs egy egyértelmű elődjével kapcsolódik a fában, és nincs olyan alternatív útvonal, amely kisebb költséggel érné el a célt. Az algoritmusok ezen kívül a fokozatos közelítés elvét alkalmazzák, ami azt jelenti, hogy kezdetben minden egyéb csúcs távolságát végtelennek tekintik, majd iteratívan finomítják és rövidítik az útértékeket, míg végül a valódi legrövidebb utak stabilizálódnak.

Az alábbiakban bemutatjuk, milyen stratégiák alkalmazhatók az SPT felépítésére, figyelembe véve a gráf szerkezetét, különös tekintettel arra, hogy tartalmaz-e köröket vagy negatív súlyú éleket.

6.3.2. Körmentes gráfok esetén – Viterbi szellemében

Ha a gráf irányított és körmentes (DAG – Directed Acyclic Graph), akkor a legrövidebb utak fáját egy topologikus rendezésen alapuló dinamikus programozási módszerrel lehet a leghatékonyabban meghatározni (A függelék 8. pontja).

- Topologikusan rendezzük a csúcsokat (egy olyan sorrendet hozunk létre, amelyben minden él az előbb szereplő csúcsból a később szereplő csúcsba mutat).
- Feldolgozzuk a csúcsokat ebben a sorrendben, és minden csúcs esetében frissítjük a szomszédok legrövidebbút-távolságát.

Mivel minden él mentén egyszer frissítünk, ezért az algoritmus rendkívül hatékony. Időigénye $O(n + m)$, ami a topologikus sorrend felállításából adódik.

6.3.3. Negatív él nélküli gráfok esetén – Dijkstra-algoritmus

Ha a gráf nem tartalmaz negatív súlyú éleket, akkor a Dijkstra-algoritmus a leghatékonyabb módszer az SPT meghatározására (A függelék 9. pontja; B függelék 6. pontja). Ez az algoritmus mohó stratégiát követ annak meghatározásában, hogy milyen sorrendben tekintse a csúcsokat.

- Kezdetben minden csúcs távolságát végtelennek tekintjük, kivéve a forrást (0).
- Minden lépésben kiválasztjuk a legközelebbi, még nem feldolgozott csúcsot, és annak szomszédjait frissítjük. Azaz ha egy új él rövidebb utat biztosít egy szomszédhoz, akkor frissítjük annak távolságát.
- Az algoritmus addig ismétlődik, míg minden csúcs távolsága stabilizálódik.

Hatékonyság: ha prioritási sort használunk a 2. lépés megvalósításához (például Fibonacci-kupacot vagy bináris kupacot), az algoritmus $O((n + m) \log n)$ időben fut, ami nagy méretű gráfok esetén is hatékony.

Fontos korlátozás: ha a gráf negatív súlyú éleket tartalmaz, az algoritmus hibás eredményt adhat, mert egy csúcs távolságát csak egyszer dolgozza fel, így későbbi rövidebb utak nem frissíthetik azt.

6.3.4. Negatív élű, de negatív kört nem tartalmazó gráfok esetén – Bellman–Ford-algoritmus

Ha a gráf negatív súlyú éleket tartalmaz, de nincsenek benne negatív súlyú körök, akkor a Bellman–Ford-algoritmus biztosítja a legrövidebb utak helyes kiszámítását (A függelék 10. pontja).

- Kezdetben minden csúcs távolságát végtelennek tekintjük, kivéve a forrást (0).
- Újra és újra végigmegyünk az összes élen, és ha egy él új, rövidebb utat kínál egy célcsúchoz, akkor frissítjük annak távolságát.
- Ha az aktuális iteráció során egyetlen frissítés sem történt, az azt jelenti, hogy minden csúcs távolsága konvergált az optimális értékre.

Hatékonyság: az algoritmus $O(nm)$ időben fut, ami lassabb, mint a Dijkstra-algoritmus, de biztosítja a helyes eredményt negatív súlyú élek esetén is.

Negatív körök detektálása: ha az n . iteráció során valamely csúcs távolsága még mindig frissül, az azt jelzi, hogy a gráf negatív súlyú kört tartalmaz, ami

miatt az SPT nem értelmezhető egyértelműen, mivel a legrövidebb utak nem konvergálnak véges értékre. Ha a kiindulópontból elérhető egy negatív kör, akkor bizonyos útköltségek végtelen számú lépésben folyamatosan csökkenthetők, így nem létezik egyetlen stabil megoldás.

6.4. Legrövidebb utak minden pontpár között

Ha egy n csúcsú gráfban minden pontpár közötti legrövidebb utakban vagyunk érdekeltek, akkor az n darab SPT külön-külön történő kiszámítása és ezek összefésülése nem a leghatékonyabb módszer. Ehelyett léteznek jobb algoritmusok, amelyek globálisan kezelik az összes csúcspár közötti távolságot, és jelentős számítási időt takarítanak meg.

6.4.1. Floyd–Warshall-algoritmus

A Floyd–Warshall-algoritmus ugyancsak dinamikus programozási megközelítést alkalmaz, és minden csúcspárra egyidejűleg építi fel a legrövidebb utak mátrixát (A függelék 11. pontja).

- Kezdetben a csúcspárok közötti távolságokat a súlymátrixból vesszük. Ezeket úgy tekintjük, mint közvetlen, köztesállomás-mentes legrövidebbút-távolságok.
- Minden lépésben egy újabb köztes csúcsot vonunk be az útvonalakban, és frissítjük a távolságokat, ha az új út rövidebb.

Az algoritmus három egymásba ágyazott ciklusból áll, így $O(n^3)$ időben fut.

Előnyei, hogy egyszerre kezeli az összes csúcspárt, ezért sokkal hatékonyabb, mint n SPT kiszámítása, illetve hogy negatív súlyú éleket is kezel (de nem negatív köröket). Hátránya, hogy nagy gráfok esetén az $O(n^3)$ időigény túl nagy lehet.

6.4.2. Johnson-algoritmus (Dijkstra + Bellman–Ford)

Ha a gráf viszonylag kevés élt tartalmaz, akkor a Johnson-algoritmus jobb választás lehet. Ez az algoritmus Dijkstra és Bellman–Ford kombinációja, amely hatékonyabban működik ritka gráfok esetén.

- Egy Bellman–Ford-algoritmust futtatunk egy új mesterséges csúcsból, hogy átskálázzuk az élsúlyokat (így elkerülhetőek a negatív élek problémái).
- Ezután minden csúcsból külön Dijkstra-algoritmust futtatunk.

Időbonyolultság: $O(n^2 \log n + nm)$. Előnyei, hogy sokkal gyorsabb ritka gráfok esetén, különösen ha $m \ll n^2$, illetve hogy a Dijkstra-algoritmus miatt hatékony nagy gráfokra is.

6.5. A legrövidebb utak problémájának alkalmazásai

A legrövidebb utak keresése számos valós problémában és ipari alkalmazásban központi szerepet játszik, ahol az optimális útvonalak vagy minimális költségű kapcsolatok meghatározása elengedhetetlen. Az alábbiakban bemutatunk néhány kulcsfontosságú területet, ahol a legrövidebb utak algoritmusai gyakorlati megoldásokat nyújtanak.

Robotnavigáció: a mobil robotok és autonóm járművek mozgásának megtervezése során a gráfok csúcsai reprezentálhatják a térbeli pozíciókat, az élek pedig az elérhető átmeneteket. A legrövidebb utakat kereső algoritmusok segítik a robotokat abban, hogy az akadályokat elkerülve minimális energia- és időfelhasználással érjék el céljukat.

Szövegformázás TeX-ben: a TeX szövegszedő rendszer legrövidebb utak algoritmusokat használ a tördelés optimalizálására, hogy a sorok közötti elrendezés esztétikus és könnyen olvasható legyen. Az optimális tördelési pontok kiválasztásához dinamikus programozási technikák és gráfelméleti megközelítések alkalmazhatók.

Városi forgalomtervezés: a közlekedési rendszerek optimalizálásához a legrövidebb utak keresése elengedhetetlen, legyen szó közúti, vasúti vagy tömegközlekedési hálózatokról. Az algoritmusok segítenek a torlódások csökkentésében, az optimális útvonalak kijelölésében, valamint a közlekedési lámpák időzítésének optimalizálásában.

A lézengő gőzhajó problémája (Tramp Steamer probléma): a tramp steamer probléma olyan hajózási és logisztikai feladat, ahol egy kereskedelmi hajónak a lehető legköltséghatékonyabb módon kell eljutnia a célállomásaihoz, figyelembe véve a változó kikötői díjakat, időjárási viszonyokat és üzemanyag-felhasználást. A legrövidebb utak algoritmusai segítenek a leggazdaságosabb útvonal meghatározásában.

VLSI-chipek optimális csővezetése (pipeline): a nagyon nagy integráltságú áramkörök (Very-large-scale integration, VLSI) tervezése során az összeköttetések elrendezésének optimalizálása kritikus tényező. A cél az, hogy a vezetékek a lehető legkisebb késleltetéssel és minimális chipterület felhasználásával kapcsolják össze az áramköri elemeket. A legrövidebb utak algoritmusok segítenek az összeköttetések kialakításában és az áramkörök hatékonyságának növelésében.

Telemarketing-operátorok beosztása: a telemarketing-rendszerekben az operátorok hatékony időbeosztása és a hívások optimális elosztása segíthet a költségek csökkentésében és az ügyfélszolgálati hatékonyság növelésében. Gráfok segítségével modellezhető, hogy az egyes hívások között milyen minimális időtartam szükséges, így a munkabeosztás optimalizálható.

Távközlési üzenetek útvonalválasztása: a hálózati kommunikációban és a telekommunikációs rendszerekben az adatok optimális útvonalon történő továbbítása elengedhetetlen a késleltetés és az erőforrás-felhasználás minimalizálásához. A csomagkapcsolt hálózatok (például az internet) adatátviteli protokolljai, mint

az OSPF (Open Shortest Path First), legrövidebb utak algoritmusokat használnak a forgalomirányításra.

Arbitrázslehetőségek kihasználása a devizapiacra: a devizakereskedelemben az arbitrázslehetőségek kiaknázása során a pénzváltási útvonalakat optimalizálni kell, hogy egy devizából egy másikba történő átváltás során maximális nyereséget érjenek el. A Bellman–Ford-algoritmus alkalmazható negatív súlyú körök azonosítására, amelyek arbitrázslehetőséget jelezhetnek.

Teherautók optimális útvonala torlódás figyelembevételével: a fuvarozás és logisztika területén a szállító járművek útvonalának optimalizálása csökkentheti a szállítási időt és az üzemanyag-felhasználást. A legrövidebb utak algoritmusok figyelembe vehetik a forgalmi torlódásokat, az időjárási körülményeket és az üzemanyagköltségeket is, hogy a lehető legjobb útvonalat határozzák meg.

6.6. Leghosszabb utak fája

A legrövidebb utak problémával ellentétben, amely, amint láthattuk, polinom időben megoldható (amennyiben a gráf nem tartalmaz negatív súlyú köröket), a leghosszabb utak probléma NP-nehéz. Ennek döntési változata, amely azt kérdezi, hogy létezik-e egy legalább adott hosszúságú út a gráfban, NP-teljes (Garey–Johnson 1979). Ez azt jelenti, hogy általános gráfok esetén nem létezik ismert polinomiális idejű algoritmus, hacsak nem teljesül $P = NP$.

Ráadásul a probléma még közelítő megoldása is rendkívül nehéz, amit további erős bonyolultsági eredmények is alátámasztanak. Ugyanakkor, ha a gráf irányított és körmentes (DAG), akkor a leghosszabb utak probléma lineáris időben megoldható a fentebb bemutatott topologikus rendezésen alapuló dinamikus programozási módszer adaptálásával. Ez a megoldás kulcsfontosságú szerepet játszik az ütemezési problémákban, különösen a kritikus út módszerében (Critical Path Method, CPM), amelyet projektmenedzsmentben, gyártási folyamatok optimalizálásában és egyéb időzítési feladatokban alkalmaznak.

6.7. Összegzés

Összefoglalásként elmondható, hogy a minimális súlyú feszítőfák és a legrövidebb utak fái eltérő célokat szolgálnak ugyan, de egyaránt kulcsszereplők a hálózatok szerkezetének értelmezésében és hatékony elemzésében. Míg a minimális feszítőfa a hálózat lefedésének optimális vázát nyújtja, addig a legrövidebb utak fái a lokális és globális elérhetőségi viszonyokat világítják meg. A tárgyalt algoritmusok nem csupán elméleti eleganciájuk miatt fontosak, hanem mert kézzelfogható eszközöket adnak a hálózati jelenségek – például információterjedés, közvetítő szerepek vagy kapcsolati távolságok – modellezéséhez.

7. Útvonalak a genom szövetében – Hamilton- és Euler-stratégiák

Az előző fejezetekben a hálózatok szerkezetét vizsgáltuk: hogyan kapcsolódnak egymáshoz a pontok (csúcsok), milyen tulajdonságokat hordoznak az élek, hogyan azonosíthatók fontos alstruktúrák – például feszítőfák vagy klaszterek –, és miként tükröződik mindezekben a hálózat funkcionális logikája. A hálózat statikus szerkezete azonban csak az egyik oldala a történetnek. Most egy másik dimenzióra, a bejárhatóságra fókuszálunk.

Mi történik akkor, ha nemcsak azt akarjuk tudni, hogy mi mivel van összekötve, hanem azt is, hogy hogyan lehet végighaladni a hálózaton – lehetőleg úgy, hogy ne ismételjünk meg egy pontot vagy egy kapcsolatot sem? Ez a kérdés különösen izgalmas a bioinformatika világában, ahol egy genom szekvenálása során nem elég ismerni az „alkotórészeket”, hanem az is kulcsfontosságú, hogy milyen sorrendben követik egymást (Compeau–Pevzner 2018).

Ebben a fejezetben két klasszikus gráfelméleti fogalom kerül előtérbe: a Hamilton-út és az Euler-vonal. Míg az előbbi olyan utat keres, amely minden csúcsot pontosan egyszer érint, az utóbbi arra törekszik, hogy minden élt egyszer járjunk be. A különbség elsőre aprónak tűnhet, mégis – ahogy látni fogjuk – jelentős következményekkel jár a számítástechnikai feldolgozhatóságra nézve, és alapvetően meghatározza, hogyan állítható össze egy DNS-szekvencia az apró szekvenciárészekből.

7.1. Humán genom-projekt

A humán genom-projekt (Human Genome Project, HGP) a tudománytörténet egyik legnagyobb és legátfogóbb vállalkozása volt. A nemzetközi kutatócsoport által vezetett kezdeményezés célja az volt, hogy teljes egészében feltérképezze és elemezze az élőlények – köztük az ember – örökítőanyagát, vagyis genomját. A projekt 1990 októberében indult, és 2003 áprilisában zárult le.

Legkiemelkedőbb eredménye az emberi genom első teljes szekvenciájának meghatározása volt – az emberi szervezet genetikai „tervjazának” feltárása. A végső szekvencia több mint 90%-át fedte le az emberi genomnak, és ez a technológia akkori állása szerint a legteljesebb változatnak számított.

A National Human Genome Research Institute hangsúlyozza (NHGRI, n.d.), hogy a HGP során előállított referenciagenom valójában több ember DNS-ének mozaikja volt. A mintaadók személyazonosságát szándékosan titokban tartották. Az eredeti szekvencia 70%-a egyetlen, kevert származású személy DNS-éből

származott, míg a fennmaradó 30% 19 másik, főként európai származású személytől. Az önkénteseket nyilvános felhívásokkal toborozták, majd vérmintát vettek tőlük, amelyből kivonták a DNS-t (7.1. ábra).



7.1. ábra. Egy 1997-es újsághirdetés Buffalo városából (New York állam), amely önkénteseket toborzott vérminták és DNS adományozására a Humán Genom Projekt számára (NHGRI Genomikai Történeti Program Archívuma)

2000 júniusában a nemzetközi konzorcium bejelentette a vázlatos genomszekvenciát, amely az emberi genom kb. 90%-át lefedte, de több mint 150 000 szekvenenciahiányt (ún. gapet) tartalmazott. 2003 áprilisában készült el a lényegében teljes genomszekvencia, amely már 92%-os lefedettséget és kevesebb mint 400 szekvenenciahiányt tartalmazott – ez sokkal pontosabb és stabilabb volt.

Végül 2022. március 31-én a Telomere-to-Telomere (T2T) konzorcium jelentette be, hogy minden fennmaradó hiányzó szakaszt sikerült pótolniuk, és elkészült az első valóban teljes emberi genomszekvencia (Nurk et al. 2022).

A HGP nemcsak forradalmasította az emberi biológia kutatását, hanem alapvető változásokat hozott az orvostudományban is: lehetővé tette a genetikai betegségek pontosabb megértését, hozzájárult a személyre szabott gyógyászat kialakulásához, és új utakat nyitott a diagnosztika, a terápia és a prevenció területén.

A projekt abban is különleges volt, hogy a kutatók nem előzetes hipotézisek alapján dolgoztak, hanem az ismeretlen biológiai tér feltérképezése vezérelte őket. Ez a megközelítés új távlatokat nyitott a felfedező típusú kutatások előtt.

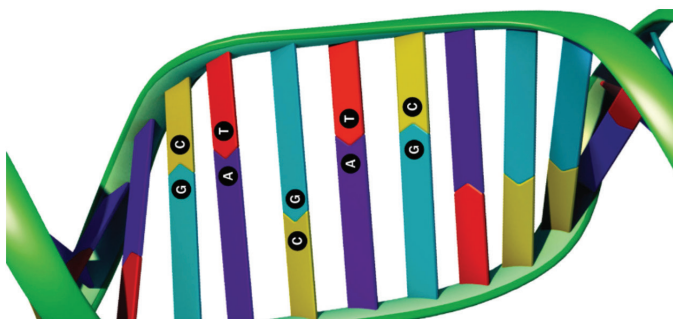
A HGP kulcsszerepet játszott a tudományos adatok nyílt megosztásának megerősítésében is. Szabályozásokat és irányelveket ösztönzött a kutatási eredmények szabad hozzáférhetőségéhez, és hozzájárult a bioetika megerősödéséhez is: az emberi genom szekvenálásával kapcsolatos társadalmi és etikai kérdések előtérbe kerültek, új alapokra helyezve a biomedikai kutatások felelősségét.

7.2. Biológiai csepp – hogyan kódolja a testünk titkait a DNS?

Miért van az, hogy valakinek göndör a haja, másnak pedig egyenes? Mi határozza meg a szemszínünket, a bőrünk árnyalatát, vagy hogy milyen magasra nőünk? Miért hasonlítunk egyik szülőnkre jobban, mint a másokra? A válasz minden sejtünk mélyén ott rejtőzik: egy különleges molekulában, a DNS-ben.

A DNS-t gyakran egy kettős spirál alakú létrához hasonlítják (7.2. ábra). A létra két oldalát cukor-foszfát láncok alkotják, melyeket négyféle létrafok – azaz bázispár – köt össze: A (adenin), T (timin), G (guanin) és C (citozin). Ezek a betűk soha nem véletlenszerűen kapcsolódnak: A mindig T-vel, C pedig mindig G-vel párosodik, így stabil szerkezetet alkotva.

Képzeljük el, hogy ez a létra kettéválik, és a két oldalából kiállnak a létrafokok csonkjai. Ezek a bázisdarabok – A, T, G és C – egymás után sorakozva kódolt információt hordoznak. A betűk sorrendje nyilván nem véletlen, hanem olyan, mintha egy titkos nyelven írt használati utasítás lenne – az élő szervezetek működésére.



7.2. ábra. Szemléltető részlet a DNS-létrából

A DNS ábécéje tehát mindössze négy „betűből” áll: A, T, G és C. Ezek hármas csoportokba rendeződnek – ezeket hívjuk kodonoknak –, amelyek mindegyike egy-egy aminosavat jelent. A kodonokból mondatok, „utasítások” épülnek, ezeket nevezzük géneknek. Egy átlagos gén körülbelül 27 000 betűből áll, és ezekből a génekből – illetve a köztük elhelyezkedő, nem kódoló szakaszokból – jönnek létre

a kromoszómák. A kromoszómák olyanok, mint egy-egy fejezet egy óriási könyvben. Az emberi test sejtjeiben 23 kromoszómapár található – ezek együtt alkotják a teljes genomot, azaz az élőlény teljes genetikai információját.

Ráadásul ez a hatalmas mennyiségű információ elképesztően kis helyen elfér. Kiszámolták, hogy 1 gramm száraz DNS – ami alig foglal el egy köbcentimétert – több mint 200 petabájt adatot képes tárolni, ami nagyjából megegyezik több millió modern okostelefon teljes tárhelyével (Adleman 1998). Ez azt jelenti, hogy a ma élő 10 milliárd ember DNS-e csak egy vékony réteget alkotna egy kávéskanál alján (Ilic et al. 2005). A DNS tehát nemcsak az öröklődés alapja, hanem az élővilág egyik legzsenedibb adattárolási formája is. A négy egyszerű betűből álló kódrendszer több információt tartalmaz, mint bármely könyvtár vagy digitális archívum – és mindezt láthatatlanul, mikroszkopikus méretben.

7.3. Genomszekvenálás és -összeállítás

A genomszekvenálás célja egy élőlény teljes genomja vagy annak kiválasztott szakaszai DNS-bázissorrendjének meghatározása. Amennyiben a bázissorrend rekonstrukciója előzetes szekvenciaismeret nélkül, kizárólag a szekvencialeolvasások alapján történik, *de novo genomszekvenálásról* beszélünk.

Szemléltetésül, nem ritka, hogy fontos szövegek csak töredékesen maradnak fenn az utókor számára. Ilyen például a Biblia több korai kézírata is, amelyek különböző másolatokban, részletekben, olykor csak szövegfragmentumokként kerültek elő – sokszor más-más földrajzi helyen. A kutatók ezek átfedései alapján próbálják rekonstruálni az eredeti szöveget.

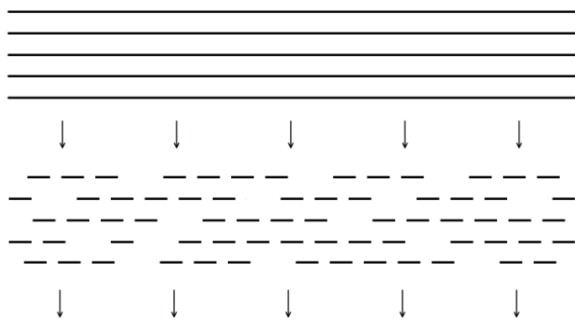
Hasonló elv mentén működik a genomszekvenálás is: a DNS-t nem tudjuk egyben kiolvasni – csak töredékein keresztül ismerjük, amelyek egymással részben átfednek. A kérdés: vissza tudjuk-e állítani az eredeti genetikai „kéziratot”?

7.3.1. A genomszekvenálás algoritmikus szemmel

A genomszekvenálás során nem egy történelmi kéziratot, hanem a DNS-t próbáljuk „elolvasni” – méghozzá nem egyben, hanem sok-sok másolatból, darabokra törve. A mai szekvenálógépek nem képesek egyetlen lépésben végigolvasni a DNS-t, mert az túlságosan hosszú: az emberi genom például több mint 3 milliárd bázispárból áll. Ezért a gépek a DNS-szálat kisebb szakaszokra vágják, és ezekből a darabokból – az úgynevezett readekből (olvasat) – állítanak elő adatsorokat (a szakasznak megfelelő betűsorozatot) (Compeau–Pevzner 2018).

Ahogy a korábban említett kézirtöredékek esetében, itt is az átfedések felismerése és kihasználása a kulcs. A bioinformatikusok algoritmusokat alkalmaznak a darabkák (olvasatok, readek) összekapcsolására, hogy végül visszaállítható legyen az eredeti DNS-szekvencia. Csakhogy ez a feladat nem egy egyszerű

puzzle: nem tudjuk, milyen a „teljes kép”, hiszen épp most próbáljuk megfejteni azt. A genomrekonstrukció tehát nem visszaidézés, hanem felfedezés.



7.3. ábra. Szekvenálatlan genom példányokból (fent) rövid töredékeket, ún. readeket nyerünk ki (középen), amelyekből algoritmusok segítségével rekonstruáljuk a teljes genomot (lent).

```

TAATGCCATGGGATGTT
TAA
AAT
ATG
TGC
GCC
CCA
CAT
ATG
TGG
GGG
GGA
GAT
ATG
TGT
GTT

```

(a)

```

AAT ATG ATG ATG CAT CCA GAT GGA GCC GGG GTT TAA TGC TGG TGT

```

(b)

7.4. ábra. Egy példa DNS-karakterlánc átfedő tripletekre (3-mer-ekre) bontása (a), illetve ezek lexikográfikus sorrendje (b). A lexikográfikus sorrend alkalmazása arra hívja fel a figyelmet, hogy a tripletek eredeti, a szekvenált karakterláncbeli sorrendje nem ismert – éppen ennek rekonstrukciója a cél. (Compeau–Pevzner 2018)

És ha mindehhez hozzátesszük, hogy nem néhány töredékről, hanem több millió szekvenciárszletről van szó, akkor világossá válik: a genomszekvenálás olyan összetett feladat, amely komoly algoritmusokra, nagy számítási kapacitásra és precíz modellezésre épül. A szekvenálás tehát nem ér véget a laboratóriumban: az igazi kihívás gyakran a számítógépes oldalon kezdődik – hogyan rakjuk össze rengeteg darabkából a teljes képet?

Formálisan megfogalmazva, a megoldandó, leegyszerűsített algoritmikai probléma a következő.

- **Bemenet** (7.4. ábra): egy halmaz rövid DNS-szekvenciákból, azaz k -mer-ekből (fix hosszúságú bázissorrendek, pl. 3-mer: TAA, AAT, ATG stb.).
- **Kimenet**: egy olyan hosszú DNS-szál, amelyből éppen ezek a k -mer-ek származhatnak.

A kihívás, hogy ezek a k -mer-ek nincsenek sorrendbe állítva, és nincs információnk az eredeti pozícióikról. Az egyetlen támpont az, hogy a k -mer-ek vége és eleje részben átfed – például ha az egyik vége AA, akkor a következő kezdete is AA. A naiv lépésről lépésre történő összefűzés nem mindig elegendő: több út, elágazás vagy épp zsákutca is lehet. Vegyük például a 7.4. ábra bemutatott esetet. Tegyük fel, hogy tudjuk, hogy TAA-val kell kezdenünk. A következő triplet csakis az AAT lehet. Ezután választhatunk a három azonos ATG közül, de azt már nem tudhatjuk biztosan, hogy a három TG-vel kezdődő triplet közül melyik a helyes folytatás. Ha a TGT-t választjuk, utána már csak a GTT következhet – és ezzel zsákutcába jutunk, mivel nincs olyan triplet, amely TT-vel kezdődne.

7.4. Genomrekonstrukció mint Hamilton-út probléma

A genomrekonstrukciót felfoghatjuk úgy, mint egy Hamilton-út keresési problémát egy átfedésalapú gráfban, ahol a cél az, hogy az összes k -mer-t (például 3-mer-t) tartalmazó csúcsot pontosan egyszer érintsük – így állítható össze a kiinduló DNS-szekvencia.

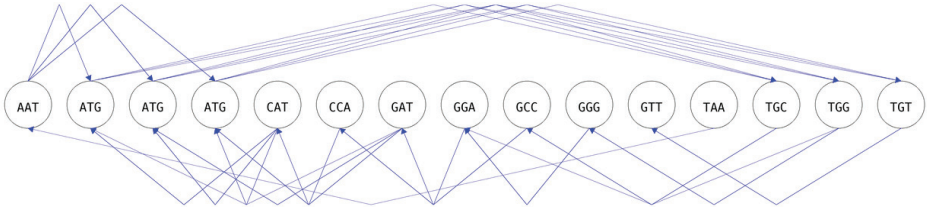
A módszer lényege:

- minden k -mer-t egy csúcsnak tekintünk egy gráfban;
- irányított élt húzunk két csúcs között, ha azok $(k-1)$ -es átfedéssel illeszkednek egymáshoz (például a TAA és AAT k -mer-ek AA alapján kapcsolódnak);
- így épül fel egy irányított gráf, amely az összes lehetséges k -mer átfedést megjeleníti (7.5. ábra).

A feladat abban áll, hogy találjunk olyan útvonalat a gráfban, amely minden csúcsot pontosan egyszer érint – vagyis egy Hamilton-utat. Egy ilyen út egy lehetséges genomszekvenciát reprezentál, amely tartalmazza az összes k -mer-t, ismétlés nélkül.

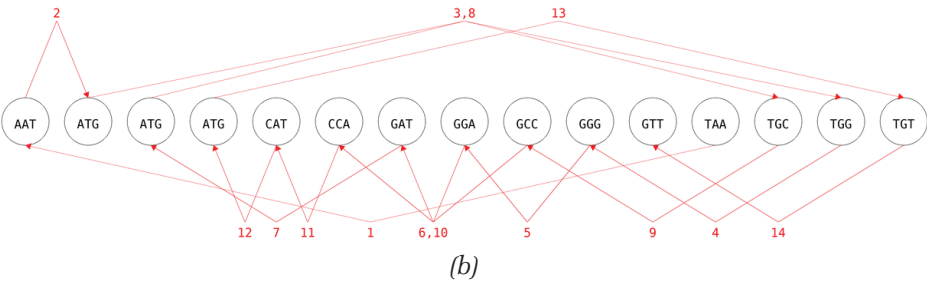
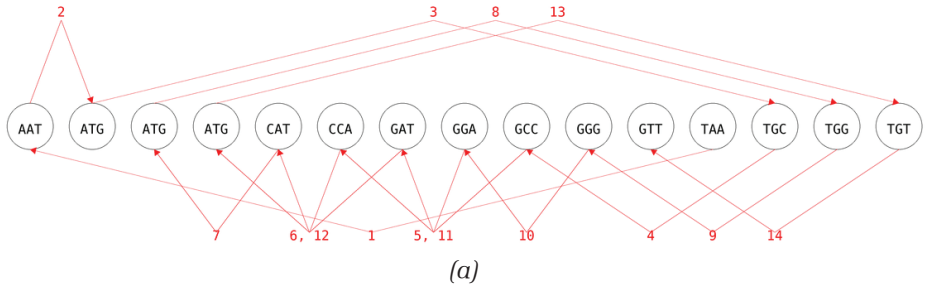
Azonban az átfedési gráfok gyakran nem egyértelműek: több Hamilton-út is létezhet, és nem mindig világos, hogy ezek közül melyik felel meg a ténylegesen

rekonstruálandó DNS-szekvenciának. A 7.6. ábra ezt a problémát szemlélteti, két lehetséges Hamilton-út bemutatásával a példagráfban.



7.5. ábra. Átfedési gráf a TAATGCCATGGGATGTT karakterlánc alapján. A gráf csomópontjai a szekvenciából származó összes triplet (3-mer). Irányított él mutat két csomópont között, ha a kiinduló csomópont 3-mer-jének 2-mer-es szuffixe megegyezik a célcsomópont 2-mer-es prefixével.

Egy másik probléma a Hamilton-út keresésének számítási bonyolultsága. Ahogyan az első fejezetben már utaltunk rá, általános gráfok esetén nem ismerünk hatékony (polinomiális idejű) algoritmust Hamilton-út vagy Hamilton-kör megtalálására.



7.6. ábra. Két Hamilton-útvonal a tripletek átfedési grájában, amelyek a TAATGCCATGGGATGTT és TAATGGGATGCCATGTT karakterláncokat eredményezik. Az útvonalak mentén az éleket sorszámmal láttuk el a könnyebb nyomon követhetőség érdekében.

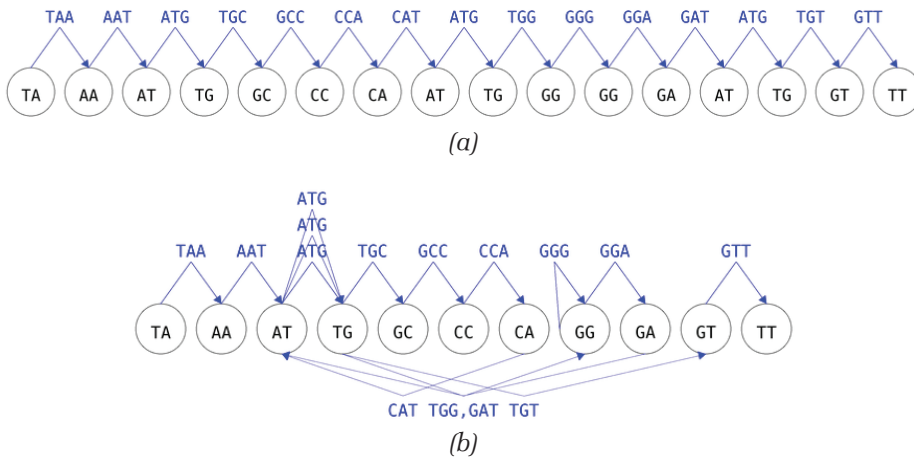
7.5. Genomszekvenálás mint Euler-vonal probléma

Ahogy fentebb is utaltunk rá, a Hamilton-út probléma elméletileg jól meg-alapozott, gyakorlati szempontból azonban nehezen kezelhető. Szerencsére létezik egy alternatív megközelítés: a probléma nem a csúcsok, hanem az élek bejárásaként is értelmezhető. Ez vezet el az Euler-vonal modelljéhez.

Ebben a megközelítésben:

- minden k -mer egy élt képvisel, amely egy $(k-1)$ -es prefix csúcsból egy $(k-1)$ -es szuffix csúcsba mutat;
- az azonos címkeű csúcsokat összeolvasztjuk – például minden AT címkeű csúcsot egybevonunk.

Így jön létre egy úgynevezett De Bruijn-gráf, amely hatékonyan és tömören jeleníti meg a k -mer-ek közötti kapcsolatokat (7.7. ábra).

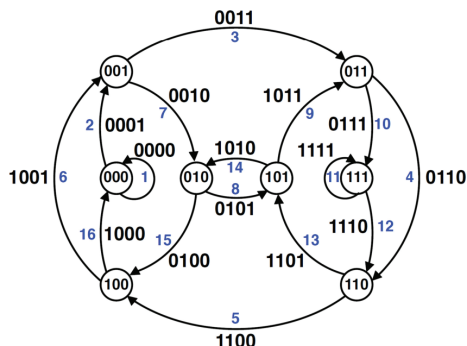


7.7. ábra. (a) Átfedési gráf, amelyben az élek a szekvenciából származó összes 3-mer-t képviselik, a csomópontok pedig a megfelelő 2-mer-ek. (b) Az azonos csomópontok összevonásával létrejövő De Bruijn-gráf

A $B(n, k)$ típusú De Bruijn-gráf (7.8. ábra) olyan irányított gráf, amelynek csúcsai egy adott, n elemű ábécé összes k hosszúságú szavai. Két csúcs között akkor létezik irányított él, ha az első csúcs utolsó $(k-1)$ betűje megegyezik a második csúcs első $(k-1)$ betűjével.

Nicolaas Govert de Bruijn holland matematikust nem a biológia, hanem egy elméleti kérdés, az univerzális füzér problémája foglalkoztatta: létezik-e olyan körös sztring, amely minden lehetséges bináris k -mer-t pontosan egyszer tartalmaz?

Visszatérve a bioinformatikához: az új modell célja nem a csúcsok egyszeri bejárása, hanem minden él – azaz minden k -mer – pontosan egyszeri érintése. Ez a klasszikus Euler-vonal problémája.



7.8. ábra. A De Bruijn-gráf $n = 2$ és $k = 3$ esetén, azaz egy kétbetűs ábécé $(0,1)$ összes hárombetűs szavából $(000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111)$ felépített irányított gráf. Az él-sorszámozás segít a zárt Euler-vonal azonosításában. (Compeau et al. 2011)

Összefoglalva: ha sikerült felépíteni a De Bruijn-gráfot, akkor a genom rekonstruálása megfeleltethető egy Euler-vonal keresésének, vagyis egy olyan útnak, amely minden élt pontosan egyszer érint. Ez az út visszaadja a teljes, összefüggő szekvenciát, amelyből a k -mer-ek származtak.

A Hamilton–Euler váltás indoka (ahogy már utaltunk is rá), hogy míg a Hamilton-út probléma NP-nehéz (lásd az 1.6.1. alfejezetet), az Euler-vonal keresésére hatékony algoritmusok léteznek. Ezért a De Bruijn-gráf és az Euler-vonal alkalmazása bioinformatikai szempontból gyakran praktikusabb megoldást kínál.

7.5.1. Euler tétele és az Euler-vonal algoritmus

Euler tételének értelmében egy irányított gráf akkor és csak akkor járható be zárt Euler-vonal mentén, ha:

- minden csúcs kiegyensúlyozott: azaz a csúcs bejövő és kimenő éleinek száma megegyezik,
- a gráf erősen összefüggő: azaz bármely csúcsból el lehet jutni bármely másik csúcsba.

Ez a kritérium biztosítja, hogy a bejárás nem akad el. Azonban a genom-szekvenálás esetében gyakran nem zárt útvonalat keresünk, hanem olyan Euler-vonalat, amely az egyik csúcsból indulva egy másikba vezet – azaz nem tér vissza a kiindulópontra.

Egy gráf akkor tartalmaz Euler-vonalat, ha nulla vagy két csúcsban tér el a be-fokszám a ki-fokszámtól:

- ha minden csúcs kiegyensúlyozott, akkor az Euler-vonal egyúttal zárt Euler-vonalat is alkot;

- ha pontosan két csúcs nem kiegyensúlyozott – az egyiknél eggyel több a kimenő, a másiknál eggyel több a bejövő él –, akkor az Euler-vonal ezek egyikéből indul, és a másikban végződik;
- ha nem pontosan két csúcs kiegyensúlyozatlan, vagy azok nem megfelelő módon kiegyensúlyozatlanok (lásd az előbbi pontot), akkor nincs Euler-vonal a gráfban.

Az Euler-vonal algoritmusának szemléltetésére képzeljünk el egy vonatot, amely egy város sajátos, irányított vasúti hálózatát járja be úgy, hogy minden vágányt pontosan egyszer használ. A pályaudvarok a gráf csúcsai, a vágányok pedig az élek.

- A vonat elindul arról az állomásról, ahol a kimenő vágányok száma eggyel meghaladja a bejövő vágányok számát (vagy ha nincs ilyen, bármely állomásról).
- Addig halad, amíg lehetséges, mindig követve a még be nem járt vágányokat.
- Egy ponton megakadhat, de csak olyan csúcsban, ahol már nincs további kijárat. Ekkor visszalépünk egy korábban érintett állomáshoz, ahol még van be nem járt vágány, és innen egy újabb részút (körút) indulhat.
- Ezeket a szakaszokat fokozatosan egymásba fűzzük, így összeáll egy teljes út, amely minden vágányt pontosan egyszer érint, és az Euler-vonal kiinduló- és végpontját is figyelembe veszi.

Ez a „vasúti hálózattal” való szemléltetés jól tükrözi az Euler-vonal felépítésének lépéseit, és algoritmikusan is hatékonyan megvalósítható. Valójában maga az algoritmus az Euler-tétel egyfajta konstruktív bizonyításaként is értelmezhető. A genomszekvenálás keretében pedig nemcsak egy lehetséges utat keresünk, hanem garantáltan létezőt – ennek megfelelően a DNS-ből épített De Bruijn-gráf biztosan kielégíti az Euler-feltételeket (lásd továbbá a B függelék 7. pontját).

7.6. Genom-összeállítás töredékpárokkal és párosított De Bruijn-gráfokkal

A genom-összeállítás klasszikus módszere a De Bruijn-gráfokra és az ezekben keresett Euler-vonalakra épül. Azonban itt is fennáll az a probléma, hogy egyetlen De Bruijn-gráfhoz több különböző Euler-vonal is tartozhat – ami azt jelenti, hogy egy szekvencia alapján többféleképp is visszaállítható a genom, és így nem feltétlenül kapunk egyértelmű megoldást.

A megoldás a töredékpáros (read-pár) szekvenálásban rejlik. A töredékpáros technológia során a DNS-t hosszabb szakaszokra darabolják, majd a szakasz mindkét végéből szekvenáciát olvasnak – így egy párosított töredéket vagy töredékpárost (két k -mer egy rögzített távolsággal) kapnak. Ezek a k -mer párosok nemcsak sorrendi, hanem távolsági információt is hordoznak (7.9. ábra). A cél most nem a

hagyományos k -mer kompozícióból, hanem k -mer páros kompozícióból történő genomrekonstrukció.

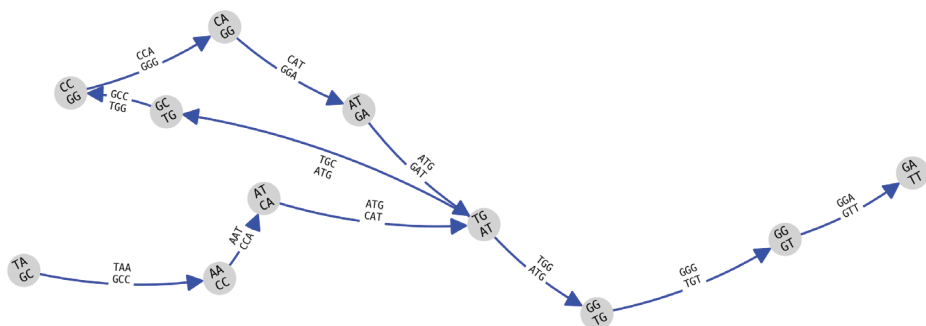
TAATGCCATGGGATGTT
TAA GCC
AAT CCA
ATG CAT
TGC ATG
GCC TGG
CCA GGG
CAT GGA
ATG GAT
TGG ATG
GGG TGT
GGA GTT

7.9. ábra. A TAATGCCATGGGATGTT karakterláncból kinyerhető, 4 pozíciónyi távolságra lévő 3-mer párok. Minden pár első tagja a karakterlánc egy adott pozícióján kezdődik, míg a második tag 4 karakterrel később indul.

A párosított De Bruijn-gráf építésének lépései:

- Minden k -mer páros egy él a gráfban, amely a két $(k-1)$ -mer-ből álló prefix-pártól a megfelelő szuffix-párhoz vezet. Példa az ATG|GAT él az AT|GA csúcsból a TG|AT csúcsba vezet.
- Az azonos címkéjű csúcsokat egymásra csúsztatjuk, akárcsak a sima de Bruijn-gráfnál.

A végeredmény olyan gráf, amelyet kevesebb illesztéssel lehet felépíteni, mert a csúcsok összetettebb információt tartalmaznak (párok, nem egyes k -mer-ek) (7.10. ábra).



7.10. ábra. Párosított De Bruijn-gráf

E módszer előnye, hogy míg a hagyományos De Bruijn-gráfban több Euler-vonal is lehetséges, addig a páros De Bruijn-gráf általában csak egyetlen Euler-vonalat tartalmaz, amely egyértelműen visszaadja a genomot.

7.7. Összegzés

A fejezet során két alapvetően eltérő szemléletmódot vizsgáltunk meg a szekvenálási adatok összerendezésére: a Hamilton-út keresésére épülő gráfmodellt, valamint az Euler-vonalon alapuló De Bruijn-gráf megközelítést. Míg az előbbi elméleti szempontból elegáns, a gyakorlati alkalmazhatósága korlátozott a kombinatorikus bonyolultsága miatt. A De Bruijn-gráf ezzel szemben hatékonyabb és skálázhatóbb megoldást kínál, különösen nagy genomok esetén, azonban ennek működése több idealizált feltételezésre épül.

Ezek az előfeltevések – mint a tökéletes lefedettség, hibamentes olvasatok (readek) vagy az ismert k -mer-gyakoriság – jelentős mértékben eltérnek a valódi szekvenálási adatoktól, amelyek gyakran hiányosak, zajosak és heterogének. Ennek ellenére az ilyen leegyszerűsített modellek rendkívül fontos szerepet játszanak az algoritmikus koncepciók megalapozásában. A bioinformatikában jól ismert megközelítés, hogy a problémát először „nevetségesen” egyszerű formában oldjuk meg, majd fokozatosan bevezetjük a valóság komplexitásait. Ez a fejezet ezt a szemléletet követte, bemutatva, hogyan képes a De Bruijn-gráf modell a szekvenálási adatok mögötti bonyolult valóság elméleti keretbe foglalására.

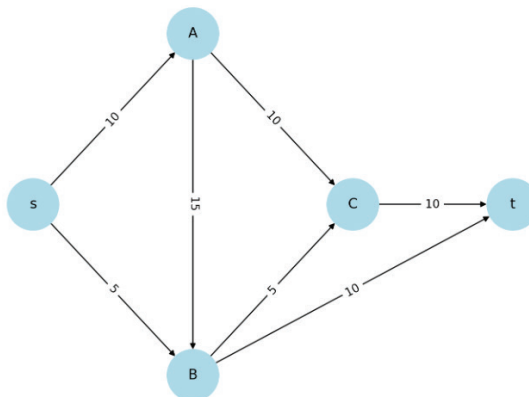
8. Maximális folyam: klasszikus probléma, modern alkalmazások

A 6. fejezetben a hálózatokat mint statikus vázat vizsgáltuk: hogyan lehet optimalizálni a kapcsolatok szerveződését. A 7. fejezetben a fókusz a bejárható tér felé tolódott: az Euler- és Hamilton-útvonalak révén a hálózat sajátos belső logikáját tártuk fel. Most viszont egy újfajta nézőpontot veszünk fel: a hálózatot mint dinamikus közvetítő közeget vizsgáljuk, amelyen keresztül áramlás történik. A kérdés most az, hogyan lehet egy adott hálózaton keresztül a lehető legtöbb erőforrást – legyen az víz, adat, energia vagy akár politikai befolyás – eljuttatni egyik pontból a másikba, figyelembe véve az utak kapacitásait.

Ez a maximális folyam problémája, amely számos gyakorlati helyzetet modellez – az internetes adatforgalom optimalizálásától a logisztikai hálózatok tervezésén át egészen társadalmi vagy stratégiai döntésekig. Ebben a fejezetben megismerkedünk a probléma alapjaival és a Ford–Fulkerson-algoritmussal, amely nemcsak erre ad hatékony megoldást, hanem más algoritmusok alapjául is szolgál.

8.1. A folyamfeladat formális definíciója

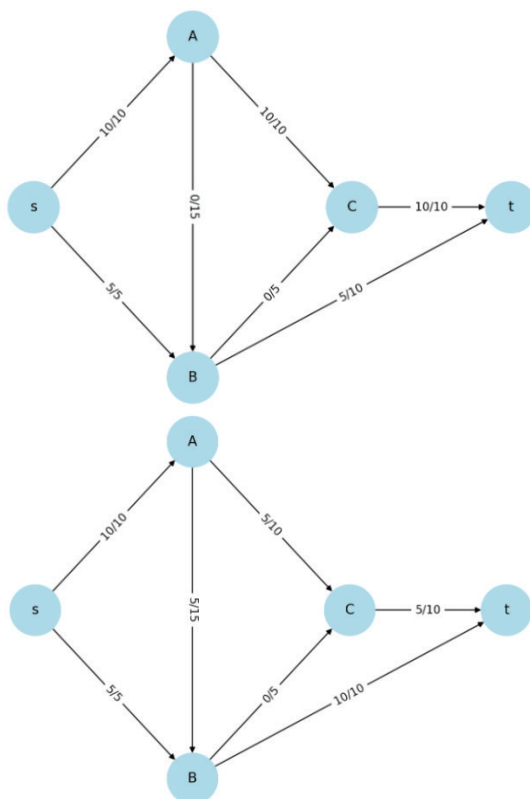
A folyamfeladatot egy irányított, súlyozott gráfban definiáljuk, amelyben egy forrásból (s) egy nyelőbe (t) kell a lehető legnagyobb mennyiségű folyamat eljuttatni, figyelembe véve az élek kapacitásait (Andrásfai 1983) (8.1. ábra).



8.1. ábra. Hálózat gráf, amelyben s a forrást, t a nyelőt, az élek címkei pedig a megfelelő kapacitásértékeket jelölik.

8.1.1. A probléma matematikai modellje

Legyen adott egy irányított hálózat, amelyet egy $G = (V, E)$ gráf reprezentál, ahol V a csúcsok halmaza (a hálózat csomópontjai) és E az élek halmaza (a hálózat kapcsolatai).



8.2. ábra. A két ábrán a 15 egységnyi maximális folyam más-más utakon jut el a forrásból a nyelőbe. (A megfelelő élek címkéjének jelentése: folyam/kapacitás.)

A gráf élein értelmezünk egy $c: E \rightarrow R_+$ kapacitásfüggvényt, amelyre $c(u, v)$ megadja, hogy mennyi lehet az illető élen a folyam maximális értéke.

Egy folyam olyan $f: E \rightarrow R_+$ hozzárendelés, amely megfelel a következő feltételeknek:

- *kapacitáskorlát*: minden él mentén a folyam értéke nem haladhatja meg annak kapacitását:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v), \forall (u, v) \in E;$$

- *egyensúlyfeltétel*: a forrás (s) és nyelő (t) kivételével minden csúcsba belépő folyam megegyezik az onnan kilépő folyammal (ez biztosítja, hogy egy köztes csúcs nem „tárol” vagy „veszít” el értékeket):

$$\sum_{v \in V} f(v, u) = \sum_{w \in V} f(u, w), \quad \forall u \in V \setminus \{s, t\};$$

- *maximális folyamérték*: A cél az, hogy a forrásból a nyelőbe érkező folyam ($|f|$) maximális legyen:

$$|f| = \sum_{(s, v) \in E} f(s, v) = \sum_{(v, s) \in E} f(v, s).$$

Nyilván a forrásból kimenő értékek összege egyenlő a nyelőbe belépő értékek összegével.

Megjegyzés: Bár a c és f függvények értelmezés értelmében pontosabbak lennének a $c((u, v))$ és $f((u, v))$ jelölések, a dupla zárójeltől eltekintünk.

A célunk tehát olyan f függvény meghatározása, amely maximalizálja az $|f|$ értéket, miközben teljesíti a kapacitáskorlátokat és az egyensúlyfeltételeket. A 8.2. ábrák érzékeltetik, hogy a maximális folyamot biztosító f függvény nem egyedi.

8.2. Ford–Fulkerson-előzetes: váratlan és sokoldalú alkalmazások

A Ford–Fulkerson-algoritmus és a maximális folyam probléma nem csupán elméleti érdekesség, hanem számos valós alkalmazásban is kulcsszerepet játszik (Wayne 2004). A sportbajnokságok matematikai elemzésétől a közlekedés, az informatika, az egészségügy és a logisztika optimalizálásáig számos váratlan helyzetben felbukkan. Az alábbi példák azt mutatják be, hogy egy klasszikus gráfelméleti algoritmus milyen sokoldalúan hasznosítható a mindennapi életben és a legmodernebb technológiákban is.

Sportbajnokságok matematikai elemzése (lásd lentebb): Egy vicces példa arra, hogy a Ford–Fulkerson-algoritmus és általában a maximális folyam elmélete mennyire váratlan és érdekes helyzetben képes felbukkanni, az, miszerint a *San Francisco Chronicle* egyik újságírója egyszer azt állította, hogy a Detroit Tigers baseballcsapatnak még volt esélye bejutni a rájátszásba egy adott szezon végén. Azonban egy matematikus (és sportelemző) gráfelméleti módszerekkel, konkrétan a Ford–Fulkerson-algoritmussal bebizonyította, hogy ez lehetetlen volt. Hasonló technikát használtak más sportágakban is (pl. Russell–Van Beek 2009), hogy kiszűrjék azokat a csapatokat, amelyek valójában már kiestek, még akkor is, ha a pontszámok ezt nem tették egyértelművé.

Közlekedési hálózatok optimalizálása (pl. Ceder–Perera 2014): A városi közlekedési rendszerek tervezésében a maximálisfolyam-algoritmusokat arra használják, hogy optimalizálják a forgalmat. Például autópálya-hálózatok esetén kiszámítják, hogy adott infrastruktúrával mekkora forgalmat lehet kezelni. Egy másik lehetőség, hogy tömegközlekedési útvonalaknál segít meghatározni, hogy hogyan lehet az utasokat a lehető leggyorsabban és egyenletesebben elosztani a hálózatban.

Számítógépes hálózatok optimalizálása (pl. Neto–Callou 2015): A számítógépes adatforgalomban az internetes csomópontok terheléelosztása klasszikus maximálisfolyam-problémaként jelenik meg. A maximálisfolyam-algoritmusokat az adatcsomagok optimális elosztására alkalmazzák nagy hálózatokban, különösen a hálózati kapacitástervezés során, hogy azonosítsák, hol szükséges az infrastruktúra megerősítése. Ezen kívül a szerverek közötti terhelés optimalizálásában is kulcsszerepet játszhatnak ezek az algoritmusok.

Szervátültetési hálózatok: A szervdonorok és recipiensek párosítása szintén egy hálózati folyam problémává alakítható. Egy országos veseátültetési rendszerben a betegek és az elérhető donorok gráfként modellezhetők, ahol az élek azt mutatják, hogy ki kaphat szervet kitől (például vércsoport és egyéb orvosi kompatibilitási tényezők alapján). A Ford–Fulkerson-algoritmus segítségével maximalizálható a lehetséges transzplantációk száma egy adott időszakban. Az USA-ban működő Kidney Paired Donation program például alkalmaz folyam-algoritmusokat a vesecsereprogramok hatékonyságának növelésére (Wallis et al. 2011).

Katonai és logisztikai problémák (Khachatryan 2024): A hadseregek számára kritikus jelentőségű, hogy egy adott erőforrást (pl. üzemanyagot, élelmiszert, fegyverzetet) hogyan tudnak a lehető leghatékonyabban szállítani egy hálózatban. Ahogy John J. Pershing amerikai tábornok az első világháború idején megfogalmazta: „a gyalogság nyeri a csatákat, a logisztika nyeri a háborúkat”. A folyam-algoritmusok, például a Ford–Fulkerson-módszer (és ennek továbbfejlesztett változatai), kulcsszerepet játszanak a logisztikai útvonalak és az ellátási láncok optimalizálásában, különösen háborús övezetekben vagy humanitárius segélyszállítmányok tervezésénél.

Vízkeszletek és öntözőrendszerek optimalizálása (pl. Kyi–Naing 2018): A maximálisfolyam-algoritmusokat vízgazdálkodási rendszerekben is alkalmazzák. Például egy folyóból vagy tározóból különböző csatornákon keresztül kell eljuttatni az optimális mennyiségű vizet a mezőgazdasági területekre. Vagy ugyancsak a Ford–Fulkerson-algoritmus segíthet meghatározni, hogy a rendelkezésre álló csatornkapacitások mellett hogyan lehet a vízszükségletet legjobban kielégíteni.

8.3. Ford–Fulkerson-algoritmus

Amint már említettük, a Ford–Fulkerson-algoritmus a maximális folyam problémájának megoldására szolgál, és a hálózati folyam modellek egyik legismertebb algoritmus. Nevét két amerikai matematikusról, Lester Randolph Ford Jr. és

Delbert Ray Fulkerson után kapta, akik 1956-ban publikálták az eljárást. Egészen pontosan, a *Maximal Flow through a Network* című cikkük a RAND Corporation egyik jelentése volt, és az Amerikai Légierő számára készült.

A második világháború után a matematikai optimalizálási problémák iránti érdeklődés katonai és logisztikai alkalmazások miatt erősödött meg. A hadseregnek szükségük volt olyan módszerekre, amelyekkel ellátási útvonalakat optimalizálhatnak, hadművelleti stratégiákat tervezhetnek, illetve erőforrásokat (pl. üzemanyagot, élelmiszert, fegyverzetet) szállíthatnak a lehető leggyorsabban. Ezen problémák közös jellemzője az volt, hogy egy hálózatban (gráfban) kellett optimalizálni a folyamot, figyelembe véve a kapacitáskorlátokat.

A Ford–Fulkerson-algoritmus kidolgozása közvetlenül hozzájárult az egyik legfontosabb gráfelméleti eredményhez, a max-flow/min-cut tételhez. Ez a tétel kimondja, hogy egy hálózatban a maximális folyam értéke pontosan egyenlő a minimális vágat kapacitásával. A min-cut egy olyan élhalmaz, amely (i) elvágyja a forrást a nyelőtől, és (ii) minimális összkapacitással rendelkezik. Ez az összefüggés rendkívül mély és hasznos, mert nemcsak azt mutatja meg, hogyan lehet meghatározni a maximális folyamot, hanem azt is, hogy hol található a hálózat legszűkebb keresztmetszete.

A Ford–Fulkerson-algoritmus alapváltozata nem garantált polinomiális futásidőt, mivel, például, ha irracionális kapacitásokat használunk, akkor az algoritmus akár végtelen ciklusba is kerülhet. Ezért később továbbfejlesztették. Az alábbiakban az 1972-ben publikált Edmonds és Karp vátozatát mutatjuk be, amely a Ford–Fulkerson-algoritmus szélességi keresésen alapuló optimalizált változata, és $O(nm^2)$ időben fut. Ez a verzió garantáltan polinomiális futásidejű, és gyakran használják mind elméleti, mind gyakorlati problémákban.

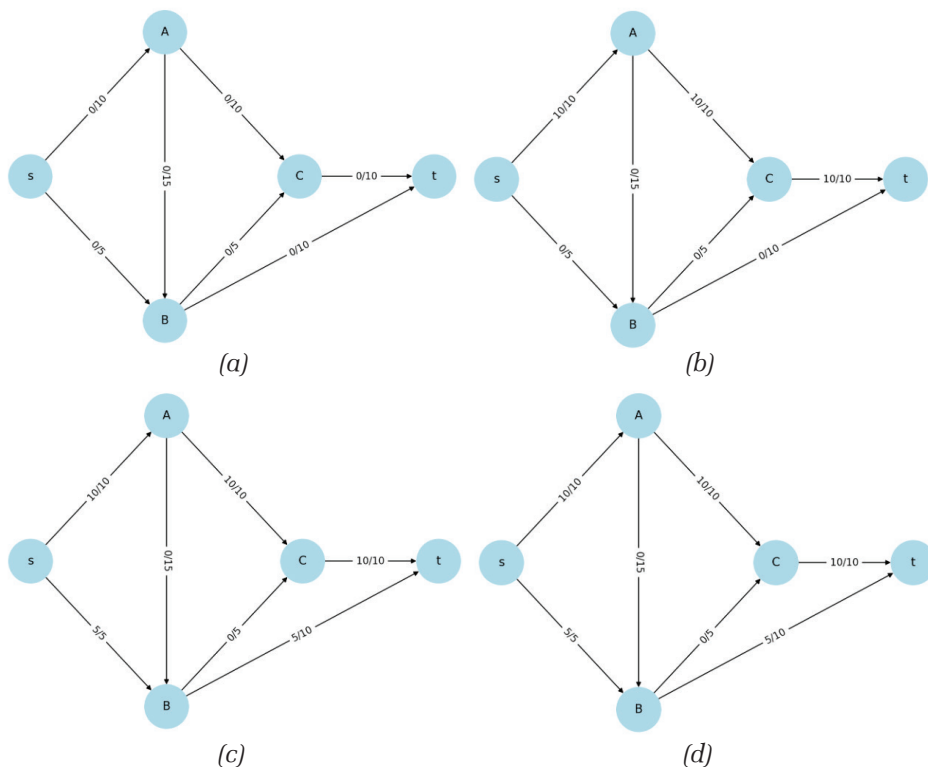
Természetesen Ford és Fulkerson öröksége messze túlmutat ezen az egy algoritmuson, hisz teljes munkásságuk kulcsfontosságúnak mondható a gráfelmélet és az operációkutatás fejlődésében. Fulkerson különösen ismert a kombinatorikus optimalizálásban, és az ő nevét viseli a híres Fulkerson-díj, amelyet kiemelkedő diszkrét matematikai kutatásokért osztanak ki.

8.3.1. Az algoritmus lényege

Bevezetjük a javító (vagy augmentáló) út fogalmát. A javító út olyan út a forrástól a nyelőig, amelyen még lehet növelni a folyamot, merthogy egyetlen úti menti él sem telített még. A Ford–Fulkerson-algoritmus lényege az, hogy kezdetben a gráf minden éle mentén 0 folyamértéket állítunk be, majd újra és újra keresünk javító utakat, és azokon növeljük a folyamot, amíg nem találunk több ilyen utat (minden s -ből t -be vezető út telítetté vált).

Egy s -ből t -be vezető javító út sajátossága, hogy egyfelől figyelmen kívül hagyja az élek irányítását, másfelől viszont figyelembe is veszi azokat. Eltekint az irányítástól abban az értelemben, hogy egy élen ellenkező irányban is áthaladhat.

Ugyanakkor figyelembe veszi az irányításokat, hiszen azokat az éleket, amelyeken menetirányban haladunk át (az él iránya megegyezik az út irányával), előre-éleknek nevezzük, míg azokat, amelyeken szemből haladunk át (az él iránya ellentétes az út irányával), vissza-éleknek tekintjük.



8.3. ábra. (a) kezdeti állapot: minden él folyamértéke 0; (b) az $s \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow t$ javító út mentén 10 egységgel növelhető a folyam; (c) az $s \rightarrow B \rightarrow t$ javító út mentén 5 egységgel növelhető a folyam; (d) nincsenek további javító utak: a maximális folyam értéke 15.

Egy előre-él telítetlen, ha rajta a folyam kisebb, mint a kapacitása ($f(u,v) < c(u,v)$). Az ilyen él mentén történő javítás azt jelenti, hogy növeljük a rajta áthaladó folyam mennyiségét. Egy vissza-él telítetlen, ha rajta a folyam nagyobb, mint nulla ($f(u,v) > 0$). Ilyenkor a „visszafolyás” csökkentésével növelhető a forrásból a nyelőbe tartó összefolyam értéke. Fordítva: egy előre-él telített, ha a folyam értéke eléri a kapacitását ($f(u,v) = c(u,v)$); egy vissza-él telített, ha a folyam értéke nulla ($f(u,v) = 0$). Egy előre-él mentén a folyam legfeljebb $(c(u,v) - f(u,v))$ értékkel növelhető, míg egy

vissza-él mentén legfeljebb az f értékkel csökkenthető. Fontos szempont, hogy egy él telítettsége vagy telítetlensége attól függ, hogy előre- vagy vissza-élként szerepel az adott javító úton.

Értelemszerűen, egy javító út mentén a maximális javítási mérték az út élei mentén vett értékek minimumával lesz egyenlő. Ez az érték határozza meg, hogy a folyam mennyivel növelhető az adott úton, figyelembe véve a legszűkebb szakasz korlátozó hatását. A szóban forgó javítással az illető út telítetté válik, merthogy a legszűkebb szakaszt vagy szakaszokat képviselő élek telítetté válnak.

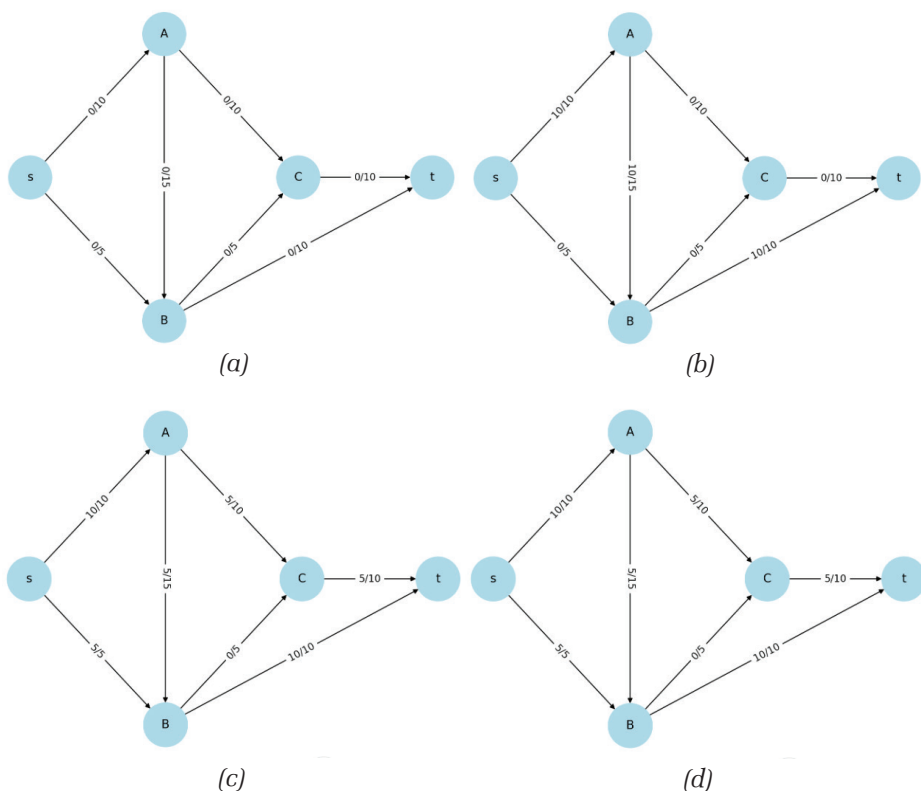
A 8.3. ábrák lépésről lépésre mutatják be a maximális folyam kiszámítását a Ford–Fulkerson-algoritmus segítségével.

- (8.3.a. ábra) Kiindulási állapot
 - Minden élen 0 egység folyam van. A megfelelő címke „0 / kapacitás” formában jelenik meg.
- (8.3.b. ábra) Első javító út ($s \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow t$)
 - A szűk keresztmetszet 10 egység, mivel az út minden élen legalább ennyi szabad kapacitás áll rendelkezésre. A Folyam ennek megfelelően 10 egységgel növelhető ezen az úton.
- (8.3.c. ábra) Második javító út ($s \rightarrow B \rightarrow t$)
 - A szűk keresztmetszet ezúttal 5 egység, így a folyam további 5 egységgel növelhető ezen az útvonalon.
- (8.3.d. ábra) Végso állapot – maximális folyam
 - Nincs több elérhető javító út, ezért elértük a maximális folyamértéket, amely 15 egység.
 - A címkék a „végsőfolyam / kapacitás” értékeket mutatják.

A Ford–Fulkerson-algoritmus egyik fontos tulajdonsága, hogy a maximális folyam eredménye független a javító utak kiválasztásának sorrendjétől. Más szóval, ha különböző utak mentén és különböző sorrendben hajtjuk végre a javításokat, a végső maximális folyam értéke ugyanaz marad, de az egyes élek végső folyamértékei eltérhetnek. A 8.4. ábra bemutatta példa sajátossága, hogy a második javító út tartalmaz előre- és vissza-éleket is.

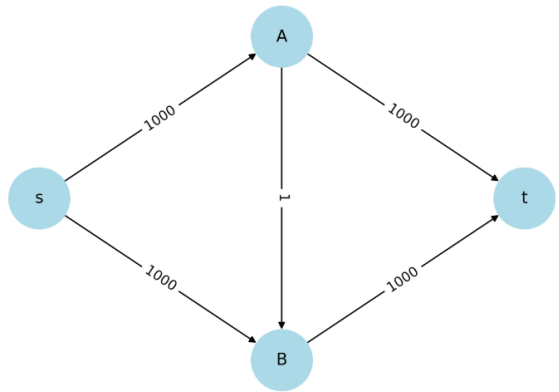
A 8.4. ábra szerinti lépések összegzése:

- (8.4.b. ábra) Első javító út ($s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow t$; átfolyás: 10 egység)
 - A legszűkebb kapacitás 10 egység, így a folyamot ennyivel növeljük.
 - A frissített folyamértékek: $s \rightarrow A$: 10 egység, $A \rightarrow B$: 10 egység, $B \rightarrow t$: 10 egység.
- (8.4.c. ábra) Második javító út ($s \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow t$; átfolyás: 5 egység)
 - A legszűkebb kapacitás 5 egység, így a folyam ennyivel növekszik.
 - A frissített folyamértékek: $s \rightarrow B$: 5 egység, $B \rightarrow A$: 5 egység (visszaáramlás), $A \rightarrow C$: 5 egység, $C \rightarrow t$: 5 egység.
- (8.4.d. ábra) Végso állapot – maximális folyam 15 egység
 - Az összefolyam a forrásból a nyelőbe 15 egység.
 - Nincs több javító út, az algoritmus ezzel befejeződött.



8.4. ábra. (a) kezdeti állapot: minden él folyamértéke 0; (b) az $s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow t$ javító út mentén 10 egységgel növelhető a folyam; (c) az $s \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow t$ javító út mentén 5 egységgel növelhető a folyam; (d) nincsenek további javító utak: a maximális folyam értéke 15.

Bár a végső eredmény nem függ a javító utak sorrendjétől, az algoritmus hatékonyságát nagyban befolyásolhatja. Igazából a Ford–Fulkerson-algoritmus hatékonysága az útkeresési stratégiától függ: ha például DFS-sel valósítjuk meg a javítóút-keresést (az algoritmus eredeti változata), akkor az algoritmus futásideje $O(m|f_{\max}|)$, ahol $|f_{\max}|$ a maximális áramlás értéke. Ha BFS-sel (Edmonds–Karp-változat) implementáljuk a keresést, a futásidő, amint már utaltunk rá, $O(nm^2)$ lesz. Ezt szemlélteti a 8.5. ábra. További implementációs részletek végett lásd a B függelék 8. pontját.



8.5. ábra. Ha az $s \rightarrow A \rightarrow t$ és $s \rightarrow B \rightarrow t$ javító utak mentén javítunk a folyamértékeken, akkor két menetből meglesz a 2000 egység maximális folyam. Ha viszont a $s \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow t$, $s \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow t$ útpárost választjuk újra és újra, akkor egyetlenként 1 egységgel nő a folyam, és összesen 2000 menetre lesz szükség a maximális folyam beállításához.

8.4. Bajnoksági kiesések és a Ford–Fulkerson-algoritmus

A baseballbajnokságok során például az egyik legfontosabb kérdés az, hogy mely csapatok juthatnak még be a rájátszásba, és melyek vannak matematikailag kizárva. Első ránézésre a válasz könnyűnek tűnhet: ha egy csapatnak már nincs elég hátralévő meccse ahhoz, hogy behozza a divízióvezetőt, akkor egyértelműen kiesett. Azonban néha a kiesés nem ennyire nyilvánvaló, mivel a csapatok egymás ellen is játszanak, így bonyolult forgatókönyvek is lehetségesek.

8.1 táblázat. Szemléltető példa nyilvánvaló és bonyolultabb kiesésre (Sedgewick 2002)

csapat	győzelem-vereség	hátralévő meccsek	Atl	Phi	NY	Mon
Atlanta Braves	83–71	8	–	1	6	1
Philadelphia	80–79	3	1	–	0	2
New York Mets	78–78	6	6	0	–	0
Montreal Expos	77–82	3	1	2	0	–

Vegyük egy példát, amely megmutatja, hogy miért nem mindig egyértelmű egy csapat kiesése. A 8.1. táblázat négy csapat esetét mutatja be, megadva ezek

győzelmei, vereségei és hátralévő meccsei számát, valamint azt, hogy ki kivel fogja a meccseket játszani.

Első ránézésre egyértelmű kiesés:

- A Montreal Expos a szezon végére maximum 80 győzelmet érhet el.
- Az Atlanta Braves már most 83 győzelemmel rendelkezik, tehát Montreal mindenképp kiesett.

Bonyolultabb kiesés:

- Philadelphia akár 83 győzelemig is eljuthat, ami elvileg elég lehetne az Atlanta beéréséhez.
- De ez csak akkor lenne lehetséges, ha Atlanta minden hátralévő meccsét elvesztené, beleértve a New York Mets elleni hat mérkőzést.
- Ha ez megtörténik, akkor New York legalább 84 győzelemmel végezne, így Philadelphia hiába érné el a 83 győzelmet, matematikailag mégis kiesne.

Ez a példa jól mutatja, hogy a kiesés nem mindig nyilvánvaló, és sokszor figyelembe kell venni az összes lehetséges meccsforgatókönyvet.

8.4.1. A San Francisco Chronicle története – a Detroit Tigers esete

A bajnoksági kiesések matematikai vizsgálata nem csupán elméleti kérdés – egy konkrét esetben egy sportújságíró hibás következtetését cáfolták meg gráfelméleti módszerekkel.



8.6. ábra. San Francisco Chronicle, 1996. szeptember 10.

1996-ban a *San Francisco Chronicle* egyik újságírója azt állította, hogy a Detroit Tigersnek még volt esélye bejutni a rájátszásba az Amerikai Liga Keleti divíziójában (lásd a 8.2. táblázatot). Azonban egy gráfelméleti elemzés (Ford–Fulkerson-algoritmus) kimutatta, hogy ez matematikailag lehetetlen volt.

8.2. táblázat. Az 1996-os Amerikai Liga Keleti Divíziójának állása (augusztus 30). A w , l , r oszlopok a megnyert, elveszített és hátralévő meccsek számát tartalmazzák. A táblázat továbbá tartalmazza még a hátralévő egymás közti mérkőzések mátrixát is, amelyre g -vel fogunk hivatkozni. A $g[i][j] = g[j][i]$ érték azt mutatja, hogy az i és j csapatok hány meccset kell még játszaniuk egymás ellen. (Sedgewick 2002)

csapat	győzelem(w)- vereség(l)	hátralévő meccsek(r)	NY	BAL	BOS	TOR	DET
New York Yankees	75–59	28	–	3	8	7	3
Baltimore Orioles	71–63	28	3	–	2	7	4
Boston Red Sox	69–66	27	8	2	–	0	0
Toronto Blue Jays	63–72	27	7	7	0	–	0
Detroit Tigers	49–86	27	3	4	0	0	–

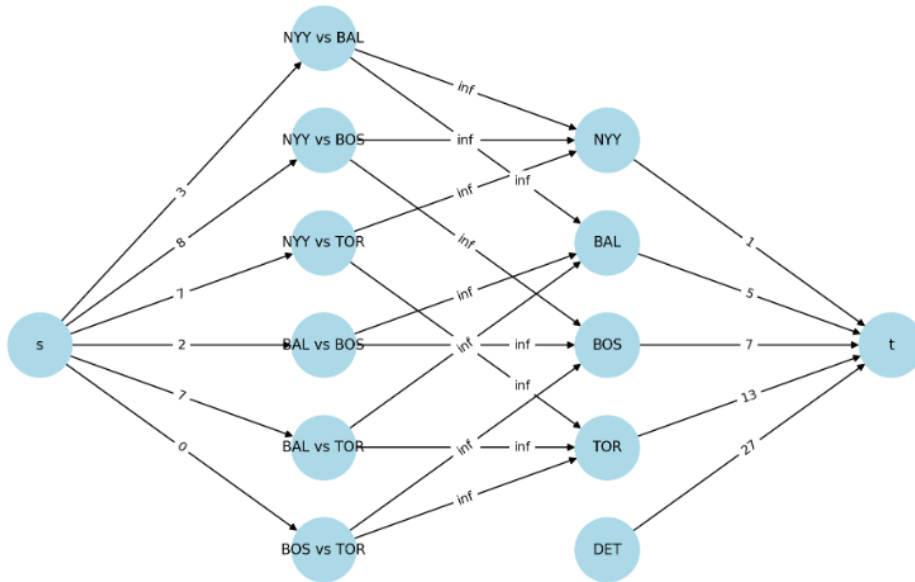
A Detroit Tigers szurkolói reménykedtek, hogy a csapatuk még elérheti az első helyet, mivel ha mind a 27 hátralévő meccsüket megnyernék, akkor 76 győzelmük lenne, ami több, mint a jelenlegi élvonalas Yankees győzelmeinek száma. De vajon ez lehetséges?

8.4.2. Gráfelméleti modellezés – a Ford–Fulkerson-algoritmus alkalmazása

A bajnoksági kiesések kérdését úgy közelítjük meg, hogy egy maximális-folyam-problémára redukáljuk. Egy adott x csapat matematikai kiesésének ellenőrzéséhez létrehozunk egy hálózatot, és megvizsgáljuk benne a maximális folyamot. A hálózatban lesz egy virtuális forráspont és egy virtuális nyelőpont, valamint lesznek csapat- és mérkőzés-csomópontok. Mivel megelőlegeztük, hogy x csapat minden meccsét megnyeri, és abban vagyunk érdekeltek, hogy a többi csapat garantáltan túlszárnyalja-e x -et, ezért a csapat-csomópontok ezeket a csapatokat, a mérkőzés-csomópontok pedig ezek hátralévő egymás közti mérkőzéseit képviselik. A 8.7. ábra a 8.2. táblázathoz társított folyamgráfot mutatja be arra az esetre vonatkoztatva, amikor a vizsgálat alatt álló x csapat a Detroit Tigers.

Az ebben a hálózatban megvalósítható egész értékű folyamértékek a hátralévő mérkőzések lehetséges kimeneteleinek felelnek meg. Egészen pontosan, a folyam ebben a hálózatban úgy értelmezendő, hogy minden egység egy hátralévő mérkőzést reprezentál. A folyam először egy mérkőzés-csomóponton (például i és j

csapatok meccsén) keresztül egy csapatcsomópontba (i vagy j) jut, amely azt jelzi, hogy az adott csapat megnyerte a mérkőzést.



8.7. ábra. A 8.2. táblázathoz társított folyamgráf

A hálózat háromféle élt tartalmaz sajátos kapacitásértékekkel.

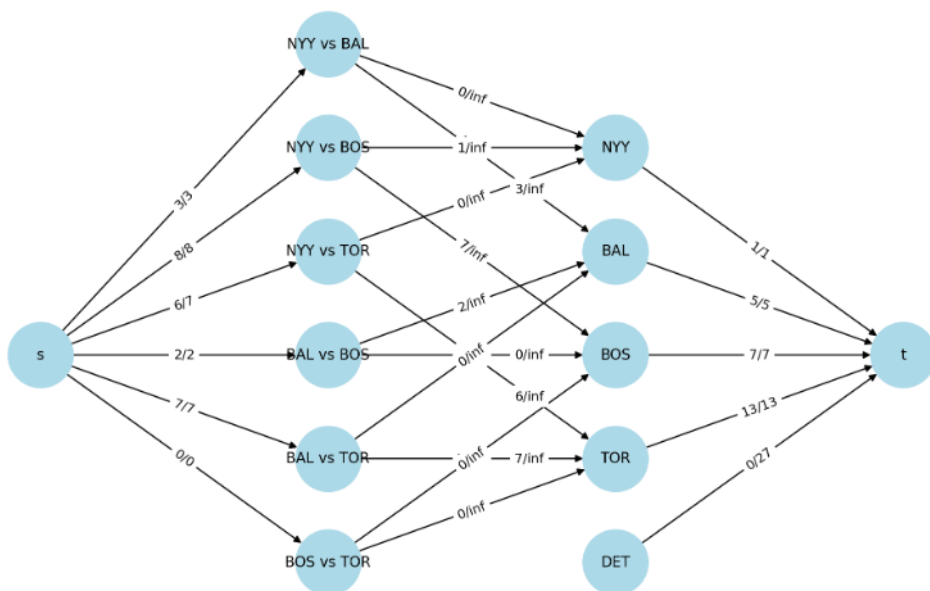
- Forráscsúcs (s) → mérkőzés-csomópontok
 - s csúcsból él vezet minden, még hátralévő mérkőzést reprezentáló csomópontba (i - j), kapacitásuk $g[i][j]$ (az i és j csapatok közötti hátralévő meccsek száma). Ezek az értékek rendre 3, 8, 7, 2, 7, 0 (lásd a 8.2. táblázatban a beszűkített részmátrixot).
 - Ha a folyam teljesen kihasznál egy ilyen élt, azt úgy tekintjük, hogy az összes ilyen mérkőzést lejátszották, és a győzelmek elosztásra kerülnek az i és j csapatok között.
- Mérkőzés-csomópontok → csapat-csomópontok
 - Minden mérkőzés-csomópontot összekötünk a benne érintett i és j csapat-csomópontokkal, hogy biztosítsuk, hogy a mérkőzések egy győztest kapjanak.
 - Ezekre az élekre nincs kapacitáskorlát, hiszen egy meccsnek mindig lesz egy győztese.
- Csapat-csomópontok → nyelőcsúcs (t)
 - x csapat maximálisan $w[x] + r[x]$ győzelmet érhet el a szezon végére. Ez az érték a Detroit Tigersre vonatkoztatva 76.

- Annak érdekében, hogy egy i csapat ne nyerhessen ennél többet, egy $i \rightarrow t$ éllel kötjük össze a nyelővel, amelynek kapacitása $w[x] + r[x] - w[i]$. Ezek az értékek rendre $1=76-75$, $5=76-71$, $7=76-69$, $13=76-63$. A $27=76-49$ kapacitású $DET \rightarrow t$ élet csak mint viszonyítási pontot tűntettük fel az ábrán.
- Ezzel biztosítjuk, hogy x csapatnál senki se nyerhessen többet a szezon végére.

Hogyan következtethetünk a hálózati folyamból a kiesésre? A hálózatban számított maximális folyam az alábbi kulcsfontosságú információt adja:

- Ha a maximális folyam teljesen telíti az összes forrásból kiinduló élt, akkor létezik egy olyan eredményssorozat, amelyben x csapat nem végez rosszul, mint a többiek.
- Ha nem telíti ezeket az éleket, akkor nem létezik olyan forgatókönyv, amelyben x csapat megnyerheti a bajnokságot – tehát matematikailag kiesett.

A Ford–Fulkerson-algoritmus végrehajtása a 8.6. ábra bemutatta hálózaton a 8.7. ábrán látható maximálisfolyam-értékekhez vezet. Mivel a maximális folyam (26) kisebb, mint a hátralévő mérkőzések száma (27), nem lehetséges olyan meccsforgatókönyv, amelyben a Detroit Tigers az első helyre kerülne, azaz a Detroit Tigers matematikailag ki van zárva a rájátszásból.



8.8. ábra. A 8.2. táblázathoz társított hálózati gráfon végrehajtott Ford–Fulkerson-algoritmus eredményezte folyamértékek

A megfelelő maximálisfolyam-probléma megoldásával nemcsak a kiesett csapatokat azonosíthatjuk, hanem egy konkrét bizonyítékot is kapunk arra, hogy miért nem lehetnek bajnokok. Szemléltetésül lássuk, hogyan tudjuk egyszerűen és meggyőzően megérvelni a Detroit Tigers matematikai kizárását.

Egy gráfelméleti eredményt indoklása gráfelméleti fogalmak nélkül

- Detroit legjobb forgatókönyve szerint a szezon végére 76 győzelemmel zárhat ($49 + 27 = 76$).
- Tekintsük a következő csapathalmazt: $R = \{\text{NYY, BAL, BOS, TOR}\}$.
 - Ezek a csapatok összesen 278 győzelmet szereztek eddig.
 - Még 27 mérkőzés van hátra közöttük ($3 + 8 + 7 + 2 + 7 = 27$), így együtt legalább 27 további győzelmet szereznek.
 - Ez azt jelenti, hogy átlagosan minden csapat legalább 76,25 győzelemmel fejezi be a szezont.
 - Függetlenül attól, hogy pontosan milyen eredmények születnek, legalább egy csapat biztosan eléri a 77 győzelmet, ami azt jelenti, hogy Detroit matematikailag kizárt.

A minimális vágat szerepe

- Ha egy csapat matematikailag kiesik, az mindig igazolható azzal, hogy van egy olyan csapathalmaz, amelynek legalább egy tagja biztosan megelőzi.
- Ez a csapathalmaz nem feltétlenül az egész divízió, hanem egy jól meghatározható R részhalmaz.
- A minimális s - t vágat segítségével mindig azonosítható egy ilyen R halmaz a bajnoksági kiesési hálózatban.
- Bár a maximális folyam és minimális vágat módszereit használjuk ennek megtalálására, ha egyszer megtaláltuk az R halmazt, maga a kiesési érvelés már nem igényel bonyolult matematikát.

A Detroit Tigers példája jól mutatja, hogy matematikai módszerekkel pontosan megállapítható egy csapat esélytelensége, még akkor is, ha az első ránézésre nem egyértelmű. A fenti elemzés azt is jól illusztrálja, hogyan alkalmazhatók hálózati folyam-algoritmusok valós életbeli problémák megoldására, például sporteredmények statisztikai vizsgálatára.

8.4.3. A bajnoksági kiesések megoldási módszereinek fejlődése

A bajnoksági kiesések problémáját először Hoffman népszerűsítette az 1960-as években, mint a hálózati optimalizáció egy elegáns alkalmazását. A megoldási módszerek azóta több lépésben fejlődtek. Schwartz (1966) egy maximálisfolyam-számításon alapuló módszert javasolt annak meghatározására, hogy egyetlen csapat kiesett-e a bajnokságból. Ezt az eredményt Hoffman és Rivlin (1967) általánosították, bemutatva, hogyan dönthető el, hogy egy csapat ki van-e zárva egy adott

helyezés megszerzésének lehetőségéből. Robinson (1991) lineáris programozási modellt dolgozott ki a maximális szezonvégi előny meghatározására, amelyet egy csapat elérhet. Gusfield és Martel (1992), valamint McCormick (1999) bevezették a kiesés szám fogalmát, amely azt jelzi, hány mérkőzést kell egy csapatnak megnyernie a szezon hátralévő részében, hogy esélye maradjon az első hely megszerzésére. Módszereik a Gallo, Grigoriadis és Tarjan (1989) által kidolgozott paraméteres maximálisfolyam-technikák kiterjesztésein alapulnak. McCormick (1999) továbbá bizonyította, hogy NP-teljes problémát jelent annak eldöntése, hogy egy csapat képes-e a szezon végén egy adott helyezést megszerezni. Adler és munkatársai (2002) egészértékű programozási megközelítést javasoltak a kiesett csapatok meghatározására, mind az első helyért, mind a szabadkártyás (wild card) helyekért folytatott verseny esetében. Wayne (2001) új strukturális tulajdonságot vezetett be a bajnoksági kiesések problémájában: a csapatokat az aktuális győzelmeik és a hátralévő mérkőzéseik számának összege alapján rendezi sorba, és megmutatta, hogy ha egy csapat kiesik, akkor minden utána következő csapat is szükségszerűen kiesik. A közelmúltban Lee (2020) továbbfejlesztette Wayne (2001) ötletét, és egy egyszerű, gyors algoritmust javasolt, amely még tovább könnyíti a bajnoksági kiesési problémák megoldását.

8.5. A Ford–Fulkerson-algoritmus kiterjesztése és további alkalmazásai

A Ford–Fulkerson-algoritmus alapvetően egy irányított hálózaton működik, ahol egyetlen forrásból egyetlen nyelőbe próbáljuk maximalizálni a folyamat. Azonban számos valós alkalmazásban a hálózat irányítatlan, több forrást és nyelőt tartalmaz, valamint a csomópontoknak is lehet kapacitáskorlátja. Az alábbiakban bemutatjuk, hogyan általánosítható az algoritmus ezekre az esetekre, és megvizsgáljuk különböző gyakorlati alkalmazásait. Különösen olyan sajátos problémák, mint a maximális párosítás, az élfüggetlen utak keresése és az összefüggőségi analízis, hatékonyan modellezhetők és oldhatók meg a Ford–Fulkerson-módszer segítségével. További részletek végett lásd a *Gráfelméleti algoritmusok* tankönyvet (Kátai 2008).

Irányítatlan hálózatok kezelése: Minden irányítatlan élt felbontunk két elmentéses irányított éltre, amelyek azonos kapacitással rendelkeznek. Az algoritmus ugyanúgy működik, mint az irányított esetben, javító utak keresésével és folyamnnöveléssel.

A csomópont-kapacitás modellezése: Minden csomópontot felbontunk két részre, egy bemeneti csomóponttra, amely fogadja a folyamat, és egy kimeneti csomóponttra, amely továbbítja a folyamat. Összekötjük a két csomópontot egy éllel, amelynek kapacitása megegyezik az eredeti csomópont kapacitásával.

Több forrás és több nyelő kezelése: Amikor egy hálózatban több forráscsúcs ($s_1, s_2, \dots$) és több nyelőcsúcs ($t_1, t_2, \dots$) található, egy szuperforrás csúcsot (S) hozunk létre, amelyet végtelen kapacitású élekkel kötünk össze az összes forrással. Hasonlóképpen, létrehozunk egy szupernyelőt (T), amelyhez minden nyelőt végtelen kapacitású élek kapcsolnak.

Maximális párosítás páros gráfban: A maximális párosítás problémája azt vizsgálja, hogyan lehet egy páros gráfban – amelynek csúcsai két, egymástól diszjunkt halmazra bonthatók – a lehető legtöbb csúcsot összekapcsolni úgy, hogy egyetlen csúcs legfeljebb egy élben szerepeljen (lásd a 11. fejezetet). A probléma megoldható a Ford–Fulkerson-algoritmus segítségével, a következő módon: a gráf egyik csúcshalmazának minden elemét egy közös forráshoz (s) kapcsoljuk, míg a másik halmaz minden csúcsát egy közös nyelőhöz (t). Az összes él kapacitását 1-re állítjuk, ezzel biztosítva, hogy egy csúcs legfeljebb egy másikkal kerülhessen párosításba. A kapott hálózaton átvihető maximális folyam értéke pontosan a maximális párosítás méretével egyezik meg.

Élfüggetlen utak keresése adott pontpár között: Az élfüggetlen utak olyan utak egy gráfban, amelyek nem tartalmaznak közös élt. Az ilyen utak megtalálása számos hálózati probléma – például hibátűrő útvonalak tervezése vagy adatáramlás optimalizálása – szempontjából kulcsfontosságú. A Ford–Fulkerson-stratégia alkalmazása erre a problémára azt feltételezi, hogy a gráf minden élének kapacitását 1-re állítjuk, majd az algoritmust lefuttatjuk egy adott forrás–cél csúcspár között. Az így kapott maximális folyam értéke pontosan megegyezik a szóban forgó két pont közötti élfüggetlen utak számával.

Többszörös él- és pontösszefüggőség: A gráfok összefüggőségének mérése kulcsfontosságú a hálózatok megbízhatóságának és ellenálló képességének elemzésekor. Az él szerinti és pont szerinti összefüggőség egyaránt megadható minimális metszetek segítségével, amelyeket a Ford–Fulkerson-algoritmus segítségével határozhatunk meg. Az él szerinti összefüggőség meghatározásához minden él kapacitását 1-re állítjuk, majd az algoritmust lefuttatjuk a gráf minden csúcspárjára. A kapott maximális áramlások közül a legkisebb érték adja meg, hogy a gráf hányszorosan élösszefüggő. A pont szerinti összefüggőség vizsgálatához minden csúcsot kettéválasztunk egy „belépő” és egy „kilépő” példányra, amelyeket egymással összekötünk egy 1-kapacitású éllel. Ezt követően a korábbi módszert alkalmazzuk az így átalakított gráfra, így meghatározható, hogy legalább hány csúcs eltávolítására van szükség a hálózat szétválasztásához.

8.6. Összegzés

A maximális folyam problémája a számítástudomány és az operációkutatás egyik alapköve, amely mára a legkülönfélébb gyakorlati területeken is nélkülözhetlenné vált. Az egyszerűnek tűnő elméleti kérdés – hogyan lehet egy hálózaton

belül a lehető legtöbb „árut” áramoltatni a forrástól a nyelőig – ma sportbajnokságok elemzésében, közlekedési rendszerek optimalizálásában, internetes adatforgalom kezelésében, logisztikai ellátóláncok tervezésében, sőt egészségügyi és humanitárius műveletek támogatásában is kulcsszerepet játszik. Az algoritmus fejlődése és az újabb alkalmazások azt mutatják, hogy a maximális folyam problémája nemcsak klasszikus matematikai szépségével, hanem kiemelkedő gyakorlati hasznosságával is hozzájárul a modern világ működéséhez.

9. Versengő hálózatok: hálózattudomány a futballban

Az előző fejezetben a hálózatokat mint dinamikus közegeket vizsgáltuk, ahol különböző áramlások – például győzelmi esélyek vagy információ – haladhatnak keresztül. Az ilyen rendszerek azonban nemcsak közvetítőként működnek, hanem versengő egységek is lehetnek: teljes hálózatok állhatnak szemben egymással, mint például sportcsapatok, amelyek sajátos szerveződéssel és működési logikájukkal próbálják felülmúlni ellenfeleiket. Ebben a fejezetben ezt a gondolatot bontjuk ki a futball példáján keresztül.

A hálózattudomány új nézőpontokat kínál a sportcsapatok belső szerveződésének és teljesítményének megértéséhez. Módszerei lehetőséget adnak arra, hogy a játékosokat csomópontokként, a passzokat pedig élekként értelmezve egy csapat működését komplex hálózatként ragadjuk meg. Bár ez a megközelítés más sportágakra is alkalmazható, itt különösen a Buldú et al. (2019) tanulmányra támaszkodunk, amely a *Scientific Reports* hasábjain mutatta be, hogyan lehet hálózati mutatók kombinációjával leírni a Guardiola által irányított FC Barcelona játékát – egy olyan csapatét, amelyet gyakran a futballtörténelem egyik legkiemelkedőbb alakulataként emlegetnek.

9.1. Gráfelméleti szempont

Gráfelméleti szempontból ez a fejezet öt, a hálózatelemzés tekintetében kiemelkedően fontos mérőszámot helyez középpontba.

9.1.1. Klaszterezettség együttható

A *klaszterezettségi együttható* (clustering coefficient) egy arány, amely a hálózat csomópontjainak azon hajlamát méri, hogy klasztereket vagy háromszögeket alkossanak. Ezzel a fogalommal már találkoztunk a 2. fejezetben, csomósodási együttható név alatt, és azt is említettük, hogy két szinten szokták meghatározni: lokális (egy-egy csomópont szintjén), globális (az egész hálózatra vonatkozóan). A fogalmat Watts és Strogatz vezette be 1998-ban a kisvilág-tulajdonság vizsgálatára.

Egy adott csomópont esetében ez az arány a szomszédok közötti tényleges kapcsolatok számát viszonyítja a lehetséges kapcsolatok számához. A globális klaszterezettség együttható a gráfban található csomóponti tripletekre épül. Egy triplet három csomópontból áll, melyeket két él (nyitott triplet) vagy három él

(zárt triplet) köt össze. Egy háromszögstruktúra három zárt tripletet tartalmaz, mivel minden csomópont körül egy-egy triplet szerveződik (a háromszög esetében a tripletek átfedik egymást). A globális klaszterezettségi együtthatót a zárt tripletek (vagy háromszögek számának háromszorosával) és az összes (nyitott és zárt) triplet számával való arányként számítjuk ki. Ez a fogalom kiterjeszthető irányított és súlyozott gráfokra is.

9.1.2. Átlagos távolság (legrövidebb úthossz)

Az *átlagos távolság* (average shortest path) a hálózatban található összes csomópontpár közötti legrövidebb utak (minimális távolságok) átlagát jelenti. Ez a mutató a hálózaton belüli áramlás hatékonyságát tükrözi. Nagy méretű, jól összekapcsolt hálózatokban az átlagos legrövidebb út hossza általában alacsony, ami arra utal, hogy a legtöbb csomópont könnyen, rövid úton elérhető bármely más csomópontból. Egy gráf „kis világ” tulajdonsággal rendelkezik, ha klaszterezettsége jelentősen nagyobb, mint egy azonos csúcsszámú véletlen gráfé, miközben az átlagos legrövidebb úthossza kicsi marad.

9.1.3. A kapcsolati mátrix legnagyobb sajátértéke (angolul: eigenvalue)

A *kapcsolati mátrix* (más néven súlyozott szomszédsági mátrix) elemei – súlyozott gráfok esetében – az élek súlyait tükrözik, és legnagyobb sajátértéke (λ_1) azt jelzi, hogy egy vagy több csomópont milyen mértékben kapcsolódik a hálózathoz, illetve milyen hatással bír a hálózati struktúrára. Négyzetes mátrixok esetén a sajátvektorok a mátrix által definiált leképezés irányvektorai, míg a hozzájuk tartozó sajátértékek azok a skalárértékek, amelyek megszorozzák a sajátvektort a transzformáció során. A sajátértékek és sajátvektorok fontos szerepet játszanak a matematikában, jól jellemzik a mátrixhoz tartozó transzformációkat, és szinte minden matematikai ágban alkalmazhatók. Gráfelméleti kontextusban a kapcsolati mátrix legnagyobb sajátértéke a hálózat legjelentősebb kapcsolódási vagy hatási mintázatát jelöli. A sajátértékek fogalmának fejlődése olyan nagynevű matematikusokhoz köthető, mint Euler, Lagrange, Cauchy, Fourier, Laplace és Poincaré. A 20. század elején David Hilbert az integráloperátorok sajátértékeit vizsgálva vezette be a német *eigen* szót (mely „sajátot” jelent) a sajátértékek és sajátvektorok megjelölésére, és állítólag ő használta először ezt a terminológiát 1904-ben.

9.1.4. Algebrai összefüggőség

A Laplace-mátrix a szomszédsági és a foksám mátrixból származik, és a hálózat szerkezeti tulajdonságait rögzíti. A *Laplace-mátrix* második legkisebb

sajátértéke ($\sim \lambda_2$) gyakran algebrai összefüggősségként vagy konnektivitásként is ismert (algebraic connectivity), a hálózat kapcsolódottságának és robusztusságának mértékét adja meg. Ez következik abból a tényből, hogy a 0 sajátértékként való előfordulásainak száma a Laplace-mátrixban megegyezik a gráf összefüggő komponenseinek számával. A magasabb érték tehát egy összekapcsoltabb, kohéziós hálózatot jelez. Ha ez az érték nulla, a hálózat szétesett.

9.1.5. Sajátvektor-központiség

A csomóponti központiség/centralitás egy hálózati csomópont fontosságát vagy befolyását méri a hálózaton belül. A központiség különböző típusai (például fokszám-központiség / degree-centrality, közelségi központiség / closeness-centrality, közöttiségi központiség / betweenness-centrality) a befolyás különböző aspektusait tükrözik.

A *sajátvektor-központiség* (eigenvector centrality) egy csomópont befolyásának mérésére szolgál a hálózatban, amelyet a csomópont saját kapcsolatai és a szomszédos csomópontok kapcsolatai alapján számítanak ki. Egy magas sajátvektor-központiséggel rendelkező csomópont nemcsak azért fontos, mert sok kapcsolata van, hanem azért is, mert kapcsolatban áll más, szintén erős kapcsolódással bíró csomópontokkal. Más szóval, a csomópont befolyása vagy jelentősége azon múlik, hogy kapcsolatai milyen mértékben képesek hatást gyakorolni a hálózatra. Ennek eredményeként szorosan integrálódik a hálózat jól összekapcsolt magjába, növelve annak kohézióját és az információáramlás hatékonyságát. A Google PageRank is (amelyről az első fejezetben esett szó) a sajátvektor-központiség egyik változata. Egy csomópont PageRank értéke rekurzív módon függ azoktól a csomópontoktól, amelyek rámutatnak. A sajátvektor-központiség legkorábbi alkalmazása Edmund Landau nevéhez fűződik egy 1895-ös, sakkversenyek pontozásáról szóló tanulmányában.

9.2. Miért FC Barcelona? Miért Guardiola?

A hálózattudomány futballadatok elemzésére kínált új nézőpontját kihasználva a szóban forgó cikk a Guardiola irányítása alatt álló FC Barcelona sajátos szerveződését vizsgálja, amelyet az elmúlt évtizedek egyik legmeghatározóbb csapatának tartanak. A modern futball Angliából indult, szabályait 1863-ban fektették le. Kezdetben a csapatok stratégiája abból állt, hogy minél gyorsabban előrehaladjanak, és minél hamarabb megszabaduljanak a labdától. Az 1950-es években a magyar válogatott új szemléletet hozott, amely szerint a labda nem veszélyforrás, hanem a játék központi eleme. Ebből az elképzelésből született meg az 1970-es években a holland „totális futball” (totaalvoetbal), amelyet Rinus Michels és Johan Cruyff fejlesztett tovább. Ennek a stílusnak a hatása Barcelonában is

megjelent, amikor Michels, majd Cruyff, később Rijkaard, végül pedig Guardiola volt a klub edzője.

Guardiola taktikája a labdatartás és letámadás összetett kombinációjára épült, amelyet a csapat pozíciós játéka tett különösen hatékonná, és a klub történetének egyik legsikeresebb időszakát hozta el, amely során négy év alatt 14 trófeát nyert. Guardiola játékfelfogása nagyban épített elődje, Cruyff filozófiájára, amelyet saját stílusával ötvözött. Bár Guardiola csapatainak jellegzetességeiről széles körű irodalom áll rendelkezésre, kvantitatív elemzések még mindig ritkán készülnek. Ebben a fejezetben hálózattudományi megközelítéssel kvantitatív elemzést adunk az FC Barcelona játéktílusáról, különös tekintettel a passzhálózatok szerveződésére, és arra, hogy miben különböznek a spanyol bajnokság többi csapatától. Az elemzés a 2009/2010-es idényre összpontosít, Guardiola egyik legsikeresebb szezonjára, amikor a csapat hat nagy trófeát nyert.

9.3. Elemzések az átlagértékek és a játék dinamikájának figyelembevételével

A hálózattudomány sokszínű alkalmazásai közül e fejezet a futballmérkőzések elemzésére koncentrál, különösen arra, hogyan lépnek interakcióba a játékosok a labda átadásával, ezáltal létrehozva az úgynevezett futballpasszhálózatot. A passzhálózatokat a játékosok közötti labdacserék lekövetése nyomán építjük fel, ahol a hálózat csomópontjai a játékosok, az élek pedig a közöttük történt passzok számát képviselik. Így súlyozott és irányított passzhálózatokat hozhatunk létre, amelyek térben is elhelyezhetők. A passzhálózatok koncepcióját Gould és Gatrell (1979) már a hetvenes évek végén bevezették egy futballmérkőzéssel kapcsolatban, ám ez akkor még nem kapta meg a megérdemelt figyelmet. Több mint harminc évvel később Duch és munkatársai (2010) munkája nyitotta meg az utat, hogy a hálózattudomány révén új információk kerüljenek felszínre a futballcsapatok és játékosok szerveződéséről, fejlődéséről és teljesítményéről.

Azóta a kutatások kimutatták, hogy a passzhálózatok összességükben kisvilág-topológiát mutatnak, és általában magas klaszterezettségi együtthatóval rendelkeznek. Ezekben a hálózatokban specifikus motívumok is megfigyelhetők, amelyek három-négy játékos közötti jellegzetes passzkombinációkat, illetve szoros kapcsolatban álló játékosközösségeket reprezentálnak. A játékosok szintjén vizsgálódva a hálózati motívumok lehetővé teszik egy-egy játékos szerepének mélyebb megértését a csapaton belül, sőt, segítenek azonosítani hasonló tulajdonságokkal rendelkező játékosokat más csapatokban is. Ezen túlmenően a játékosok fontosságát olyan mutatókkal számszerűsíthetjük, mint a közelségi vagy a közöttségi központosság, amelyek révén a passzhálózatok segítséget nyújtanak a játékosok közötti egyensúly megteremtésében és a stratégiai szerepkörök kijelölésében.

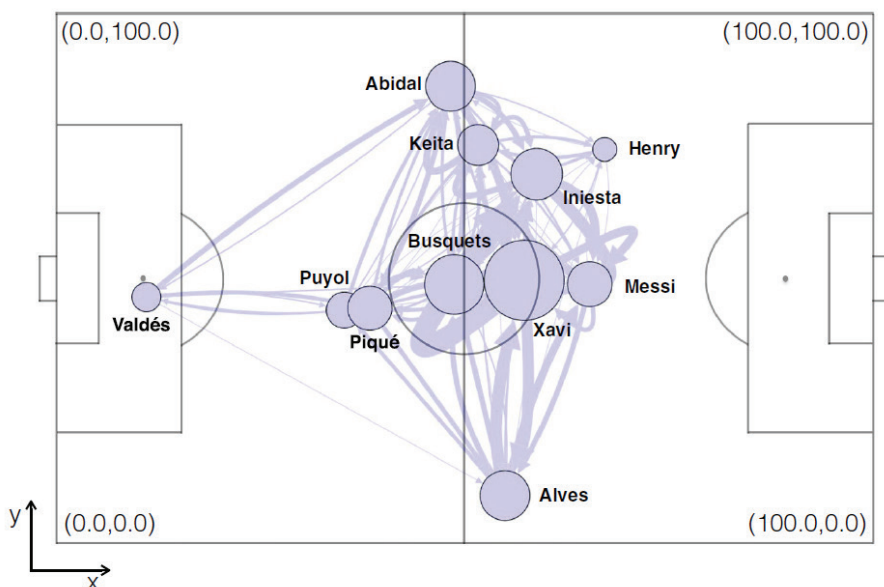
A Buldú et al. (2019) tanulmánnyal összhangban először az átlagolt passzhálózat alapján hasonlítjuk össze Guardiola csapatának hálózati szerveződését a spanyol bajnokság egy szezonjában szereplő ellenfelekkel, hogy azonosítsuk azokat a metrikákat, amelyek statisztikailag szignifikáns eltéréseket mutatnak, és összefüggésbe hozzuk őket Guardiola játéktílusával. Ehhez a kutatók a 2009/2010-es szezon „La Liga” nemzeti bajnokságának 380 mérkőzéséhez tartozó passzhálózatokat készítették el.

Ezt követően a cikk szerzői a hálózati paraméterek mérkőzés közbeni időbeli változásának hatását vizsgálták, és javaslatot tettek a passzhálózatok dinamikus elemzésére. Ennek érdekében bevezették az 50 passzos hálózat koncepcióját, amely lehetővé tette a hálózati paraméterek újraszámítását a mérkőzés különböző pillanataiban, különös tekintettel a szerzett és kapott gólok időpontjára. Az időbeli elemzés eredményei azt mutatták, hogy (i) a passzhálózatok olyan további információkat tárnak fel, amelyek az egyszerű átlagos hálózati elemzés során rejtve maradnának, és (ii) kiemelték Guardiola játékanak néhány jellegzetes vonását. Beazonosítottak olyan hálózati paramétereket, amelyek növelhetik a gólok szerzésének vagy kapásának valószínűségét, rávilágítva arra, hogy nem minden csapat viselkedik azonos módon. Az elemzés megmutatta, hogyan tér el Guardiola FC Barcelonájának szerveződése a többi csapattól, különösen a fentebb bemutatott öt kulcsmetrika alapján.

9.4. Átlagolt passzhálózatok elemzése

A 9.1. ábra egy futballpasszhálózat példáját mutatja be: az FC Barcelona és a Real Madrid közötti, a 2009/2010-es szezonra vonatkozó átlagolt passzhálózatot. A kapcsolatok irányítottak, és a passzok számával arányosan súlyozottak. Az ábrán a csomópontok (játékosok) az átlagos pozíciójukban helyezkednek el, ahonnan a passzokat indították, míg a kapcsolatok vonalvastagsága a passzok számát tükrözi. A pálya x és y koordinátái a $[0,100]$ intervallumban mozognak, „pályaegységekben” mérve, mivel a pályaméretek eltérőek lehetnek. A csomópontok sugara a játékos passzhálózatban betöltött jelentőségét jelzi, amelyet sajátvektor-központiságuk értéke határoz meg.

Az elemzés során az FC Barcelona teljes 2009/2010-es szezonjának (összesen 38 mérkőzés) átlagolt passzhálózatait vizsgálták meg, mind az FCB, mind az ellenfelek passzhálózatait elemezve. Minden mérkőzéshez két átlagolt passzhálózat készült (egy-egy hálózat csapatonként), amelyek tartalmazzák az összes passzt és pozíciót a mérkőzés során. Ezeket a passzokat egyetlen összesített hálózatban reprezentálták minden csapat esetében. A korábbi kutatások szerint az ilyen átlagolt passzhálózatok nemcsak a csapat szervezettségére világítanak rá, hanem összefüggésben állnak a csapat teljesítményével is.



9.1. ábra. Egy futballpasszhálózat szemléltető ábrája (Buldú et al. 2019)

9.5. N-passzos hálózatszekvenciák vizsgálata

A kutatás második szakaszában a szerzők olyan kérdésekre keresték a választ, mint: (i) vajon kizárólag a passzok száma felelős a hálózati paraméterek közötti eltérésekért?, (ii) elegendő-e csupán a hálózati mutatók átlagértékeit vizsgálni? E kérdések megválaszolása érdekében egy kiegészítő elemzést végeztek, amelyben a passzhálózatokat nem statikus entitásokként kezelték, hanem időben dinamikusan változó rendszerekként, így lehetővé tették a mutatók időbeli változásának követését. Ezzel a megközelítéssel kizárhatták a passzok pusztán számszerű hatását, és a hálózat topológiai szerveződésére koncentrálnak.

Ennek érdekében vezették be az N -passzos hálózatok koncepcióját, ahol N az egymást követő passzok száma. Az elemzéshez $N = 50$ -et választottak, mivel ez az érték elég alacsony ahhoz, hogy nyomon kövessék a fejlődést, ugyanakkor elég magas ahhoz, hogy egy összefüggő hálózatot alkosson a játékosok között. Az 50 passzos hálózatok az alábbi algoritmus alapján hozhatók létre: (i) kialakítjuk a mérkőzés első 50 passzából álló hálózatot, (ii) kiszámítjuk a hálózati mutatókat, (iii) eltávolítjuk a legrégebbi passzt és hozzáadunk egy újat, (iv) újraszámítjuk a mutatókat, és (v) ezt a folyamatot ismételjük a mérkőzés végéig. A B függelék 9. pontja segít algoritmikailag tovább mélyíteni az N -passzos hálózatok fogalmát.

Az 50 passzos hálózatok mindkét csapat esetében azonos passzszámot tartalmaznak, így a mutatók közötti különbségek nem a passzok abszolút számából erednek. Fontos megjegyezni, hogy ezek a mutatók folyamatosan változnak az időben, és a mérkőzés egy-egy meghatározott pillanatához kapcsolódhatnak, miközben az 50 passzos hálózatok létrehozásához szükséges idő csapatonként eltérő lehet, ami tovább gazdagítja az elemzés eredményeit.

9.6. Következtetések az átlagospassz-hálózatok elemzése nyomán

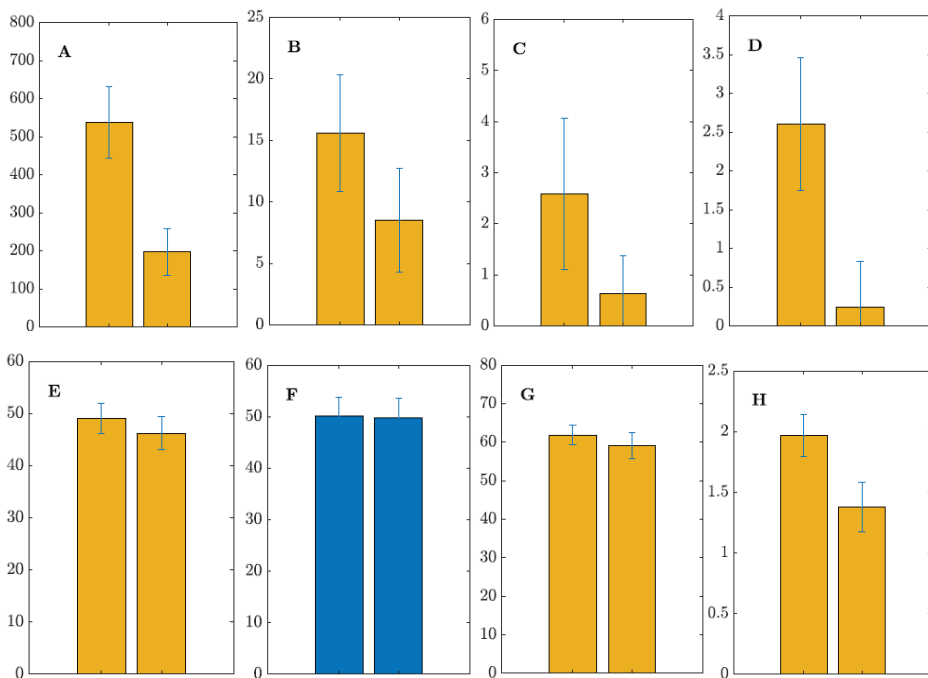
A 9.2. ábra nyolc különböző paraméter összehasonlítását mutatja az FCB és az ellenfelei között. Az első négy mutató számításához nem szükséges a csapatok hálózati struktúrájának elemzése, bár néhányuk (például a passzok száma) hatással lehet a passzhálózatok szerveződésére. A további négy paraméter a hálózatok térbeli jellemzőit vizsgálja. A szerzők az FCB eredményeit önmagával átlagolták, míg a többi csapatot együttesen vizsgálták, mivel a cél az FCB és a többi csapat közötti különbségek feltárása volt.

A 9.2. ábra alapján megfigyelhető, hogy az FCB passzainak száma jóval magasabb, mint az ellenfeleké. Ez Guardiola labdabirtoklásra épülő játéktílusának következménye. A nagyszámú passz erősebb súlyú kapcsolatokat eredményez, ami befolyásolja a hálózat egyéb paramétereit is. Az FCB kapura lövéseinek száma szintén magasabb volt, ami több gólt és végső soron magasabb pontszámot eredményezett a szezonban. Az FCB 99 ponttal (31 győzelem, 6 döntetlen és mindössze 1 vereség) nyerte meg a bajnokságot, ami világosan mutatja, hogy a szezon legjobban teljesítő csapata volt.

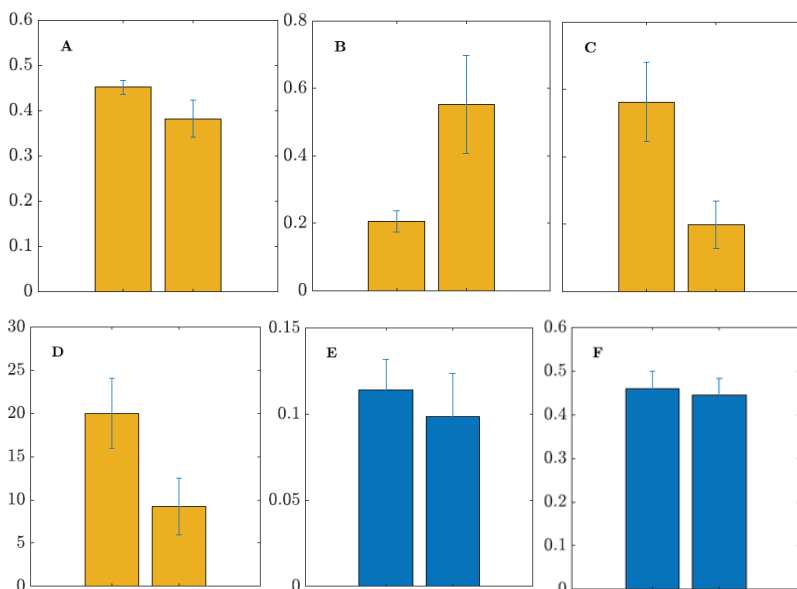
A 9.2. ábra alsó részén a térbeli jellemzők vizsgálata látható. A passzok átlagos x - és y -koordinátái meghatározzák a hálózat súlypontját. Az FCB játéka közelebb helyezkedett el az ellenfél kapujához, bár az y -koordináták terén nem mutatkozott eltérés, jelezve, hogy a pálya egyik oldalát sem preferálta. A játékosok pozíciójának szórása az FCB-nél valamivel nagyobb volt, ami azt jelzi, hogy a játékosok szélesebb területen helyezkedtek el a pályán. A passzok irányának mutatója, az előrehaladási és oldalirányú komponensek aránya, szintén figyelemre méltó: az FCB-nél ez az arány magasabb volt, ami arra utal, hogy a passzok inkább párhuzamosak az ellenfél kapujával, mint előrehaladóak, valószínűleg a megfelelő támadási pillanat kivárása érdekében.

A 9.3. ábra a passzhálózatok topológiai szerkezetét vizsgálja, összehasonlítva hat paramétert az FCB és az ellenfelek között. A klaszterezési együttható (háromszögek száma) például az FCB esetében magasabb volt, ami azt mutatja, hogy több háromszög alakú kapcsolat alakult ki a játékosok között, növelve a hálózat helyi stabilitását. A leg-rövidebb út átlaga az FCB-nél szintén alacsonyabb, ami szorosabb összekapcsoltságra

utal, lehetővé téve a labda gyorsabb áramlását a játékosok között, akár közvetlenül, akár közvetetten. Ez a mutató azt méri, hogy a labdának milyen „topológiai távolságot” kell megtennie ahhoz, hogy összekapcsoljon két játékost a csapaton belül. A passzhálózat kapcsolatai a passzok számával vannak súlyozva, így egy adott kapcsolat topológiai távolsága a passzok számának reciproka. Ez azt jelenti, hogy minél több passz zajlik két játékos között, annál kisebb (vagyis közelebbi) a topológiai távolság köztük. Emellett, mivel a labda halad egyik játéktostól a másikig, bármely játékospár között értelmezhető, kiszámítható a legrövidebb út a topológiai távolság alapján – akár közvetlenül, akár más játékosokon keresztül történik a kapcsolódás.



9.2. ábra. Nyolc futballmutató összehasonlítása. Minden diagramon a bal oldali oszlopok az adott mutató FCB-re vonatkozó átlagos értékét mutatják az egész szezon során, míg a jobb oldali oszlopok az FCB ellen játszott mérkőzéseken az ellenfelek átlagos értékeit jelölik. A vizsgált mutatók a következők: (A) passzok száma, (B) lövések száma, (C) gólok száma, (D) szezon végi pontszám, (E) a hálózat súlypontjának x-koordinátája ($\langle X \rangle$), (F) a hálózat súlypontjának y-koordinátája ($\langle Y \rangle$), (G) a játékosok súlypont körüli térbeli szórása, (H) az előrehaladási arány ($\langle \Delta y \rangle / \langle \Delta x \rangle$), amelyet az összes passz y-koordinátájának teljes hossza ($\langle \Delta y \rangle$) és az x-koordinátájának teljes hossza ($\langle \Delta x \rangle$) hányadosaként határoztak meg. Azokat a paramétereket, amelyeknél statisztikailag szignifikáns különbség mutatkozott az FCB és az ellenfelek között, sárga szín jelzi. (Buldú et al. 2019)



9.3. ábra. Hat hálózati paraméter összehasonlítása: (A) klaszterezettségi együttható, (B) átlagos távolság, (C) a szomszédsági mátrix legnagyobb sajátértéke (λ_1), (D) a Laplace-mátrix algebrai összefüggősége ($\sim\lambda_2$), (E) a játékosok központiségének szórása, (F) az egyes játékosok maximális központiséga (Buldú et al. 2019)

A szomszédsági mátrix legnagyobb sajátértéke az F.C. Barcelonánál szintén kiemelkedően magasabb volt, ami a hálózat erősségét és stabilitását tükrözi. Ez azt sugallja, hogy a passzok esetleges elvesztése az F.C. Barcelonát kevésbé érintené hátrányosan, mint a többi csapatot.

Az algebrai összefüggőség értéke számos hálózati tulajdonságot tükröz, és alapvető fontosságú mutatóként szolgál a hálózatok elemzésében. Kiemelendő, hogy szinkronizációs folyamatok során a magasabb algebrai összefüggőségű hálózatok gyorsabban érnek el összhangot, míg diffúziós folyamatokban az egyensúlyi állapot eléréséhez szükséges idő fordítottan aránylik ehhez a mutatóhoz. A futballpasszhálózatok esetében az algebrai összefüggőség a csapat belső összetartásának, illetve a megosztottság mértékének mérőszáma. Az FCB esetében az algebrai összefüggőség kimagasló értékei arra utalnak, hogy a támadó- és védővonalak szorosabb kapcsolatban állnak egymással, ezáltal erősítve a csapat összekapcsoltságát és működési hatékonyságát.

Végül a központiség elemzése – amely a játékosok passzhálózaton belüli fontosságát méri – nem mutatott statisztikailag szignifikáns különbségeket az FCB és a többi csapat között. Ez igaz mind a központiség átlagos szórására (a sajátvektor-központiség alapján), mind pedig az egyes játékosok legmagasabb központiségi

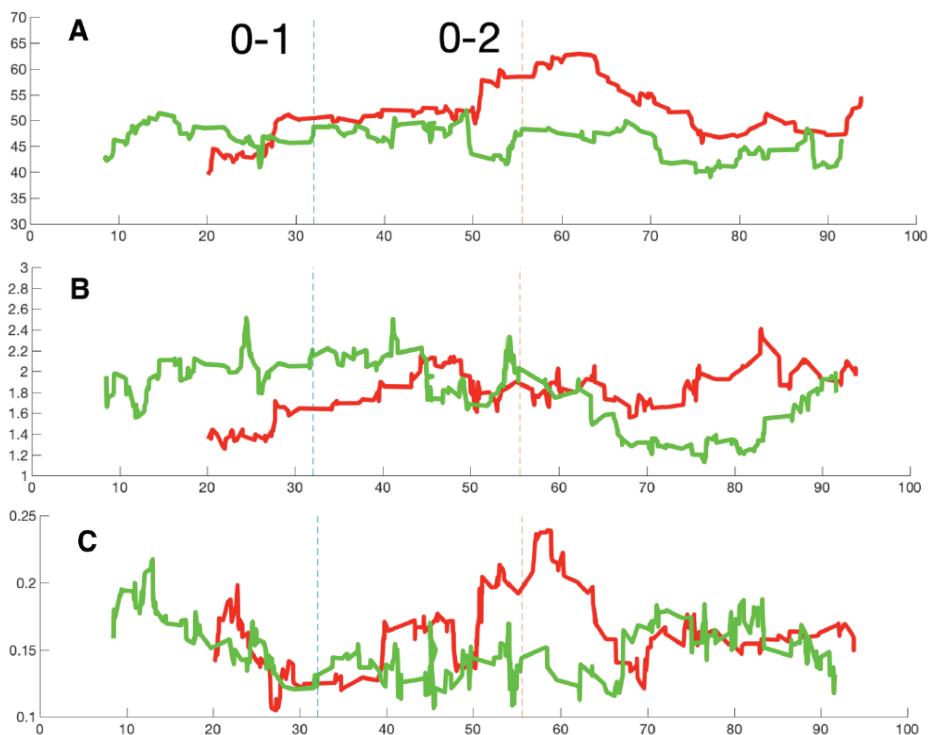
értékére (a szomszédsági mátrix legnagyobb sajátértéke alapján). Ezek az eredmények azt sugallják, hogy a központiság eloszlása hasonló mintázatot követ az FCB-nél és a többi vizsgált csapatnál.

9.7. Következtetések a hálózati mutatók időbeli változásának vizsgálata nyomán

Az előző szakaszban bemutatott átlagospassz-hálózatok felfedték az FC Barcelona és riválisai közötti szerveződési különbségeket. Ezeket a különbségeket azonban magyarázhatja a Barcelona játékosai közötti magasabb passzszám, amely több hálózati mutatóban – például az átlagos legrövidebb út hossza csökkenésében, valamint a klaszterezési együttható, a legnagyobb sajátérték és az algebrai összefüggőség növekedésében – statisztikailag szignifikáns eltéréseket eredményezhet. A passzok száma hatásának kiküszöbölése, valamint a hálózati topológia változásainak figyelembevétele érdekében Buldú és munkatársai (2019) az 50 passzos hálózatok tulajdonságait elemezték. Ez a megközelítés lehetővé tette, hogy az elemzés a hálózati struktúrára összpontosítson, függetlenül a labdabirtoklás mennyiségétől.

A 9.4. ábra az 50 passzos hálózatok három paraméterének időbeli alakulását mutatja a Real Madrid (piros) és az FCB (zöld) egy mérkőzése során, amelynek végeredménye 0–2 lett. Az A panel a hálózati súlypont x-koordinátájának mozgását ábrázolja: a Real Madrid legtöbbször előrébb játszik, de ez nem vezetett előnyhöz. Az FCB súlypontja stabilabb, míg a Real Madridé nagyobb ingadozást mutat. A B panel az előrehaladási arányt mutatja, amelyben az FCB az első félidőben magasabb értéket ér el, de a Real Madrid a második félidőben utoléri őket. A C panel a központossági szórás alakulását ábrázolja: a Real Madrid esetében a játékosok közötti központossági különbségek növekednek az 50–70. perc között, amikor a súlypont előrébb kerül, de ez sem vezet eredményre.

Az a tény, hogy a hálózati mutatók dinamikusan változnak a mérkőzés során, jelentősen növeli a vizsgálat bonyolultságát. Számos tényező befolyásolhatja a hálózati paraméterek ingadozását, például egy gól, a játékoscsere, vagy a játékosok fizikai állapota. Ráadásul ezekre a tényezőkre a csapatok nem feltétlenül reagálnak egyformán. E sokrétű tényezők közül a szóban forgó vizsgálat szerzői a csapatok egyedi szerveződésére helyezték a hangsúlyt közvetlenül egy gól előtt. Ennek érdekében minden csapat esetében megvizsgálták a hálózati paraméterek értékeit a gólszerzést vagy a gól kapását megelőző időszakban. A céljuk az volt, hogy feltárják, léteznek-e szignifikáns eltérések a hálózati mutatókban, és azonosítsák azokat a paramétereket, amelyek jelentős változást mutatnak a gólszerzés vagy a gól kapása előtt.



9.4. ábra. Real Madrid (piros vonalak) vs. F.C. Barcelona (zöld vonalak), 2009/2010-es szezon (végeredmény: 0–2). A hálózati paraméterek időbeli alakulása: (A) a hálózatok súlypontjának $\langle X \rangle$ koordinátája, (B) az előrehaladási arány ($\langle \Delta y \rangle / \langle \Delta x \rangle$), (C) A súlypont szórása. A függőleges szaggatott vonalak azt a két időpontot jelölik, amikor az FCB gólt szerzett (a Real Madrid nem szerzett gólt). (Buldú et al. 2019)

Az elemzés az alábbi sokatmondó következtetésekhez vezetett az FCB-re vonatkozóan.

Az FCB a leggyorsabb csapat az 50-passzos hálózatok felépítésében, és ez az idő nem változik, függetlenül attól, hogy gólt szereznek vagy kapnak.

Ez a csapat rendelkezik a legmagasabb előrehaladási aránnyal (azaz a legtöbbet játszik az ellenfél kapuja irányába vízszintesen), amely különösen magas értéket mutat gólszerzés előtt.

A játékosok hálózati súlypont körüli szórása a legalacsonyabb, de jelentősen megnő, mielőtt gólt kapnának.

A klaszterezettségi együttható magasabb értéket mutat gól kapása esetén, mint gólszerzéskor.

A legrövidebb úthossz (átlagos távolság) az egyik legalacsonyabb, és nem függ attól, hogy a csapat gólt szerez vagy kap.

A szomszédsági mátrix legnagyobb sajátértéke, amely a hálózat erősségét méri, a legmagasabb, és jelentősen megnő, mielőtt a csapat gólt kapna.

Az algebrai összefüggőség, amely a játékoscsoportok közötti kohéziót méri, csökken gólt kapás előtt (azaz a csoportok közötti együttműködés csökken).

A legmagasabb központiság, amelyet egyetlen játékos elér, valamint a központiság szórása is az FCB-nél a legmagasabb, ami arra utal, hogy a játékosok szerepe a hálózatban nem egyenletesen oszlik meg. Egyetlen játékos, Xavi, a passzhálózat központi szereplője.

Ha további izgalmas részletekre kíváncsi az olvasó, illetve szeretné az eredményeket a futball kontextusában elmélyültebben megérteni, érdemes közvetlenül átolvasnia a Buldú et al. (2019) tanulmányt.

9.8. Kiegészítő implementációs szempontok

A bemeneti adathalmazok minden egyes passzhoz az alábbi információkat tartalmazzák: (i) a passzt adó játékos, (ii) a passzt fogadó játékos, (iii) a passzoló és fogadó játékos pozíciója (x és y koordináták), valamint (iv) a passz időpontja. Az összehasonlíthatóság érdekében minden kezdő játékoshoz egy csomópontot rendelünk a mérkőzés elején. Ha egy játékost lecserélnek, az új játékos automatikusan átveszi az előző csomópontját. Ezáltal garantáljuk, hogy minden hálózat pontosan 11 játékost tartalmaz, és az elemzés a hálózat szerkezeti jellemzőire összpontosít, nem pedig az egyes játékosok egyéni teljesítményére.

Ahogy fentebb már utaltunk rá, az „50 passzos hálózatok” elemzésénél a mérkőzés kezdetétől számítva megvárjuk az első 50 passz ($N = 50$) teljesülését, majd ebben az időpontban, t_0 -nál, létrehozuk és elemezzük az első 50 passzos hálózatot, G_{t_0} -t. Ezt követően minden új passz érkezésekor a hálózatból eltávolítjuk a legrégebbi passzt, és hozzáadjuk az újat. Az így frissített hálózatot az utolsó passz időpontjához, t -hez rendeljük, ezzel létrehozva a G_t névre keresztelt aktuális hálózatot. Ez a dinamikus frissítési módszer lehetővé teszi a hálózat dinamikájának elemzését és a változások nyomon követését a mérkőzés során.

9.8.1. A hálózati mutatók sajátosságai passzhálózatok esetében

Az $\langle X \rangle$ és $\langle Y \rangle$ súlypont-koordináták a hálózat összes passzának átlagos pozícióját jelölik. Ez a teljes mérkőzés passzaira vonatkozik az átlagos hálózat esetén, míg az 50 passzos hálózatoknál csak az utolsó 50 passzra. Kizárólag a passzok küldési helyének pozícióját vesszük figyelembe. Az értékek pályakoordinátákban vannak megadva, amelyek mindkét tengelyen 0,00 és 100,00 között mozognak.

Ennek megfelelően a pálya közepe $[50,00; 50,00]$, az ellenfél kapujának középpontja $[100,00; 50,00]$, míg a saját kapu középpontja $[0,00; 50,00]$. A *súlypont szórása* a játékosok hálózati súlyponthoz viszonyított távolságának szórását (standard deviációját) méri.

Általában egy csomópont helyi vagy lokális *klaszterezettségi együtthatója* azon csomópontok százalékát jelenti, amelyek közvetlenül kapcsolódnak hozzá, és egymáshoz is kapcsolódnak. Ez a mérték átlagolható a hálózat csomópontjain, hogy megkapjuk az átlagos klaszterezettségi együtthatót. Súlyozott hálózatokban azonban nemcsak a kapcsolódó csomópontok számát kell figyelembe venni, hanem a kapcsolatok súlyeloszlását is. A passzhálózatok esetében, ahol a játékosok közötti passzok száma nem állandó, a súlyozott klaszterezettségi együtthatót alkalmazzuk (C_w), amely a következőképpen számítható:

$$C_w(i) = \sum_{j,k} (w_{ij} w_{jk} w_{ik}) / \sum_{j,k} (w_{ij} w_{ik}).$$

Itt j és k bármelyik két játékos, w_{ij} és w_{ik} pedig az i -től kiinduló passzok száma feléjük. A hálózat teljes klaszterezettségi együtthatója az összes $C_w(i)$ érték átlaga. Ez a mutató a csapat hajlamát jellemzi arra, hogy kiegyensúlyozott háromszögeket alakítson ki a játékosok között, és a lokális robusztusság mércéjeként szolgál.

Passzhálózatokban két játékos közötti kapcsolat *topológiai hosszát* a kapcsolat súlyának reciprokaként határozzuk meg. Ez azt jelenti, hogy minél több passz történik két játékos között, annál kisebb a topológiai távolság, ami a hálózat szorosabb kapcsolatait tükrözi. A cikk szerzői a Dijkstra-algoritmust használták a minden játékospár közötti legrövidebb út hosszának meghatározására, de erre a célra a Floyd–Warshall-algoritmus is kiválóan alkalmazható. Az *átlagos távolságot* ezt követően az összes páron végzett átlagolással számítják ki. Ez a mutató a hálózat hatékonyságát fejezi ki, megmutatva, hogy a labda milyen gyorsan és hatékonyan tud eljutni bármelyik játékostól a többiekhez.

A súlyozott szomszédsági mátrix *legnagyobb sajátértéke* (λ_1) a hálózat erejének mutatója. Magasabb legnagyobb sajátérték nagyobb kapcsolatintenzitást és jobban összekapcsolt hálózatot jelez, különösen akkor, ha a fontos csomópontok (játékosok) közvetlen kapcsolatban állnak egymással.

Az *algebrai összefüggőség* a Laplace-mátrix ($L = S - A$) második legkisebb sajátértéke ($\sim \lambda_2$), ahol A a súlyozott szomszédsági mátrix, S pedig egy diagonális mátrix, amelynek elemei az egyes játékosok által végrehajtott passzok összegét tartalmazzák. Az algebrai összefüggőség kulcsszerepet játszik a hálózat strukturális és dinamikai tulajdonságainak megértésében.

A *sajátvektor-központiség* egy játékos fontosságát méri, amelyet a szomszédsági mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektor alapján számítunk. Ez a mutató figyelembe veszi a játékos által kezdeményezett kapcsolatok (passzok) számát és azok súlyát, valamint azt, hogy ezek a kapcsolatok mennyire fontos

játékosokhoz vezetnek. Magas sajátvektor-központiságot érhet el egy játékos: (i) ha közvetlen kapcsolatai számosak és súlyozottak, vagy (ii) ha azok a játékosok, akikhez kapcsolódik, szintén magas központiságúak.

50 passzos hálózat ideje: Az 50 passzos hálózat létrehozásához szükséges idő azt az időtartamot méri, amely az első passztól az ötvenedik passzig telik el. Ez a mutató a csapat játéktílusának gyorsaságát és dinamizmusát jelzi. A kisebb értéket elérő csapatok rövidebb idő alatt képesek több passzt generálni, ami gyorsabb és folyamatosabb labdajátékot sugall.

9.9. Összegzés

A Guardiola-féle Barcelona nemcsak a futballpályán volt kiemelkedő, hanem hálózati struktúráját tekintve is példaszerűen működött: dinamikusan alkalmazkodó, magas szintű együttműködésen alapuló rendszerként. A csapat játéka szinte laboratóriumi körülmények között mutatta meg, hogyan válhat a hálózati szervezetség a siker egyik döntő tényezőjévé. Mindez jól illusztrálja, hogy a hálózattudomány eszközei nem csupán elvont elméleti konstrukciók, hanem olyan univerzális keretrendszert kínálnak, amely képes leírni és értelmezni a társadalmi viselkedés, a stratégia és a teljesítmény komplex viszonyait – legyen szó sportcsapatokról, piaci szereplőkről vagy akár globális rendszerekről. A következő fejezetekben ezt a gondolatot követve lépünk tovább: a hálózatokat nemcsak mérjük, hanem egyre árnyaltabban próbáljuk megérteni is.

10. Döntések hálózatban: a játékelmélet alapjai

Az eddigi fejezetek során a hálózatokat különféle struktúrák és folyamatok mentén vizsgáltuk: láttuk, hogyan befolyásolja a kapcsolatok szerveződése az egész rendszer működését, és azt is, miként tükröződnek ezek a mintázatok a modern élet számos területén. Ezek az esetek – bár első pillantásra eltérőnek tűnhetnek – egy közös vonással bírnak: a szereplők döntései hatással vannak mások lehetőségeire és eredményeire. A kapcsolat tehát nem csupán struktúrát, hanem stratégiai viszonyrendszert is jelent. Itt kapcsolódik be a képbe a játékelmélet.

Noha az előző fejezetekben is találkoztunk a „játék” fogalmával – például a baseballjáték kiesési problémája vagy a futballcsapatok hálózati elemzése kapcsán –, ott a „játék” a szó szerinti értelemben vett sporttevékenységet jelentette. Jelen fejezetben azonban egy elméletibb értelmezés kerül előtérbe: a játékelmélet a döntéshozatal matematikai modelljeit vizsgálja olyan helyzetekben, ahol az egyes szereplők (játékosok) döntései kölcsönösen befolyásolják egymás kimeneteleit. Míg tehát korábban hálózatokon zajló „játékokat” elemeztünk, most a hálózatokon belüli stratégiai interakciók kerülnek a középpontba.

Ez a fejezet tehát egy új irányt jelöl ki: megismertet a stratégiai döntések mögött álló matematikai modellekkel, és megmutatja, miként alkalmazhatók ezek hálózati környezetben. A cél nem csupán az alapfogalmak áttekintése, hanem annak megértése is, miként alakul ki racionalitás, együttműködés vagy épp versengés a kapcsolati struktúrák keretei között.

A következő fejezetek tovább boncolják ezt a logikát: a gazdasági hálózatoktól az információs rendszereken át a viselkedésterjedés dinamikájáig mutatják be, hogyan szövi át a játékelmélet a hálózatok működését.

10.1. Egy első példa: szóló vagy duett

Képzeljük el, hogy egy duett énekese vagyunk, és másnap kétpróbás fellépésünk lesz. Két dologra kell készülnünk: a saját szólónkra vagy a duettdarabunkra. Csak az egyikre tudunk időt szánni, de mindkét rész teljesítménye külön pontozásra kerül.

Ha a szólónkat gyakoroljuk, kimagasló egyéni teljesítményt nyújtunk (92 pont), ha nem, akkor csak közepesen szerepelünk (80 pont). A duett minősége viszont attól függ, hogy mennyire készülünk fel mindketten.

- Ha mindketten a duett összhangjára koncentrálnak, tökéletes előadást nyújtunk (100 pont).

- Ha csak egyikünk gyakorol rá, az előadás még mindig jó lesz, de nem hibátlan (92 pont).
- Ha egyikünk sem fordít időt a közös darabra, az eredmény elmarad a vártól (84 pont).

A duettpartnerünk ugyanebben a dilemmában van, és nem tudjuk előre, ki mit választ. Természetesen mindketten a legjobb összesített eredményre törekszünk (10.1. táblázat).

- Ha mindketten a duettrészünk gyakorlására összpontosítunk, az átlagos pontszámunk 90, azaz $(80+100)/2$ lesz.
- Ha mindketten kizárólag a saját szólónkra készülünk, az átlagos pontszám 88, vagyis $(92+84)/2$ lesz.
- Ha egyikünk az összhangra, a másik pedig a saját szólójára fókuszál, akkor a szólóra készülő énekes átlaga $92=(92+92)/2$, míg a duettpartneré $86=(80+92)/2$ lesz.

Ez egy klasszikus stratégiai döntési helyzet, ahol az eredmény nemcsak a saját döntésünktől függ, hanem attól is, hogy a partnerünk mit választ.

10.1. táblázat. Kifizetési (vagy nyereség) mátrix: szóló-vagy-duett

	partner: duett	partner: szóló
játékos: duett	90, 90	86, 92
játékos: szóló	92, 86	88, 88

Ez a helyzet jól szemlélteti a játékelmélet lényegét: olyan döntések elemzését, amelyek kimenetele nem csupán a saját választásunktól, hanem más szereplők döntéseitől is függ. A stratégiai gondolkodás számos területen megjelenik. Például egy tizenegyesrúgásnál is a rúgó és a kapus döntései egymástól függenek.

De a játékelmélet nemcsak sportban vagy játékokban alkalmazható, ahogy a duettpélda is mutatja. Használható üzleti stratégiák kialakításánál, például új termékek árazásánál, aukciós liciteknel, közlekedési útvonalak optimalizálásánál vagy nemzetközi konfliktusok kezelésénél. Minden ilyen helyzetben a döntések stratégiai dimenzióval rendelkeznek, amelyet a játékelmélet segít megérteni és elemezni.

10.2. A játék alapvető elemei és stratégiai elemzése

Egy játék olyan helyzet, amely három kulcsfontosságú elemből áll.

Játékosok: a résztvevők, akik döntéseket hoznak. A példánkban a duetténekesek a játékosok.

Stratégiák: a játékosok rendelkezésére álló cselekvési lehetőségek. Jelen esetben két választás létezik: vagy a duettrész gyakorlására, vagy a saját szólóra való összpontosítás.

Kifizetések (angolul *payoff*): minden stratégia egy adott eredménnyel (nyereséggel vagy haszonnal) jár, amely függ attól, hogy a másik játékos mit választ. A példánkban a kifizetés az átlagos pontszám, amelyet a szóló- és duett-teljesítményük alapján kapnak a játékosok.

A játékelmélet célja annak elemzése, hogy a játékosok milyen stratégiát választanak egy adott helyzetben. Bár most egy kétjátékos, egyszeri döntési helyzetet vizsgálunk, ugyanezek az elvek alkalmazhatók több résztvevős és hosszabb távú, többszakaszos játékokra is.

10.2.1. Racionális döntés, domináns stratégia és egy paradoxon

Miután meghatároztuk a játék szerkezetét – a játékosokat, a stratégiákat és a kifizetéseket –, felmerül a kérdés: milyen döntést érdemes hozni? Vizsgáljuk meg a lehetséges kimeneteket!

- *Ha tudnánk, hogy a partnerünk a szólóra készül*, és mi is a szólóra koncentrálnunk, 88-as átlagot kapunk. Ha viszont a duettre készülünk, csak 86 pontot érünk el. Tehát ebben az esetben a szólóra való készülés a jobb választás.
- *Ha tudnánk, hogy a partnerünk a duettre készül*, és mi is a duettet gyakoroljuk, az átlagpontszámunk 90 lesz. Ha e helyett a szólót választjuk, 92 pontot kapunk. Ez alapján ebben az esetben is a szólóra való készülés éri meg jobban.

Ez az elemzés rávilágít, hogy függetlenül attól, mit csinál a partnerünk, számunkra mindig a szólóra való készülés hozza a magasabb pontszámot. Ezt nevezzük szigorúan domináns stratégiának – egy olyan választásnak, amely minden más lehetőségnél jobb, függetlenül attól, hogy mit tesz a másik játékos. Mivel a duettpartnerünk ugyanebben a helyzetben van, ő is a szólót fogja választani, így a várható kimenetel az lesz, hogy mindketten 88-as átlagpontszámot érünk el.

Viszont itt jön a paradoxon: Ha valahogy meg tudnánk egyezni abban, hogy mindketten a duettre készülünk, akkor 90-es átlagot kaphatnánk – ami mindkettőnk számára jobb lenne. Másfelől viszont, még ha előre meg is ígérnénk a partnerünknek, hogy a duettet gyakoroljuk, ő akkor is jobban járna, ha mégis a szólóra készülne – hiszen így 92-es pontszámot érhetne el. Következésképpen, a racionális döntéshozatal miatt a 90-es átlag nem érhető el.

A fenti eredmény abból adódik, hogy a pontszámokat tekintjük a legfontosabb célnak. Ha viszont más tényezők is számítanának, például érdekelne, hogy a partnerünk is milyen eredményt ér el, vagy tartunk attól, hogy dühös lesz ránk, amiért nem készültünk a duettünkre, akkor a kifizetések másképp alakulnának, és a végső döntés is változhatna.

Az alaphelyzetben viszont az a paradoxon áll fenn, hogy létezik egy mindkettőnk számára jobb eredmény – mégsem érhető el tisztán racionális döntéssel.

10.3. Kapcsolódó történet: a fogolydilemma

A szóló-vagy-duett játék eredménye szorosan kapcsolódik a játékelmélet egyik legismertebb példájához, a fogolydilemmához.

Képzeljünk el két gyanúsítottat, akiket letartóztatott a rendőrség, és külön-külön hallgatnak ki. A rendőrség erősen gyanítja, hogy a két személy felelős egy rablásért, de nincs elég bizonyíték arra, hogy elítéljék őket. Ugyanakkor mindketten ellenálltak a letartóztatásnak, ezért egy évet kaptak e kisebb bűncselekményért.

Mindkét gyanúsítottnak felajánlanak egy alkut:

- ha bevallja a rablást, de a másik nem vall, akkor szabadon engedik, míg a másik 10 év börtönt kap;
- ha mindketten bevallják a rablást, akkor enyhébb, 4 éves börtönbüntetést kapnak;
- ha egyikük sem vall, akkor csak az ellenállás miatt mindketten egy-egy év börtönt kapnak.

Ebben a játékban is két játékos van (a két gyanúsított), akiknek ugyancsak két lehetséges stratégiájuk van: (1) bevallani a rablást; (2) nem bevallani a rablást. A lehetséges kifizetéseket (a börtönben töltött évek) a 10.2. táblázat mutatja be.

10.2. táblázat. *A fogolydilemma kifizetési mátrixa. A kifizetések negatívak, mivel egyik lehetőség sem jó a gyanúsítottak számára, csak különböző fokú rossz eredmények*

	2. gyanúsított: vall	2. gyanúsított: nem vall
1. gyanúsított: vall	-4 év, -4 év	0 év, -10 év
1. gyanúsított: nem vall	-10 év, 0 év	-1 év, -1 év

Nézzük meg, hogyan dönthet egy adott játékos, például 1. gyanúsított.

- Ha 2. gyanúsított vall, akkor 1. gyanúsított négy évet kap, ha ő is vall, és tíz évet, ha nem vall. Ebben az esetben tehát 1. gyanúsított számára a legjobb döntés az, ha vall.
- Ha 2. gyanúsított nem vall, akkor 1. gyanúsított szabadon távozhat (0 év), ha vall, és egy évet kap, ha ő sem vall. Ez alapján ebben az esetben is jobban jár, ha vall.

Mivel vallani mindig jobb választás, függetlenül a másik döntésétől, ez egy szigorúan domináns stratégia. A racionalitás azt diktálja tehát, hogy mindkét gyanúsított vallani fog, így mindketten 4 évet kapnak.

Azonban itt is egy ellentmondásos helyzet, úgynevezett paradoxon áll fenn: ha egyikük sem vallana, mindketten csak 1 évet kapnának – ami számukra jobb lenne. Mégis, mivel mindkét gyanúsított a saját érdekeit követi, mindketten úgy döntenek, hogy vallanak.

Ez a helyzet kéz a kézben jár a szóló-vagy-duett játék kapcsán tárgyalt jelenséggel: van egy közösen jobb kimenetel, amelyet azonban egyik fél sem választ racionálisan. Az egyéni érdekek követése miatt a közös optimum nem valósul meg.

Ha a gyanúsítottak más tényezőket is figyelembe vennének – például a másik fél megbecsülését vagy a jövőbeli együttműködést –, az megváltoztathatná a döntéseiket, és a játék kimenetele is más lenne. Azonban ha kizárólag a saját érdekeket és kifizetéseket nézik, racionálisan az történik, hogy mindketten a vallás mellett döntenek.

10.3.1. A fogolydilemma határai és alternatívái

A fogolydilemma nem minden helyzetben fordul elő – csak akkor, ha a kifizetések adott módon vannak elrendezve. Amint látni fogjuk, már kisebb módosítások is teljesen megváltoztathatják egy játék szerkezetét és a játékosok viselkedését.

Tekintsük újra a szóló-vagy-duett játékot. Tegyük fel, hogy az összes feltétel ugyanaz marad, kivéve, hogy a szólóvizsga sokkal könnyebb. Most a pontszámok a következőképpen alakulnak:

- ha a szólóra készülünk, 100 pontot kapunk.
- ha nem készülünk rá, de mégis megtartjuk, 96 pontot kapunk.

Az új kifizetési mátrixot a 10.3. táblázat mutatja be.

10.3. táblázat. *Új kifizetési mátrix: szóló vagy duett*

	partner: duett	partner: szóló
játékos: duett	98, 98	94, 96
játékos: szóló	96, 94	92, 92

Ebben az új helyzetben a duett próbája válik szigorúan domináns stratégiává. Ugyanis ha a partnerünk a duettre készül, nekünk is érdemes a duettet választani (98 pont), mert ez jobb, mint a szólóra készülni (96 pont). Ha a partnerünk a szólóra készül, nekünk akkor is a duett éri meg inkább (94 pont), mint a szóló (92 pont). Mivel mindkét játékos számára a duett próbája a jobb választás, most már várható, hogy mindketten ezt a stratégiát választják – és mindketten jobban járnak, mint korábban.

Ez a változás rávilágít egy kulcsfontosságú tényre: a fogolydilemma nem egy univerzális szabály, hanem egy speciális helyzet, amely csak bizonyos feltételek teljesülése esetén fordul elő. Ha a játék szerkezetét megváltoztatjuk – például módosítjuk a kifizetéseket –, akkor a játékosok már nem a klasszikus dilemmát élik át, hanem egy teljesen más stratégiát követhetnek.

Más szóval, a „vesztes-vesztes” helyzetek elkerülhetők, ha a játék szabályai kedvezőbben vannak kialakítva. A megfelelő ösztönzők kialakításával a versengő egyéni érdekek helyett az együttműködés válhat a racionális döntéssé.

Mindezek után definiáljunk négy alapvető fogalmat a játékelméletben.

- *Legjobb válasz* (best response): egy játékos optimális döntése egy másik játékos adott stratégiája mellett. Ha egy stratégia legalább olyan jó eredményt hoz, mint bármely más lehetőség, akkor az a legjobb válasz az adott helyzetre.
- *Szigorúan legjobb válasz* (strictly best response): egy stratégia minden más lehetőségnél jobb egy adott ellenfél-stratégia mellett. Ebben az esetben egyértelmű, hogy a játékosnak ezt kell választania.
- *Domináns stratégia* (dominant strategy): egy stratégia akkor domináns, ha minden lehetséges ellenfél-stratégia esetén a legjobb választás.
- *Szigorúan domináns stratégia* (strictly dominant strategy): egy stratégia minden más stratégiánál jobb minden ellenfél-stratégia esetén. Ha egy játékosnak van szigorúan domináns stratégiája, akkor várhatóan ezt fogja választani.

A fogolydilemma (és a szóló-vagy-duett játék) megvizsgált egyszerű esete azért volt könnyen elemezhető, mert mindkét játékosnak szigorúan domináns stratégiája volt, de sok helyzetben a döntések nem ennyire egyértelműek.

10.4. Amikor csak az egyik játékosnak van szigorúan domináns stratégiája

Képzeljünk el két éttermet egy forgalmas városban, amelyek új menüvel szeretnék vonzani a vendégeket. A vásárlók két csoportra oszlanak: 60%-uk az olcsóbb, 40%-uk pedig a prémium ételeket részesíti előnyben. Az egyik étterem (1. étterem) már jól ismert és népszerűbb, így ha mindketten ugyanazt a kategóriát célozzák meg, akkor 1. étterem kapja a vendégek 80%-át, míg 2. étterem csupán 20%-ot.

A döntések és várható eredmények (10.4. táblázat):

- ha az éttermek különböző árkatóriát választanak, akkor az olcsóbb menüt kínáló a 60%-ot, a prémiumot választó pedig a 40%-ot kapja;
- ha mindketten az olcsóbb kategóriát választják, akkor 1. étterem kap 48%-ot, 2. étterem pedig 12%-ot;
- ha mindketten a prémium kategóriát célozzák, akkor 1. étterem kap 32%-ot, 2. étterem pedig 8%-ot.

10.4. táblázat. *Éttermek példa kifizetési mátrixa: olcsó vagy prémium menü*

	2. étterem: olcsó menü	2. étterem: prémium menü
1. étterem: olcsó menü	48%, 12%	60%, 40%
1. étterem: prémium menü	40%, 60%	32%, 8%

Ebben a helyzetben 1. étterem számára az olcsóbb menü a legjobb választás, függetlenül 2. étterem döntésétől, tehát ez egy szigorúan domináns stratégia. 2. étterem számára viszont nincs egyértelmű domináns stratégia: ha 1. étterem prémiumot kínálna, akkor az olcsóbb menü lenne a jobb választás, de mivel 1. étterem biztosan az olcsóbb menüt választja, 2. étteremnek a prémium ételeket éri meg kínálni.

Így a várható egyensúlyi helyzet: 1. étterem az olcsóbb menüt kínálja, míg 2. étterem a prémium kategóriára vált, és a vendégek megoszlanak 60%-40% arányban. Ez az eredmény azt mutatja, hogy a domináns piaci szereplő képes saját stratégiája szerint alakítani a versenyt, míg a kisebb szereplőnek alkalmazkodnia kell. Fontos azt is megjegyezni, hogy az elemzés feltételezi, hogy az éttermek ismerik egymás stratégiáját és a kifizetési mátrixot (közös tudás feltételezése).

10.5. Nash-egyensúly

Amikor egy kétszereplős játékban egyik félnek sincs szigorúan domináns stratégiája, más módszert kell találnunk annak előrejelzésére, hogy mi lehet a várható kimenetel. A Nash-egyensúly olyan stratégiai helyzet egy játékban, amelyben egyik játékos sem tudja növelni a nyereségét egyoldalúan stratégiaváltással, feltéve, hogy a másik játékos is megtartja a saját stratégiáját. Ez az egyensúlyi helyzet azért jelentős, mert ha a játékosok racionálisan döntenek és teljes információval rendelkeznek a játékról, akkor várhatóan Nash-egyensúlyban játszanak.

10.5.1. Egy álláspályázati verseny példája

Tegyük fel, hogy két friss diplomás pályázó, Anna és Bence munkát keres, és három vállalatnál (X, Y és Z) próbálnak elhelyezkedni. Minden pályázó három stratégiából választhat: jelentkezik X, Y vagy Z vállalathoz. A végső kimenetel az alábbi szabályok szerint alakul.

- Ha mindketten ugyanarra a vállalatra pályáznak, az adott cég egyenlően osztja el az esélyeket közöttük.
- Anna kevésbé tapasztalt, így ha külön vállalatokat választanak, akkor ő nem kap ajánlatot, míg Bence automatikusan elnyeri az állást.
- Bence önállóan is képes állást szerezni Y vagy Z vállalatnál, de az X vállalat nagyobb cég, és csak akkor hajlandó felvenni valakit, ha mindketten oda jelentkeznek.

A különböző vállalatok eltérő fizetéseket kínálnak.

- X vállalatnál az éves fizetés 80 ezer euró, így ha mindketten oda pályáznak és megosztják az ajánlatot, mindkettőjük fizetése 40-40 ezer euró.

- Y és Z vállalatoknál a fizetés csak 20 ezer euró, tehát ha egy pályázó egyedül jelentkezik és felveszik, 20 ezret keres, míg ha meg kell osztani a lehetőséget, 10-10 ezret kapnak.

A helyzet kifizetési mátrixát a 10.5. táblázat mutatja be.

10.5. táblázat. *Pályázati stratégiák és a két pályázó elérhető fizetései*

Anna / Bence	X	Y	Z
X	(40, 40)	(0, 20)	(0, 20)
Y	(0, 0)	(10, 10)	(0, 20)
Z	(0, 0)	(0, 20)	(10, 10)

John Nash elmélete szerint, ha nincsenek domináns stratégiák, akkor érdemes olyan stratégiákat keresni, amelyek egymásra adott legjobb válaszok.

Ebben a példában:

- ha Anna az X vállalatot választja, és Bence is X-et választja, akkor 40-40 ezret kapnak, ami a lehető legjobb eredmény mindkettőjük számára;
- ha egyikük másik vállalatot választ, Anna kockáztatja, hogy egyáltalán nem kap ajánlatot, így jobb számára az X-et választani, ha Bence is ezt teszi;
- Bence számára is X a legjobb választás, ha tudja, hogy Anna is oda pályázik.

Mivel egyiküknek sem éri meg eltérni az X stratégiától, (X, X) a Nash-egyensúly, vagyis az optimális döntés, ha mindketten oda pályáznak. Könnyen ellenőrizhető, hogy nincs más Nash-egyensúly, mert minden más esetben legalább az egyik játékos jobban járna, ha változtatna a stratégiáján.

10.5.2. A Nash-egyensúly megtalálása

A Nash-egyensúlyok azonosításának két alapvető módszere van. Az első a minden stratégiapár ellenőrzése, amely során végigvizsgáljuk az összes lehetséges stratégiapárosítást, és megállapítjuk, hogy azok egymásra nézve legjobb válaszok-e. A második módszer a legjobb válaszok keresése, amely során minden játékos esetében meghatározzuk, mely stratégiát választaná az ellenfél döntésétől függetlenül, majd megkeressük azokat a stratégiapárokat, amelyek kölcsönösen legjobb válaszok egymásra. Bár a korábbi példában egyértelmű volt az egyensúlyi pont, összetettebb játékok esetén előfordulhat, hogy több Nash-egyensúly létezik, vagy az egyensúly megtalálása bonyolultabb elemzést igényel. (Algoritmikai részletek végett lásd a B függelék 10. pontját.)

John Nash ezért kapta meg az 1994-es közgazdasági Nobel-díjat, mivel elmélete mélyreható hatást gyakorolt a közgazdaságtanra és a játékelméletre. Azonban nemcsak gazdasági és üzleti döntésekben alkalmazható, hanem a politikai döntéshozatal, a sportstratégiák, a mesterséges intelligencia és számos egyéb terület elemzésében is kulcsszerepet játszik.

10.6. Pareto-optimalitás és társadalmi optimális állapot

A Nash-egyensúlyban minden játékos stratégiája a legjobb válasz a többi játékos stratégiájára. Más szóval, a játékosok egyénileg optimalizálnak. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a játékosok csoportként is elérnek egy mindenki számára legkedvezőbb kimenetelt. A szülő-vagy-duett játék és más hasonló játékok, például a fogolydilemma, jó példái ennek.

Érdekes a játék kimeneteleit nemcsak a stratégiai vagy egyensúlyi tulajdonságok szerint osztályozni, hanem aszerint is, hogy mennyire „jók a társadalom számára”. Ehhez azonban először pontosan meg kell határozni, mit értünk ezen. Két fontos fogalom segíthet ebben. Az első a Pareto-optimalitás, amely Vilfredo Pareto olasz közgazdászról kapta a nevét.

Egy stratégiaválasztás *Pareto-optimalis*, ha nincs olyan másik stratégiaválasztás, amelyben minden játékos legalább ugyanolyan kifizetést kap, és legalább egy játékos szigorúan nagyobb kifizetést kap. Fordítva: egy stratégiaválasztás nem Pareto-optimalis, amennyiben létezik egy másik stratégiaválasztás, amely legalább egy játékos számára jobb kimenetelt biztosít anélkül, hogy mások rosszabbul járnának. Észszerű feltételezni, hogy ha a játékosok közösen tudnának dönteni és kötelező érvényű megállapodást köthetnének, akkor ezt az előnyösebb stratégiát választanák.

Azonban ez az érvelés azon alapul, hogy a játékosok valóban képesek lennének egy ilyen megállapodás betartására. Ha a jobb kimenetel nem Nash-egyensúly, akkor a játékosok közül legalább az egyik kísértve érezhetné magát arra, hogy eltérjen ettől a stratégiától. Ennek a jelentőségét jól illusztrálják a szülő-vagy-duett játék kimenetelei. Ha te és a partnered mindketten a szülőre készültök, az nem Pareto-optimalis, mert ha mindketten a duettet választanátok, az mindkettőtöknek jobb lenne. Ez mutatja a játék legfőbb nehézségét Pareto-optimalitási szempontból: bár a játékosok tisztában vannak azzal, hogy létezik egy jobb megoldás, azt nem tudják fenntartani egy kötelező érvényű megállapodás nélkül.

Ebben a példában a két olyan kimenetel, amelyben pontosan az egyikőtök készül a duettre, Pareto-optimalis. Itt ugyan az egyik játékos rosszul jár, de nincs másik olyan kimenetel, amelyben mindenki legalább ugyanannyit kapna, és valaki többet. Így a szülő-vagy-duett játék – akárcsak a fogolydilemma – egy olyan játék, amelyben az egyetlen nem Pareto-optimalis kimenetel az, amely egyben a Nash-egyensúly is.

Egy még erősebb és egyszerűbb kritérium a *társadalmi optimális állapot*, amely a játékosok együttes jólétére összpontosít. Egy stratégiaválasztás társadalmilag optimális (vagy társadalmi jóléti maximum), ha maximalizálja a játékosok kifizetéseinek összegét. A szülő-vagy-duett játékban a társadalmi optimum az a kimenetel, amelyben mindkét játékos a duettre készül, mivel ebben az esetben a kifizetések összege: $90 + 90 = 180$.

Ez a definíció azonban csak akkor értelmezhető megfelelően, ha van értelme a játékosok kifizetéseit egyszerűen összeadni. Nem mindig egyértelmű, hogy a te elégedettség és a partnered elégedettsége egyszerűen összeadható-e.

10.6.1. A Pareto-optimalitás és társadalmi optimális állapot kapcsolata

A társadalmilag optimális kimenetek mindig Pareto-optimálisak. Ha egy társadalmi optimum nem lenne Pareto-optimális, akkor létezne egy másik kimenetel, amelyben mindenki legalább ugyanannyit kap, és valaki többet – és ez egy magasabb összegű kifizetéshez vezetne.

Viszont egy Pareto-optimális kimenetel nem feltétlenül társadalmilag optimális. Például a szőlő-vagy-duett játékokban három Pareto-optimális kimenetel van, de ezek közül csak az egyik (mindketten a duettre készülnek) társadalmi optimum.

Végül érdemes megjegyezni, hogy a Nash-egyensúly nem mindig áll ellentétben a társadalmi optimummal. Például a szőlő-vagy-duett játék egy olyan változatában, ahol a szőlő könnyebb és a kifizetések másképp alakulnak, a Nash-egyensúly egybeeshet a társadalmi optimum kimenetellel.

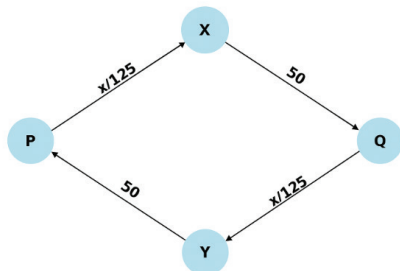
10.7. Egy alkalmazás: hálózati forgalom modellezése játékelmélet segítségével

Amint fentebb már utaltunk rá, a közlekedési hálózatok (vagy az internetes adatforgalom) működésének elemzése során alapvető játékelméleti megfontolásokkal találkozhatunk. Ennek egyik kézenfekvő oka, hogy az egyének nem elszívetlenül hoznak döntéseket, hanem figyelembe kell venniük mások választásait is, hiszen ezek közvetlenül befolyásolják a torlódás mértékét és az utazási időt. A következőkben megvizsgáljuk a közlekedési hálózatok egyensúlyi állapotát, és bemutatunk egy meglepő jelenséget, a Braess-paradoxont, amely szerint egy új útvonal vagy kapacitásbővítés nem mindig javítja, hanem akár ronthatja is a forgalom áramlását.

Egy közlekedési hálózatot irányított gráffal modellezhetünk, ahol az élek (útvonalak) különböző utak vagy autópályák, a csomópontok (állomások) pedig azok a helyek, ahol fel- vagy lehajthatunk.

Vegyünk egy egyszerűsített példát (10.1. ábra), ahol két fontos csomópontot jelölünk ki: P egy külvárosi indulási pont, Q pedig egy belvárosi célállomás. Tegyük fel, hogy minden reggel 5000 autó indul P -ből Q -ba, és két fő útvonal áll rendelkezésükre: $A \rightarrow P \rightarrow X \rightarrow Q$ felső útvonal, valamint a $P \rightarrow Y \rightarrow Q$ alsó útvonal. Az utak utazási ideje pedig az alábbiak szerint alakul: $A \rightarrow P \rightarrow Y$ és $X \rightarrow Q$ szakaszok állandó menetidejűek, függetlenül a forgalomtól (50 perc); $A \rightarrow P \rightarrow X$ és $Y \rightarrow Q$

szakaszok torlódásérzékenyek, ezért ezek esetében az utazási idő $x/125$ perc, ahol x az adott útszakaszon közlekedő járművek száma.



10.1. ábra. Egy autópálya-hálózat, ahol minden él címkéje a rajta haladó x autó esetén érvényes menetidőt (percben) jelöli

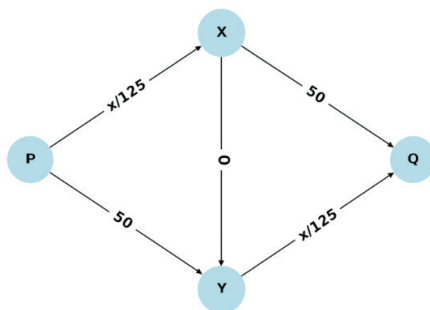
Ha minden autó a felső útvonalat választja, akkor az utazási idő 90 perc ($5000/125 + 50$). Ugyanez igaz, ha mindenki az alsó útvonalat használja. Ha azonban az autók egyenletesen oszlanak meg a két útvonal között (2500-2500 autó mindkettőn), akkor az utazási idő 70 perc ($2500/125 + 50$). Ez egy egyensúlyi állapot, mivel egyik sofőr sem tudná csökkenteni az utazási idejét azzal, hogy másik útvonalra vált.

Ez a helyzet játékelméleti szempontból egy stratégiai játékként értelmezhető, ahol a játékosok az autók, a stratégiák a választható útvonalak, a nyereségük pedig az utazási idő negatív értéke – hiszen minél rövidebb az utazás, annál jobb az eredmény. Az eddig megismert játékelméleti fogalmak továbbra is alkalmazhatók: egy Nash-egyensúly olyan stratégiai eloszlás, amelyben egyik sofőr sem tudna rövidebb menetidőt elérni anélkül, hogy ezzel valaki mást ne hozna hátrányosabb helyzetbe. Az autók egyenletes eloszlása (2500–2500) egy stabil Nash-egyensúlynak tekinthető, mivel ha valamelyik útvonal zsúfoltabbá válna, az autók átvándorolnának a kevésbé terhelt útvonalra, így az egyensúly automatikusan helyreállna.

10.7.1. Braess-paradoxon: amikor egy új út ront a helyzeten

Tegyük fel, hogy a városvezetés új gyorsforgalmi utat épít X és Y között, amelynek menetideje 0 perc (lásd 10.2. ábra). Ez logikusan csökkenthetné az utazási időt – a valóságban azonban rontja a közlekedés hatékonyságát: az új egyensúlyban minden autós az X - Y szakaszt használja, és az utazási idő így 80 perc lesz ($5000/125 + 0 + 5000/125$), ami rosszabb, mint az eredeti 70 perces egyensúlyi állapot.

Miért történik ez? Az új út miatt a sofőrök úgy érzik, hogy az X - Y szakasz gyorsabb, és elkezdik használni. Mivel mindenki ugyanígy gondolkodik, a torlódás drasztikusan megnő, és végül rosszabb lesz a helyzet, mint előtte volt.



10.2. ábra. Az előző ábra autópálya-hálózata, miután egy nagyon gyors él került hozzáadásra X és Y között

Ez az egyéni optimalizáció csapdája: bár minden sofőr racionális döntést hoz a saját érdekében, az összhatalás kedvezőtlenebb, mint a kiindulási helyzet. A Braess-paradoxon rávilágít arra, hogy egy hálózat bővítése nem mindig javítja a közlekedést, sőt, bizonyos esetekben növelheti a torlódást és az utazási időt. Ez a jelenség valós közlekedési rendszerekben is megfigyelhető. Például Szöulban, egy hatsávos autópálya lebontása és egy park létrehozása után csökkent a menetidő, miközben a forgalom változatlan maradt. Matematikai modellek szerint egy hálózat bővítése akár 4/3-szorosára is növelheti a menetidőt (Roughgarden–Tardos 2002; Anshelevich et al. 2008).

Másfelől, miután megértettük, hogyan működik Braess-paradoxon, azt is beláthatjuk, hogy valójában semmi igazán „paradox” nincs benne. Számos helyzetben előfordul, hogy egy új stratégia bevezetése egy játékban nemhogy javítaná, hanem éppen rontja minden résztvevő helyzetét. Erre kiváló példa a fogolydilemma: ha a játékosok egyetlen lehetősége az lenne, hogy nem vallanak (igaz, ez egy rendkívül egyszerű játékot eredményezne), akkor mindketten jobban járnának, mint amikor a vallomástétel is választhatóvá válik. Valójában éppen ezért kínálják fel a rendőrök a vallomás lehetőségét – hiszen tudják, hogy az rontja a foglyok közös érdekérvényesítését.

A probléma elkerülésére több megoldás is kínálkozik: forgalmi díjak alkalmazása, dinamikus forgalomszabályozás, játékelméleti szempontokat is integráló intelligens hálózattervezés, valamint a közösségi érdekek hangsúlyosabb érvényesítése.

A Braess-paradoxon egy klasszikus példája annak, hogy az önérdékkövető döntések nem mindig vezetnek a társadalom számára legjobb eredményhez. Éppen ezért a közlekedési hálózatokat nemcsak mérnöki, hanem játékelméleti szempontból is vizsgálni kell.

10.8. Összegzés

A játékelmélet tehát egy olyan szemléletmódot kínál, amely segít megérteni, hogyan formálódnak döntések, ha azok más szereplők döntéseitől függenek. Legyen szó együttműködésről, versengésről vagy látszólag semleges választásokról, a stratégiai viszonyok elemzése alapvető fontosságúvá válik a hálózatokon belül és azok között zajló folyamatok értelmezéséhez. A következő fejezetekben azt vizsgáljuk meg, hogyan alkalmazhatók ezek az elvek a gazdasági, információs és viselkedési hálózatok világában – olyan rendszerekben, ahol az egyéni döntések összessége kollektív mintázatokat hoz létre.

11. Piaci hálózatok: párosítás és közvetítők

A piacok működésének megértéséhez elengedhetetlen, hogy figyelembe vegyük a szereplők közötti kapcsolatok hálózati szerkezetét. Ebben a fejezetben két különböző piaci modellt vizsgálunk: a párosító piacokat, ahol a vevők és eladók közvetlenül kapcsolódnak egymáshoz, valamint a közvetítőkkal működő piacokat, ahol az árakat és a kereskedelem útvonalait harmadik felek is alakítják. Az előző fejezetben bemutatott játékelméleti elemek itt konkrét piaci helyzetekben jelennek meg: a résztvevők stratégiái, a verseny és a piaci egyensúly keresése mind a hálózat szerkezetéből fakadó döntési helyzetekhez kapcsolódnak. Bár a téma mélyebb elemzése túlmutat e fejezet keretein, itt egy rövid áttekintést nyújtunk arról, hogyan használható a gráfelmélet a piacok dinamikájának leírására.

11.1. Párosító piacok

A piacok a hálózati szerkezetű interakciók egyik legfontosabb példái. A vevők és eladók (vagy más szereplők) egy implicit hálózaton keresztül kapcsolódnak egymáshoz. A párosító piacok az elsőként tárgyalt modellek közé tartoznak. Ezek a piacok hosszú múltra tekintenek vissza a közgazdaságtanban és az operációkutatásban, mivel letisztult, stilizált módon ragadják meg az alapvető elveket. Ilyen például annak bemutatása, hogyan lehet figyelembe venni az emberek eltérő preferenciáit különböző javak esetén, hogyan decentralizálhatják az árak az erőforrások elosztását, vagy miként vezethetnek az árak társadalmilag optimális allokációhoz. Ezeket a fogalmakat fokozatosan vezetjük be, egyre összetettebb modelleken keresztül. Elsőként egy olyan rendszert vizsgálunk, ahol a javakat az egyéni preferenciák alapján osztják ki, árképzés nélkül. Ez az alapmodell később összetettebb mechanizmusok kulcselemévé válik.

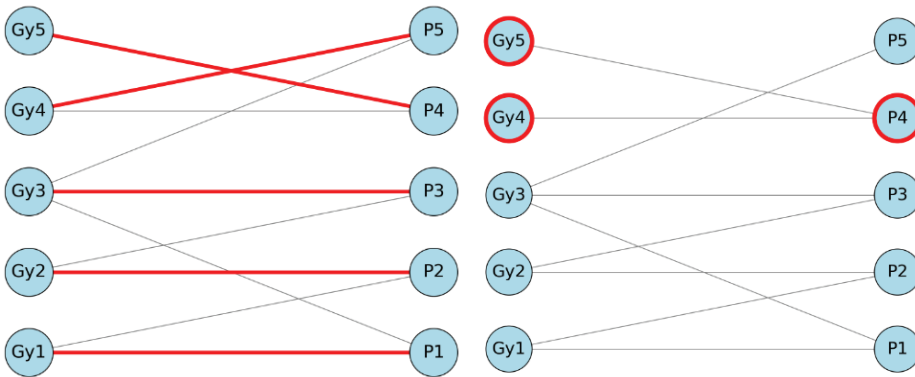
11.1.1. Páros gráfok és teljes párosítások

Képzeljük el, hogy egy nagyvállalat több különböző osztálya gyakornokokat keres, és ugyanakkor egy egyetemi programból több hallgató jelentkezik a vállalat különböző projektjeire. Minden gyakornok megjelöl néhány projektet, amely érdekli őt, és minden osztályvezető megjelöli azokat a gyakornokokat, akiket szívesen fogadna a csapatában.

A helyzetet egy páros gráffal modellezhetjük, amelyben az egyik oldalon a gyakornokok csúcsai szerepelnek, a másikon pedig a projektek csúcsai találhatók. Megelőlegezzük, hogy a gyakornoki és projekt csúcsok száma megegyezik. Egy él akkor létezik egy gyakornok és egy projekt között, ha az adott gyakornok azt

a projektet megfelelőnek tartja, és az adott projekt felelőse is nyitott rá, hogy őt kiválassza. A vállalat célja, hogy a lehető legtöbb gyakornokot párosítsa egy-egy projekttel, figyelembe véve a kölcsönös preferenciákat.

Ha a személyzeti osztály talál olyan párosítást, amelyben minden gyakornokhoz pontosan egy projekt rendelhető, akkor ezt teljes (mert minden csúcsot lefed) vagy tökéletes párosításnak nevezzük. Ha ez nem lehetséges, annak oka egy sajátos akadály a rendszerben: létezik egy olyan gyakornokcsoport, amely összesen kevesebb projektet jelölt meg, mint ahány tagból áll. Ha viszont nincs egyetlen ilyen csoport sem, akkor garantáltan létezik teljes párosítás a gyakornokok és a projektek között (lásd a 11.1. ábrát).



11.1. ábra. Bal oldalon létezik teljes párosítás (pirossal kiemelve), jobb oldalon viszont nem (a $\{Gy4, Gy5\}$ kéttagú csoport csak egy projektet, a P4-et jelölt meg).

Ez az elv általánosítható minden párosító piacra: ha egy rendszerben nincs elegendő lehetőség a szereplők számára, akkor egyesek elkerülhetetlenül párosítás nélkül maradnak. Ez a gondolatmenet König, Hall és Frobenius munkássága nyomán kristályosodott ki, és a szerző részletesen tárgyalja a *Gráfalgoritmusok* című könyv 11. fejezetében (Kátai 2008). Itt megtalálható az úgynevezett párosítási tétel bizonyítása is, amely szerint: ha egy páros gráfban – ahol a bal és a jobb oldalon ugyanannyi csúcs található – nem létezik teljes párosítás, akkor szükségszerűen létezik egy akadály, vagyis egy olyan csúcshalmaz az egyik oldalon, amelynek kevesebb szomszédja van a másik oldalon, mint ahány elemet maga a halmaz tartalmaz.

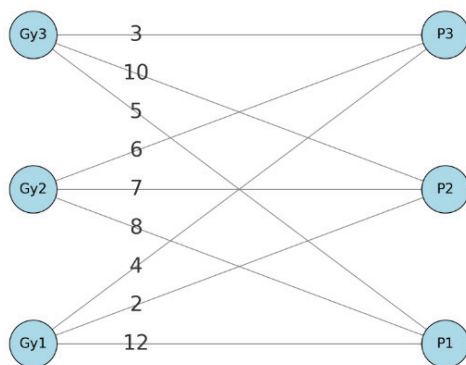
11.1.2. Értékelések és optimális hozzárendelések

A páros gráfokhoz kapcsolódó párosítási probléma a piaci mechanizmusok egy egyszerű aspektusát mutatja be: az egyének preferenciákat fejeznek ki az

elfogadható lehetőségekről, majd egy teljes párosítás megoldja az erőforrások elosztásának problémáját e preferenciák alapján (amennyiben létezik ilyen párosítás).

Most szeretnénk ezt a modellt kiterjeszteni néhány további tényező bevezetésével. Először is, ahelyett, hogy a preferenciákat egyszerű igen/nem választásokkal fejeznénk ki, lehetőséget adunk az egyéneknek, hogy számszerű értékekkel jelezzék, mennyire kedvelik az egyes lehetőségeket.

Példaként vegyük újra a gyakornokok és projektek párosításának problémáját egy vállalati programban. Tegyük fel, hogy ahelyett, hogy a gyakornokok egyszerűen megjelölnék az elfogadható projekteket, minden egyes projekthez egy numerikus értéket rendelnek, amely azt mutatja, mennyire szeretnék azon dolgozni. Ezt az értéket az adott gyakornok értékelésének nevezzük az adott projekttel kapcsolatban. Egy ilyen példát mutat be a 11.2. ábra, ahol három gyakornok értékeli a három elérhető projektet. Megfigyelhető, hogy mivel a gyakornokok eltérő módon értékelik a projekteket, nem feltétlenül ugyanazokat a projekteket tartják a legjobbnak.

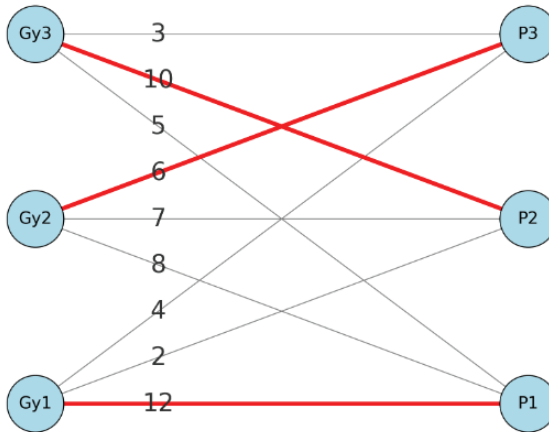


11.2. ábra. Példa egy három gyakornok – három projekt helyzetre, amikor elvileg bármelyik gyakornok megkaphatja bármelyik projektet. Az élek címkei a gyakornokok projektértékeléseit jelölik.

Ez esetben érdekelték lehetünk az optimális hozzárendelés meghatározásában, ami az egyéni értékelések összegével mérhető. A 11.2. ábra bemutatta helyzetben 6 teljes párosítás létezik, amelyek közül a maximális 28 összértékű (lásd a 11.3. ábrát). Nem nehéz belátni, hogy a teljes párosítások száma egyenlő a projektek permutációinak számával, ami jelen esetben $3!$, azaz 6. Általánosan: a $K_{n,n}$ teljes páros gráf esetén a teljes párosítások száma $n!$.

Erdemes itt zárójelben megemlíteni egy rokon problémát is, amelynek megoldása „magyar módszerként” vált híressé: egy súlyozott páros gráfban találjuk meg a minimális értékű maximális párosítást. Amíg a teljes párosítás olyan élek halmaza, amely a gráf minden csúcsát lefedi, addig a maximális párosítás olyan

legnagyobb élhalmaz, amelyhez már nem adható újabb él anélkül, hogy a párosítás jellege meg ne szűnne. A „magyar módszer” elnevezést Harold Kuhn vezette be, mivel az algoritmus jelentős mértékben két magyar matematikus, Kőnig Dénes és Egerváry Jenő korábbi munkáin alapult (Kuhn 1955). A B függelék 11. pontja részletesebben foglalkozik a magyar módszerrel.



11.3. ábra. Optimális kiosztás (piros élek) a 11.2. ábra bemutatott helyzetben

Visszatérve, vegyük észre, hogy bár az optimális kiosztás maximalizálja a teljes elégedettséget, nem biztos, hogy mindenki a számára legjobb projektet kapja. Például a 11.3. ábra bemutatott kiosztásban Gy1 és Gy2 is P1-et értékelte a legjobbnak, de csak egyikük kaphatta meg azt.

Az optimális hozzárendelés problémája általánosítja a korábban tárgyalt párosítási problémát. Ha a gyakornokok csupán igen/nem módon jelölnék meg az elfogadható projekteket, akkor a feladat visszavezethető lenne egy teljes párosítás keresésére. Ezzel szemben, ha numerikus értékeléseket is figyelembe veszünk, lehetőség nyílik a teljes rendszer optimális kihasználtságának vizsgálatára is.

Noha az optimális hozzárendelés fogalma intuitív és logikus, a tényleges megtalálása nem mindig egyszerű. Az alábbiakban megvizsgáljuk, hogyan lehet az optimális kiosztást meghatározni, valamint hogyan befolyásolhatják az árak és piaci mechanizmusok ezt a folyamatot.

11.1.3. Az árak és a piac egyensúlyi állapota

Eddig egy központi munkaerő-közvetítő metaforáját használtuk, aki összegyűjti az összes adatot, majd egy teljes párosítást vagy optimális hozzárendelést hajt végre egy központosított számítás alapján. Bár bizonyos piacok valóban így

működhetnek (például az egyetemi gyakornokok és vállalati projektek összepárosításánál), a munkaerőpiac jellemzően sokkal kevésbé központosított. Ehelyett a munkavállalók és munkáltatók bérkínálat és egyéni értékelések alapján döntenek.

Ez a gondolatmenet vezet el a párosító piacok egyik kulcskérdéséhez: hogyan segíthetik a bérek a piac decentralizálását? Meglátjuk, hogy ha a központi adminisztrátor szerepét egy bérképzési rendszer helyettesíti, az egyének önérdekkövető döntései még mindig optimális hozzárendelésekhez vezethetnek.

Hogy ezt a koncepciót szemléltessük, változtassunk a korábbi példán. A gyakornokok és projektek helyett képzeljünk el egy álláspiaci rendszert, ahol a munkáltatók különböző állásokat kínálnak, a munkavállalók keresnek állást, és minden munkavállaló egyéni értékelést rendel minden álláslehetőséghez. Mint az előző példában, ezek az értékelések különbözhetnek, hiszen az egyes munkavállalók előnyben részesítik a magasabb fizetést, míg mások a rugalmasságot vagy a munkakörnyezetet. Az egyes állások vonzereje tehát szubjektív, és jelentkezőnként eltérhet.

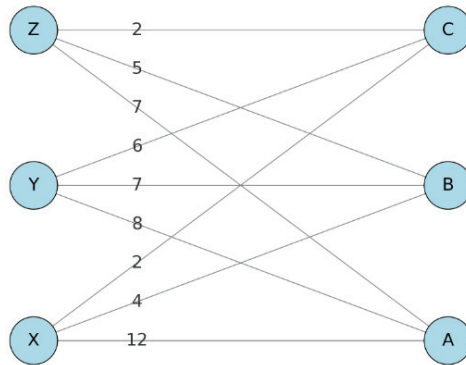
Az egyes munkavállalók és munkáltatók közötti kapcsolatokat újra egy párosgráffal ábrázolhatjuk, ahol a munkavállalók és állások csúcsai között élek jelzik a potenciális munkaviszonyokat.

Tegyük fel továbbá, hogy minden munkáltató meghatároz egy bérszintet a meghirdetett álláspozíciójára. Ekkor egy munkavállaló döntése a következőképpen alakul.

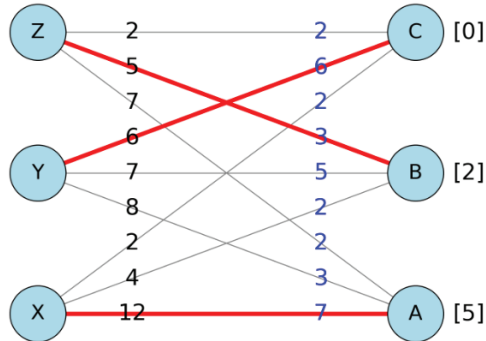
- Ha egy állás p bért kínál, és a munkavállaló v értéken értékeli azt, akkor az ő nettó haszna: $\text{kifizetés} = v - p$. Ha a kifizetés (angolul payoff) pozitív, az azt jelenti, hogy a munkavállaló többre tartja az állást, mint amennyit kap érte, azaz megéri elfogadni.
- Egy munkavállaló mindig azt az állást választja, amely számára a legnagyobb pozitív nettó hasznót (vagy kifizetést) biztosítja.
- Ha több állás esetén azonos pozitív haszonhoz jut, bármelyiket választhatja.
- Ha minden állás nettó haszna negatív, akkor a munkavállaló úgy dönt, hogy nem vállal munkát.

Tekintsünk példaként újra egy olyan helyzetet, amely a $K_{3,3}$ teljes párosgráffal modellezhető. A 11.4. ábra három munkavállaló (X, Y, Z) preferenciaértékeit tartalmazza három állás/munkáltató (A, B, C) tekintetében.

Vizsgáljunk meg három esetet, amelyeket a 11.5–7. ábrák mutatnak be. Ha az A, B, C állások rendre 5, 2, 0 egységnyi bérrel kecsegtetnek (szögletes zárójelben), akkor a 11.5. ábrán késsel jelölt számok szerint alakulnak a haszon értékek (vagy kifizetések), és ez esetben mindenik munkavállalónak más-más állás számít legjobbnak (pirossal kiemelt élek). Ilyenkor kijelenthető, hogy a bérek megfelelően decentralizálják a döntéshozatalt, hiszen minden munkavállaló a számára legkedvezőbb opciót választja, miközben minden állás betöltésre kerül. Sőt, ezzel egy piaci egyensúlyi helyzet alakul ki, amelyben minden munkáltató talál megfelelő munkavállalót, és minden munkavállaló a számára legjobb állást kapja.



11.4. ábra. X, Y, Z munkavállalók v_{ij} típusú preferenciaértékei az A, B, C állások tekintetében



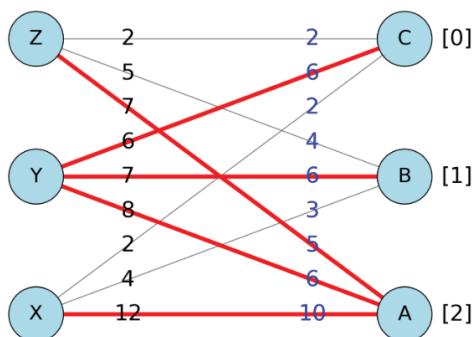
11.5. ábra. Amikor a bérkészletből $(p = [5, 2, 0])$ adódó $v-p$ típusú haszonértékek (vagy kifizetések, kékkel) nyomán mindenik munkavállaló más-más állást preferál leginkább.

A 11.6. ábrán látható szituációban konfliktus adódik, mivel az A állás mind X, mind Z számára a legvonzóbb választás.

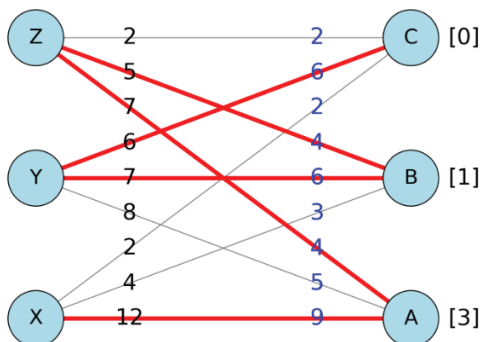
A 11.7. ábra azt a helyzetet mutatja, amikor a munkavállalók össze tudják hangolni a döntéseiket oly módon, hogy mindegyikük a számára legjobb állást kapja, és ezek különböznek egymástól. Ebben az esetben a decentralizáció nem teljes, mivel az egyensúly kialakulásához minimális koordinációra van szükség. Z számára A és B is a legjobb választás, de ha ő B-t választja, akkor A megmarad X-nek, akinek kizárólag ez a legjobb opció. Y számára B és C egyaránt legjobbak, ezért ha ő C-t választja, B elérhetővé válik Z számára.

Tekintettel a holtverseny lehetőségére, érdemes bevezetni a preferált állások gráfjának a fogalmát egy adott bérkészlet mellett: ebben minden munkavállalót összekötünk azzal vagy azokkal az állásokkal, amelyeket a megadott bérek mellett

a legkedvezőbbnek tart. (Ha egy munkavállalónak nincs egyetlen preferált állása sem, akkor nem indul ki belőle él.) A példánkban a 11.5–7. ábrák pirossal jelölt élei éppen ilyen preferált állás gráfokat ábrázolnak, különböző bérbeállítások mellett. E megközelítés alapján kijelenthetjük, hogy egy bérkészlet piaci egyensúlyt biztosít, ha az ehhez tartozó preferált állás gráfban létezik teljes párosítás.



11.6. ábra. Amikor a bérkészletből ($p = [2, 1, 0]$) adódó v - p típusú haszonértékek (kékkel) nyomán konfliktushelyzet alakul ki.



11.7. ábra. Amikor a bérkészletből ($p = [3, 1, 0]$) adódó v - p típusú haszonértékek (kékkel) nyomán összehangolhatók a döntések oly módon, hogy mindenik munkavállaló más-más legjobb álláshoz jusson.

11.1.4. A piaci egyensúlyi állapot tulajdonságai

Vegyük észre, hogy a 11.4. ábrán bemutatott munkavállalói értékelések (v értékek) mellett két olyan bérkiosztást (p értékeket) is találtunk, amelyek piaci egyensúlyt eredményeztek – nevezetesen a 11.5. és 11.7. ábrák szerinti bérkiosztások. Továbbá megfigyelhető, hogy mindkét esetben ugyanaz a megfeleltetés biztosította az egyensúlyt (X – A , Y – C , Z – B), mégpedig éppen az, amelynél az értékelések

összege maximális ($\sum v = 12 + 6 + 5 = 33$). Vajon ez pusztán a véletlen műve lenne? Nem, hiszen általánosan is érvényes az alábbi két állítás.

- *A piaci egyensúlyt biztosító bérek létezése*: bármilyen munkavállalói értékelés mellett létezik olyan bérstruktúra, amely piaci egyensúlyt biztosít.
- *A piaci egyensúlyt biztosító bérek optimálisak*: bármely egyensúlyt biztosító bérstruktúra esetén a kapott párosítás a lehető legnagyobb összesített értéket eredményezi.

A bizonyítások végett lásd a (Easley–Kleinberg 2010) könyv 10.3. és 10.4. alfejezeteit. Mint magyar vonatkozás megemlítjük, hogy az első tulajdonság bizonyítása Egervári 1916-os dolgozatáig nyúlik vissza (Lovász–Plummer 1986).

11.2. Hálózati modellek közvetítőkkal működő piacokra

Az előbbiekben bemutatott elemzésben a kereskedelem és az árak alakulása egy páros gráffal volt modellezve, amelyben „vevők”, „eladók” és az őket összekötő élek szerepeltek. Láthattuk, hogy léteznek piaci egyensúlyt biztosító árak, és hogy ezek az árak maximális összértéket eredményeznek a vevők és az eladók számára. Láthattuk, hogy az árak milyen hatékonyan irányíthatják a javak elosztását kívánatos módon. Amit azonban nem tisztázott a fenti elemzés, az az, hogy a valós piaci árak honnan származnak. Ki határozza meg az árakat a valódi piacokon, és miért éppen azokat az árakat választják, amelyeket látunk?

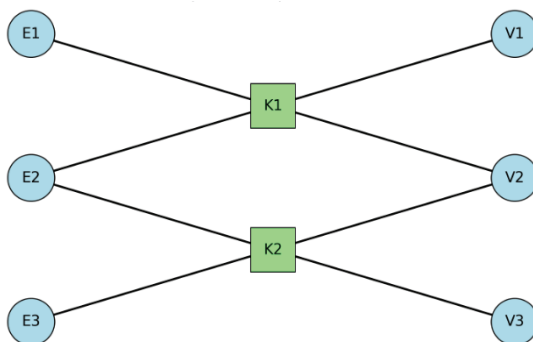
11.2.1. A kereskedelem hálózati modellje

Számos piacon az egyéni vevők és eladók nem közvetlenül egymással lépnek kapcsolatba, hanem közvetítők révén bonyolítják le az ügyleteket, akik meghatározzák az árakat. Ez igaz a fejlődő országok mezőgazdasági termékeinek kereskedelmétől kezdve egészen a pénzügyi piacokon zajló eszközkereskedelemig. Az ebben a szellemben bővített modellünk három alapvető elvre épül: 1. az egyéni vevők és eladók gyakran közvetítőkön keresztül kereskednek, 2. nem minden vevő és eladó fér hozzá ugyanazokhoz a közvetítőkhöz, és 3. nem mindenki ugyanazon az áron kereskedik. Ehelyett a vevők és eladók által elérhető árakat részben az határozza meg, hogy hálózati pozíciójuk milyen alternatívákat biztosít számukra.

Mielőtt részletesen meghatároznánk a modellt, nézzünk meg egy konkrét kereskedelmi környezetet: a technológiai eszközök forgalmazását egy globális ellátási láncban. Sok esetben a gyártók (eladók) és a végfelhasználók (vevők) között több közvetítő is szerepet játszik, például nagykereskedők, disztribútorok és kiskereskedők, akik a gyártóktól vásárolják meg az eszközöket, majd továbbértékesítik azokat a vállalatoknak vagy fogyasztóknak. Mivel az ellátási láncok

komplexek és földrajzilag szétszórta, egy adott gyártó csak bizonyos disztribútorokon (kereskedőkön) keresztül tudja értékesíteni a termékeit. Hasonlóképpen, a végfelhasználók is csak korlátozott számú értékesítési csatornán keresztül juthatnak hozzá a termékekhez.

A globális technológiai piacok számos, részben átfedő értékesítési hálózattal állnak, amelyek párhuzamosan működnek a közvetlen értékesítési modellek mellett. Ezt a kereskedelmi rendszert egy gráf segítségével modellezhetjük, amely ábrázolja a gyártók, forgalmazók és vásárlók számára elérhető kereskedelmi lehetőségeket. A 11.8. ábra egy egyszerű példát mutat be egy ilyen kereskedelmi hálózatra. Az egyes gyártókat „E” (mint eladó), a vásárlókat „V” (mint vevő), a forgalmazókat pedig „K” (mint kereskedő) jelöli, és élek kapcsolják össze azokat az entitásokat, amelyek kereskedhetnek egymással. Az élek tehát azokat a kereskedelmi lehetőségeket jelzik, amelyek a felek számára elérhetők. Mivel feltételezzük, hogy a kereskedők közvetítőként működnek az eladók és vevők közötti tranzakciókban, minden él egy vevőt vagy eladót kapcsol össze egy kereskedővel.



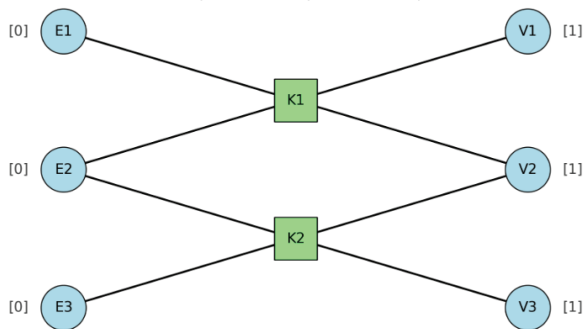
11.8. ábra. Egyszerűsített kereskedelmi hálózat három eladóval, három vevővel és két kereskedő entitással

Vegyük észre, hogy V1 és V3 vásárlók csak egy-egy meghatározott kereskedőn vagy disztribútoron keresztül férnek hozzá a technológiai eszközökhöz, míg V2 – például mert nagyvállalat – több forgalmazóval is kapcsolatban áll, esetleg közvetlen szerződésekkel rendelkezik több beszállítóval is. Elképzelhető, hogy a szélesebb beszerzési lehetőség jobb árakat és rugalmasabb ellátást biztosítanak ennek a vállalatnak, és hasonló módon előnyösebb feltételeket érhet el egy gyártó (például E2), amely több forgalmazóval, kereskedővel is együttműködik. A hálózati modellünk elemzése pontosan ezt az eredményt mutatja: a piacon kialakuló árakat és elérhetőséget jelentősen befolyásolják a szereplők hálózati pozíciói és kereskedelmi lehetőségeik.

11.2.2. Hálózati struktúra

Bár fókuszunkban egy jelentősen leegyszerűsített modell áll, mégis elég általános ahhoz, hogy magában foglalja a kereskedelem és az árképzés lényeges jellemzőit. Az egyszerűsítés többek között abban tükröződik, hogy nem foglalkozunk többféle árucikkkel vagy eltérő mennyiségekkel. Ehelyett azt feltételezzük, hogy egyetlen típusú árucikk létezik, amely oszthatatlan egységekben kapható.

Minden eladó (i) kezdetben egy egységnyi árut birtokol, amelyet v_i értéken becsül. Hajlandó eladni az árut bármely olyan áron, amely legalább v_i . Minden vevő (j) az áru egy példányát v_j értéken becsüli, és megpróbálja megszerezni, ha nem kell többet fizetnie érte, mint v_j . Egyetlen egyén sem akar egy példánynál többet az adott áruból, tehát az esetleges további példányok értéke számára nulla. Feltételezzük, hogy minden vevő, eladó és kereskedő ismeri ezeket az értékeket. Ennek eredményeként a modell leginkább olyan egyének (vagy entitások) közötti interakciót ír le, akiknek van kereskedelmi múltjuk egymással, és így ismerik egymás fizetési hajlandóságát. A 11.9. ábrán az eladókat és vevőket ábrázoló pontok mellett feltüntettük az áru egy példányára adott értékelésüket is, azaz a megfelelő v_i és v_j értékeket. Példánk egyszerűsége abban is megnyilvánul, hogy az eladók legalább 0 euróért adják el áruikat, és a vevők legfeljebb 1 eurót fizetnek egy egységnyi áruért.



11.9. ábra. A 11.8. ábrán látható egyszerűsített kereskedelmi hálózat, kiegészítve az egyes eladók és vevők által az áru egy példányára adott értékelésekkel (v_i és v_j értékek, szögletes zárójelekben)

Érdemes kiemelni, hogy a jelen modell több fontos ponton eltér a párosító piacok keretétől. Először is, egységes értékelést alkalmaz a vevői oldalon: feltételezzük, hogy minden vevő ugyanazt az értéket rendel az áru minden példányához. Ezzel szemben a párosító piacokon a vevők (pl. gyakornokok) eltérő értékeket társíthattak a különböző eladóktól (vállalatoktól) származó árukhoz (állásokhoz). Természetesen ez a modell is kiterjeszthető arra az esetre, amikor a vevői értékelések árucikkenként különböznek, de ez csak bonyolultabbá tenné az elemzést,

miközben az alapvető szerkezet és a következtetések lényegében változatlanok maradnának.

Másodszor, a hálózat itt rögzített, és külső tényezők – például földrajzi elhelyezkedés (mezőgazdasági piacok esetén) vagy pénzügyi jogosultság – által meghatározott. A párosító piacok modellje szintén rögzített gráfokra épült, de ott az elemzés középpontjában a preferált állások gráfja állt, amelyet nem külső tényezők, hanem a munkavállalók (vevők) preferenciái és az árak alakítottak ki.

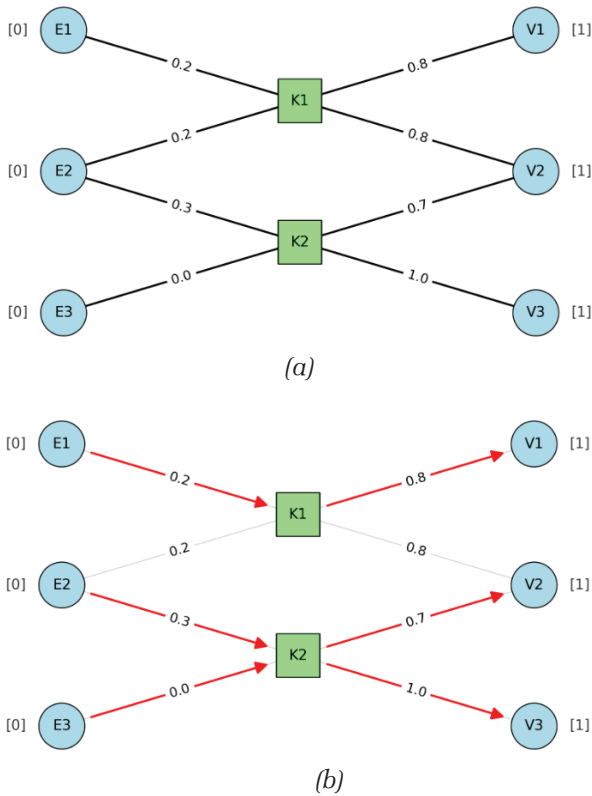
11.2.3. Árak és az áruk áramlása

Az áruk eladóktól vevőkhöz történő áramlását egy olyan folyamat, játék határozza meg, amelyben a kereskedők először árakat állapítanak meg, majd az eladók és a vevők ezekre az árakra reagálnak. Konkrétan, minden egyes kereskedő (k) ajánlati árat tesz minden eladó (i) számára, akivel kapcsolatban áll. Ezt az ajánlati árat b_i^k -vel jelöljük, és azt fejezi ki, hogy ez az i és k közötti tranzakció ára. Az ajánlati ár azt jelenti tehát, hogy k hajlandó b_i^k értéken megvásárolni i áruját.

Hasonlóképpen, minden kereskedő (k) eladási árat határoz meg minden vevő (j) számára, akivel kapcsolatban áll. Ezt az eladási árat a_j^k -vel jelöljük, és azt jelenti, hogy k az áru egy példányát a_j^k áron hajlandó eladni j -nek. A 11.10(a). ábra egy példát mutat be a 11.9. ábra gráfjára alkalmazott ajánlati és eladási árakkal.

Miután a kereskedők bejelentik áraikat, minden eladó és vevő legfeljebb egy kereskedőt választ, akivel üzletet köt. Majd minden eladó vagy eladja az áruját az általa választott kereskedőnek, vagy megtartja, ha úgy dönt, hogy nem adja el. Illetve minden vevő vagy megvásárol egy árut az általa választott kereskedőtől, vagy nem vesz semmit, ha úgy dönt, hogy egyik ajánlatot sem fogadja el. Ez határozza meg az áruk áramlását az eladóktól a kereskedőkön keresztül a vevőig. A 11.10(b). ábra ezt az áramlást szemlélteti, ahol a nyilakkal ellátott élek jelzik az eladók és a vevők kereskedőválasztását.

Mivel minden eladó csak egyetlen árut birtokol, és minden vevő legfeljebb egy árut akar vásárolni, az egyes éleken legfeljebb egy egység áru mozoghat. Ugyanakkor egyetlen kereskedő-csomóponton keresztül korlátlan mennyiségű áru haladhat át. Fontos azonban megjegyezni, hogy egy kereskedő csak annyi árut tud eladni a vevőknek, amennyit az eladóktól megvásárolt. A modellünkben jelentős büntetést rovunk ki azokra a kereskedőkre, akik nem tudják teljesíteni az eladási ajánlataikat, mert nincs elegendő árujuk. Ezért a kereskedőknek erős ösztönzőik vannak arra, hogy olyan ajánlati és eladási árakat állítsanak be, amelyek nem vezetnek több vevő, mint eladó elfogadásához. Ugyanígy nem előnyös egy kereskedő számára az sem, ha az eladói többen vannak, mint a vevői, mert így felesleges készlete marad, amelyet nem tud értékesíteni. A modellünkben látni fogjuk, hogy az egyensúlyi állapotban egyik probléma sem fog felmerülni: a kereskedők olyan ajánlati és eladási árakat fognak választani, amelyek biztosítják, hogy az eladóktól átvett áruk száma pontosan megegyezzen a vevőknek eladott áruk számával.



11.10. ábra. (a) Modellünk kiegészítve kereskedői ajánlatokkal mind az eladók (E-K típusú élek címkéi; $b_i^k \geq v_i$ értékek), mind a vevők felé (K-V típusú élek címkéi; $a_j^k \leq v_j$ értékek). (b) Megvalósult áruáramlás az irányított piros nyilak mentén

Végül érdemes megfigyelni egy fontos jelenséget az áruk áramlásával kapcsolatban. Az $E3$ eladó elfogadja az ajánlati árat, noha az pontosan megegyezik az áru számára becsült értékével. Hasonlóképpen, a $V3$ vevő is elfogadja az eladási árat, bár az szintén pontosan megfelel az általa becsült értéknek. Valójában $E3$ és $V3$ közömbösek az ajánlat elfogadása vagy elutasítása között. Modellünkben azt feltételezzük, hogy ha egy eladó vagy vevő közömbös az ajánlat elfogadásával kapcsolatban, akkor a modellező választhatja ki, melyik kimenetelt tekintjük megvalósulónak. Az ilyen közömbösség kezelése fontos kérdés a legtöbb piaci modellben, mivel az üzletek gyakran éppen egy szereplő hajlandóságának határán jönnek létre. Ez hasonló a korábban tárgyalt piaci egyensúlyi árképzés során felmerülő döntetlen helyzetekhez.

11.2.4. Kifizetések

Emlékezzünk rá, hogy egy játék meghatározásához a stratégiák és a kifizetések (nyereség, haszon, angolul payoff) leírása szükséges. A stratégiákat már ismertettük.

- A kereskedő stratégiája az, hogy milyen ajánlati (b érték) és eladási (a érték) árakat kínál az eladóknak és vevőknek.
- Egy eladó vagy vevő stratégiája az, hogy kiválaszt egy kereskedőt, akivel üzletet köt, vagy úgy dönt, hogy nem vesz részt a tranzakcióban.

A kifizetések ezekből az alapelvekből természetesen következnek.

- A kereskedő kifizetése az összes tranzakciójából származó nyereség: ez az elfogadott eladási ajánlatainak (a értékek) összege mínusz az elfogadott vételi ajánlatainak (b értékek) összege. (Ahogy korábban említettük, ha egy kereskedő több eladási ajánlatot fogad el, mint amennyi vételi ajánlatot, akkor jelentős büntetést von maga után. Ez azonban elsősorban arra szolgál, hogy az egyensúlyi megoldásokban a kereskedők elkerüljék ezt a helyzetet.)
- Egy eladó (i) kifizetése attól függ, hogy melyik kereskedőt (k) választja.
 - Ha k -t választja, a kifizetése b_i^k (azaz annyi pénzt kap, amennyiért eladta az árut).
 - Ha nem köt üzletet, a kifizetése v_i , azaz megtartja az árut, amelyet ennyire értékel.
 - (Ebben a modellben minden eladó értékelése $v_i = 0$, tehát ha nem ad el, nem kap semmit.)
- Egy vevő (j) kifizetése attól függ, hogy melyik kereskedőt (k) választja.
 - Ha k -t választja, a kifizetése $v_j - a_j^k$, azaz megkapja az árut, de fizetnie kell érte.
 - Ha nem köt üzletet, a kifizetése 0.

A 11.10(b). ábra alapján az egyes szereplők kifizetései a következők: az első kereskedőé 0,6 ($0,8 - 0,2$), a másodiké pedig 1,4 ($0,7 + 1 - 0,3 - 0$); a három eladóé rendre 0,2, 0,3, illetve 0; míg a három vevőé 0,2 ($1 - 0,8$), 0,3 ($1 - 0,7$) és 0 ($1 - 1$).

11.2.5. A játék szerkezete

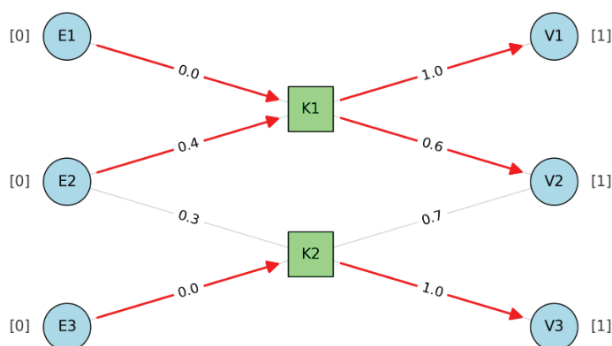
Ez a játék egy fontos szempontból eltér az eddig vizsgáltaktól: míg a korábbi játékokban minden szereplő egyidejűleg hozta meg döntését, itt két szakaszban történnek a lépések. Az első szakaszban minden kereskedő egyszerre megadja ajánlati és eladási árait, majd a második szakaszban az eladók és vevők ezután egyidejűleg kiválasztják a számukra legjobb ajánlatot kínáló kereskedőt (vagy nem kötnek üzletet).

E kétlépcsős szerkezet nem túl bonyolult, mivel a második szakaszban az eladók és a vevők mindig az őket legjobban kiszolgáló kereskedőt választják. Így őket „automatizált” döntéshozóknak is tekinthetjük, akik előre meghatározott

szabályok alapján választanak. Másfelől viszont, amikor a játék egyensúlyi állapotait vizsgáljuk, figyelembe kell vennünk ezt a kétlépcsős szerkezetet.

Vizsgáljuk meg a 11.10(b). ábra szerinti két kereskedő stratégiáját. A K1 kereskedő több rossz döntést is hoz. Először is, az E2 eladónak és V2 vevőnek tett ajánlatai miatt elveszíti ezt az üzletet a K2-vel szemben. Ha például megemelné az ajánlatát E2 számára 0,4-re, és csökkentené az eladási árát V2 számára 0,6-ra, akkor elcsábíthatná őket K2-től, és 0,2 egységnyi profitot szerezhethetne ebből a tranzakcióból. Másodszor, nincs oka arra, hogy ne csökkentse a vételi árát E1-nek, illetve ne növelje az eladási árát V1-nek, hiszen ezek a szereplők nem rendelkeznek alternatív kereskedővel: vagy K1-et választják, vagy kimaradnak a piacról. Azaz K1 nagyobb profitot érhetne el, ha olcsóbban vásárolna E1-től, és drágábban adna el V1-nek.

A 11.11. ábra azokat az árkorrekciókat szemlélteti, amelyeket a fenti logika alapján K1 elvégezhetett volna. Ennek eredményeként a profitja 1,2-re nőtt ($1 + 0,6 - 0 - 0,4$). Megjegyzendő, hogy E1 és V1 most közömbösek a tranzakcióval kapcsolatban – számukra mindegy, hogy eladják, illetve megveszik-e az árut vagy sem. Ahogy korábban említettük, ha egy piaci szereplő közömbös az üzletkötés iránt, akkor a modellalkotók (azaz mi) dönthetünk arról, hogy végül létrejön-e a tranzakció vagy sem.



11.11. ábra. Példa arra, hogyan javíthat a K1 kereskedő a kifizetésén a 11.10(b) ábrában bemutatott helyzethez képest: elcsábítja E2-t és V2-t K2-től, valamint maximalizálja a profitját az E1–K1–V1 tranzakció révén.

11.2.6. Egyensúlyi megfontolások: monopólium és tökéletes verseny

A fentebb tárgyalt megfigyelések vezetnek el a játék egyensúlyi fogalmához, amely a Nash-egyensúly általánosítása. Ahogy az előző fejezetben bemutattuk, egy Nash-egyensúly azt jelenti, hogy minden játékos a legjobb választ adja a többiek

döntéseire. Azonban a jelenlegi játékunk két szakaszban zajlik, ezért a definíciókat ehhez kell igazítanunk.

Második szakasz (vevők és eladók döntései): Itt egy klasszikus játékról van szó, ahol minden eladó és vevő azt a kereskedőt választja, aki a számára legkedvezőbb ajánlatot teszi. Ők tehát a legjobb választ adják a kereskedők árazási stratégiájára.

Első szakasz (kereskedők árazási döntései): A kereskedők úgy állapítják meg az ajánlati (b érték) és eladási (a érték) áraikat, hogy azok optimálisak legyenek a vevők és eladók várható reakciói szempontjából. Egy kereskedő figyelembe veszi más kereskedők stratégiáit is, amikor árazást alakít ki.

Mindez azt jelenti, hogy minden szereplő a lehető legjobb döntést hozza, tekintettel mások stratégiáira – vagyis a játék egyensúlyi állapotában vagyunk.

A vizsgált esetben a kétszakaszos szerkezet viszonylag könnyen kezelhető, mivel az eladók és a vevők viselkedése egyszerű: minden szereplő automatikusan a számára legkedvezőbb ajánlatot választja, így döntéseik előre meghatározottak a kereskedők számára. Ezért az egyensúly vizsgálatakor elsősorban a kereskedők stratégiájára összpontosítunk, hiszen az eladók és vevők döntései már adottak az ajánlatok bejelentése után. Ezzel a megfigyeléssel a rendszert nagy vonalakban redukáltuk egy egyidejű lépéses játékká.

A rendszer lehetséges egyensúlyi helyzeteinek elemzése előtt bontsuk egyszerűbb építőelemekre a hálózatot. Vannak olyan vevők és eladók, akik kizárólag egyetlen kereskedővel állnak kapcsolatban, vagyis monopóliumnak vannak kitéve; és vannak olyanok is, akik több kereskedő közül választhatnak, így tökéletes versenyben vesznek részt. Ennek megfelelően – ahogy látni fogjuk – a hálózat szerkezete és az alternatívákhoz való hozzáférés jelentős hatással van az egyes piaci szereplők alkupozíciójára és végső kifizetéseire.

Ami a monopóliumhelyzetet illeti, akkor beszélünk egyensúlyi állapotról, ha a kereskedő minimális értékű ajánlatot tesz az eladónak, majd maximális áron adja tovább az árut a vevőnek. Az eladó és a vevő elfogadják ezeket az árakat, így az áru az eladótól a kereskedőn keresztül eljut a vevőhöz. Példánkban $K1$ nulla áron szerzi be az árut $E1$ -től, és 1 egységért adja el $V1$ -nek; hasonló tranzakciót hajt végre $K2$ is $E3$ és $V3$ között.

Fontos azonban újra megjegyezni, hogy ebben az esetben az eladó és a vevő is közömbös az üzlet lebonyolításával kapcsolatban: egyikük sem nyer vagy veszít a tranzakción. Mivel nincs alternatív lehetőségük, a modellalkotó (azaz mi) dönthet arról, hogy megtörténik-e az üzletkötés. Itt azt feltételezzük, hogy a tranzakció létrejön.

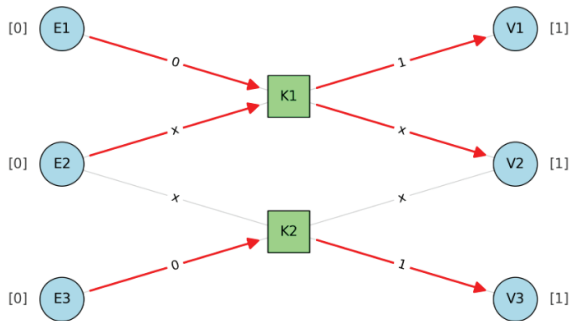
Hogy megértsük, miért ez az egyetlen egyensúlyi helyzet, gondoljunk bele, mi történne más árakkal. Ha a kereskedő például a 0 és 1 közötti másik vételi vagy eladási árat határozná meg, akkor mindig lenne lehetősége egy kissé alacsonyabb vételi ár vagy magasabb eladási ár alkalmazására, amivel növelhetné a nyereségét. Éppen ezért az egyetlen stabil állapot az, amikor a kereskedő maximálisan kihasználja monopóliumhelyzetét.

Lássuk most, mi tekinthető egyensúlyi állapotnak a tökéletes versenyhelyzet esetén! Ez a szituáció példánkban akkor áll elő, amikor $K1$ és $K2$ versenyeznek az $E2$ és $V2$ közötti tranzakció lebonyolításáért.

Először azonban gondoljuk végig, mi történik, ha a rendszer nincs egyensúlyban. Tegyük fel, hogy a tranzakciót $K1$ hajtja végre, és pozitív nyereséget realizál. Ez azt jelenti, hogy $E2$ -nek egy b vételi árat, $V2$ -nek pedig egy a eladási árat ajánlott, ahol $a > b$. Ezáltal nyeresége $a - b$. Közben $K2$ nem kereskedik, így kifizetése 0. Ez azonban azt is jelenti, hogy $K2$ jelenlegi stratégiája nem optimális válasz $K1$ lépésére. Hiszen $K2$ megtehetné, hogy egy kissé magasabb ajánlatot ad az eladónak ($b + 0,01$), és alacsonyabbat a vevőnek ($a - 0,01$), így átvehetné a tranzakciót $K1$ -től, és maga realizálna nyereséget.

Ezzel az érveléssel gyakorlatilag indirekt módon megadtuk az egyensúly definícióját is: egy tranzakció csak akkor lehet egyensúlyban, ha a kereskedő, aki lebonyolítja, nulla profitot realizál. Ez azt jelenti, hogy ugyanazt az árat (x) ajánlja az eladónak és a vevőnek is – tehát nem keletkezik nyeresége. Mivel ebben az egyensúlyi helyzetben a kereskedő közömbös azzal kapcsolatban, hogy végrehajtja-e az üzletet vagy sem – hiszen nem profitál belőle –, a tranzakció létrejöttéről a modellalkotó dönt. Itt újra azt feltételezzük, hogy az ügylet megvalósul. Természetesen, mivel a versenytárs kereskedő sem akar üzletet veszíteni, kénytelen ő is ugyanazt az x árat alkalmazni a vételi és az eladási oldalon egyaránt.

Fontos megjegyezni, hogy a modell nem határozza meg egyértelműen az x ár pontos értékét, csak azt, hogy 0 és 1 között lehet. Az, hogy az x értékét hol választjuk meg ezen az intervallumon belül, hatással van arra, hogy az eladó vagy a vevő részesül nagyobb kifizetésben. A végső egyensúly tehát nemcsak a kereskedelmi modellből következik, hanem tükrözi az eladó és a vevő relatív alkueréjét is. A modell megmutatja, milyen egyensúlyi árak és kifizetések lehetségesek, de azt, hogy ezek közül melyik valósul meg, külső tényezők – például alkuerő vagy intézményi szabályok – határozhatják meg.



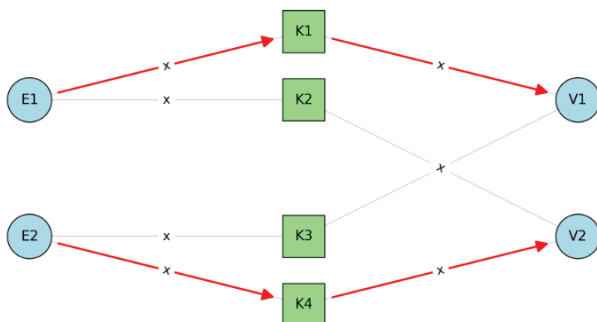
11.12. ábra. A vizsgált rendszer egyensúlyi állapota

Ha mindezt összegezzük – a monopóliumhelyzeteket az $E1-V1$ és $E3-V3$ tranzakciók esetén, valamint a tökéletes versenyt $K1$ és $K2$ között az $E2-V2$ kapcsolatban –, akkor a rendszer egyensúlyi állapotát a 11.12. ábra szemlélteti.

Ezek az érvek más, összetettebb hálózatok elemzésénél is hasznosak. Nevezetesen: ha egy eladó vagy vevő kizárólag egyetlen kereskedőhöz kapcsolódik, akkor bármely egyensúlyi állapotban 0 kifizetést kap, mivel a kereskedő a vételi és eladási árakat a számára legkedvezőbb – azaz szélsőséges – értékekre állítja be. Továbbá, ha két kereskedő ugyanahhoz az eladóhoz és vevőhöz kapcsolódik, egyikük sem érhet el pozitív profitot az áru továbbításából. Hiszen ha egyikük mégis nyereséget termelne, a másik alákínálással könnyedén elvehetné tőle az üzletet.

11.2.7. További komplex hálózati hatások

Bár a fentiek elegendőek sok egyszerű hálózat elemzéséhez, a hálózat szerkezete további, összetettebb hatásokat is létrehozhat, amelyeket nem lehet pusztán ezekkel az alapelvekkel megmagyarázni. Előző példáinkban, ha egy kereskedő nem termelt profitot egy tranzakcióból, az mindig egy másik kereskedő közvetlen versenyének volt köszönhető – vagyis annak, hogy egy másik kereskedő pontosan ugyanahhoz az eladóhoz és vevőhöz kapcsolódott, és képes lett volna ugyanazt az ügyletet lebonyolítani. Azonban előfordulhat, hogy a kereskedők nem közvetlen verseny miatt realizálnak nulla profitot, hanem a hálózat globális szerkezete miatt. A 11.13. ábra ezt a jelenséget szemlélteti, amely az úgynevezett rejtett tökéletes verseny (implicit perfect competition) példája. Ebben a hálózatban nincs olyan kereskedelmi útvonal, amelyen két kereskedő közvetlen versenyben állna egymással. Ennek ellenére minden egyensúlyi állapotban – mivel a vételi és eladási árak egy közös x értéket vesznek fel, ahol $0 \leq x \leq 1$ – az áruk az eladóktól a vevők felé áramlanak, és minden kereskedő ismét nulla profitot „zsebel be”.



11.13. ábra. Rejtett tökéletes verseny

Könnyen belátható, hogy ez miért tekinthető egyensúlynak: minden kereskedő a többiek stratégiájának legjobb választát alkalmazza, vagyis nem tud olyan árat

ajánlani, amellyel profitot érne el anélkül, hogy máshol veszteséget szenvedne. Ha pedig valamelyik kereskedő eltérne az x értéktől – például alacsonyabb vételi vagy magasabb eladási árat alkalmazna –, ajánlata nem lenne versenyképes, így a piac elutasítaná, és veszteséggel zárna.

Mindez azt mutatja, hogy a tökéletes verseny nemcsak közvetlenül, hanem rejtett módon is kialakulhat a hálózat szerkezetéből adódóan, és így a kereskedők profitját akkor is nullára szoríthatja, ha nincs közvetlen versenytársuk az adott útvonalon.

11.3. Összegzés

Ebben a fejezetben két, egymással rokon, mégis eltérő piacmodellt vizsgáltunk: a közvetlen párosító piacokat és a közvetítőkön keresztüli kereskedelmet. A párosító piacokban a hangsúly az egyéni preferenciákon, valamint a párosítás hatékonyságán volt, míg a közvetítői modellek az árak és profitok szerepét, valamint a hálózati szerkezet hatásait emelték ki. Láttuk, hogy bár a két modell különböző elvekre épül – az egyik decentralizált preferenciákra, a másik versengő árképzésre –, közös bennük, hogy a piac szerkezetéből és az információk áramlásából fakadó korlátokat és lehetőségeket vizsgálják. Mindkét megközelítés fontos eszközt kínál a modern gazdasági rendszerek és algoritmikus mechanizmusok megértéséhez, különösen olyan környezetekben, ahol a hatékonyság, az ösztönzők és az igazságosság egyaránt kulcsszerepet játszanak.

12. Információs hálózatok és a világháló

Az információs hálózatok az emberi gondolkodás és a tudásszervezés alapvető módjait tükrözik. Az idők során az emberek különböző módszereket fejlesztettek ki az információ rendszerezésére és visszakeresésére, amelyek közül néhányat tekinthetünk a modern világháló (World Wide Web, WWW, Web, web) elődeinek is. A tudományos művek közötti idézési hálózatok, a könyvekben alkalmazott keresztutalások, valamint az asszociatív memória fogalma mind hozzájárultak a mai digitális információs rendszerek kialakulásához.

12.1. Az információs hálózatok története

12.1.1. A világháló szerepe az információs társadalomban

Ennek a fejezetnek a középpontjában a világháló áll, hiszen a web joggal tekinthető a modern információs társadalom meghatározó elemének. Több, mint egy egyszerű információs hálózat: egy globális ökoszisztéma, amely az emberi tudás, kommunikáció, gazdaság és innováció alapját képezi. Forradalmasította az információhoz való hozzáférést, átalakította a társadalmi interakciókat, új üzleti modelleket tett lehetővé, és folyamatosan fejlődő platformként szolgál a technológiai innováció számára.

A világháló dinamikusan növekvő hálózat, amely az elmúlt három évtizedben radikális változásokon ment keresztül, és várhatóan a következő évtizedekben is új technológiák és alkalmazási lehetőségek alakítják majd tovább. Ahogy a múltban a nyomtatott könyvek és tudományos publikációk forradalmasították az ismeretek megosztását, úgy a világháló ma egy minden eddiginél rugalmasabb és elérhetőbb információs rendszert kínál.

Alapvetően a világháló egy összekapcsolt dokumentumok és erőforrások rendszere, amely a hipertext és hiperhivatkozások segítségével biztosítja a nem lineáris információelérést. A hipertext fogalmát az 1960-as és 1970-es években Ted Nelson dolgozta ki, aki egy olyan rendszert képzelt el, amely lehetővé teszi a dokumentumok közötti dinamikus összeköttetést és az asszociatív navigációt (Nelson 1981; Nielsen 1990). Bár a hipertext és a hiperhivatkozások fogalmai szorosan összefüggnek, lényeges különbség van közöttük. A hipertext olyan szövegformátum, amely lehetővé teszi, hogy a felhasználó egy dokumentumból egy másikba ugorjon beágyazott linkek segítségével, megkerülve a hagyományos, lineáris olvasási struktúrát. A hiperhivatkozás (hyperlink) pedig az a konkrét eszköz, amely ezt a navigációt lehetővé teszi, összekapcsolva különböző dokumentumokat vagy azok egyes részeit. A hipertext-technológia alapötlete tehát jóval a világháló

megjelenése előtt megszületett, de a World Wide Web széles körben elérhetővé és alkalmazottá teszi ezt a megközelítést.

12.1.2. A világháló és az internet

Bár a közbeszédben gyakran az internet szinonimájaként emlegetik, a világháló valójában csupán annak egyik rétege, egy meghatározott módja az információk elérésének és rendszerezésének. A web nem önálló entitásként létezik, hanem az internet infrastruktúrájára épül, amely biztosítja az eszközök összekapcsolását és az adatok továbbítását. Az internet maga egy globális hálózat, amely különféle kommunikációs protokollokra támaszkodik, míg a világháló ennek egyik legmeghatározóbb rétege, amely hipertext és hiperhivatkozások révén strukturált hozzáférést biztosít az információhoz. Így a web az internet egyik legfontosabb alkalmazása, amely átalakította az információmegosztás és a digitális kommunikáció módját.

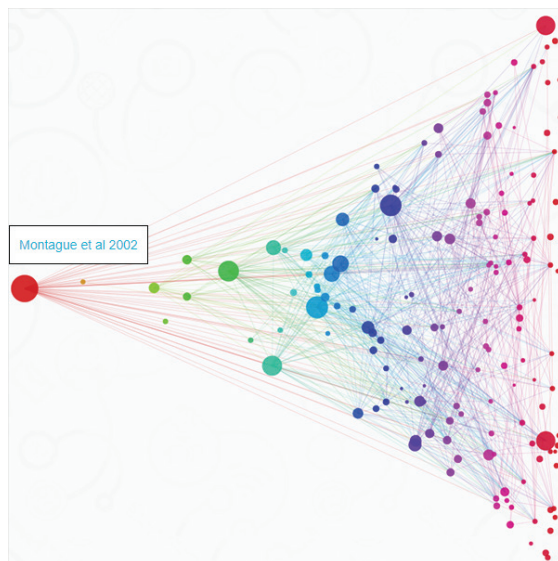
Továbbá, a világháló nem csupán egy modern technológiai innováció, hanem egy olyan struktúra, amely a tudás rendszerezésének és terjesztésének évezredek fejlődésére épül. Ennek fényében tekintünk vissza a következő részben az információs hálózatok történeti előzményeire.

12.1.3. Idézési rendszerek: visszafelé mutató hálózatok

Az információk hálózatba szervezése nem új keletű jelenség. A tudományos publikációkban alkalmazott idézési rendszerek már évszázadok óta segítik a tudás rendszerezését és nyomon követését. Az egyik legismertebb példa erre az idézési hálózatok elemzése, amely feltárja a tudás fejlődését és a különböző tudásterületek közötti kapcsolatokat.

A tudományos munkák idézési rendszere alapvetően visszafelé mutató hálózatot alkot: amikor egy új publikáció hivatkozik korábbi munkákra, egy hálózati kapcsolat jön létre az új cikk és a múltbéli kutatások között (lásd például a 12.1. ábrát). Ez azt jelenti, hogy az idézési hálózatok időben visszafelé épülnek. Egy kutató egy adott tudományos kérdéssel kapcsolatban nem előretekint az ismeretlen jövő felé, hanem visszanez azokra a meglévő forrásokra, amelyek a kérdés szempontjából relevánsak.

Ez az idézési struktúra lehetővé teszi, hogy a tudás fejlődése követhető legyen – az új kutatások mindig egy korábbi tudásbázison alapulnak, így az idézési hálózat megmutatja, hogy egy adott felfedezés vagy elmélet milyen előzményekből építkezik. Ahhoz is hozzájárul, hogy a tudományos hatás mérhető legyen – egy publikáció fontosságát gyakran az határozza meg, hogy hány másik munka hivatkozik rá. A nagy idézettségű munkák általában alapvető jelentőségűek az adott tudományterületen. További hozadéka, hogy az interdiszciplináris kapcsolatok feltárulása – ha egy kutatási terület gyakran idézi egy másik terület eredményeit, az erős kapcsolatot jelez a két tudományág között.



12.1. ábra. Szemléltető ábra arra, hogyan utalnak vissza a későbbi publikációk korábbi tanulmányokra egy adott témakörön belül (például a hyperscanning, az agyututásban alkalmazott technológia esetében). A témakörön belül a Montague et al. (2002) által írt dolgozat klasszikusnak számít. (Stork 2025)

A tudományos idézési rendszerekkel szemben a világháló folyamatosan változó, előre és hátra is mutató hiperhivatkozásai egy sokkal rugalmasabb és decentralizáltabb információs tér kialakulását tették lehetővé. Míg az idézési hálózatok a múltbeli tudás feltérképezésében nélkülözhetetlenek, a világháló dinamikus szerkezete új lehetőségeket teremt az információ elérésében, megosztásában és összekapcsolásában.

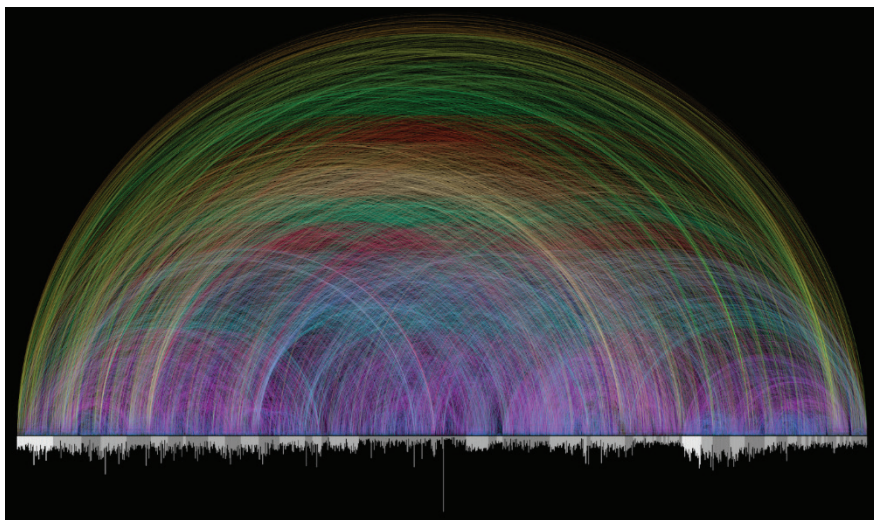
12.1.4. Egy ősi precedens információs hálózatra

A Bibliában szintén megtalálhatók az információs hálózatok korai formái. A Biblia mint információs hálózat két eltérő kapcsolódási formát tartalmaz: idézéseket és keresztutalásokat. Bár mindkét rendszer segíti a szöveg értelmezését és mélyebb összefüggések feltárását, fontos különbség van közöttük – különösen abban, hogy az idézések időben visszafelé mutatnak, míg a keresztutalások egy rugalmasabb, tematikus kapcsolatokat teremtő hálózatot alkotnak.

Az idézések közvetlen visszautalások egy korábbi szövegre, amelyre egy későbbi szerző saját írásában hivatkozik: egy korábbi szöveg nem idézhet egy későbbi forrást, hanem csak a múltból meríthet. Példa lehet erre az, ahogy az Újszövetségi írók visszautalnak ószövetségi messiási próféciaikra. Továbbá a bibliai idézések fix

hálózatot alkotnak, amely egy zárt rendszerben (a Biblia könyvei alkotta versek között) szerveződik, hiszen a Biblia kánonja rögzített.

Ezzel szemben a keresztutalások egy későbbi szerkesztői munka eredményeként jöttek létre, amely összekapcsol tartalmilag rokon verseket annak érdekében, hogy egy adott téma több szakaszon keresztül követhető legyen. Ez a hálózat nemcsak visszafelé, hanem keresztirányban is összeköti a szövegeket, tematikus kapcsolatokat létrehozva (lásd például a 12.2. ábrát). Bár a Biblia szövege rögzített, maga a keresztutalási rendszer nem tekinthető fixnek, eltérő keresztutalási rendszerek létezhetnek különböző bibliai kiadásokban.



12.2. ábra. A King James Biblia keresztutalási hálójának ívdiagramja: az alsó sávdíagram a fejezeteket (1189) ábrázolja; a könyvek (66) világos- és sötétszürke színnel váltakoznak, míg az Ó- és Újszövetség első könyvei fehérrel vannak kiemelve; az egyes sávok hossza az adott fejezet versszámát jelzi (leghosszabb 176); a keresztutalásokat színes ívek ábrázolják (63779). (Harrison–Römhild 2007)

A Biblia keresztutalási rendszere, szemben a tudományos idézési hálózattal, nem csupán visszafelé mutató kapcsolatokból áll, hanem bármely irányban összekapcsolhatja a rokon tartalmakat, lehetővé téve egy adott téma mélyebb és tágabb kontextusban való vizsgálatát. Ugyanakkor ez a rendszer statikus, mivel a Biblia szövege rögzített, és a kapcsolatok előre meghatározottak. Ezzel szemben a világháló egy dinamikusan fejlődő információs hálózat, ahol az új tartalmak és linkek folyamatosan módosítják a struktúrát. Míg a Biblia keresztutalásai egy fix szövegkorpuszon belül irányítják az olvasó gondolkodását, a web lehetőséget ad arra, hogy az információs kapcsolatok szabadon, akár spontán módon alakuljanak ki, új és váratlan összefüggések feltárását ösztönözve.

12.1.5. Szemantikai hálózatok

A szemantikai hálózatok révén is a múltban gyökerezik a világháló. Egy szemantikai hálózat olyan információs struktúra, amelyben a fogalmak csomópontokként jelennek meg, és jelentésbeli vagy tapasztalati kapcsolatok révén összekapcsolódnak. Az emberi elme szintén asszociatív módon szervezi a tudást, így működése nagyon hasonlít a szemantikai hálózatokhoz.

Az emberi gondolkodás egyik alapvető jellemzője, hogy egy fogalom egy másikhoz vezethet. Ha valaki meghallja a „tenger” szót, az eszébe juttathatja a „homok”, „hajó” vagy „nyaralás” fogalmakat. Ezek az asszociációk egyedi élmények, kulturális háttér és tanulási tapasztalatok alapján alakulnak ki. Ugyanakkor a tudásunk hierarchikusan is szerveződik, ahol az általánosabb kategóriák specifikusabb alárendelt fogalmakat tartalmaznak. Például: élőlények → állatok → madarak → sas. Ha az „állat” szóra gondolunk, az elménk automatikusan aktiválhatja a madarak, emlősök vagy hüllők kategóriáit is.

A fogalmak közötti kapcsolatok különböző típusúak lehetnek. Léteznek okozati kapcsolatok (pl. „tűz” → „füst”), szinonimák („boldogság” ↔ „öröm”), ellentétpárok („hideg” ↔ „meleg”), funkcionális kapcsolatok („kulcs” → „ajtó”), és még sok más. Amikor egy adott fogalom aktiválódik az elménkben, az ahhoz kapcsolódó fogalmak is részlegesen aktiválódnak, így könnyebben idézzük fel őket. Ez magyarázza, hogy miért találunk gyorsan kapcsolatokat különböző gondolatok között. További szempont, hogy a szavak jelentése a szöveggörnyezettől függően eltérhet. Például ha valaki azt hallja, hogy „alma”, másra gondolhat egy gyümölcsstermesztő, mint egy informatikus – előbbi egy gyümölcsöt képzel el, míg utóbbi az Apple márkára asszociálhat.

Az elménk folyamatosan alkalmazkodik, és a környezeti információk hatására dinamikusan alakítja a szemantikai hálózatok aktivációját. Egy kutató esetében ez különösen jól megfigyelhető, hiszen egy adott témát vizsgálva nem elszigetelt adatokkal dolgozik, hanem egy összetett összefüggésrendszert épít fel. Amikor egy kutató elmélyül egy szakterület vizsgálatában, kezdetben bizonyos alapfogalmakra és elméletekre támaszkodik, de ahogy halad előre, egyre több kapcsolódást fedez fel más tudományos munkákkal. Egy új cikk olvasása során például eszébe juthat egy korábban tanulmányozott elmélet vagy egy másik kutató eredménye, amely látszólag független, de egy új szempontból megvilágítja az adott kérdést. Így az elméjében egy dinamikus szemantikai hálózat épül ki, amely összekapcsolja a különböző tudáselemeket.

Ez a hálózati gondolkodás tükröződik a tudományos publikációk szerkezetében is. Egy kutatási dolgozat nem csupán önálló állításokat fogalmaz meg, hanem idézetek és hivatkozások révén kapcsolódik a már létező tudáshoz. Az idézett irodalom bemutatása és elemzése egyfajta térképként szolgál, amelyen keresztül a kutató elhelyezi saját munkáját az adott tudományterületen belül. Egy jól felépített tudományos értekezés így nemcsak egy adott kérdésre ad választ, hanem azt is

megmutatja, hogy az adott probléma hogyan illeszkedik egy tágabb diskurzusba. Az új felismerések és kapcsolatok révén pedig a tudományos közösség közösen formálja és bővíti ezt a szemantikai hálózatot, amely folyamatosan gazdagodik az új kutatásokkal és azok egymásra gyakorolt hatásaival.

Ezen túlmenően a tudományos munkák egyik kulcsfontosságú eleme a jövőbeni kutatási irányok felvázolása, amely nemcsak az adott tanulmány továbbfejlesztési lehetőségeit jelzi, hanem egyben azt is előrevetíti, hogy a hálózat hogyan bővíülhet a jövőben. Az itt megfogalmazott nyitott kérdések, hipotézisek és kutatási tervek a tudományos szemantikai hálózat lehetséges fejlődési irányait sugallják, amelyek új kapcsolatokat hozhatnak létre meglévő és még fel nem tárt tudáselemek között. Így a tudományos diskurzus nemcsak a múlt és a jelen összekapcsolásáról szól, hanem a jövőbe mutató dinamikus hálózatépítésről is, amely folyamatosan alakítja és formálja az emberi tudás szerkezetét.

Mindezek fényében a világháló mint hatalmas információs hálózat, amely hiperhivatkozásokkal köti össze az oldalakat, sok szempontból hasonlít az emberi elme szemantikai hálózatához, ahol a fogalmak asszociációk révén kapcsolódnak egymáshoz. A világhálón belüli linkek tematikusan köthetnek össze oldalakat – akár egy adott témán belül, akár keresztirányú asszociációkat hoznak létre.

A szemantikus web (szemantikai világháló) célja éppen az, hogy struktúráltabbá tegye ezt a hálózatot: itt a linkek nemcsak összeköttetéseket jelentenek, hanem egyértelmű jelentéssel is bírnak. Ez lehetővé teszi, hogy a keresőmotorok és más információs rendszerek hatékonyabban dolgozzanak az adatokkal, és az internetes tartalmakat nemcsak egymással összekapcsolt dokumentumok halmozaként, hanem egy komplex jelentéshálóként kezeljék.

12.1.6. Vannevar Bush és a Memex: a modern információs hálózatok előfutára

A modern információs hálózatok kialakulásában meghatározó szerepet játszott Vannevar Bush, aki az információk rendszerezésének és elérésének új módját képzelte el. Az általa javasolt Memex terve olyan elképzelést vázolt fel, amely jóval megelőzte a hipertext, a digitális adatbázisok és végül a World Wide Web létrejöttét.

Vannevar Bush 1945-ben írta meg *As We May Think* (Ahogyan gondolkodhatnánk) című esszéjét, amelyben felvetette egy hipotetikus eszköz, a Memex lehetőségét (12.3. ábra). Ez egy olyan mechanikus szerkezet lett volna, amely mikrofilmek és gyors hozzáférési technológiák segítségével lehetővé tette volna a felhasználók számára, hogy dokumentumokat tároljanak, rendszerezzenek, és azokat asszociatív módon összekapcsolják.

Bush elképzelése szerint a Memex egy asztalszerű eszköz lett volna, amelyben az információk hatalmas tárháza kap helyet. A felhasználó képes lett volna dokumentumokat keresni és elérni azáltal, hogy kapcsolatokat hoz létre közöttük. Az információk nem szigorúan hierarchikus vagy lineáris struktúrákban tárolódnak,

hanem asszociatív módon kapcsolhatók össze, az emberi gondolkodáshoz hasonlóan. Lehetőséget biztosított volna a felhasználók számára, hogy saját „ösvényeket” hozzanak létre, amelyek különböző dokumentumok között logikai kapcsolatokat teremtenek.



12.3. ábra. Vannevar Bush és az *As We May Think* címlapja a *The Atlantic* 1945. júliusi számában

Bush egyik legfontosabb meglátása az volt, hogy az emberi elme nem szekvenciálisan tárolja az információkat, hanem asszociációk révén kapcsolja össze őket. Ezt a gondolkodásmódot próbálta leképezni a Memex is. Rendkívüli az a sugallata, hogy mivel a tudományos felfedezések és a kreatív gondolkodás is asszociációs mechanizmusokon alapul, ezért egy hatékony információs rendszernek is így kellene működnie. Ezért a Memex nem csupán egy elképzelt szerkezet volt, hanem az információ kezelésének egy új filozófiája, amely a mai digitális világ egyik legfontosabb előfutárának tekinthető.

12.2. A világháló fejlődése: 1.0, 2.0, 3.0

A kezdet a CERN-hez, az Európai Nukleáris Kutatási Szervezethez köthető, ahol Tim Berners-Lee brit informatikus az 1980-as évek végén kidolgozta az első koncepciót egy összekapcsolt, hipertextalapú információs rendszerre (Berners-Lee et al. 1994; Berners-Lee 1999). 1989-ben Berners-Lee egy javaslatot nyújtott be, amelyben felvázolta egy olyan rendszer ötletét, amely lehetővé teszi a kutatók számára, hogy dokumentumokat osszanak meg és egymás munkáira hivatkozzanak egy hálózatba kötött környezetben. Az általa megalkotott World Wide Web (WWW) három alapvető technológiára épült:

- HTML (HyperText Markup Language) – a weboldalak szerkezetét meghatározó leíró nyelv,

- URL (Uniform Resource Locator) – az egyes erőforrások egyedi azonosítására szolgáló címrendszer,
- HTTP (HyperText Transfer Protocol) – az információk továbbítását lehetővé tevő protokoll.

1990-ben Berners-Lee elkészítette az első webkiszolgálót és webböngészőt, majd 1991-ben a web nyilvánossá vált, elindítva azt a globális információs forradalmat, amely napjainkban is alakítja a digitális világot. Az eredeti cél az akadémiai információcsere volt, de hamar világossá vált, hogy a világháló ennél sokkal szélesebb körű lehetőségeket rejt magában, és alapjaiban változtatja meg az információ megosztásának és fogyasztásának módját.

A világháló fejlődése gyakran verziószámokkal jelölt korszakokra osztható, mintha egy szoftverfrissítésről lenne szó. Azonban, ahogyan a Web 2.0 esetében is megfogalmazták, ez nem csupán technológiai változásokat jelent, hanem egy szemléletváltást is (Davis 2005). A különböző webes korszakok inkább a használati mintázatok, interakciós lehetőségek és információáramlási módok átalakulását tükrözik.

Az internet az elmúlt évtizedekben folyamatosan átalakult, és ezzel együtt a rajta kialakuló információs hálózatok szerkezete is jelentős változásokon ment keresztül. A világháló fejlődése három nagy szakaszra osztható: a statikus és egyirányú információközlés korszakára (Web 1.0), a közösségi és interaktív platformok megjelenésére (Web 2.0), valamint a szemantikai és decentralizált világháló felé történő elmozdulásra (Web 3.0). E három korszak nem csupán technológiai szempontból különbözik egymástól, hanem a felhasználói szerepek, a hálózati kapcsolatok és az információáramlás dinamikája tekintetében is.

A *Web 1.0*, amely nagyjából az 1990-es évek elejétől a 2000-es évek közepéig tartott, az internet kezdeti állapotát jelképezi, ahol a weboldalak statikusak voltak, és az információterjesztés egyirányú volt. A felhasználók főként passzív befogadóként működtek, míg a tartalom nagy része néhány központi szolgáltatótól származott. A hálózati struktúra hierarchikus volt: a nagyobb weboldalak és portálok központi szerepet játszottak az információ elérhetőségében, míg a kisebb szereplők csupán olvasóként kapcsolódtak be. Az oldalak közötti kapcsolatok jellemzően rögzített hiperhivatkozásokra épültek, amelyek egy adott szövegtömbre korlátozták a navigációt, hasonlóan a tudományos idézési rendszerekhez vagy a Biblia keresztutalásaihoz.

A *Web 2.0* korszakával az internet interaktív, közösségi és dinamikus térré vált. A felhasználók már nem csupán fogyasztók, hanem aktív tartalomgyártók is lettek: blogok, fórumok, közösségi oldalak és videómegosztók jelentek meg, lehetővé téve az egyének számára, hogy saját tartalmat hozzanak létre és osszanak meg. Ezzel a hálózati struktúra is decentralizáltabbá vált, hiszen az információt már nem kizárólag központi csomópontok terjesztették, hanem a felhasználók egymás között is megosztották. A hiperhivatkozások helyét egyre inkább az algoritmusok és a dinamikus tartalomajánlások vették át, amelyek az információkapcsolatok

hálózatát folyamatosan alakították a felhasználói viselkedés alapján. Ez a korszak olyan üzleti modellek kialakulásához vezetett, ahol a nagy platformok (pl. Google, Facebook, YouTube) nem csupán tartalmat tároltak, hanem a felhasználók interakcióit és kapcsolatrendszeit is felhasználva irányították az információáramlást.

A *Web 3.0* a jövő irányát képviseli, amely a szemantikai technológiák és a decentralizáció felé halad. A szemantikus web célja, hogy az interneten elérhető adatok és kapcsolatok ne csupán összeköttetésben legyenek, hanem azok jelentése is egyértelműbbé váljon a gépek számára. Az AI-alapú algoritmusok lehetővé teszik az információk intelligens rendszerezését, a keresési élmény személyre szabását és az adatkapcsolatok mélyebb értelmezését. Ezzel párhuzamosan a decentralizált technológiák, például a blokklánc és a peer-to-peer rendszerek, csökkenthetik a központosított platformok szerepét, lehetővé téve egy demokratikusabb és átláthatóbb információs ökoszisztéma kialakulását. Ebben a rendszerben az információs hálózatok nem statikusak, hanem folyamatosan alakulnak az egyéni interakciók, az autonóm rendszerek és a mesterséges intelligencia fejlesztései révén.

Összességében a világháló fejlődése jól tükrözi az információs hálózatok természetének változását: míg a Web 1.0 egy rögzített, hierarchikus szerkezetet képviselt, addig a Web 2.0 a közösségi interakciók révén decentralizálta az információs hálózatokat. A Web 3.0 pedig egy még intelligensebb és rugalmasabb rendszer felé halad, ahol az adatok nemcsak kapcsolódnak egymáshoz, hanem egyre hatékonyabban értelmezhetők és strukturálhatók is.

12.3. A világháló linkjeinek fejlődése: navigációs csontváz versus tranzakciós motor

A webkorszak korai szakaszában a legtöbb weboldal viszonylag statikus dokumentum volt, és a linkek elsősorban navigációs funkciót töltöttek be – azaz arra szolgáltak, hogy egyik oldalról a másikra jussunk el, a hipertext kapcsolatrendszerének megfelelően. Ez a leírás ma is jól alkalmazható a web jelentős részére, ugyanakkor a világháló egyre inkább túlnőtt azon az egyszerű modellen, amely dokumentumokból és azokat összekötő navigációs linkekből állt. Fontos megérteni, hogyan történt ez az átalakulás, hogy megfelelően tudjuk értelmezni a világháló struktúrájának elemzéseit.

A világháló legkorábbi időszakában a tartalmat tároló számítógépek alapvetően passzív szerepet játszottak: egyszerűen csak kiszolgálták az adott oldalakat a hozzájuk intézett kérésekre. Napjainkban azonban az oldalakat kiszolgáló gépek számítási kapacitása közvetlenebb módon is szerepet kap: sok link nem csupán új dokumentumot jelenít meg, hanem összetett programokat indít el a szerveren.

Ezért hasznos a webes linkeket egy durva felosztás szerint navigációs és tranzakciós típusokra bontani. A navigációs linkek a világháló hagyományos

hipertextfunkcióit szolgálják, míg a tranzakciós linkek elsődleges célja valamilyen művelet végrehajtása a kiszolgáló számítógépen. Természetesen a két kategória nem minden esetben különül el élesen – sok link egyszerre lát el navigációs és tranzakciós szerepet is –, mégis hasznos e megkülönböztetést szem előtt tartani a weboldalak és linkek funkcióinak vizsgálatakor.

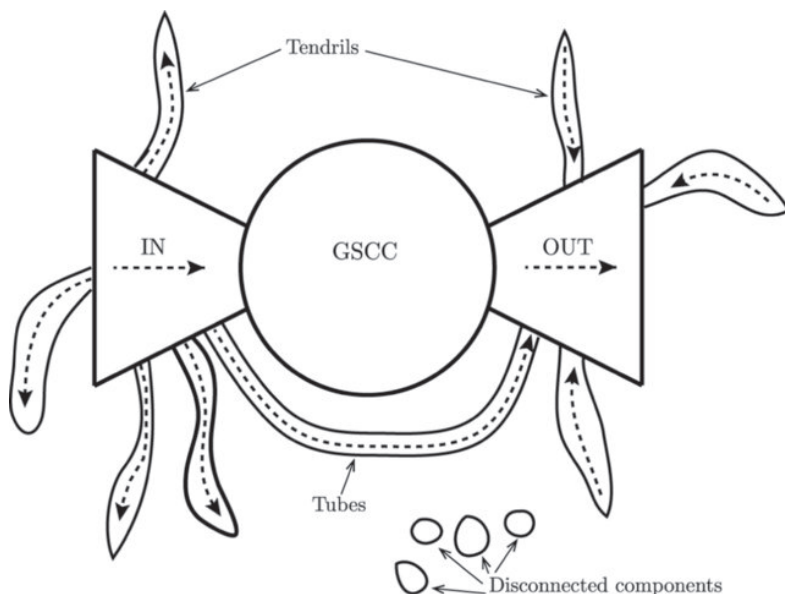
Bár a világháló tartalmának egyre nagyobb része tranzakciós jellegű, ezek a tartalmak jellemzően továbbra is egy navigációs „csontvázhoz” kapcsolódnak – vagyis olyan stabil weboldalakon keresztül érhetők el, amelyek hagyományos navigációs linkekkel kapcsolódnak egymáshoz. A világháló globális struktúrájának elemzése során mi is elsősorban erre a navigációs gerincre összpontosítunk.

12.4. A világháló mint irányított gráf

A navigációs „csontváz” metafora szellemében, a világháló alapvetően egy hatalmas, összekapcsolt információs hálózat, amelyben az egyes weboldalak csomópontokként, a köztük lévő hiperhivatkozások pedig élekként értelmezhetők. Ez a struktúra lehetővé teszi, hogy gráfelméleti eszközökkel vizsgáljuk a világhálót, és mélyebb betekintést nyerjünk annak szerveződésébe, információáramlásába és keresettségébe. Mivel a hiperhivatkozások egyirányúak – az egyik oldalról egy másikra mutatnak anélkül, hogy fordított irányban is létezne kapcsolat –, a világháló irányított gráfként modellálható. Ez a szemlélet kulcsfontosságú a keresőmotorok működésében, az információelérés optimalizálásában és az online struktúrák elemzésében.

A világháló gráfszerű szerveződése számos érdekes tulajdonsággal rendelkezik. Az egyik legfontosabb jelenség a skálafüggetlen hálózatok jellemzője, amely szerint a legtöbb csomópontnak viszonylag kevés kapcsolata van, míg néhány kiemelkedően fontos csomópont – például nagy hírportálok, keresőmotorok vagy közösségimédia-platformok – rendkívül sok bejövő és kimenő linkkel rendelkezik. Ezt a tulajdonságot hatványtörvény-eloszlásnak (power-law distribution) nevezik, amely magyarázatot ad arra, hogy miért van néhány oldal kiemelkedően központi szerepben, míg más oldalak kevésbé láthatóak és elérhetőek. A keresőmotorok – különösen a Google – ezt a struktúrát használják ki algoritmusaik optimalizálásában, például a PageRank algoritmus segítségével, amely a linkkapcsolatokon keresztül rangsorolja az oldalakat.

A világháló irányított gráfként való modellezése nemcsak az információ megtalálását segíti, hanem lehetővé teszi a különböző dinamikus folyamatok, például az információ terjedésének, a közösségi hálózatok formálódásának és az online trendek kialakulásának vizsgálatát is. A kutatók a gráfelmélet eszközeivel elemzik az erősen összefüggő komponenseket (ahol minden csomópont elérhető minden más csomópontból), a periférián elhelyezkedő izolált csomópontokat, vagy éppen azokat a közvetítő oldalakat, amelyek összekapcsolják a különböző témakörökhöz tartozó klasztereket.



12.4. ábra. A világháló „Bow-Tie” sematikus ábrája (Broder et al. 2000)

A „Bow-Tie” (csokornyakkendő) struktúra a világháló hálózati szerkezetének egyik legismertebb és legtöbbet vizsgált modellje, amelyet Andrei Broder és munkatársai határoztak meg egy 2000-ben publikált kutatásukban (12.4. ábra). Ez a modell azt írja le, hogy a világháló irányított gráfja nem egy homogén, egyenletesen összekapcsolt hálózat, hanem jól elkülöníthető régiókból áll, amelyeknek különböző funkcióik és elérhetőségi mintázataik vannak.

A Bow-Tie struktúra fő részei:

- GSCC (Giant Strongly Connected Core, Óriás erősen összefüggő mag): Ez a központi mag tartalmazza azokat az oldalakat, amelyek egymásból elérhetők. Egy adott weboldaltól indulva el lehet jutni bármely más oldalra, és fordítva is. A világháló forgalmának jelentős része ebben a régióban zajlik, ezért igazából ez egy nagy, erősen összefüggő komponensnek számít.
- IN (bemeneti komponens): Azok a weboldalak, amelyek az GSCC felé mutatnak, de onnan nem elérhetők. Tipikusan új oldalak, amelyek sok hivatkozást tartalmaznak az internet nagy oldalaira (pl. blogok, új hírportálok).
- OUT (kimeneti komponens): Azok a weboldalak, amelyek az GSCC-ből elérhetők, de nincsenek visszamutató linkjeik. Ide tartoznak például a webshopok, dokumentumtárak vagy specifikus aloldalak, amelyekről nincs visszavezető út a központi webbe.
- Tendrils (indák): Olyan oldalak, amelyek nem érhetők el az GSCC-ből, de elérhetők az IN komponensből, vagy elérik az OUT komponenst. Ide tartoznak

például az elhagyatottabb, kevésbé kapcsolódó weboldalak. Sajátos esetet képeznek azok az oldalak (tubes), amelyek elérhetők az IN komponensből és eléri az OUT komponenst, de elkerülik az GSCC-t.

- Disconnected Components (leválasztott részek): Olyan izolált weboldalak, amelyek egyik fő komponensből sem érhetők el, és nincs kapcsolatuk a világháló magjához.

A világháló csokornyakkendő-modellje egy magas szintű nézetet nyújt a hálózat szerkezetéről, annak elérhetőségi tulajdonságai és az erősen összefüggő komponensek egymáshoz való viszonya alapján. Ebből a modellből világosan látszik, hogy a világhálónak van egy központi „magja”, amely a legjelentősebb oldalak nagy részét tartalmazza, míg más csomópontok ehhez képest bemeneti komponensben, kimeneti komponensben vagy oldalirányban (indák, leválasztott részek) helyezkednek el.

Ez egyben egy rendkívül dinamikus kép is: ahogy az emberek új oldalakat és linkeket hoznak létre, a csokornyakkendő egyes komponensei folyamatosan változnak, határaik átalakulnak, és egyes csomópontok idővel bekerülnek a gigantikus GSCC-be, míg mások kikerülnek onnan. Ennek ellenére a kutatások azt sugallják, hogy a teljes szerkezeti kép relatíve stabil marad az idő előrehaladtával, még akkor is, ha a részletek folyamatosan változnak.

Az irányított gráfok szemlélete tehát nemcsak a világháló szerkezetének megértését segíti, hanem annak dinamikáját is modellezni képes. Ahogy a világháló folyamatosan növekszik és változik, ez a gráfszerkezet is átalakul, új csomópontok és élek hozzáadásával vagy eltűnésével. Ennek következtében a világháló egy élő, folyamatosan fejlődő hálózatként értelmezhető, amelynek vizsgálata a modern információs társadalom működésének megértéséhez is kulcsfontosságú.

12.5. Linkelemzés és webes keresés

A világháló hatalmas mérete és folyamatos növekedése miatt a keresés problémája a digitális korszak egyik központi kérdésévé vált. A hagyományos kulcsszavas keresés már önmagában nem elegendő ahhoz, hogy a legrelevánsabb információk jelenjenek meg a találatok élén. Éppen ezért a kutatók már az 1990-es évek végétől kezdve olyan módszereket dolgoztak ki, amelyek nemcsak a tartalomra, hanem a linkstruktúrára is figyelnek – ez a linkelemzés.

Amint fentebb kifejtettük, a világháló nem csak dokumentumok gyűjteménye, hanem egy komplex irányított gráf, amelyben a linkek (hiperhivatkozások) kapcsolatokat jelölnek az oldalak között. A linkelemzés célja ennek a gráfnak a vizsgálata annak érdekében, hogy feltárja az oldalak fontosságát, megbízhatóságát vagy tekintélyét.

Ha a felhasználó egy keresést indít (pl. „klímaváltozás”), több ezer vagy akár millió oldal is tartalmazhatja ezt a kulcsszót. De ezek közül melyik legyen a lista

elején? Melyik „a legjobb”? A tartalmi egyezés önmagában nem elég: szükség van egy olyan rangsorolási módszerre, amely figyelembe veszi az oldalak közötti kapcsolatokból származó információt is.

12.5.1. Linkelemzés mértékadó és központi oldalak alapján: HITS-algoritmus

Jon Kleinberg (1999) HITS (Hyperlink-Induced Topic Search vagy hub/authority algoritmus, magyarul hiperlink alapú témakeresés) modellje az első áttörő megközelítés volt. Ebben az elméletben az oldalak kétféle szerepet játszhatnak.

- Authority (tekintély): egy oldal, amelyhez sok „jó hírű” oldal mutat linkkel.
- Hub (központi): egy oldal, amely sok fontos (authority) oldalra mutat.

A rendszer iteratíván frissíti az oldalak hub és authority értékeit, amíg stabil eredményt nem kap. Egy téma szempontjából tehát lehet egy oldal authority, mert sok megbízható forrás hivatkozik rá, és lehet hub, mert jól „összegyűjti” a témával kapcsolatos minőségi linkeket.

A hub/authority módszer értelmében az oldalak besorolása egy rekurzív logika mentén történik: központi oldalaknak azokat tekintjük, amelyek számos tekintélyes oldalra mutatnak, míg mértékadónak azokat, amelyeket sok központi oldal hivatkozik.

Minden oldalhoz két értéket rendelünk: egy authority pontszámot és egy hub pontszámot, amelyeket kezdetben egyaránt 1-re állítunk. Ezzel kifejezzük, hogy a kiindulási állapotban még nincsenek előzetes feltételezéseink az oldalak jelentőségéről.

A pontszámok finomítása két egymást váltó szabály segítségével valósul meg (12.1. táblázat, 12.5. ábra).

- Authority frissítési szabály: minden oldal authority pontszámát a rá mutató oldalak aktuális hub pontszámainak összegeként frissítjük. Így egy oldal annál nagyobb authority értéket kap, minél több megbízható hub hivatkozik rá.
- Hub frissítési szabály: minden oldal hub pontszámát az általa hivatkozott oldalak aktuális authority értékeinek összegeként frissítjük. Vagyis egy oldal akkor jó hub, ha sok mértékadó (authority) oldalra mutat.

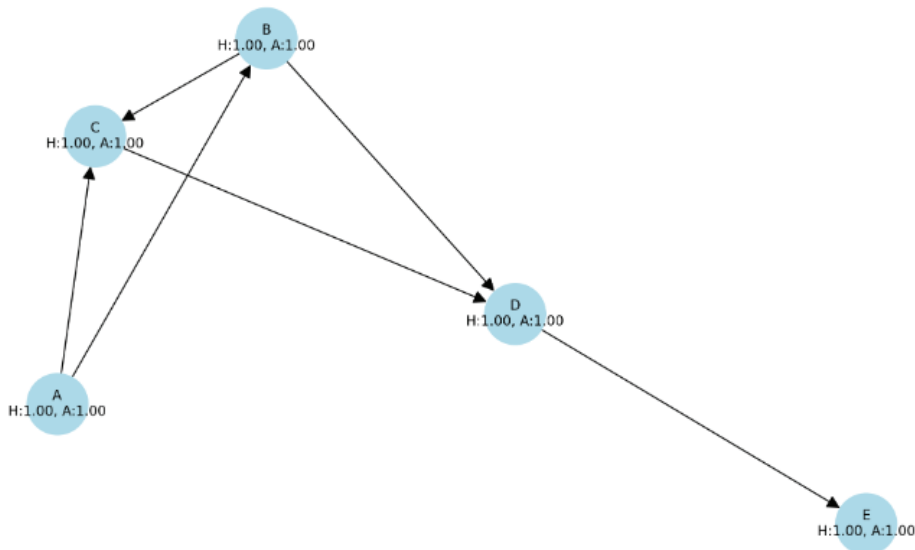
Ezután a frissítési lépéseket többször, váltakozva ismételjük. Tehát a rekurzív definíciót iteratíván implementáljuk az ún. ismételt javítás elve szerint: minden újabb iteráció pontosabb becslést ad arra nézve, mely oldalak töltenek be kulcsszerepet a hálózatban. A folyamat végén az értékeket normalizáljuk (az értékek négyzetösszegének gyökére osztjuk őket), hogy az értékek közötti arány megmaradjon, de a skálájuk kezelhető legyen.

A módszer különlegessége, hogy a pontszámok – kellően sok lépés után – konvergálnak, azaz stabilizálódnak. Ráadásul az így kapott végső értékek nem függenek a kezdeti értékeállítástól, amennyiben azok pozitívak voltak. Ez azt jelenti, hogy az authority és hub értékek kizárólag a webes linkstruktúrából következnek

– függetlenül bármiféle előfeltevéstől. Az így kapott egyensúlyi állapotban egy oldal authority értéke arányos a rá mutató hub-oldalak súlyával, míg a hub érték arányos az általa hivatkozott authority-oldalak értékével.

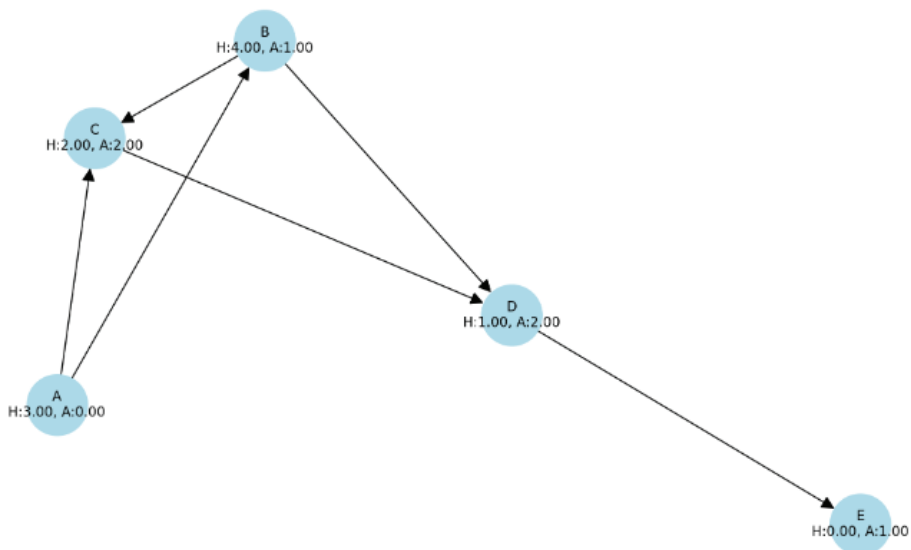
12.1. táblázat. A hub/authority algoritmus működésének szemléltetése egy 5 csúcsból álló irányított gráfon, három iteráción keresztül

csúcs	be	ki	kezdeti értékek	1. iteráció	2. iteráció	3. iteráció	végso normált értékek
A	–	B,C	H: 1, A: 1	H: 3, A: 0	H: 10, A: 0	H: 33, A: 0	H: 0,58, A: 0,00
B	A	C,D	H: 1, A: 1	H: 4, A: 1	H: 13, A: 3	H: 42, A: 10	H: 0,74, A: 0,32
C	A,B	D	H: 1, A: 1	H: 2, A: 2	H: 6, A: 7	H: 19, A: 23	H: 0,34, A: 0,73
D	B,C	E	H: 1, A: 1	H: 1, A: 2	H: 1, A: 6	H: 1, A: 19	H: 0,02, A: 0,60
E	D	–	H: 1, A: 1	H: 0, A: 1	H: 0, A: 1	H: 0, A: 1	H: 0,00, A: 0,03

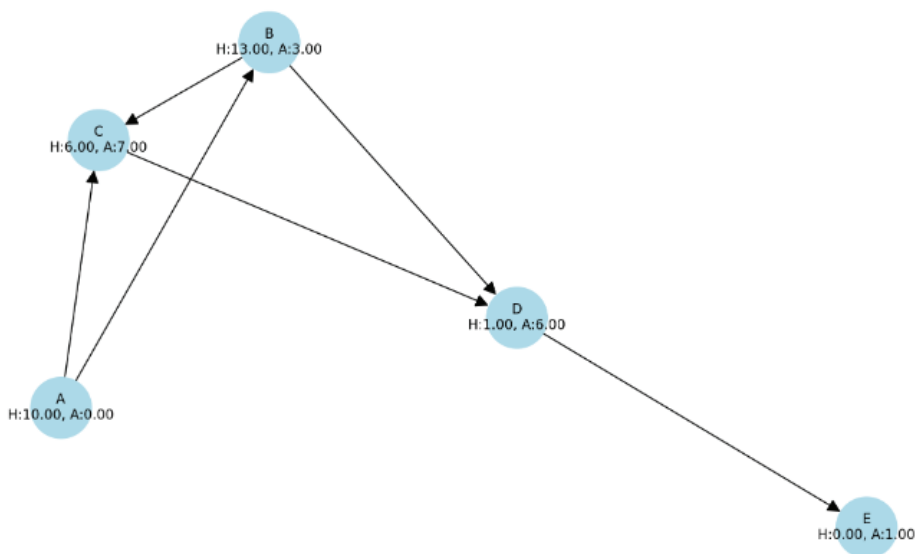


(a) kezdeti értékek

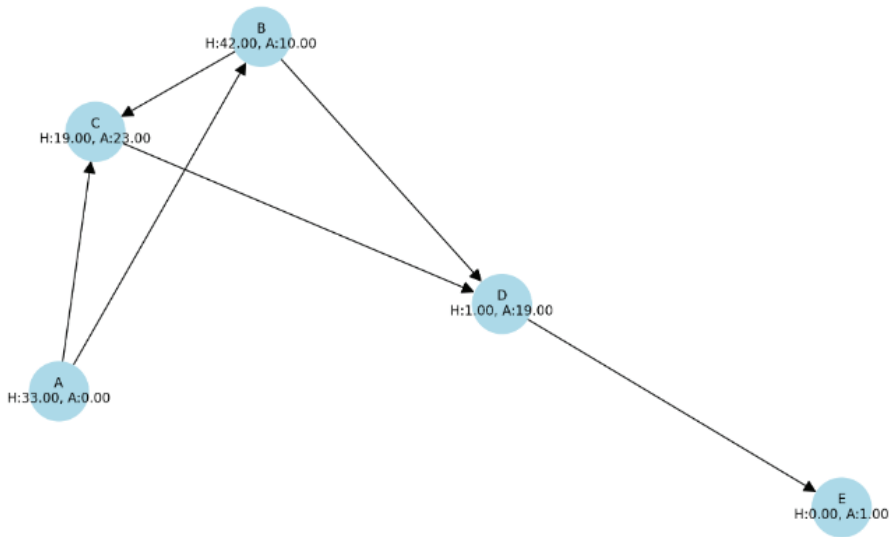
12.5. ábra. A 12.1. táblázat adatainak gráfos megjelenítése



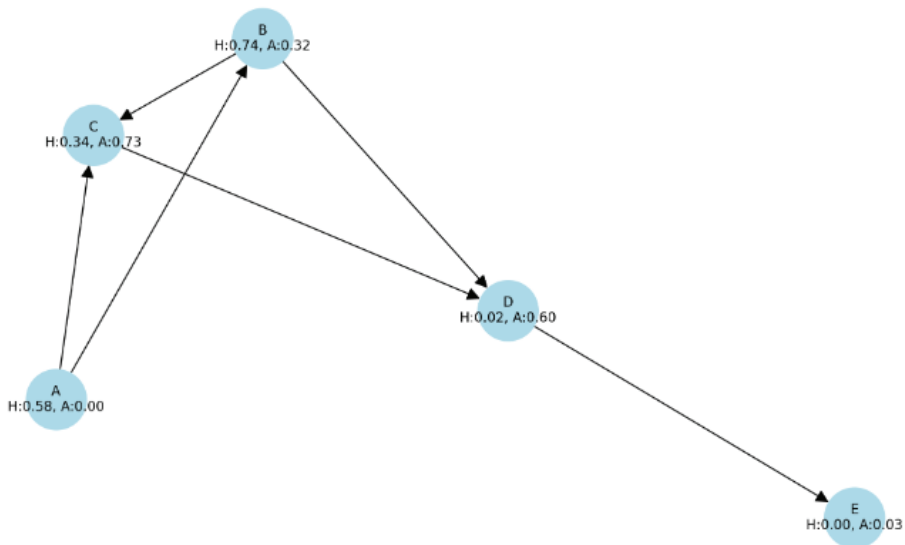
(b) 1. iteráció nyomán



(c) 2. iteráció nyomán



(d) 3. iteráció nyomán

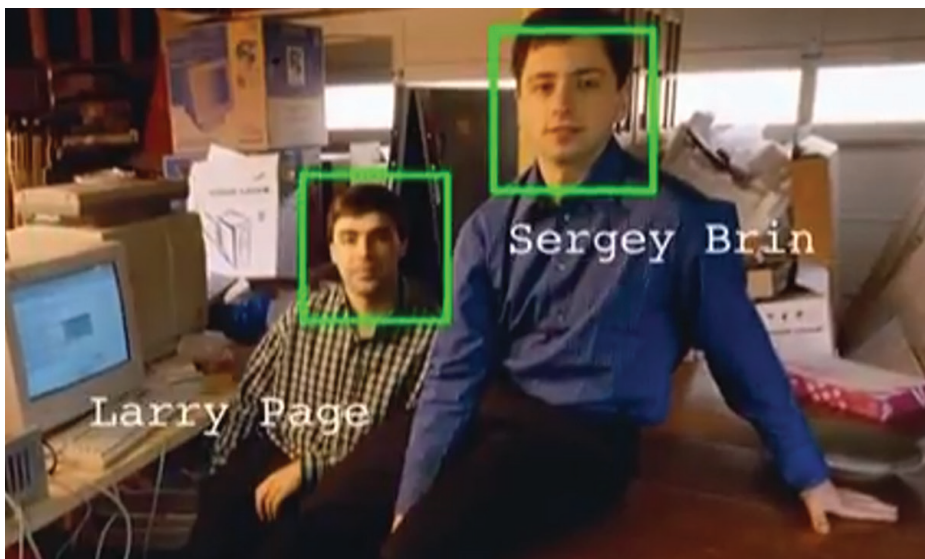


(e) végső normált értékek

A hub/authority algoritmus különösen alkalmas olyan témakörökre, ahol a keresési cél nem csupán egy legjobb találat, hanem megbízható források hálózata. A módszer így segíthet a tematikus tudásközpontok (authorities) és az azokat felfedező „iránytűk” (hubs) azonosításában – legyen szó tudományos tartalomról, szakmai blogokról vagy bármely strukturált webes tudáshalmazról.

12.5.2. PageRank: a világháló „szavazási” rendszere

A Google PageRank-algoritmus az egyik legismertebb és legsikeresebb link-elemzési módszer (már az első fejezetben utaltunk rá). Larry Page és Sergey Brin (a Google alapítói) fejlesztették ki 1998-ban a Stanford Egyetemen. Lényege, hogy minden link egyfajta „szavazatként” értelmeződik: ha sok oldal hivatkozik egy adott oldalra, az vélhetően fontos. Ráadásul nem minden szavazat egyenlő: egy olyan oldal szavazata, amelyet sokan linkelnek, többet ér. Ez megint csak egy rekurzív definícióhoz vezet: az a fontos oldal, amire fontos oldalak mutatnak.



12.6. ábra. Larry Page és Sergey Brin a PageRank-algoritmus fejlesztésén dolgoznak egy bérelt garázsban. (du Sautoy 2015)

Ez esetben is minden oldal kezdetben egy egységnyi fontossággal (szavazattal) rendelkezik. Ezt az értéket egyenlően szétosztja a saját kimenő linkjein keresztül azok között az oldalak között, amelyekre hivatkozik. Az egyensúlyi állapot eléréséhez egy csillapítási tényezőt (d , tipikusan 0,85) is bevezetünk,

amely modellezi a véletlenszerű kattintás lehetőségét, és biztosítja az algoritmus konvergenciáját:

$$\text{PageRank}(i) = (1 - d) + d \sum_{j \in M(i)} \text{PageRank}(j) / L(j),$$

ahol $M(i)$ azoknak az oldalaknak a halmaza, amelyek hivatkoznak az i . oldalra, és $L(j)$ pedig a j . oldalról kimenő linkek száma.

Az egyes oldalak tehát saját szavazatuknak csupán a d hányadát osztják tovább a hivatkozott oldalak között, míg a fennmaradó $(1 - d)$ részt megtartják. Ez a mechanizmus stabilizálja a modellt, biztosítva, hogy az iterációk során a valószínűségi eloszlás konvergáljon. Ugyanakkor a más oldalaktól kapott szavazatokat teljes egészében továbbadják, ami fenntartja a szavazatáramlás folytonosságát és a rendszer egyensúlyát. Azok az oldalak, amelyeknek nincs kimenő hivatkozásuk (ún. nyelő csúcsok), külön kezelést igényelnek: az ezekben felhalmozódó PageRank-értéket minden iterációban egyenlően szétosztjuk az összes többi oldal között, hogy a rang ne vesszen el.

A módszer alternatív értelmezése egy véletlenszerű internethasználó mozgását szimulálja, aki minden lépésben d valószínűséggel követ egy hivatkozást az aktuális oldalról, és $(1 - d)$ valószínűséggel „megunja” és véletlenszerűen egy másik oldalra ugrik. A megfelelő képlet:

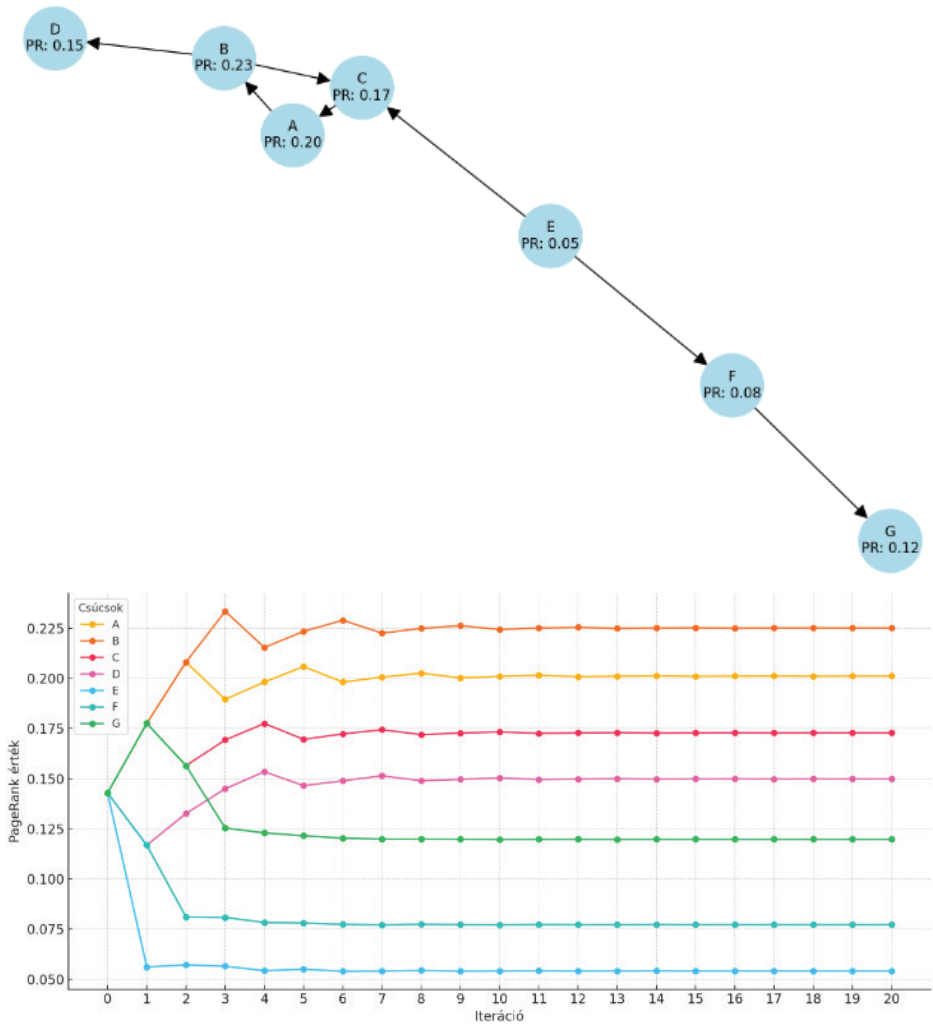
$$\text{PageRank}(i) = (1 - d) / N + d \sum_{j \in M(i)} \text{PageRank}(j) / L(j).$$

Ez az értelmezés valószínűségi szemléletet ad a fontosságnak: a PageRank azt mutatja meg, hogy hosszú távon milyen gyakran „érkezik meg” a véletlenszerű szörföző az adott oldalra.

Vegyük észre, hogy az eredeti, Brin és Page által közölt PageRank-képlet nem tartalmazza az oldalak számával való normálást (N), így a „véletlen ugrás” nem egyenletes eloszlással, hanem egy konstans értékkel jelenik meg. Ennek következménye, hogy az így kapott PageRank-értékek nem alkotnak valószínűségi eloszlást – vagyis az oldalak összesített PageRankje nem lesz pontosan 1. Gyakorlati szempontból azonban ez az egyszerűsített forma gyorsabban számítható, és a rangsorolási sorrend meghatározásához elegendő. Ezért vált a „hibás” változat széles körben alkalmazottá a keresőmotorokban, míg az elméleti elemzések és precíz modellek továbbra is a normált, N -t is figyelembe vevő változatot használják. A 12.7. ábrán bemutatott példában a javított változatot használjuk, ami azt jelenti, hogy a kezdeti értékek minden csúcra $1/N$. Az implementációs részletek iránt érdeklődő olvasó figyelmébe ajánljuk a B függelék 12. pontját.

A PageRank tehát két nézőpontból is megragadható: 1. mint szavazási rendszer, ahol az oldalak egymásnak adják át fontosságukat, illetve 2. mint véletlen bolyongás a világháló gráfján, amelynek stabil állapota tükrözi az oldalak relatív

látogatottsági esélyét. Mindkét megközelítés ugyanarra a matematikai struktúrára épül, és lehetővé teszi az oldalak objektív alapú rangsorolását.



12.7. ábra. Egy 7 csúcsból álló irányított gráf csúcsainak PageRank-értékeinek alakulása 20 iteráción keresztül

12.6. A linkelemzés szerepe a modern világhálón

Bár a PageRank- és a HITS-algoritmusok forradalmasították a keresést, a modern webes keresők ma már sokkal komplexebb rendszereket alkalmaznak, amelyekben a linkelemzés csak egy tényező a sok közül. A rangsorolás figyelembe vesz: felhasználói viselkedést, személyes előzményeket, oldalak frissességét, mobilbarát megjelenést, mesterséges intelligenciával felismert szövegösszefüggéseket is. Ennek ellenére a linkstruktúra elemzése ma is nélkülözhetetlen elem a keresési algoritmusokban, hiszen a hiperhivatkozások továbbra is hitelességi jelzések, különösen szakmai vagy tudományos tartalmak esetén.

Összegzésként kijelenthetjük, hogy a linkelemzés és a keresési algoritmusok fejlődése alapvetően formálta át azt, ahogyan információt keresünk és dolgozunk fel. A hiperlinkek nem csak útvonalak, hanem információs értékű kapcsolatok, amelyek révén felmérhetjük a tartalom relevanciáját, fontosságát és kontextusát is. A világháló strukturális elemzése így nemcsak technikai kihívás, hanem egyben betekintés is az információs társadalom működésébe.

13. A viselkedésterjedés anatómiája

Ebben az utolsó fejezetben a társadalmi hálózatokon belüli viselkedések terjedésének mechanizmusait vizsgáljuk. Fontos már az elején leszögezni: nem pusztán információ áramlásáról van szó. Egy viselkedés elterjedése sokkal több annál, mint hogy az emberek értesülnek valami újdonságról – a tényleges elfogadás, az adoptálás gyakran sokkal lassabban és összetettebb feltételek mentén történik.

Amikor az emberek hálózatban kapcsolódnak egymáshoz, döntéseik hatásai vannak egymásra. Ez a hatás nem feltétlenül vak utánzás: gyakran racionális viselkedés, amely abból fakad, hogy mások cselekedetei értelmezhető információként szolgálnak. Így alakulhat ki az, amit időnként nyájviselkedésnek nevezünk. Például képzelj el, hogy új fülhallgatót keresel egy webáruházban. Találsz egy jó specifikációkkal rendelkező modellt, de alig van róla értékelés. Egy másik hasonló árú típus viszont rengeteg pozitív véleményt kapott. Bár a saját információd alapján az első is jó választás lenne, végül mégis a másodikat választod – nem vakon, hanem azért, mert a tömeg viselkedéséből következtetsz: ha ennyien dicsérik, valószínűleg tényleg jó. Ezzel egy tipikus információalapú viselkedési zuhatag (vagy kaszkád) részévé válsz.

13.1. Információs hatás

Ha azt látjuk, hogy sokan egy adott irányba mozdulnak, arra következtethetünk, hogy ők talán olyan információ birtokában vannak, amit mi nem ismerünk. A sorrendben meghozott döntések pedig egymásra épülnek, így a korai választások aránytalanul nagy hatással lehetnek a többiekre. Ezt információs hatásnak nevezzük, hisz mások döntései közvetett információforrásként szolgálnak saját döntésünkhöz.

Anderson és Holt (1996, 1997) kísérlete kiválóan szemlélteti az információs zuhatag működését.

- A kísérlet menete: egy edényben három golyó van: 50% eséllyel 2 piros + 1 kék, vagy 2 kék + 1 piros. A diákok egyesével húznak egy golyót (titokban), visszateszik, majd megjósolják, hogy az edény többségében piros vagy kék-e. A többiek nem látják, milyen színt húzott az illető, csak a nyilvános tippjét hallják. A helyes válasz jutalommal jár, ezért mindenki racionálisan dönt.
- A zuhatag kialakulása:
 - első diák: saját húzása alapján tippel – tiszta információ.
 - második diák: ha az ő húzása megegyezik az első tippjével, megerősíti azt. Ha eltér, dönt saját húzása alapján – még mindig informatív.

- harmadik diák: ha az első két tipp ugyanaz, és ő mást húz, hajlamos nem a saját jelére hallgatni, hanem követni a többséget. Ekkor indul el az információs zuhatag: a döntés már nem a saját információ, hanem a korábbi tippek súlyán alapul.
- negyedik és további diákok: követik az előzőeket, függetlenül attól, mit húztak – a privát információ háttérbe szorul.

A fentiek alapján több fontos tanulságot is levonhatunk a zuhatagokról.

- A zuhatag tévedhet: ha az első néhány ember véletlenül félrevezető információt kap, az egész tömeg hibás irányba indulhat – racionálisan, de tévesen.
- A zuhatag kevés információn alapulhat: amint elindul, a legtöbb ember már nem használja fel saját információját, így az értékes tudás elveszik.
- A zuhatag törékeny: már kevés új, megbízható információ is elég lehet a megtöréséhez. Például ha egy 100 fős osztályban az első 49 diák „kék” tippel (merthogy az első kettő kék tippet), de az 50. és 51. diák piros golyót húz, és ezt meg is mutatják, a zuhatag megszakad. Az 52. diák ekkor már kiegyenlített információval rendelkezik (két kék az 1. és 2. tippjei alapján, és két piros az 50. és 51. tippjei értelmében), így ismét a saját jelzésére hagyatkozik. A példa rávilágít: a hosszú tippelési sorozat mögött gyakran kevés valódi információ van (az 1. és 2. diák tippje), így a zuhatag könnyen összeomolhat, ha új, nyílt adatok jelennek meg (az 50. és 51. diák húzása).
- Óvatosan a tömeg követésével: még ha mindenki racionálisan is dönt, a tömeg kollektíven tévedhet – különösen akkor, ha az emberek nem függetlenül hoznak döntést. Ez ellentétben áll a „tömeg bölcsessége” elmélettel (Surowiecki 2004), ahol a független döntések átlaga pontos lehet.

Egy példa a való életből e jelenségre: amikor egy döntéshozó bizottságnak két jelölt közül kell választania. Ha az első néhány tag az egyik jelöltet támogatja, a többiek hajlamosak követni őket – még akkor is, ha eredetileg a másikat preferálták. Ez nemcsak konformitás kérdése, hanem lehet racionális következtetés is, feltételezve, hogy a többieknek megbízható információik vannak. A megoldás egy ilyen helyzetben az lehet, ha először mindenki egyénileg dönt, és csak ezután következik a közös vita.

Egy másik példa, amely a marketinghez és termékbevezetésekhez köthető: a cégek gyakran próbálnak szándékosan zuhatagot elindítani, abban bízva, hogy ha néhányan megvásárolják az új terméket, mások is követni fogják őket – még akkor is, ha a termék valójában nem jobb. Ez különösen akkor működik, ha csak a vásárlást látjuk, de nem tudjuk, hogy az első vevők elégedettek voltak-e. Ez rávilágít arra, milyen fontosak a valódi visszajelzések (pl. értékelések, statisztikák), mivel segíthetnek elkerülni a hibás zuhatagokat.

13.2. Közvetlen haszon: hálózati hatás

Fentebb az információs hatásról volt szó – arról, hogyan használjuk mások döntéseit közvetett információként saját választásaink során. Most áttérünk a másik, alapvetően eltérő okra, ami miatt emberek gyakran másokat követnek: ez a közvetlen haszon, más néven hálózati hatás.

Bizonyos döntések esetén nemcsak azért éri meg igazodni másokhoz, mert ők tudhatnak valamit, hanem azért is, mert tényleges előnyöd származhat abból, ha ugyanazt választod, amit mások. Gondolj például egy közösségi oldalra, üzenetküldő alkalmazásra vagy fájlmegosztóra: akkor működik jól, ha mások is ugyanazt használják. Minél többen vannak jelen, annál értékesebb lesz számodra is – új kapcsolatok, jobb funkciók, nagyobb támogatás.

De ilyen helyzet lehet egy egyszerűbb döntés is, például amikor egy bárban csapolt sört választasz. Ha azt látod, hogy sokan ugyanazt a sört kérik, érdemes lehet neked is azt választani – nem feltétlenül azért, mert te is pontosan tudod, melyik a legjobb, hanem mert valószínűbb, hogy az a hordó frissebb, gyorsabban fogy, így jobb az íze, és kisebb az esély, hogy régóta áll. Itt tehát az utánzás nemcsak információs okokból, hanem közvetlen gyakorlati előnyök miatt is indokolt lehet.

Korábban már felmerült a fülhallgató-vásárlás példája, nézzük most a két hatást különválasztva.

- Információs hatás: „ha ennyien dicsérik, biztos jó a hangzás, kényelmes a viselet”. Mások döntése bizalmat épít, információként szolgál.
- Közvetlen haszon / hálózati hatás: a népszerűbb fülhallgató több eszközzel kompatibilis, gyakrabban frissítik, a hozzá tartozó app aktívan fejlődik, stb. Mindez azért van, mert nagy a felhasználóbázis. Ebben az esetben tehát nem csak a népszerűség látszatát követed – valódi, mérhető előnyöd származik abból, hogy azt választod, amit mások is.

Ez a két hatás – információs és közvetlen haszon – sokszor együtt van jelen, de ellentmondásba is kerülhetnek. Például: a népszerű fülhallgatóra többet kell várni a nagy kereslet miatt (hátrány); mégis azt választod, mert bízol mások döntésében (információs előny); ráadásul tudod, hogy nagyobb felhasználói bázissal jár, így jobban támogatott (közvetlen haszon).

Továbbá, a „*hálózati hatás*” kifejezés nem csupán arra utal, hogy minél többen használnak valamit, annál értékesebb lesz, hanem arra is, hogy pontosan kik használják. Gyakran akkor származik igazán hasznunk egy új technológia vagy viselkedés átvételéből, ha azok használják, akikhez *kapcsolódunk* – például a barátaink, munkatársaink, tanuló társaink stb.

13.3. A népszerűség hálózati dinamikája

A népszerűség – akár emberek, weboldalak, könyvek vagy dalok esetében – ritkán oszlik el egyenletesen. Míg a legtöbbnek csak szűk körben ismertek, néhányan rendkívüli hírnévre tesznek szert. Ez az aránytalanság nem véletlenszerű: sokszor hálózati hatásokból ered, amelyek során az egyéni döntések egymásra hatnak, egymást erősítik, és hosszú távon torzítják az eloszlást.

A világháló ideális terep e jelenségek vizsgálatára, mivel jól mérhető: egy oldal népszerűségét egyszerűen leírhatjuk azzal, hogy hány másik oldal hivatkozik rá (ezeket nevezzük bejövő linkeknek vagy röviden be-linkeknek). A kérdés, amit feltehetünk: milyen arányban vannak olyan oldalak, amelyekre pontosan k darab link mutat?

Egy intuitív feltételezés szerint a népszerűség talán a jól ismert normál-eloszlást követi – ahogy sok természetes jelenség is. A centrális határeloszlás-tétel alapján, ha egy érték sok apró, egymástól független véletlen hatás összegeként keletkezik, akkor az eloszlása normálkövetésű lesz.

Ha tehát azt feltételezzük, hogy a weboldalak véletlenszerűen és függetlenül döntenek arról, hová linkelnek, akkor egy adott oldal bejövő linkjeinek száma is normáleloszlást kellene hogy kövessen: a legtöbb oldal átlagos számú linket kapna, és a nagyon sok linkkel rendelkező oldalak ritkák lennének (esélyük exponenciálisan csökken).

De a valóság mást mutat! A mérések szerint a be-linkek száma nem normál, hanem hatványfüggvény szerint oszlik el: azon oldalak aránya, amelyekre k link mutat, $1/k^2$ -tel arányos. Ez azt jelenti, hogy a sok linkkel rendelkező oldalak gyakoribbak, mint ahogyan azt a normáleloszlás alapján várnánk – még ha továbbra is csak kevés ilyen oldal létezik.

Más szóval, az adatok nem szóródnak egyenletesen a középérték körül, hanem szélsőségesen egyenlőtlenül oszlanak el. A hatványfüggvényes eloszlás olyan mintázatot ír le, amelyben az egyes értékek előfordulási valószínűsége $1/k^c$ arányban csökken, ahol c egy pozitív konstans. Ez azt jelenti, hogy a legtöbb elem csak minimális figyelmet kap, míg egy szűk kisebbség extrém népszerűsége tesz szert. Ez a minta számos területen megfigyelhető. Például a telefonszámokra érkező napi hívások gyakorisága négyzetes ($\sim 1/k^2$), míg a könyvek eladása és a tudományos cikkek idézettsége köbös ($\sim 1/k^3$) hatványfüggvény-eloszlást követ.

Ahogy a normáleloszlás mögött a centrális határeloszlás-tétel áll, úgy a hatványfüggvény mögött is van egy jól meghatározható mechanizmus: a „gazdag még gazdagabb lesz” elv, más néven preferenciális kapcsolódás.

13.3.1. A „gazdag még gazdagabb lesz” modell

Képzeljünk el egy egyszerű modellt weboldalak linkelésére. Az oldalak időrendben jönnek létre ($1, 2, \dots, N$), és minden új oldal egy linket hoz létre egy

korábbi oldal felé, a következő szabály szerint: p valószínűséggel véletlenszerűen kiválaszt egy korábbi oldalt, és közvetlenül arra mutat, míg $(1-p)$ valószínűséggel szintén kiválaszt egy korábbi oldalt, de nem azt linkeli, hanem arra az oldalra mutat, amelyre a kiválasztott oldal is hivatkozik.

Ez utóbbi szabály – másolás – vezet el a preferenciális kapcsolódáshoz: azokat az oldalakat, amiket már sokan linkelnek, nagyobb eséllyel linkelik újra. Az eredmény az lesz, hogy bár minden oldalnak pontosan egy kimenő linkje lesz, a bejövő linkek száma közelítőleg hatványfüggvény szerint oszlik el. A kitevő c értéke függ a másolási valószínűségtől: minél inkább hajlamosak vagyunk másolni, annál extrémebb eloszlás alakul ki.

Míg a normáeloszlások olyan jelenségek nyomán alakulnak ki, ahol független és véletlenszerű hatások összeadódnak, addig a hatványfüggvényes eloszlások visszacsatoláson alapuló, egymásra épülő döntések eredményei. Egy weboldal népszerűsége olyan ütemben növekszik, amely arányos az aktuális népszerűségével, így az idő előrehaladtával exponenciális növekedést mutathat.

Ennek következményeként egy oldal, amely kezdetben csupán csekély előnyre tesz szert, nagy valószínűséggel tovább növeli ezt az előnyét. Míg a centrális határeloszlás-tétel arra mutat rá, hogy a sok kis, független véletlen eltérés hajlamos kiegyenlíteni egymást, addig a „gazdag még gazdagabb lesz” elvét követő másolós mechanizmus ezzel éppen ellentétes hatást vált ki: a kiugró értékek hatását felerősíti, és még nagyobbá teszi azokat.

Természetesen – ahogyan már utaltunk is rá – ez nemcsak a világhálóra igaz. A hatványfüggvények általánosabb érvényűek, és számos területen megjelennek: a nagyobb városok gyorsabban nőnek, a gyakrabban másolt gének még nagyobb számban fordulnak elő, a könyvek, tudományos cikkek vagy zenék népszerűsége pedig szintén ezt a mintát követi.

A modell a siker kiszámíthatatlanságát is tükrözi, hiszen azt mutatja meg, hogy bár a népszerűség hosszú távon erősödik, a kezdeti szakasz rendkívül törékeny lehet. A kezdeti sikert sokszor véletlenszerű tényezők indítják be. Egy minimális korai előny a visszacsatolás révén hatalmas különbségekké nőhet. Ahogyan az információs zuhatagoknál, itt is előfordul, hogy egy objektum csak azért válik sikeressé, mert korán elér egy kritikus tömeget.

Gondolatkísérlet: ha ismételten újrajátszanánk a zenei történelmet, vajon a Beatles mindig világhírű zenekar lenne? Nem feltétlenül. Elképzelhető, hogy egy másik, kevésbé ismert együttes kapta volna meg azt a kezdeti figyelmet, amely aztán lavinaszerűen elindította volna a sikert.

Összegzésként elmondható, hogy a népszerűség gyakran nem pusztán a minőségen, hanem a korai láthatóságon, társas visszajelzéseken és szerencsén múlik. A hatványfüggvényes eloszlások nem véletlenek, hanem egy egyszerű, de mélyen gyökerező mechanizmus – a „gazdag még gazdagabb lesz” dinamika – természetes következményei.

13.4. Viselkedési zuhatagok hálózatokban

Továbbra is azt vizsgáljuk, hogyan hatnak az emberek döntéseire a társadalmi hálózataikban lévő mások választásai. Fentebb főként a teljes populáció szintjén történő döntéshozatalt elemeztük, most viszont a figyelem a hálózat szerkezetére, különösen a közvetlen kapcsolatok szerepére irányul. Az embereket ugyanis gyakran jobban befolyásolják közvetlen ismerőseik – például barátaik vagy munkatársaik – döntései, mint a társadalom egészének viselkedése. Például hajlamosak lehetünk olyan technológiát választani, amely kompatibilis a társaink által használt eszközökkel, még akkor is, ha az nem a legnépszerűbb megoldás. Ez a megközelítés ötvözi a fentebb tárgyalt haszonelvű döntéshozatali modelleket a homofíliára épülő hálózati szemlélettel, amelyről a 4. fejezetben volt szó.

Elemzésünk továbbra is épít arra a két alapvető mechanizmusra, ami miatt az emberek másokat utánoznak: az információs hatásra és a közvetlen haszonra. A középpontba az kerül, hogyan döntenek az emberek saját hálózati környezetükben, és hogyan vezethetnek ezek a döntések viselkedési zuhatagokhoz – olyan láncreakciókhoz, amelyek során új szokások, technológiák vagy vélemények terjednek el a társadalmi hálózatokon keresztül.

13.4.1. Az innovációk terjedése

A 20. század közepén végzett klasszikus szociológiai tanulmányok (pl. Ryan–Gross 1943; Coleman Katz–Menzel 1966) megmutatták, hogy bár sokan először kívülről (pl. ügynököktől) hallanak egy innovációról, a végső döntést gyakran a szomszédok vagy kollégák példája alapján hozzák meg. Az információs hatással összhangban az emberek megfigyelik mások döntéseit, és ezek közvetett információként szolgálnak számukra – főleg, ha az innováció új vagy kockázatos. Más esetekben a terjedést az hajtja, hogy az innováció közvetlen előnyöket nyújt (pl. könnyebb kommunikáció azokkal, akik már használják a technológiát – telefon, e-mail stb.).

A kutatások feltárták, hogy az innovációk terjedése esetében az utóbbi, vagyis a közvetlen haszon hatás dominál inkább. Azt is kimutatták, hogy az új technológiák korai alkalmazóira sajátos jellemzők vonatkoznak: gyakran magasabb társadalmi-gazdasági státuszúak, többet utaznak, stb. Ők indítják el a terjedés folyamatát egy adott közösségben.

Másfelől, Everett Rogers (1995) több olyan akadályt is azonosított, amelyek gátolhatják a terjedést: bonyolultság (mennyire könnyű megérteni és használni?); láthatóság (mennyire észlelhető másoknál?); kipróbálhatóság (lehet-e fokozatosan, kis lépésekben bevezetni?); kompatibilitás (mennyire illeszkedik a meglévő társadalmi normákhoz és rendszerekhez?). Ezen túlmenően, mivel az emberek jellemzően hozzájuk hasonlókkal lépnek kapcsolatba, a homofília e megnyilvánulása is

akadályozhatja az „idegen” újítások bejutását egy szorosan összetartó közösségbe – ugyanakkor, ha egyszer már bejutott, a terjedését elősegítheti.

Az innovációk elterjedése tehát nemcsak magától az újdonságtól függ, hanem a társadalmi környezettől, a hálózati kapcsolatok szerkezetétől és az egyéni motivációktól is. Ezek megértésével modellezhető, hogy hogyan terjednek új dolgok a társadalomban.

Abból az alapötletből indulunk ki, hogy az egyének döntéseit a közvetlen kapcsolataik (barátaik, kollégáik) választásai befolyásolják. Ha sokan a környezetükben egy új viselkedést vesznek át, nő a késztetés, hogy ők is csatlakozzanak. Mindezt egy hálózati koordinációs játékkal modellezhetjük.

- Minden szereplő két lehetőség közül választhat: A vagy B viselkedés.
- Ha két összekapcsolt (szomszédos) személy ugyanazt választja, pozitív nyereséghez jutnak (az a vagy b értékhez attól függően, hogy A -t vagy B -t választottak).
- Ha különbözőt választanak, nincs nyereség (0).
- Minden egyén a szomszédjaival külön-külön játssza le ezt a játékot, és a teljes nyeresége ezek összegéből adódik.

A döntési szabály egy küszöbmodellként fogható fel. Az egyén akkor választja valamelyik viselkedést (A vagy B), ha a szomszédjai között elegendően sokan azt követik. Egy lehetséges küszöbérték az A viselkedés választása tekintetében: $b / (a + b)$. Ha a szomszédok legalább ekkora aránya követi az A -t, akkor az egyén is ezt választja. Minél vonzóbb az A (nagyobb a), annál kisebb arány is elég a váltáshoz.

A terjedés folyamata így összegezhető: (i) kezdetben néhány egyén választja az A -t; (ii) a többiek a szomszédjaik döntései alapján választanak; (iii) így lépésről lépésre terjed az új viselkedés – akár az egész hálózaton végigsöpörhet.

Ez egy egyszerűsített, rövidlátó (mohó) modell, hiszen az egyének csak az aktuális állapot alapján döntenek, nem gondolkodnak hosszú távon. Ennek ellenére a modell jól bemutatja, hogyan alakulhatnak ki viselkedési zuhatagok, azaz, hogy már egyszerű, helyi döntési szabályok alapján is elindulhat egy új viselkedés széles körű terjedése egy hálózatban. Hasonló jelenséggel találkoztunk a Schelling-modell vizsgálatokor (4.5. alfejezet).

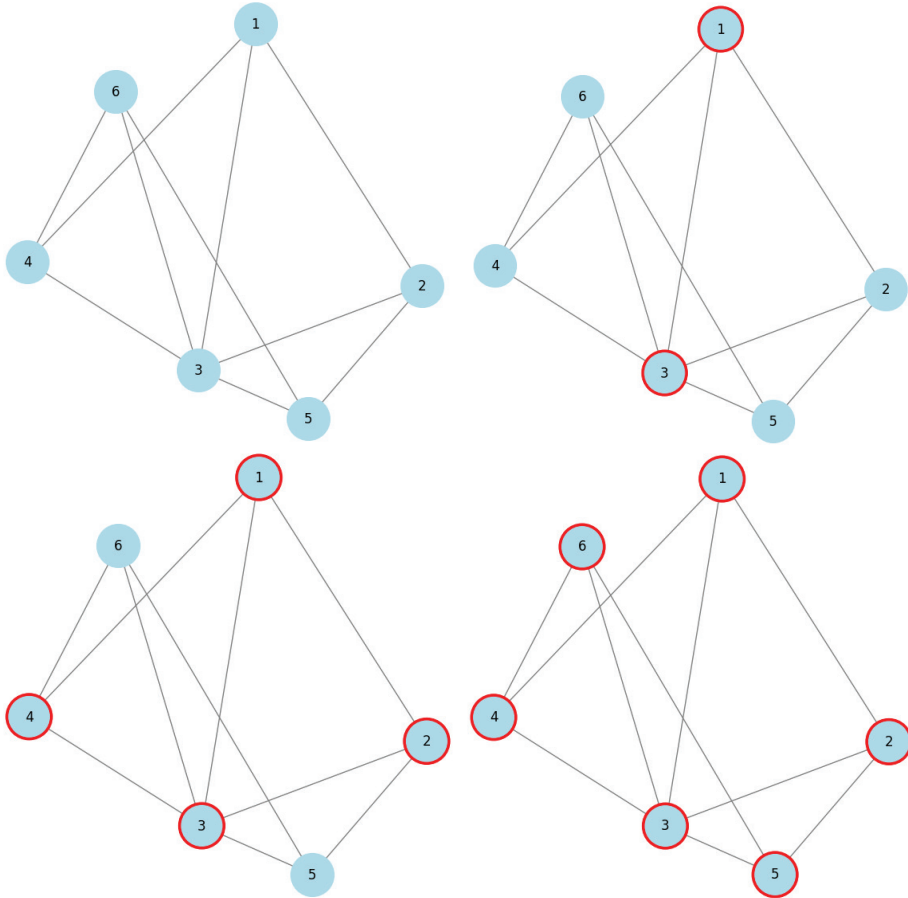
13.4.2. Viselkedési zuhatagok mint koordinációs játék

Boncoljuk tovább ezt a gondolatot, hogy ha az emberek elég nagy hányada elég nyereséget lát egy viselkedésben, az láncreakcióként végigsöpörhet a „társadalmon”. Koordinációs játékban, alaphól, két stabil állapot létezik: amikor mindenki A -t, vagy amikor mindenki B -t választ. Két érdekes kérdés viszont a következő: (i) vajon néhány A -t választó képes-e „átbillenteni” a hálózatot B -ről A -ra?, (ii) vagy kialakul egy vegyes állapot, ahol A és B együtt él?

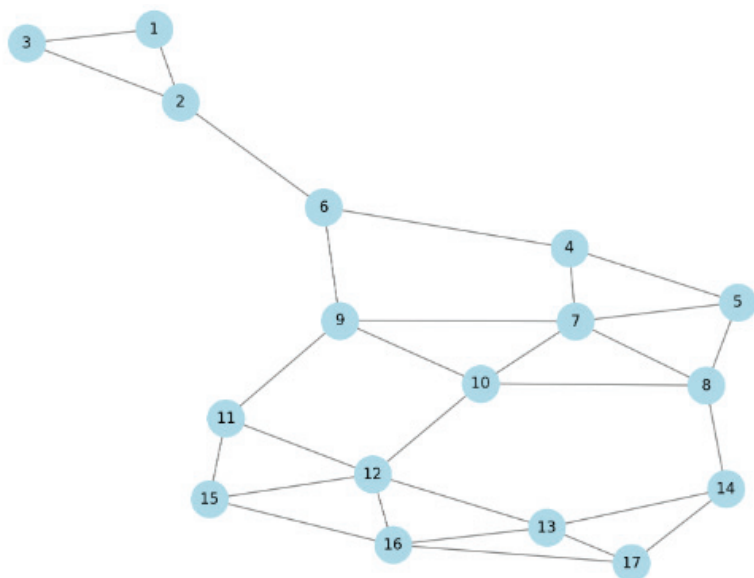
Hangoljuk át a modellt a következőképpen: (i) a kiindulási állapot legyen az, hogy mindenki B -t követ; (ii) egy kis csoport (kezdeti alkalmazók) A -ra vált

valamilyen külső ok miatt; (iii) a többi egyén ezután egy küszöbszabály alapján dönt: átváltanak A -ra, ha szomszédjaik legalább $b / (a + b)$ hányada már A -t követi.

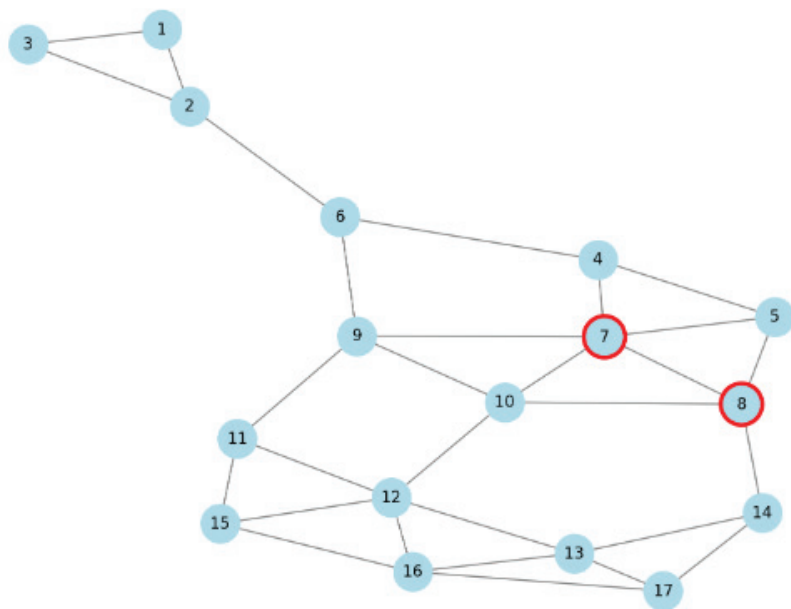
A modell tulajdonságai, hogy az idő lépésenként halad, aki egyszer A -ra váltott, az nem tér vissza B -re, és a folyamat addig tart, amíg senki nem akar már váltani – ekkor áll be egy végső állapot.



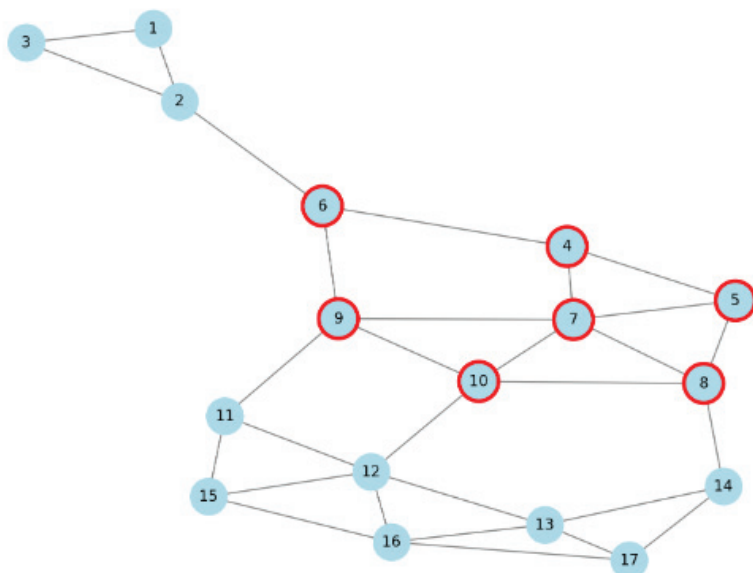
13.1. ábra. Az 1-es és 3-as csúcs kezdeti elfogadóként beindítja a zuhatagot. Az $a = 3$ és $b = 2$ kifizetések mellett az A viselkedés két lépésben terjed el az egész hálózatban. A piros szegélyű csúcsok az adott lépésben fogadják el az A viselkedést (a többiek B -t követnek).



13.2. ábra. (a) adott hálózat



(b) a 7-es és 8-as csúcs kezdeti elfogadóként szerepelnek



(c) az A viselkedés, 3 lépésben, néhány további csúcsra áttérjed ($\{5,10\}, \{4,9\}, \{6\}$), de nem éri el a hálózat összes pontját

A 13.1. és 13.2. ábrák egy teljes, illetve egy részleges zuhatagot mutatnak be. Mindkét esetben $a=3$ és $b=2$, ami 2/5-ös A -ra váltási küszöbértéket jelent. Az első esetben a hálózat szerkezete és a küszöb kedvező, a viselkedés az egész hálózaton végigsöpör. A második példában a viselkedés elkezd terjedni, de megáll, azaz néhány kör után elakad, merthogy további csomópontok nem érik el a váltáshoz szükséges arányt.

E példák jól szemléltetik, hogy hogyan terjed el egy új viselkedés a társadalmi hálózaton belül, amikor az emberek a környezetükhöz igazodva döntenek. Az is kiérződött belőlük, hogy mitől függhet, hogy a folyamat sikeresen végigsöpör a hálózaton vagy elakad: (i) a hálózat szerkezetétől, (ii) a kezdő csoport helyzetétől és (iii) a küszöbértéktől. Bár nagyon leegyszerűsített, a megvizsgált modell segít megérteni, hogyan terjednek el új szokások, technológiák vagy nézetek – vagy miért nem.

Ami a szerkezeti akadályokat illeti, egy hálózatban megfigyelhető, hogy a sűrűn összekapcsolt csoportokon belül az új viselkedés (például A) könnyen elterjed. Ezzel szemben a gyenge kapcsolatok vagy választóvonalak más közösségek felé megakaszthatják a terjedést. Ilyenkor a két viselkedés (A és B) együttélését látjuk – hasonlóan ahhoz, ahogy különböző közösségek eltérő politikai nézeteket, technológiákat vagy közösségi platformokat használnak.

A zuhatagok újraindítására többféle stratégiai beavatkozás is megfontolandó, például az innováció vonzóbbá tétele (növelt haszon). A korábbi példában, ha A jutalma nő (pl. 3-ról 4-re), az A -ra váltás küszöbértéke automatikusan csökken ($2/5 \rightarrow 1/3$), aminek következtében a megkönnyített A -ra váltás újraindíthatja a terjedést a korábban ellenálló területeken.

Egy másik módszer lehet a kulcsemberek célzott meggyőzése. Ha A minőségét nem lehet javítani, akkor a hálózatban stratégiailag fontos személyeket kell meggyőzni a váltásra. Például ha a 12-es vagy 13-as csomópont A -ra vált, az egész térség átválthat. Vegyük azonban észre, hogy ha a 11-es vagy 14-es csomópont vált, nem történik semmi – vagyis nem mindegy, kit céloz meg a marketing. E vizsgálódás tovább mélyíthető a B függelék 13. pontja segítségével.

Egyértelmű tehát, hogy a siker nem pusztán egy termék minőségén múlik, hanem azon is, hogy kiket érünk el és hogyan kapcsolódnak másokhoz. Ez a gondolat a vírusmarketing alapja, és számos hasonló modellben is elemzik. A korábbi, „populációsintű” modellek szerint az emberek az összes többi felhasználó döntése alapján döntenek, ami megnehezíti az indulást. Az itt tárgyalt hálózati modellben viszont csak a közvetlen ismerősök számítanak, így egy kis csoport hosszú láncreakciót indíthat el.

13.4.3. Zuhatagok és klaszterek

A miért és mikor áll meg egy viselkedési zuhatag a hálózatban témakör tovább mélyíthető, ugyanis beazonosítható egy konkrét hálózati jelenség e tekintetben: a sűrű klaszterek (szorosan összekapcsolt közösségek) állják útját a terjedésnek.

Egy p -sűrűségű klaszter egy olyan csomóponthalmaz, ahol minden csomópont szomszédjainak legalább p hányada a klaszteren belül van. Például ha egy klaszter sűrűsége $2/3$, akkor minden benne lévő egyén kapcsolatai legalább kétharmadban a klaszterben vannak.

Kijelenthető, hogy egy viselkedés (például A) terjedése megakad, amikor olyan klaszterhez ér, amelynek sűrűsége nagyobb, mint $1 - q$, ahol $q = b / (a + b)$ a küszöbérték. Ennek nyilvánvaló oka, hogy a klaszteren belül egy csomópont túl kevés A -t használó szomszédot lát ahhoz, hogy átváltson.

Sőt, a klaszterek nemcsak akadályozzák a zuhatagokat – ők az egyedüli akadályai is. Ezért két kulcsállítás a zuhatagokról és klaszterekről a következő.

- Ha a hálózatban van olyan klaszter, amelynek sűrűsége nagyobb, mint $1 - q$, akkor a zuhatag nem tud végigterjedni.
- Ha a zuhatag valahol megáll, akkor a visszamaradt B -t követők halmaza szükségszerűen egy ilyen klaszter.

Ezt könnyű belátni, ha végiggondoljuk a következőket.

- Miért nem tud A betörni egy sűrű klaszterbe? Egy adott ponton az első klaszterbeli egyén, aki A -ra váltana, csak a klaszteren kívüli A szomszédokra

támaszkodhat. De mivel a klaszteren belüli szomszédok aránya nagyobb, mint $1 - q$, ezért az A -t használó szomszédok aránya kisebb, mint q , és ez nem elég a váltáshoz.

- Ha a zuhatag megáll, akkor ez miért a klaszter miatt történik? A folyamat végén, amikor már senki sem akar A -ra váltani, a B -t használók halmaza egy $(1 - q)$ -nál nagyobb sűrűségű klasztert alkot, hiszen mindenki túl sok B szomszédot lát ahhoz, hogy váltson.

Ez a precíz elméleti eredmény megmutatja, hogyan függ a viselkedés terjedése a hálózat szerkezetétől – különösen a közösségek belső kohéziójától.

13.4.4. Viselkedési zuhatagok és a gyenge kapcsolatok

Ebben a fejezetben azt vizsgáltuk, miként terjednek viselkedési formák a társadalmi hálózatokon belül. A fejezet zárásaként hangsúlyozzuk, hogy nem szabad összetéveszteni a viselkedések terjedését az információ terjedésével, hiszen egy új ötlet megismerése nem azonos annak elfogadásával vagy átvételével. Közismert, hogy az információ birtoklása nem feltétlenül vezet elfogadáshoz. Az emberek gyakran gyorsan értesülnek egy új viselkedésformáról, de annak átvétele később történik meg – vagy éppen soha. Számos kutatás, például a Ryan–Gross-féle tanulmány (1943) kimutatta, hogy az ismeret gyorsabban terjed, mint maga az adaptáció.

A 2. fejezetben megvizsgáltuk, miben rejlik a gyenge kapcsolatok ereje. Megállapítottuk, hogy mivel ezek – például távoli ismerősök – hidakat képeznek különálló közösségek között, olyan információkhoz juttatnak hozzá, amelyekhez a közvetlen környezetünkön keresztül nem férnénk hozzá. Ez a Granovetter-féle „gyenge kötések ereje” elmélet lényege.

Másfelől azonban a viselkedések terjedése küszöbalapú folyamatként írható le. Ha egy viselkedés kockázatos vagy költséges, akkor az emberek magasabb küszöbértékkel rendelkeznek az átvételhez. Könnyen belátható, hogy ha valaki csak akkor hajlandó váltani, ha szomszédjainak legalább fele már megtette, akkor a gyenge kapcsolatokon keresztül érkező információ önmagában nem elegendő a változáshoz. A gyenge kapcsolatok tehát kettős szerepet játszanak: kiválóan alkalmasak információ átadására, de gyengék a viselkedések terjesztésében, ha ehhez társadalmi megerősítés szükséges. Ilyen esetekben az emberek inkább a közeli barátaikra, erős kapcsolataikra hallgatnak.

Ez a felismerés összhangban áll a társadalmi mozgalmak terjedésével kapcsolatos kutatásokkal is. A magas küszöbű viselkedések jellemzően lassan és helyi szinten terjednek, nem a gyenge kapcsolatok gyorsan elérő hálózatán keresztül, hanem szoros közösségi támogatásra építve. Ez segít megérteni, hogy míg egy „vírusvideó” pillanatok alatt elterjed, addig a társadalmi mozgalmak csak fokozatosan, bizalomra és erős kötésekre épülve képesek növekedni.

13.5. Összegzés és kitekintés

Ez a könyv a gráfelmélet és a társadalmi hálózatok sokrétű kapcsolatát járta körül, az élek és pontok alapvető szerepétől kezdve egészen a kollektív viselkedés hálózati mechanizmusaiig. Az elméleti alapok bemutatását gyakorlati példák, alkalmazások és interdiszciplináris kitérők egészítették ki – mindezt azzal a céllal, hogy az olvasó ne csupán a hálózatok szerkezetét értse meg, hanem azok dinamikáját, hatását és társadalmi jelentőségét is átlássa.

Természetesen a hálózati gondolkodás és a gráfelmélet világa itt nem ér véget. Számos további vetület – például dinamikus hálózatok, többszintű kapcsolatrendszerek, vagy éppen a mesterséges intelligencia hálózati elemzése – kíváncszhatna még a tárgyalásba. Egy könyv azonban szükségszerűen véges. Reméljük, hogy az itt bemutatott témák nemcsak tudást, hanem inspirációt is nyújtottak a további felfedezéshez, és megerősítik azt az érzést, hogy a világ hálózatként való értelmezése nemcsak hasznos, de szemléletformáló is lehet.

14. Irodalomjegyzék

ADLEMAN, L. M.

1998 Computing with DNA. *Scientific American* 279. 2. 54–61.

ADLER, I.–ERERA, A. L.–HOCHBAUM, D. S.–OLINICK, E. V.

2002 Baseball, optimization, and the world wide web. *Interfaces* 32. 2. 12–22.

ANDERSON, L. R.–HOLT, C. A.

1996 Classroom games: Information cascades. *Journal of Economic Perspectives* 10. 4. 187–193.

ANDERSON, L. R.–HOLT, C. A.

1997 Information cascades in the laboratory. *The American Economic Review* 847–862.

ANDRÁSFAL, B.

1983 *Gráfelmélet: Folyamok, mátrixok*. Budapest, Akadémiai Kiadó.

ANSHELEVICH, E.–DASGUPTA, A.–KLEINBERG, J.–TARDOS, É.–WEXLER, T.–ROUGHGARDEN, T.

2008 The price of stability for network design with fair cost allocation. *SIAM Journal on Computing* 38. 4. 1602–1623.

ANTAL, T.–KRAPIVSKY, P. L.–REDNER, S.

2006 Social balance on networks: The dynamics of friendship and enmity. *Physica D: Nonlinear Phenomena* 224. 1–2. 130–136.

ASSUNÇÃO, R. M.–NEVES, M. C.–CÂMARA, G.–DA COSTA FREITAS, C.

2006 Efficient regionalization techniques for socio-economic geographical units using minimum spanning trees. *International Journal of Geographical Information Science* 20. 7. 797–811.

AU, A.

2023 A Theoretical Examination of Homophily Beyond Focus Theory: Causes, Consequences, and New Directions. *Sage Open* 13. 2.

BARABASI LAB.

é. n. URL: <https://barabasi.com/science/publications#who-supports-american-art-museums-introducing-a-new-dataset-and-data-sources-about-museum-funding> [2025. április 3.]

BARABÁSI, A. L.–SHEKHTMAN, L.

2023 Who Supports American Art Museums? Introducing a New Dataset and Data Sources about Museum Funding. *Panorama Journal of the Association of Historians of American Art* 9.

BBC.

2015 *The Secret Rules of Modern Living: Algorithms*. BBC Four. URL: <https://www.bbc.co.uk/programmes/p030s6b3> [2025. április 3.]

BEARMAN, P. S.–MOODY, J.–STOVEL, K.

2004 Chains of affection: The structure of adolescent romantic and sexual networks. *American Journal of Sociology* 110. 1. 44–91.

BERNERS-LEE, T.

1999 *Weaving the Web: The original design and ultimate destiny of the World Wide Web by its inventor*. San Francisco, Harper.

BERNERS-LEE, T.–CAILLIAU, R.–LUOTONEN, A.–NIELSEN, H. F.–SECRET, A.

1994 The world-wide web. *Communications of the ACM* 37. 8. 76–82.

BRIN, S.–PAGE, L.

1998 The anatomy of a large-scale hypertextual web search engine. *Computer Networks and ISDN Systems* 30. 1–7. 107–117.

BRODER, A.–KUMAR, R.–MAGHOUL, F.–RAGHAVAN, P.–RAJAGOPALAN, S.–STATTA, R.–WIENER, J.

2000 Graph structure in the web. *Computer Networks* 33. 1–6. 309–320.

BROWNE, M.

2013 Computer scientists find new shortcuts to traveling salesman problem. *Quanta Magazine* January 29. URL: <https://www.quantamagazine.org/computer-scientists-find-new-shortcuts-to-traveling-salesman-problem-20130129/>

BULDÚ, J. M.–BUSQUETS, J.–ECHEGOYEN, I.–SEIRUL. lo, F.

2019 Defining a historic football team: Using Network Science to analyze Guardiola's FC Barcelona. *Scientific Reports* 9. 1. 13602.

BURROWS, E. G.

1937 *Western Polynesia: A study in cultural differentiation*. Yale University.

BUSH, V.

1945 As we may think. *The Atlantic Monthly* 176. 1. 101–108.

CAIRNS, R. B.–CAIRNS, B. D.

1994 *Lifelines and risks: Pathways of youth in our time*. Cambridge University Press.

CAYLEY-formula

é. n. URL: <https://hu.wikipedia.org/wiki/Cayley-formula> [2025. április 3.]

CEDER, A. A.–PERERA, S.

2014 Detecting and improving public-transit connectivity with case studies of two world sport events. *Transport Policy* 33. 96–109.

CHRISTAKIS, N. A.–FOWLER, J. H.

2007 The spread of obesity in a large social network over 32 years. *New England Journal of Medicine* 357. 4. 370–379.

COHEN, J. M.

1977 Sources of peer group homogeneity. *Sociology of Education* 227–241.

COLEMAN, J. S.–MENZEL, H.–KATZ, E.

1966 *Medical innovations: A diffusion study*. Bobbs-Merrill.

- COMPEAU, P. E.–PEVZNER, P. A.–TESLER, G.
2011 How to apply de Bruijn graphs to genome assembly. *Nature Biotechnology* 29. 11. 987–991.
- COMPEAU, P.–PEVZNER, P.
2018 *Bioinformatics algorithms: An active learning approach* (3. kiadás). Active Learning Publishers.
- DAVIS, I.
2005 Talis, Web 2.0, and all that. *Internet Alchemy*, July 4. URL: <http://internetalchemy.org/2005/07/talis-web-20-and-all-that>
- DEVILLERS, J.–DORÉ, J. C.
1989 Heuristic potency of the minimum spanning tree (MST) method in toxicology. *Ecotoxicology and Environmental Safety* 17. 2. 227–235.
- DU SAUTOY, M. (Presenter)
2015 The Secret Rules of Modern Living: Algorithms [Television broadcast]. *BBC Four* szeptember 24. URL: <https://www.bbc.co.uk/programmes/p030s6b3>
- DUCH, J.–WAITZMAN, J. S.–AMARAL, L. A. N.
2010 Quantifying the performance of individual players in a team activity. *PloS one* 5. 6. e10937.
- EASLEY, D.–KLEINBERG, J.
2010 *Networks, crowds, and markets: Reasoning about a highly connected world* (Vol. 1). Cambridge, Cambridge University Press.
- FELD, S. L.
1981 The focused organization of social ties. *American Journal of Sociology* 86. 5. 1015–1035.
- GALLO, G.–GRIGORIADIS, M. D.–TARJAN, R. E.
1989 A fast parametric maximum flow algorithm and applications. *SIAM Journal on Computing* 18. 1. 30–55.
- GAREY, M. R.–JOHNSON, D. S.
1979 *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. W. H. Freeman & Co.
- GIRVAN, M.–NEWMAN, M. E. J.
2002 Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 99. 12. 7821–7826. URL: <https://doi.org/10.1073/pnas.122653799>
- GOULD, P.–GATRELL, A.
1979 A structural analysis of a game: the Liverpool v Manchester United Cup Final of 1977. *Social Networks* 2. 3. 253–273.
- GRAHAM, R. L.
1979 On properties of a well-known graph, or, What is your Ramsey number? *Annals of the New York Academy of Sciences* 328. 1. 166–172.

GRANOVETTER, M.

1973 The strength of weak ties. *American Journal of Sociology* 78. 6. 1360–1380.

GRANOVETTER, M.

1974 *Getting a job: A study of contacts and careers*. University of Chicago Press.

GROSSMAN, J. W.–ION, P. D. F.

1995 On a portion of the well-known collaboration graph. *Congressus Numerantium* 108, 129–131.

GUARE, J.

1990 *Six degrees of separation: A play*. Vintage Books.

GUHA, R.–KUMAR, R.–RAGHAVAN, P.–TOMKINS, A.

2004 Propagation of trust and distrust. In: *Proceedings of the 13th international conference on World Wide Web*, május, 403–412.

GUSFIELD, D.–MARTEL, C.

1992 A fast algorithm for the generalized parametric minimum cut problem and applications. *Algorithmica* 7. 1–6. 499–519.

HAGE, P.–HARARY, F.–JAMES, B.

1996 The minimum spanning tree problem in archaeology. *American Antiquity* 61. 1. 149–155.

HARRISON, C.–RÖMHILD, C.

2007 Bible cross-references [Arc diagram visualization]. *BibleViz*. URL: <https://www.chrisharrison.net/index.php/visualizations/BibleViz> [2025. április 3.]

HEIDER, F.

1946 Attitudes and cognitive organization. *Journal of Psychology* 21. 1. 107–112.

HOFFMAN, A.–RIVLIN, T.

1967 When is a team “mathematically” eliminated? In: *Proceedings of the Princeton Symposium on Mathematical Programming*. Princeton University, 391–401.

ICOSIAN-game

é. n. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Icosian_game [2025. április 3.]

ILIC, B.–YANG, Y.–AUBIN, K.–REICHENBACH, R.–KRYLOV, S.–CRAIGHEAD, H. G.

2005 Enumeration of DNA molecules bound to a nanomechanical oscillator. *Nano Letters* 5. 5. 925–929.

IRWIN, G.

1992 *The prehistoric exploration and colonisation of the Pacific*. Cambridge University Press.

KANDEL, D. B.

1978 Homophily, selection, and socialization in adolescent friendships. *American Journal of Sociology* 84. 2. 427–436.

- KANDEL, D. B.
2017 Homophily, selection, and socialization in adolescent friendships 1. In: *Interpersonal development*. Routledge, 249–258.
- KARINTHY F.
1929 *Minden másképpen van: Ötvenkét vasárnap*. Athenaeum. Magyar Elektronikus Könyvtár. URL: <http://mek.oszk.hu/15500/15588>
- KÁTAI, Z.
2008 *Gráfelméleti algoritmusok*. Kolozsvár, Scientia kiadó.
- KHACHATRYAN, T.
2024 How the CIA used network science to win wars. *Data Science Collective* július 16. URL: <https://geometrein.medium.com/how-the-cia-used-network-science-to-win-wars-d25177d612af>
- KLEINBERG, J. M.
1999 Authoritative sources in a hyperlinked environment. *Journal of the ACM (JACM)* 46. 5. 604–632.
- KOSSINETS, G.–WATTS, D. J.
2006 Empirical analysis of an evolving social network. *Science* 311. 5757. 88–90.
- KÖNIGSBERGI-hidak-problémája.
é. n. URL: https://hu.wikipedia.org/wiki/A_k%C3%B6nigsbergi_hidak_probl%C3%A9m%C3%A1ja [2025. április 3.]
- KREBS, V. E.
2002 Mapping networks of terrorist cells. *Connections* 24. 3. 43–52.
- KUHN, H. W.
1955 The Hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly* 2. 1–2. 83–97.
- KYI, M. T.–NAING, L. L.
2018 Application of Ford-Fulkerson algorithm to maximum flow in water distribution pipeline network. *International Journal of Scientific and Research Publications* 8. 12. 306–310.
- LEE, S. U.
2020 Simple algorithm for baseball elimination problem. *The Journal of the Institute of Internet, Broadcasting and Communication* 20. 3. 147–152.
- LESKOVEC, J.–HORVITZ, E.
2008 Worldwide buzz: Planetary-scale views on an instant messaging network. In: *Proceedings of the 17th International World Wide Web Conference*. ACM.
- LOVÁSZ, L.–PLUMMER, M. D.
1986 *Matching Theory, vol. 29. Annals of Discrete Mathematics*, North-Holland, Amsterdam.
- MARVEL, S. A.–MARTIN, T.–DOERING, C. R.–LUSSEAU, D.–NEWMAN, M. E.
2013 *The small-world effect is a modern phenomenon*. arXiv preprint arXiv:1310.2636.

MCCORMICK, S. T.

1999 Fast algorithms for parametric scheduling come from extensions to parametric maximum flow. *Operations Research* 47. 5. 744–756.

MILGRAM, S.

1967 The small-world problem. *Psychology Today* 2. 1. 60–67.

MONTAGUE, P. R.–BERNS, G. S.–COHEN, J. D.–MCCLURE, S. M.–PAGNONI, G.–DHAMALA, M.–FISHER, R. E.

2002 Hyperscanning: simultaneous fMRI during linked social interactions. *Neuroimage* 16. 4. 1159–1164.

MOODY, J.

2001 Race, school integration, and friendship segregation in America. *American Journal of Sociology* 107. 3. 679–716.

MÖBIUS, M. M.–ROSENBLAT, T. S.

2001 *The process of ghetto formation: Evidence from Chicago*. Unpublished paper, Harvard University and NBER. [242].

NATIONAL HUMAN GENOME RESEARCH INSTITUTE (NHGRI).

é. n. *Human Genome Project*. *Genome.gov*. URL: <https://www.genome.gov/about-genomics/educational-resources/fact-sheets/human-genome-project>

NELSON, T.

1981 *Literary machines*. Mindful Press.

NETO, E. P.–CALLOU, G.

2015 An approach based on ford-fulkerson algorithm to optimize network bandwidth usage. In: *Brazilian Symposium on Computing Systems Engineering (SBESC)*, 2015. november, 76–79. IEEE.

NEWMAN, M. E. J.–GIRVAN, M.

2004 Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E* 69. 2. 026113. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.69.026113>

NIELSEN, J.

1990 The art of navigating through hypertext. *Communications of the ACM* 33. 3. 296–310.

NURK, S.–KOREN, S.–RHIE, A.–RAUTIAINEN, M.–BZIKADZE, A. V.–MIKHEENKO, A.–PHILLIPPY, A. M.

2022 The complete sequence of a human genome. *Science* 376. 6588. 44–53.

ONNELA, J. P.–SARAMÄKI, J.–HYVÖNEN, J.–SZABÓ, G.–LAZER, D.–KASKI, K.–BARABÁSI, A. L.

2007 Structure and tie strengths in mobile communication networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 104. 18. 7332–7336.

ONNELA, J. P.–SARAMÄKI, J.–HYVÖNEN, J.–SZABÓ, G.–LAZER, D.–KASKI, K.–BARABÁSI, A. L.

2007 Structure and tie strengths in mobile communication networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences* 104. 18. 7332–7336.

- PIKE, R.–LU, G.–WANG, D.–CHEN, Z. G.–FEI, B.
2015 A minimum spanning forest-based method for noninvasive cancer detection with hyperspectral imaging. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 63. 3. 653–663.
- ROBINSON, L. W.
1991 Baseball playoff eliminations: An application of linear programming. *Operations Research Letters* 10. 2. 67–74.
- ROGERS, E. M.
1995 *Diffusion of innovations* (4th ed.). Free Press.
- ROUGHGARDEN, T.–TARDOS, É.
2002 How bad is selfish routing? *Journal of the ACM (JACM)* 49. 2. 236–259.
- RUSSELL, T.–VAN BEEK, P.
2009 Determining the number of games needed to guarantee an NHL playoff spot. In *Integration of AI and OR Techniques in Constraint Programming for Combinatorial Optimization Problems: 6th International Conference, CPAIOR 2009 Pittsburgh, PA, USA, May 27–31. Proceedings* 6. 233–247. Springer, Berlin–Heidelberg.
- RYAN, B.–GROSS, N. C.
1943 The diffusion of hybrid seed corn in two Iowa communities. *Rural Sociology* 8. 1. 15.
- SCHELLING, T. C.
1971 Dynamic models of segregation. *Journal of Mathematical Sociology* 1. 2. 143–186.
- SCHELLING, T. C.
2006 *Micromotives and macrobehavior*. WW Norton & Company.
- SCHWARTZ, B. L.
1966 Possible winners in partially completed tournaments. *SIAM Review* 8. 3. 302–308.
- SEDEGEWICK, R.
2002 *Computer Science 226: Data Structures and Algorithms*, Spring 2003. Princeton University. URL: <https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spr03/cos226/assignments/baseball.html> [2025. április 3.]
- SEDEGEWICK, R.–WAYNE, K.
é. n. *Algorithms, 4th edition: 4.3 Minimum Spanning Trees*. Princeton University. URL: <https://algs4.cs.princeton.edu/43mst/> [2025. április 3.]
- STORK
é. n. Citation Network. In: *Stork: Powerful algorithms for publication tracking*. URL: https://www.storkapp.me/marketing/templates/Stork1/citenet_en.php [2025. április 3.]

STRING Consortium.

é. n. *Protein-protein interaction network for *Saccharomyces cerevisiae* [Interactive network visualization]*. URL: <https://string-db.org/cgi/network?taskId=b1GDgY5bYZaY&sessionId=bnhNutA9mVIJ> [2025. április 3.]

SUROWIECKI, J.

2004 *The wisdom of crowds: Why the many are smarter than the few and how collective wisdom shapes business, economies, societies and nations*. Little, Brown.

TAPIA, E.–ROJAS, R.

2003 Recognition of on-line handwritten mathematical expressions using a minimum spanning tree construction and symbol dominance. In *International workshop on graphics recognition, július, 329–340*. Berlin–Heidelberg, Springer.

TIAN, L.–HE, Y.–LIU, H.–XIANG, X.–LIU, J.–LI, D.

2017 Articulation points in complex networks. *Nature Communications* 8. 14223. URL: <https://doi.org/10.1038/ncomms14223>

TRAVERS, J.–MILGRAM, S.

1969 An experimental study of the small world problem. *Sociometry* 32. 4. 425–443.

TU, W. C.–HE, S.–YANG, Q.–CHIEN, S. Y.

2016 Real-time salient object detection with a minimum spanning tree. In: *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2334–2342.

WALLIS, C. B.–SAMY, K. P.–ROTH, A. E.–REES, M. A.

2011 Kidney paired donation. *Nephrology Dialysis Transplantation* 26. 7. 2091–2099.

WATTS, D. J.–STROGATZ, S. H.

1998 Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature* 393. 6684. 440–442.

WAYNE, K.

2004 Max flow, min cut (Lecture notes). Princeton University, COS 226: Algorithms and Data Structures. <https://www.cs.princeton.edu/courses/archive/spr04/cos226/lectures/maxflow.4up.pdf>

WAYNE, K. D.

2001 A new property and a faster algorithm for baseball elimination. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 14. 2. 223–229.

ZACHARY, W. W.

1977 An information flow model for conflict and fission in small groups. *Journal of Anthropological Research* 33. 4. 452–473.

A függelék: alapalgoritmusok

Amint a könyv első fejezetében jeleztük, a gráfelmélet témáját gyakorlati-entált megközelítésben tárgyaltuk: a fogalmakat nem elvont definícióként, hanem valós jelenségek kontextusába ágyazva mutattuk be, különös hangsúlyt fektetve a gráfok algoritmikus szemléletére. Bár a főszöveg törekedett arra, hogy érzékeltesse a módszerek algoritmikai hátterét, a konkrét implementációs részletek ismertetését – néhány indokolt kivételtől eltekintve – tudatosan mellőztük. Ennek oka, hogy a könyv fókuszja elsősorban az alkalmazásorientált gondolkodásmód kialakítása volt, nem pedig a kódszintű kivitelezés. Ez a függelék e hiány pótlására vállalkozik: célja, hogy néhány alapvető gráfalgoritmus esetében részletesebb algoritmikai betekintést nyújtson, és a megvalósítás iránt érdeklődő olvasónak C++ nyelvű implementációs ötletekkel is szolgáljon. Az összetettebb vagy elmélyültebb algoritmusok megértéséhez azonban továbbra is azokat a forrásműveket ajánljuk, amelyeket a könyv megfelelő részeiben hivatkozásként megadtunk.

1. Gráfok ábrázolása a memóriában

A gráfok memóriában való ábrázolására leggyakrabban szomszédsági mátrixot, szomszédsági listát vagy éllistát használunk. Az alábbi C++ kódrészlet ezek felépítését mutatja be irányítatlan gráfok esetében. A bemeneti állomány első sora a gráf pontjainak és éleinek számát tartalmazza, majd ezt követően az éllista szerepel soronként, egy-egy él csúcspárjával.

- A szomszédsági mátrix egy **$n \times n$ -es kétdimenziós tömb**, ahol n a csúcsok száma. Az `adjMatrix[i][j]` értéke 1, ha van él az i és j csúcs között, egyébként 0.
- A szomszédsági lista egy **vektor tömb**, ahol az `adjList[i]` lista tartalmazza az i csúcshoz közvetlenül kapcsolódó csúcsokat (azaz szomszédokat).
- Az éllista egy **élpárokból** (u, v) álló vektor vagy tömb, amely felsorolja a gráf összes élet.

C++ kódrészlet

```
const int MAX_N = 100; // maximális csúcsszám, például 100

int adjMatrix[MAX_N + 1][MAX_N + 1] = {0};           // szomszédsági mátrix
vector<int> adjList[MAX_N + 1];                       // szomszédsági lista
vector<pair<int, int>> edgeList;                      // éllista

int main() {
    ifstream infile("graph.txt");
```

```

int n, m;
infile >> n >> m;

int u, v;
for (int i = 0; i < m; ++i) {
    infile >> u >> v;

    //Szomszédsági mátrix
    adjMatrix[u][v] = 1;
    adjMatrix[v][u] = 1;

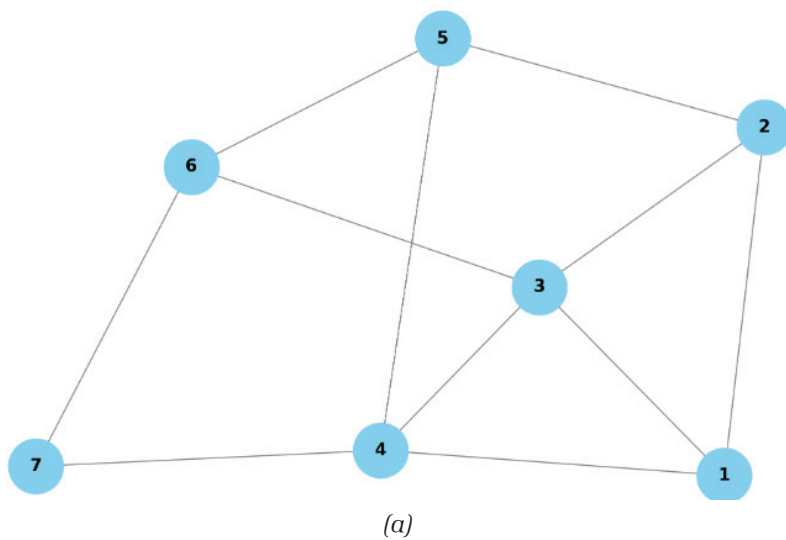
    //szomszédsági lista
    adjList[u].push_back(v);
    adjList[v].push_back(u);

    if (u > v) swap(u, v); //mindig a kisebb legyen elől
    edgeList.push_back({u, v});
}

infile.close();
}

```

A 15.1. ábra egy példagráfon mutatja be a három adatszerkezetet.



	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0
3	1	1	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	1	0
6	0	0	1	0	1	0	1
7	0	0	0	1	0	1	0

(b)

1:	2	3	4	
2:	1	3	5	
3:	1	2	4	6
4:	1	3	5	7
5:	2	4	6	
6:	3	5	7	
7:	4	6		

(c)

(1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 3) (2, 5) (3, 4) (3, 6) (4, 5) (4, 7) (5, 6) (6, 7)

(d)

15.1. ábra. Az 1.5. ábra bemutatta gráf (a) szomszédsági mátrixa (b), szomszédsági listája (c) és éllistája (d)

Írányított gráf esetén az élek regisztrálása a három adatszerkezetben az alábbi módon történik:

```
for (int i = 0; i < m; ++i) {
    infile >> u >> v;

    //szomszédsági mátrix
    adjMatrix[u][v] = 1;

    //szomszédsági lista
    adjList[u].push_back(v);

    //éllista
    edgeList.push_back({u, v});
}
```

2. Szélességi bejárás (BFS)

A BFS egy gráfbejárás algoritmus, amely egy adott kezdőcsúcsból indulva szintenként halad, azaz először a kiindulási csúcsához közvetlenül kapcsolódó csúcsokat látogatja meg, majd azok szomszédait, és így tovább. A bejárás során egy sor (*queue*) adatszerkezetet használ, amely biztosítja, hogy a legkorábban felfedezett csúcsokat dolgozza fel először. Időbonyolultsága $O(n + m)$, ahol n a csúcsok, m az élek száma. (A gráfot szomszédsági listaként tárolja.)

C++ kódrészlet

```
vector<int> adjList[MAX_N + 1]; //szomszédsági lista
bool visited[MAX_N + 1];      //látogatottság jelző
```

```

void bfs(int start) {
    queue<int> q;
    visited[start] = true;
    q.push(start);

    cout << "BFS bejárás sorrendje: ";

    while (!q.empty()) {
        int u = q.front();
        q.pop();
        cout << u << " ";

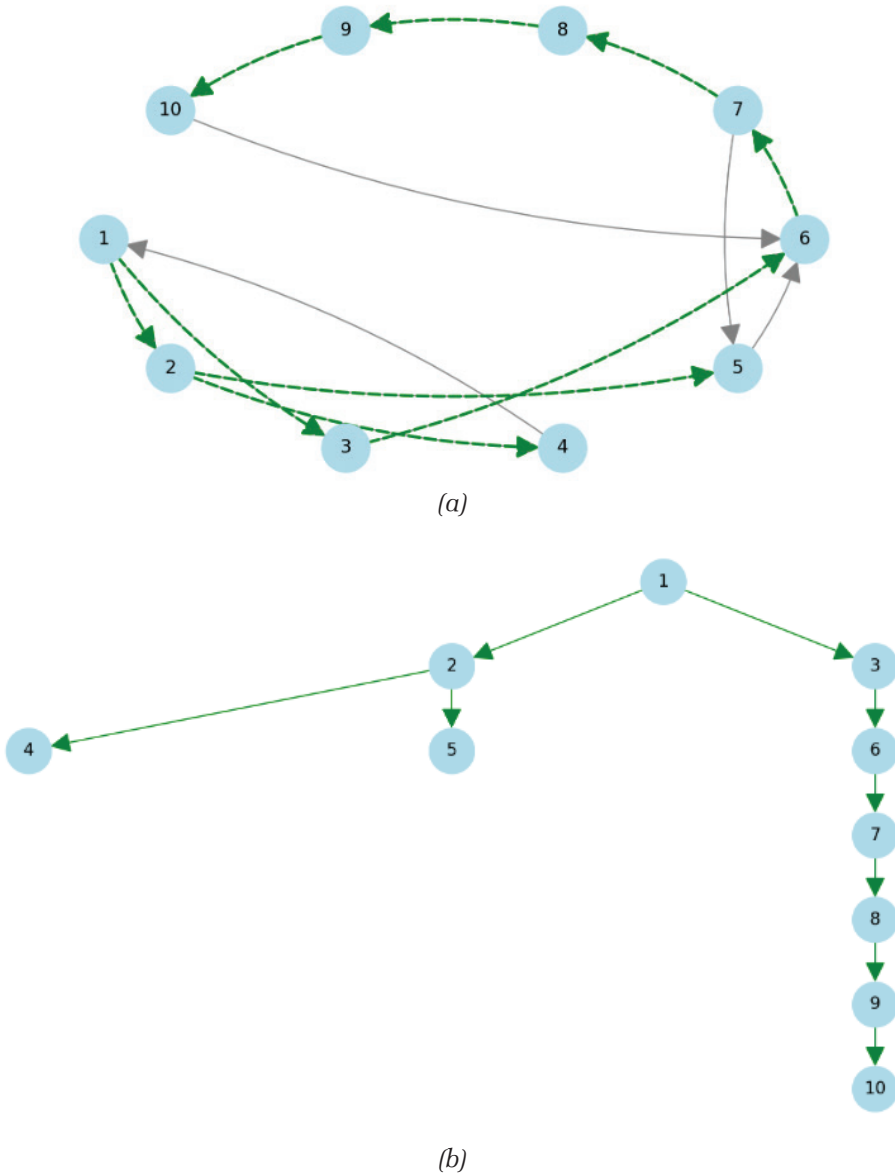
        for (int v : adjList[u]) {
            if (!visited[v]) {
                visited[v] = true;
                q.push(v);
            }
        }
    }

    cout << endl;
}

```

A BFS hatékonyan alkalmazható legrövidebb utak (távolságok) meghatározására nem súlyozott gráfokban, mivel rétegenként haladva garantálja, hogy egy csúcstól mindig a legrövidebb úton ér el a kiindulási pontból. Minden csúcshoz hozzárendelünk egy távolságértéket, amely kezdetben végtelen, kivéve a kezdőcsúcstól, amelyhez nullát rendelünk. Ezután minden szomszédos csúcs távolsága az aktuális csúcs távolsága plusz 1 lesz. A BFS garantálja, hogy egy csúcstól először mindig a lehető legkevesebb él érintésével érünk el, így a hozzá tartozó távolságérték valóban a minimális lépésszámot tükrözi.

A BFS-algoritmussal könnyedén ellenőrizhető egy gráf párossága is, azaz hogy a gráf két részre osztható-e úgy, hogy minden él két különböző részhalmazba tartozó csúcstól köt össze. Ezt a BFS során úgy végezzük, hogy minden csúcstól egy kétértékű színnel (pl. 0 és 1) megjelölünk, kezdve egy tetszőleges csúccsal. Ezután a bejárás során minden szomszédos csúcshoz ellentétes színt adunk, mint az aktuális csúcshoz. Ha a folyamat során olyan élhez jutunk, amely két azonos színű csúcstól köt össze, akkor a gráf nem páros (azaz nem kétszínézhető). Ha ez a bejárás minden komponensre sikeresen végrehajtható ellentmondás nélkül, akkor a gráf páros.



15.2. ábra. Szélességi bejárás: (a) példagráf; (b) szélességi fa (amennyiben az 1-es csúcsból indulunk). A megfelelő BFS-pontsorrend: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

3. Mélységi bejárás (DFS)

A DFS egy gráfbejárési algoritmus, amely egy kiinduló csúcsból indulva mindig a lehető legmélyebbre halad a szomszédos csúcsok mentén, mielőtt visszalépne és más útvonalakat is felfedezne. A bejárás jellemzően rekurzióval vagy verem (*stack*) segítségével történik, és minden csúcsot egyszer látogat meg. Az algoritmus időbonyolultsága $O(n + m)$, ahol n a csúcsok, m az élek száma.

Az alábbi *dfs* függvény egyetlen összefüggő komponens bejárását valósítja meg. Ha a gráf nem összefüggő, akkor a *dfs* függvényt egy ciklusban minden komponens kezdőcsúcsára külön kell meghívni. Ebből adódóan a DFS-stratégia kiválóan alkalmas egy gráf összefüggőségének vizsgálatára, illetve az összefüggő komponensek meghatározására.

C++ kódrészlet

```
vector<int> adjList[MAX_N + 1]; //szomszédsági lista
bool visited[MAX_N + 1];      //látogatottság jelző

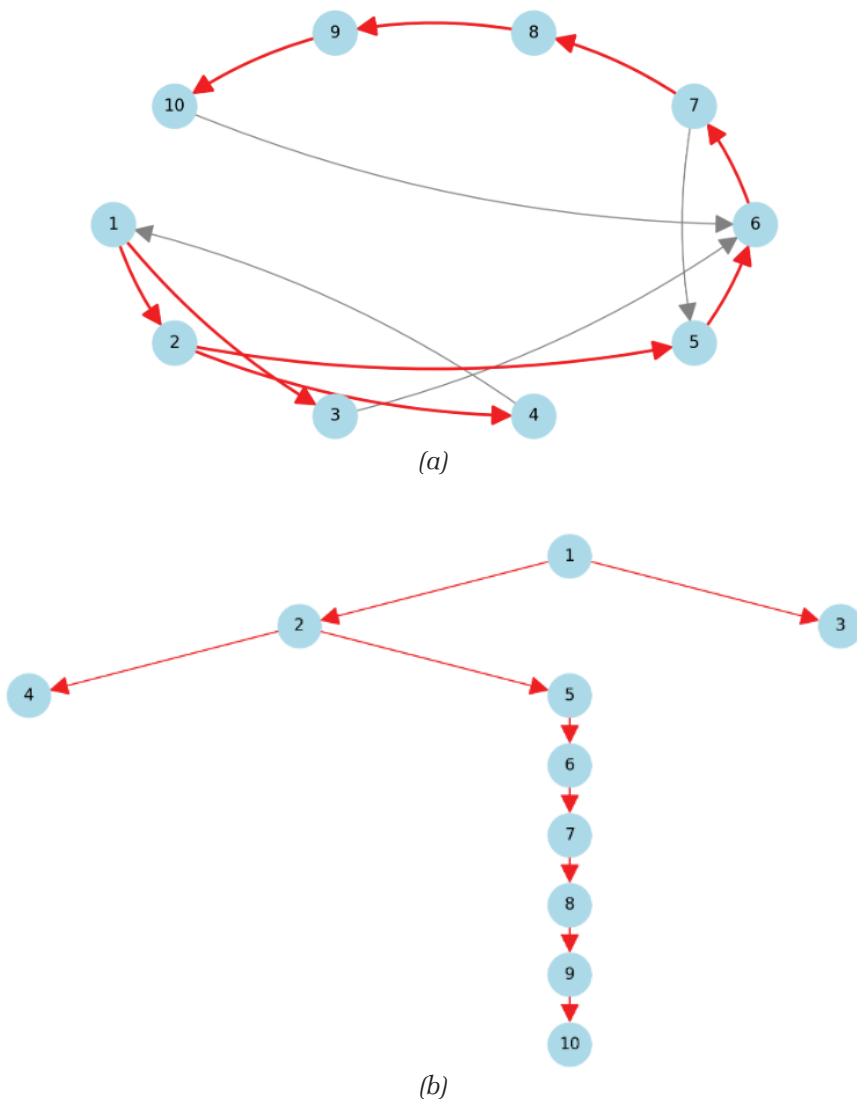
void dfs(int u) {
    visited[u] = true;
    cout << u << " "; //bejárési sorrend kiírása

    for (int v : adjList[u]) {
        if (!visited[v]) {
            dfs(v); //rekurzív hívás szomszédra
        }
    }
    //topo_order.push_back(u);
}
```

Ha a csúcsokat a *dfs* függvény végén írjuk ki (azaz a rekurzív hívások után), akkor irányított körmentes gráf (DAG) esetén a csúcsok egy topologikus sorrendjét kapjuk meg fordított sorrendben (kommentként szerepel az alábbi kódrészletben). A *topologikus sorrend* a gráf olyan lineáris rendezése, ahol minden irányított él (u, v) esetén u megelőzi v -t a sorozatban. Ez különösen hasznos függőségi viszonyok kezelésében.

Egy irányított gráf *erősen összefüggő komponensei* olyan maximális csúcshalmazok (a köztük futó élekkel), amelyekben bármely két csúcs között létezik irányított út mindkét irányban. Ezek meghatározására hatékony módszer a kétlépéses DFS-alapú algoritmus, amely az eredeti és a transzponált gráfon dolgozik. Először végrehajtunk egy mélységi keresést az eredeti gráfon, és minden csúcsot rögzítünk a bejárás befejezési sorrendjében. Ezután a gráf transzponáltját képezzük úgy, hogy

az élek irányát megfordítjuk, majd egy második DFS-t futtatunk a korábban kapott sorrend („topologikus” sorrend) alapján. A második keresés minden új indítása egy önálló, erősen összefüggő komponenst ad. Ez az eljárás a Kosaraju-algoritmus néven ismert, és időbonyolultsága $O(n + m)$, ahol n a csúcsok, m az élek száma.



15.3. ábra. Mélységi bejárás: (a) példagráf; (b) mélységi fa (amennyiben az 1-es csúcsból indulunk). A megfelelő DFS-pontsorrend: 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 3

4. Hidak (elvágóélek)

Egy *elvágóél* (vagy *híd*) egy olyan él egy irányítatlan gráfban, amelynek eltávolítása szétszakítja a gráfot, azaz növeli az összefüggő komponensek számát. Egy DFS során az éleket a bejárás módja alapján osztályozhatjuk. Irányítatlan gráfban két típusú élt különböztetünk meg:

- faél: olyan él, amelyet a DFS használ arra, hogy eljusson egy még nem látogatott csúcsba;
- visszamutató él: olyan él, amely egy csúcsot köt össze egy már látogatott őseivel, de nem a közvetlen szülőjével.

Az alábbi DFS algoritmus célja, hogy minden faélhez megállapítsa, vajon ilyen elvágóél-e. DFS során minden csúcs kapcsán két időt vezetünk:

- *tin[u]*: mikor fedeztük fel *u*-t (DFS időbélyeg);
- *low[u]*: a legkorábbi idő, ahová *u* „eljut” visszaél(ek)en keresztül (belőle és leszármazottjaitól induló visszaélek révén).

Ha egy (u, v) faél esetében $tin[u] < low[u]$, akkor az él híd, mert *v* nem tud visszajutni *u*-hoz vagy *u* őseihez más úton. (Ellenkező esetben az (u, v) él körön van, ami kizárja, hogy elvágó él legyen.)

Vegyük észre, hogy ha a DFS bejárás nem detektál egyetlen visszaélet sem, akkor ez az jelenti, hogy a gráf *körmentes*.

C++ kódrészlet

```
vector<int> adj[MAX_N];
bool visited[MAX_N];
int tin[MAX_N], low[MAX_N];
int timer;
vector<pair<int, int>> bridges;

void dfs(int u, int parent = -1) {
    visited[u] = true;
    tin[u] = low[u] = timer++;
    for (int v : adj[u]) {
        if (v == parent) continue;
        if (visited[v]) {
            //visszaél
            low[u] = min(low[u], tin[v]);
        } else {
            dfs(v, u);
            low[u] = min(low[u], low[v]);
            if (low[v] > tin[u]) {
                bridges.push_back({u, v});
            }
        }
    }
}
```



```

    }
}
int main() {
    ...
    timer = 0;
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        if (!visited[i]) {
            dfs(i);
        }
    }
    cout << "Elvágó élek:\n";
    for (auto [u, v] : bridges) {
        cout << u << " - " << v << "\n";
    }
    return 0;
}

```

5. Artikulációs pontok (elvágópontok)

Az *elvágópontok* (más néven *artikulációs pontok*) egy irányítatlan gráf azon csúcsai, amelyek eltávolítása a gráf összefüggő komponenseinek számát megnöveli, vagyis szétválasztja a gráfot. Az elvágópontok meghatározására mélységi keresésen (DFS) alapuló algoritmus alkalmazható, amely minden csúcshoz hozzárendeli annak belépési idejét (*tin*) és a legkorábbi csúcsot, azaz időpontot (*low*), amely elérhető visszaélen keresztül a leszármazottai közül. Ha egy *u* csúcs valamely *v* gyermekére teljesül, hogy $low[v] \geq tin[u]$, és *u* nem a DFS gyökere, akkor *u* elvágópont. A DFS gyökere akkor elvágópont, ha legalább két különböző gyermek komponens indul belőle.

C++ kódrészlet

```

vector<int> adj[MAX_N];
bool visited[MAX_N];
int tin[MAX_N], low[MAX_N];
int timer;
set<int> articulation_points;

void dfs(int u, int parent = -1) {
    visited[u] = true;
    tin[u] = low[u] = timer++;
    int children = 0;
    for (int v : adj[u]) {
        if (v == parent) continue;
        if (visited[v]) {
            //Visszaél

```

```

        low[u] = min(low[u], tin[v]);
    } else {
        dfs(v, u);
        low[u] = min(low[u], low[v]);
        if (low[v] >= tin[u] && parent != -1) {
            articulation_points.insert(u);
        }
        ++children;
    }
}

// külön szabály a gyökérpontra (ha legalább 2 gyereke van)
if (parent == -1 && children > 1) {
    articulation_points.insert(u);
}
}

```

Az elvágóél és az elvágópont algoritmusok közötti lényegi különbség abban rejlik, hogy az elvágóél felismerésének feltétele, hogy (u, v) egy él esetén $low[v] > tin[u]$, míg az elvágópontnál a feltétel $low[v] \geq tin[u]$, figyelembe véve, hogy u nem gyökércsúcs, illetve a gyökér esetén legalább két külön gyermek kell.

Mindkét algoritmus során minden csúcstól egyszer vizsgálunk meg, így időbonyolultságuk lineáris: $O(n + m)$, ahol n a csúcsok és m az élek száma.

6. Kruskal-algoritmus

A Kruskal-algoritmus egy súlyozott, irányítatlan gráf minimális feszítőfájának (MST) meghatározására szolgál. Az algoritmus első lépésként növekvő súly szerint rendezi az éleket, majd sorban végigvizsgálja őket (mohó stratégia). Minden él esetén megállapítja, hogy a két végpontja különböző komponenshez tartozik-e. Ha igen, akkor az él nem zárna be kört, így bekerül a feszítőfába, és a két komponens egyesítésre kerül. A komponensek nyomon követését a hatékony Union-Find (disjoint-set) adatszerkezet végzi, amely find és union műveletekkel biztosítja, hogy a csúcshalmazok gyorsan lekérdezhetők és összefűzhetők legyenek. A strukturális optimalizációk – például útvonal-tömörítés és rangsorolás szerinti összefűzés – lehetővé teszik, hogy az algoritmus nagy gráfokra is hatékonyan alkalmazható legyen. A Kruskal-algoritmus helyes működése garantálja, hogy a kiválasztott élek halmaza valóban minimális súlyú feszítőfát alkot, az algoritmus időbonyolultsága pedig jellemzően $O(m \log m)$, ahol m az élek száma.

Az implementációs módszer kulcselemei:

- A gráfot súlyozott éllistaként ábrázoljuk (*edges[]*).
- A *parent[]* tömb tartja nyilván, hogy melyik csúcs melyik halmazba tartozik.
- A *find_set(u)* lekérdezi u gyökér-elemét (halmazazonosító).
- A *union_sets(u, v)* összevonja a két különböző halmazt.
- A *rank[]* tömb optimalizál: kisebb fát kapcsolunk a nagyobbhoz.

C++ kódrészlet

```

// eltárolás: (súly, csúcs1, csúcs2)
struct Edge {
    int u, v, weight;
    bool operator<(const Edge& other) const {
        return weight < other.weight;
    }
};

// Disjoint Set Union (DSU) - Union-Find szerkezet
vector<int> parent, rank;

void make_set(int n) {
    parent.resize(n + 1);
    rank.resize(n + 1, 0);
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        parent[i] = i;
}

int find_set(int u) {
    if (u != parent[u])
        parent[u] = find_set(parent[u]);
    return parent[u];
}

bool union_sets(int u, int v) {
    u = find_set(u);
    v = find_set(v);
    if (u == v)
        return false; //már egy komponensben vannak
    if (rank[u] < rank[v])
        swap(u, v);
    parent[v] = u;
    if (rank[u] == rank[v])
        ++rank[u];
    return true;
}

int main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m; //csúcsok és élek száma

```

230 ■ A függelék: alapelgoritmusok

```
vector<Edge> edges;
for (int i = 0; i < m; ++i) {
    int u, v, w;
    cin >> u >> v >> w; //él: u-v súlya: w
    edges.push_back({u, v, w});
}

//Kruskal-algoritmus
sort(edges.begin(), edges.end()); //élek súly szerint rendezve
make_set(n);

int total_weight = 0;
vector<Edge> mst;

for (const Edge& e : edges) {
    if (union_sets(e.u, e.v)) {
        mst.push_back(e);
        total_weight += e.weight;
    }
}

//eredmény kiírása
cout << "Minimális feszítőfa súlya: " << total_weight << "\n";
cout << "Élek a feszítőfában:\n";
for (const Edge& e : mst) {
    cout << e.u << " - " << e.v << " (" << e.weight << ")\n";
}

return 0;
}
```

7. Prim-algoritmus

A Prim-algoritmus egy másik klasszikus, mohó algoritmus, amely egy súlyozott, összefüggő, irányítatlan gráf minimális feszítőfájának (MST) meghatározására szolgál. Működésének lényege, hogy a feszítőfát fokozatosan építi fel: kezdetben kiválaszt egy tetszőleges kiinduló csúcsot, majd minden lépésben azt a legkisebb súlyú élt adja hozzá, amely egy már meglévő csúcsot köt össze egy még nem látogatottal. Ez garantálja, hogy az újonnan kiválasztott él nem zár be kört, és mindig a lehető legkisebb költséggel bővíti a részfát. Az algoritmus során általában egy prioritási sort (min-kupacot) használunk a még el nem ért csúcsok legkisebb súlyú éleinek nyilvántartására. Az algoritmus addig fut, amíg az összes csúcs fel nem került az MST-be. A Prim-algoritmus időbonyolultsága prioritási sorral megvalósítva $O((n + m) \log n)$, ahol n a csúcsok, m az élek száma.

C++ kódrészlet

```

const int INF = numeric_limits<int>::max();

typedef pair<int, int> PII; // (súly, csúcs)

int main() {
    int n, m;
    cin >> n >> m; // csúcsok és élek száma

    vector<vector<PII>> adj(n + 1); // szomszédsági lista: (szomszéd,
                                   súly)
    for (int i = 0; i < m; ++i) {
        int u, v, w;
        cin >> u >> v >> w;
        adj[u].emplace_back(v, w);
        adj[v].emplace_back(u, w); // irányítatlan gráf
    }

    vector<int> key(n + 1, INF); // legkisebb súly, amivel elérhető
    vector<bool> inMST(n + 1, false); // benne van-e már az MST-ben
    vector<int> parent(n + 1, -1); // melyik csúcsból jött

    priority_queue<PII, vector<PII>, greater<PII>> pq;

    int start = 1;
    key[start] = 0;
    pq.push({0, start});

    while (!pq.empty()) {
        int u = pq.top().second;
        pq.pop();

        if (inMST[u]) continue;
        inMST[u] = true;

        for (auto [v, weight] : adj[u]) {
            if (!inMST[v] && weight < key[v]) {
                key[v] = weight;
                parent[v] = u;
                pq.push({key[v], v});
            }
        }
    }
}

```

```

// kiírás
int total_weight = 0;
cout << "Élek a minimális feszítőfában:\n";
for (int v = 1; v <= n; ++v) {
    if (parent[v] != -1) {
        cout << parent[v] << " - " << v << " (súly: " << key[v]
<< ")\n";
        total_weight += key[v];
    }
}
cout << "Összsúly: " << total_weight << "\n";

return 0;
}

```

8. Viterbi-algoritmus

A legrövidebb utak meghatározása egy irányított, körmentes gráfban (directed acyclic graph, DAG) hatékonyan elvégezhető topologikus rendezés segítségével. Az algoritmus egy távolságtömböt tart fenn, amelyben minden csúcs kezdetben végtelen távolságra van a forrástól, kivéve a forráscsúcsot, amelynek távolsága 0. Az algoritmus először meghatározza a csúcsok topologikus sorrendjét, amely garantálja, hogy minden él kiinduló csúcса megelőzi a célcsúcsot a sorban. Ezután a csúcsokat ebben a sorrendben feldolgozva, minden él mentén egyszer végrehajtja az ún. relaxációt: ha egy él mentén rövidebb útra talál, frissíti a céltávolságot. Mivel a DAG nem tartalmaz köröket, minden csúcsot pontosan egyszer kell frissíteni, így az algoritmus időbonyolultsága $O(n + m)$, és még negatív élhosszokkal is biztonságosan működik, amennyiben nincsenek negatív körök (ami DAG-ban kizárt).

A topologikus sorrend felállítása után az alábbi kódrészlet állítja be a legrövidebb út értékeit. (A gráfot mint súlyozott szomszédsági listát tároljuk.)

C++ kódrészlet

```

vector<int> dist(n, INF);
dist[source] = 0;

// csúcsok feldolgozása topologikus sorrendben
while (!topo.empty()) {
    int u = topo.top();
    topo.pop();

    if (dist[u] != INF) {
        for (auto& [v, w] : adj[u]) { // w: az (u,v) él súlya

```

```

        if (dist[v] > dist[u] + w) {
            dist[v] = dist[u] + w;
        }
    }
}
}

```

9. Dijkstra-algoritmus

A Dijkstra-algoritmus célja a legrövidebb utak megtalálása egy forráscsúcsból kiindulva egy súlyozott gráf összes többi csúcsába, feltéve, hogy minden él súlya nem negatív. Ez az algoritmus is egy távolságtömböt tart fenn, amelyben minden csúcs kezdetben végtelen távolságra van a forrástól, kivéve a forráscsúcsot, amelynek távolsága 0. A feldolgozást egy prioritási sor (min-heap) segíti, amely mindig a jelenleg legkisebb távolságú csúcsot veszi elő. Minden kivett csúcs szomszédait vizsgálva az algoritmus megpróbál rövidebb utakat találni a relaxáció elvének megfelelően, és ha sikerrel jár, frissíti a távolságot, majd újra beilleszti a csúcsot a sorba. A folyamat addig folytatódik, amíg minden csúcsot fel nem dolgozunk. Az algoritmus időbonyolultsága $O((n + m) \log v)$ prioritási sor használatával és csak pozitív súlyú élek esetén garantáltan működik helyesen. (A gráfot mint súlyozott szomszédsági listát tároljuk.)

C++ kódrészlet

```

vector<int> dist(n, INF);
dist[source] = 0;

priority_queue<pair<int, int>, vector<pair<int, int>>, greater<>>
pq;

pq.push({0, source}); // {távolság, csúcs}

while (!pq.empty()) {
    int d = pq.top().first;
    int u = pq.top().second;
    pq.pop();

    if (d > dist[u]) continue; //már találtunk jobbat

    for (auto& [v, w] : adj[u]) {
        if (dist[v] > dist[u] + w) {
            dist[v] = dist[u] + w;
            pq.push({dist[v], v});
        }
    }
}
}

```

10. Bellman–Ford-algoritmus

A Bellman–Ford-algoritmus célja, hogy meghatározza a legrövidebb távolságokat egy forráscsúcsból egy súlyozott irányított gráf összes többi csúcsába, még akkor is, ha az élek súlya negatív. Az algoritmus az összes élen sorozatosan végighaladva, ismételt relaxációval frissíti a csúcsokhoz tartozó minimális távolságokat. Ezt a folyamatot legfeljebb $n - 1$ alkalommal hajtja végre, ahol n a csúcsok száma, mivel a leghosszabb körmentes út legfeljebb $n - 1$ élből állhat. Ezután egy plusz lépésben ellenőrzi, hogy van-e negatív súlyú kör a gráfban: ha egy él mentén még mindig rövidebb utat lehetne találni, akkor ilyen kör létezik. Az algoritmus időbonyolultsága $O(nm)$, tehát lassabb, mint a Dijkstra-módszer, viszont alkalmas negatív súlyok kezelésére is. (A gráfot mint súlyozott éllistát tároljuk.)

C++ kódrészlet

```
bool bellmanFord(int n, int source,
                 const vector<Edge>& edges,
                 vector<long long>& dist)
{
    dist.assign(n, INF);
    dist[source] = 0;

    //1. lépés: n-1 relaxáció
    for (int i = 0; i < n - 1; ++i) {
        bool updated = false;
        for (const auto& e : edges) {
            if (dist[e.u] != INF && dist[e.v] > dist[e.u] + e.w) {
                dist[e.v] = dist[e.u] + e.w;
                updated = true;
            }
        }
        if (!updated) break; // korai kilépés, ha nincs változás
    }

    //2. lépés: negatív súlyú kör detektálása
    for (const auto& e : edges) {
        if (dist[e.u] != INF && dist[e.v] > dist[e.u] + e.w)
            return false; //negatív kör található
    }
    return true; //nincs negatív kör
}
```


11. Floyd–Warshall-algoritmus

A Floyd–Warshall-algoritmus egy dinamikus programozáson alapuló módszer, amely minden csúcspárra kiszámítja a legrövidebb távolságot egy súlyozott irányított gráfban. A működése három egymásba ágyazott ciklusból áll, ahol minden (i, j) csúcspárra azt vizsgálja, hogy egy köztes k csúcson keresztül lerövidíthető-e az út, és ha igen, frissíti a $dist[i][j]$ értéket. Az algoritmus képes negatív élhosszakat is kezelni, de nem tud megbirkózni negatív súlyú körökkel, amelyeket úgy lehet észlelni, ha a $dist[i][i]$ érték valahol negatív lesz. Időigénye $O(n^3)$, ezért főként kisebb gráfoknál praktikus, viszont egyszerűsége és általánossága miatt jól használható algoritmus minden-csúcspár legrövidebb útjainak meghatározására.

A gráfot súlymátrixként tároljuk, azaz a $dist[i][j]$ tömbelem kezdetben az (i, j) él súlyát tartalmazza, és ha nincs ilyen él, akkor végtelent. A $dist[i][i]$ értékek kezdetben nyilván 0-k.

C++ kódrészlet

```
for (int k = 1; k <= n; ++k) {
    for (int i = 1; i <= n; ++i) {
        for (int j = 1; j <= n; ++j) {
            if (dist[i][k] < INF && dist[k][j] < INF)
                dist[i][j] = min(dist[i][j], dist[i][k] + dist[k]
[j]);
        }
    }
}
```

B függelék: algoritmikai kihívások

A főszöveg gyakorlatorientált szemléletét és az A függelék alapozó jellegét kiegészítve ez a függelék fejezetenként egy-egy, a tárgyalt témához szorosan kapcsolódó speciálisabb algoritmikai kihívást vesz górcső alá. Nem célja, hogy teljes implementációkat nyújtson, sokkal inkább az, hogy irányt mutasson a megvalósítás felé. Az olvasó minden esetben találkozhat a probléma megfogalmazásával, a felbontási stratégia ismertetésével, az alkalmazható adatstruktúrák mérlegelésével, valamint azokkal a C++ környezetben különösen hangsúlyos tervezési szempontokkal, amelyek a hatékonyság és az átláthatóság közötti egyensúly megtalálását segítik. Ajánlatos, második lépésben, az implementált algoritmusokat valós problémák megoldására felhasználni. A könyv megfelelő fejezetei ötleteket adhatnak ehhez.

1. Prüfer nyomában: kódolás, dekódolás

Mi a cél? A Prüfer-kódolás célja egy fa kompakt reprezentációja számsorozat formájában. Mivel egy n csúcsú fa mindig pontosan $n - 2$ élből áll, ezért elegendő $n - 2$ szám ahhoz, hogy egyértelműen visszaállítható legyen az eredeti fa. A kódsorozat minden eleme egy csúcs azonosítója, amely az adott lépésben a fa szerkezetét jellemzi (rejtett módon).

Összpontosíts az alábbi részfeladatokra.

- **Fa reprezentáció:** használhatsz $\text{map}<\text{int}, \text{set}<\text{int}>> \text{tree}$ típusú szomszédsági listát. Implementáld az $\text{addEdge}(u, v)$ és $\text{removeEdge}(u, v)$ műveleteket élhozzáadásra és éltörlésre. Tartsd folyamatosan nyilván az aktuális fokszámértékeket ($\text{degree}[v]$), és használj *min-heap* vagy *set* adatszerkezeteket az aktuális levelek karbantartásához.
- **Prüfer-kódolás lépései:**
 - számítsd ki minden csúcs fokszámát;
 - tedd be az összes kezdeti levelet egy min-kupacba (vagy *set*-be);
 - ismételd $n - 2$ alkalommal: (i) vedd ki a legkisebb címkéjű levelet; (ii) írd ki annak egyetlen szomszédját (ő kerül a Prüfer-kódba); (iii) töröld az élt, csökkentsd a szomszéd fokszámát; (iv) ha a szomszédból levél lett, tedd be a kupacba.
- **Prüfer-dekódolás lépései:**
 - legyen a bemeneti kód $n - 2$ hosszú;
 - kezdetben legyen minden csúcs fokszáma 1-gyel egyenlő;
 - a kódsorozat minden elemére növeld meg a hozzá tartozó csúcs fokszámát (+1);
 - hozz létre egy min-kupacot a kezdeti levelekhez;

- iterálj a kód elemein: (i) válaszd ki a legkisebb címkéjű levél-t; (ii) tegyél élt a kód aktuális csúcsa és a levél közé; (iii) csökkentsd mindkettő fokszámát; (iv) ha a kód aktuális csúcsa levéllé vált, tedd be a kupacba;
- a végén marad két csúcs – ezek közé is élt kell tenni.

Feladat: generáljunk egy n csúcsú véletlen fát úgy, hogy először sorsolunk egy véletlen Prüfer-kódot (hossz $n-2$), majd abból dekódoljuk vissza a fát és ábrázoljuk az eredményt (valamilyen gráfmegjelenítő alkalmazással).

2. Girvan–Newman-algoritmus

Mi a cél? Feltárni közösségeket egy nem irányított gráfban. A gráf éleit fokozatosan eltávolítva, olyan részegységeket találunk, amelyek sűrűn kapcsolódnak saját magukhoz, de gyérebben más részekhez.

E módszer középpontjában az élközpontúság fogalma áll, amely egy adott él esetén az összes legrövidebb út forgalmának összegét jelenti, amely áthalad ezen az élen. Minél több legrövidebb út halad át egy élen, annál „fontosabb” az az él a hálózat kapcsolatainak fenntartásában. Az algoritmus mindig a legnagyobb élközpontúságú élt távolítja el, mert az valószínűleg két közösség közötti híd.

Ahhoz, hogy megvalósítsd az algoritmust, a következő részeket célszerű külön-külön elkészítened.

- **Gráf reprezentáció:** használj $map<int, set<int>> adj$ módon definiált szomszédsági listát, valamint implementáld az $addEdge(u, v)$, $removeEdge(u, v)$ és $neighbors(u)$ műveleteket.
- **Legrövidebb utak számítása:** minden csúcsból indíts BFS-t, és tartsd nyilván az alábbiakat.
 - $dist[v]$: távolság a forrástól;
 - $numPaths[v]$: legrövidebb utak száma;
 - $parents[v]$: szülőcsúcsok (amiken keresztül elérhető v legrövidebb utakon);
 - tárold az útvonal bejárási sorrendjét is, hogy visszafelé haladva dolgozhass.
- **Élközpontúság-számítás:** minden csúcsból végzett BFS után haladj visszafelé a BFS-sorrendben, és minden w csúcs szülői (v) felé visszaterjeszted a forgalmat:

$$dependency(v) += (numPaths[v] / numPaths[w]) \cdot (1 + dependency[w])$$
 Minden (v, w) él kap egy súlyt, ami az élközpontúsági foka egyik hozzájárulása. A végén oszd el az értékeket 2-vel (minden él kétszer számolódott).
 - **Él eltávolítása:** keresd meg a maximális élközpontúságú élt vagy éleket, és töröld őket a gráfból. Ezt iteratívan ismételd.
 - **Közösségek felismerése:** implementáld BFS-t vagy DFS-t az összes összefüggő komponens megtalálásához. Minden komponens egy közösség lesz. Addig folytasd az algoritmust, amíg el nem éred a kívánt közösségszámot.
 - **Vezérlő logika – a fő algoritmus:**

1. számítsd ki az összes él élközpontúságát;
2. távolítsd el a legnagyobb értékű élt (vagy éleket);
3. számold újra az élközpontúságokat (a gráf megváltozott);
4. vizsgálj meg, hány közösség (komponens) jött létre;
5. ha nem érted el a kívánt közösségszámot, térj vissza 1-re.

Feladat: alkalmazzuk a Girvan–Newman-algoritmust a 2. fejezetben bemutatott „karateklub-hálózat” felbontására.

3. Összes egyszerű kör meghatározása

Mi a cél? Olyan algoritmust szeretnénk megvalósítani, amely egy irányítatlan gráfban meghatározza az összes egyszerű kört (csak a kezdő- és végpontja azonos), és ezzel lehetővé teszi, hogy döntést hozzunk például egy előjeles gráf kiegyensúlyozottságáról a következő tétel szerint: *egy plusz-minusz gráf akkor és csak akkor kiegyensúlyozott, ha minden körében a negatív élek száma páros*. Természetesen sok más olyan helyzet is lehet, amikor szükség van egy gráf összes körének feltérképezésére.

A körkereső algoritmus alapötlete:

- minden csúcsból indíts mélységi keresést (DFS);
- tartsd nyilván az aktuális útvonalat (*vector<int> path*);
- amikor visszatérsz a kezdőcsúcsba és az út hossza ≥ 3 , kört találtál;
- normalizáld a kört (lexikografikusan), hogy kiszűrd a duplikációkat;
- mentsd el a köröket egy *set<vector<int>> cycles* gyűjteménybe.

4. Schelling-modell – társadalmi szegregáció szimulációja

Mi a cél? A Schelling-modell célja megmutatni, hogy egyszerű, lokális preferenciák alapján hogyan jönnek létre nagyobb léptékű szegregációs mintázatok egy társadalmi térben – például egy város negyedeiben. Két típusú szereplő (pl. piros és kék lakók) laknak egy négyzetes rácson. Mindegyik „lakó” csak akkor érzi jól magát, ha a szomszédainak legalább bizonyos százaléka vele azonos típusú. Ha nem elégedett, elköltözik egy másik üres helyre.

Mi kell a modellhez?

- Rácsrepresentáció
 - Használhatsz *vector<vector<char>> grid* vagy *vector<vector<int>> grid* típust.
 - Az üres helyek, illetve a piros és kék lakók kódolhatók a 0, 1, 2 értékekkel.
- Paraméterek
 - *tolerance*: egy *float* érték (pl. 0,3), ami megadja, milyen arányban kell hasonló szomszédnak lennie, hogy valaki elégedett legyen.
 - *numSteps*: hány lépésig fut a szimuláció.
 - *initialDensity*: kezdeti betöltöttség (pl. 0,9, azaz a helyek 90%-a lakott).

Az algoritmus lépései az alábbiak lehetnek.

Inicializáció: a rácsot töltsd fel véletlenszerűen a két típusú lakóval és némi üres hellyel. Fontos a véletlenszerű eloszlás, de arányosan (pl. fele-fele lakó, maradék üres).

Elégedettség ellenőrzése: egy cellára nézve vizsgáld meg a nyolc szomszédját. Számold meg, hogy hány szomszéd van (nem üres), és ebből hány azonos típusú. Ha az azonos szomszédok aránya kisebb, mint a *tolerance*, akkor az illető elégedetlen.

Elégedetlen lakók listázása: végigmegyünk a rácson, és eltároljuk azok pozícióit, akik elégedetlenek.

Mozgatás: véletlenszerűen válassz egy másik üres helyet, és oda költöztessd a lakót. A régít 0-ra állítod, az újat az adott típusra (1 vagy 2). Mindenki csak egyszer mozoghat egy körben. Célszerű lehet eltárolni külön az üres pozíciókat, és frissíteni őket minden lépés után.

Iterálás: ismételd a fenti lépéseket adott számú körön át, vagy amíg már senki nem akar költözni (stabil állapot).

5. GAPER – Greedy Articulation Points Removal

Mi a cél? A GAPER-algoritmus célja a hálózat hierarchikus rétegződésének feltárása úgy, hogy minden iterációban egyszerre eltávolítja az aktuálisan létező artikulációs pontokat (AP), azaz olyan csúcsokat, amelyek eltávolítása növeli a gráf összefüggő komponenseinek számát. Az algoritmus minden egyes lépésben lehántja a hálózat legérzékenyebb szerkezeti pontjait, rétegeket tárva fel egymás után.

Implementáció lépésről lépésre.

- **Gráf reprezentáció:** használhatsz `map<int, set<int>> adj` vagy `vector<set<int>> adj(n)` típusú szomszédsági listát. Javasolt alapműveletek: `addEdge(u, v)`, `removeNode(v)`. Az utóbbi minden szomszéd listájából is töröli *v*-t.
- **Artikulációs pontok meghatározása:** részletek végett lásd az *A* függelék.
- **Artikulációs pontok eltávolítása:** miután meghatároztad az aktuális AP-k halmazát, távolítsd el őket a gráfból egy lépésben. Célszerű lehet megjegyezni, hogy ezek melyik „réteghez” tartoznak (pl. rétegszám szerint tárolva). Ez alapján később hálózati mag-perem elemzés és vizualizáció is készíthető.
- **Iterálás:** ismételd az AP-keresést és -eltávolítást a maradék gráfra. Minden iteráció után újabb réteg „válík le”. A ciklus addig fut, amíg már nincs több artikulációs pont, vagy a gráf teljesen fragmentálódik.

6. Kitekintés: egy algoritmus, amely áttörte a Dijkstra-korlátot

A legrövidebb utak keresésére klasszikusan a Dijkstra- és Bellman–Ford-algoritmusokat alkalmazzuk. Ezek megbízható és jól ismert megoldások, különböző

feltételek mellett. A Dijkstra-algoritmus hatékonysága azonban elválaszthatatlanul összefonódik a rendezési lépésből adódó időbeli korláttal.

Ezt a több évtizedes határt a Tsinghua Egyetem Duan Ran professzorának vezetésével a közelmúltban sikerült áttörni. A 2025-ös STOC (Symposium on Theory of Computing) konferencia legjobb dolgozatát elnyerő algoritmus olyan új ötletet vezet be, amely nem igényli a távolság szerinti teljes rendezést, és így gyorsabb, mint bármelyik eddig ismert módszer.

A megközelítés lényege, hogy a feldolgozandó csomópontokat klaszterekbe rendezi, és minden klaszterből csak egyet vesz figyelembe minden lépésben. Így az algoritmus kijátssza a rendezési korlátot, és gyorsabban találja meg a legrövidebb utakat – akár irányított, tetszőleges súlyú gráfokon is. A módszer részben ötvözi a Bellman–Ford- és a Dijkstra-elv gondolati sémáit, ám teljesen új szemléletben.

Arra bátorítjuk az algoritmikai kihívásokat kedvelő olvasót, hogy a <https://arxiv.org/pdf/2504.17033> kutatási cikk alapján implementálja az új módszert.

7. Genomrekonstrukció Euler-vonal alapján

Mi a cél? Adott egy hibamentes, lexikografikus sorrendű k -mer lista. Végezzük el az Euler-vonal alapú rekonstrukciót úgy, hogy minden k -mer pontosan egyszer szerepeljen a visszaállított DNS-szekvenciában.

Az algoritmus lépései

- **de Bruijn-gráf építése:** minden k -mer-ből képezz egy *(prefix, suffix)* irányított élt, ahol *prefix* az első $k-1$ karakter, *suffix* pedig az utolsó $k-1$ karakter. A $(k-1)$ -mer-ek lesznek a csúcsok. Ha a szomszédsági listához *map<string, deque<string>> adj* típusú adatszerkezetet használsz, és az éleket *adj[prefix].push_back(suffix)* módon adod ehhez, akkor az azonos $(k-1)$ -mer-ekből nem jönnek létre többszörös identikus csúcsok, de a többszörös élek megfelelően lesznek eltárolva. E mellett számold a csomópontok ki- és befokszámait is: *in_degree[suffix]++*; *out_degree[prefix]++*;
- **Kezdőcsúcs kiválasztása:** a csúcsok *in_degree*, illetve *out_degree* értékei alapján határozd meg, hogy melyikkel kezdődik a zárt Euler-vonal. Ha mindenik csomópontra azonos a két fokszámérték, akkor kezdj a lexikografikusan legkisebb csúccsal. Mivel *adj* lexikografikusan rendezett (map), a legelső kulcs automatikusan a legkisebb.
- **Euler-vonal bejárása (Hierholzer-algoritmus)**
 - Inicializálj egy vermet (*stack<string> s*) és egy listát (*vector<string> path*), majd tedd a kezdőcsúcsot a verembe.
 - Amíg a verem nem üres: (i) ha a verem tetején lévő csúcsból (*u*) van kimenő él, akkor a lexikografikusan első ki-szomszédját (*v = adj[u].front()*) tedd be a verembe és töröld a szomszédsági listából (*adj[u].pop_front()*); (ii) ha nincs több kimenő él *u*-ból, akkor töröld *u*-t a veremből, és ragaszd a *path* végéhez.

- Genom visszaállítása: a *path* lista megfordítottan tartalmazza a zárt Euler-vonalat. A rekonstruált genom-szakaszt úgy kapod meg, hogy *path*[0]-t teljesen, majd minden további csúcs utolsó karakterét fűzöd össze.

8. Ford–Fulkerson-algoritmus – Edmonds–Karp-módszerrel

Mi a cél? Megtalálni a lehető legnagyobb folyamot egy irányított hálózatban a forrás és nyelő csúcs között, úgy, hogy az egyes élekre előírt kapacitásokat nem lépjük túl, és a folyam a csomópontokon „átmenő” legyen (kivéve a forrás és nyelő csúcsokat).

A Ford–Fulkerson-algoritmus fokozatosan építi fel a folyamot, ismételten keres egy javító utat a reziduális gráfban, és megnöveli a folyamot ezen az úton. Az Edmonds–Karp-módszer kiegészíti ezt azzal, hogy a javító utakat mindig szélességi bejárással keresi, így biztosítva a polinomiális futásidőt.

A reziduális gráf élei azt mutatják meg, hogy az aktuális folyamhoz képest mely éleken lehet még folyamot hozzáadni vagy visszavenni. Minden eredeti élre ($u \rightarrow v$) a reziduális gráfban kétféle él jelenhet meg. Az egyik az úgynevezett előre-él ($u \rightarrow v$), amely akkor szerepel, ha a kapacitás még nincs teljesen kihasználva. Ennek súlya: $capacity[u][v] - flow[u][v]$, vagyis ennyi folyamot tudunk még továbbítani ezen az élen. A másik a vissza-él ($v \rightarrow u$), amely akkor kerül be a reziduális gráfba, ha a jelenlegi folyam pozitív az eredeti élen. Súlya: $flow[u][v]$, ami azt jelenti, hogy ennyit lehetne visszavenni, azaz csökkenteni a folyamot, ha szükséges.

A gráf reprezentációja

- Javasolt adatszerkezetek a szomszédsági lista, valamint a kapacitás- és folyamértékek eltárolásához a következők: $map<int, vector<int>> adj;$
 $map<pair<int, int>, int> capacity; map<pair<int, int>, int> flow;$

Az algoritmus lépései

- **Inicializálás:** állítsd be a folyamot 0-ra minden élen. Minden élhez add hozzá a megfelelő vissza-élt is a szomszédsági listába.
- **Javító út keresése:** indíts BFS-t a forrásból, és tartsd nyilván a *parent* értékeket, hogy visszakövethető legyen az út. Csak olyan élen haladj tovább ($u \rightarrow v$), ahol a reziduális kapacitás pozitív: (i) $capacity[u][v] - flow[u][v] > 0$ (előre-él) vagy (ii) $flow[v][u] > 0$ (vissza-él). A *parent* segítségével építsd fel a teljes javító utat a nyelőig.
- **Folyam növelése a javító úton:** határozd meg a legkisebb reziduális súlyt az út mentén (ez a szűk keresztmetszet; *bottleneck*). Minden él mentén növeld vagy csökkentsd a folyamot: (i) előre-élen $flow[u][v] += bottleneck$, illetve vissza-élen $flow[v][u] -= bottleneck$.
- **Ismétlés:** amíg találsz új javító utat, folytasd a lépéseket. Ha már nincs javító út a forrástól a nyelőig, az aktuális összefolyam a maximális érték.

9. Dinamikus passzhálózat csúszóablakkal

Mi a cél? Létrehozni és karbantartani egy olyan irányított gráfot, amely mindig az utolsó 50 passzból álló kapcsolatokat jeleníti meg egy futballmérkőzés során. A cél, hogy nyomon kövessük a hálózat szerkezeti változásait a meccs ideje alatt.

Minden passz egy irányított él a gráfban. A játékosok a csúcsok. Egy passz akkor történik, amikor egy játékos átadja a labdát egy másiknak. A gráf élei a passzok irányát és gyakoriságát tükrözik. Játékoscsere esetén az új játékos átveszi az elődje csomópontját.

Az algoritmus lépései

- **Bemenet reprezentáció:** minden passza kapcsán tárold el a passzoló játékos (*from*), fogadó játékos (*to*), pozíciók ($x_1, y_1; x_2, y_2$), valamint időbélyeg (*time*) adatokat. Tartsd nyilván a passzokat egy *deque*-ban, hogy mindig csak az utolsó 50 legyen benne.
- **Gráf reprezentáció:** használd a $map<string, map<string, int>> passGraph$ adatszerkezetet a (*from* $\rightarrow$ *to*) kapcsolatok gyakoriságának eltárolására az utolsó 50 passz alapján.
- **Az első hálózat (G_0) létrehozása:** olvass be 50 passzt, és minden passz esetén növelj a $passGraph[from][to]$ értékét.
- **Dinamikus frissítés minden új passz érkezésekor:** távolítsd el a legrégebbi passzt a *deque* elejéről ($passGraph[old_from][old_to]--$). Ha az él súlya 0 lesz, akár el is távolíthatod. Add hozzá az új passzt a deque végére ($passGraph[new_from][new_to]++$). Frissítsd a hálózatot, és társítsd az aktuális időbélyeghez, *t*.
- **Elemzési lehetőségek:** minden frissítés után kiszámolhatsz mutatókat, amelyek mentén szeretnéd követni a hálózat dinamikáját (lásd a könyv 9. fejezetét).

10. Nash-egyensúly tiszta stratégiában

Mi a cél? Megtalálni az összes tiszta stratégiai Nash-egyensúlyt egy kétsze-replős, egyszer játszott stratégiai játékban. Egy adott (*i*, *j*) stratégiapár akkor Nash-egyensúly, ha egyik játékosnak sem éri meg egyoldalúan változtatni a stratégiáját.

Formális feltétel: egy (*i*, *j*) stratégiapár Nash-egyensúly, ha $A_payoff[i][j]$ maximális az *i*. sorban (*A* szempontjából), és $B_payoff[i][j]$ maximális a *j*. oszlopban (*B* szempontjából).

Bemenet és reprezentáció

- *n*: az *A* játékos stratégiáinak száma
- *m*: az *B* játékos stratégiáinak száma
- $A_payoff[n][m]$: az *A* játékos kifizetési mátrixa
- $B_payoff[n][m]$: az *B* játékos kifizetési mátrixa
- Ajánlott reprezentáció: $vector<vector<int>>> A, B$;

Megoldási ötlet

- Keresd meg és tárold el *A* sorainak és *B* oszlopainak a max-pozícióit.

- Egy (i, j) stratégiapár Nash-egyensúly, ha A i . sorában a j . oszlopban van a maximum, és B j . oszlopában az i . sorban van a maximum.

11. Magyar módszer: minimális költségű teljes párosítás

Mi a cél? Találjuk meg a minimális költségű teljes párosítást egy súlyozott, teljes, páros gráfban, ahol a bal és jobb oldalon ugyanannyi csúcs van, és minden élhez tartozik egy nemnegatív költség. Konkrétabban: találni az $n \times n$ méretű költségmátrixban olyan teljes párosítást, amelyben minden sort és oszlopot pontosan egy hozzárendelés érint, és az összköltség minimális.

A Magyar-módszer alapötlete: (i) nullákat hozunk létre a mátrixban csökkentéssel; (ii) ezek mentén próbálunk teljes párosítást építeni; (iii) ha ez nem sikerül, módosítjuk a mátrixot úgy, hogy új nullák keletkezzenek.

Az algoritmus lépései

Sor- és oszlopcsökkentés (mátrix redukció): minden sorból vond ki a legkisebb elemet, majd minden oszlopból is vond ki a legkisebb elemet. Ez nem befolyásolja a minimális hozzárendelés helyét, de segít új nullákat létrehozni.

Nullák mentén próbálj teljes párosítást keresni: azonosíts be maximális számú „független nullást”, azaz olyanokat, hogy ne legyen két nulla ugyanabban a sorban vagy oszlopban. Használhatsz DFS-t vagy BFS-t ehhez a művelethez. Ha sikerül találnod n darab ilyen nullást, készen vagy. Ha csak részleges párosítást találtál, folytasd a következő lépéssel.

Mátrix módosítás: találd meg a minimális számú sor/oszlop kombinációt, amellyel minden nullát lefedhetsz. Keresd meg a legkisebb lefedetlen értéket. Csökkents minden lefedetlen értéket e minimummal, és add hozzá e minimumot minden kétszeresen lefedett (sorral és oszloppal is lefedett) értékhez. A többi cella értékét ne módosítsd.

Ismétlés: addig térj vissza a 2. lépéshez a frissített mátrixszal, míg n független nullást nem találsz, azaz teljes párosítást. A mátrix egyre több nullát fog tartalmazni, míg végül elég lesz egy teljes hozzárendeléshez.

12. PageRank-algoritmus: csúcsok fontosságának meghatározása irányított gráfban

Mi a cél? Adott irányított gráfban (például egy weboldalakkból álló hálózatban), ahol az élek azt jelentik, hogy az egyik csúcsból hivatkozás mutat a másikra, érdekeltek vagyunk abban, hogy minden csúcshoz hozzárendeljünk egy „fontossági” értéket – azt jelezve, mekkora a súlya a hálózatban.

A PageRank-algoritmus egy iteratív, súlyelosztásos elven működő stratégia, miszerint egy csúcs akkor fontos, ha sok más fontos csúcs mutat rá. A módszer alternatív értelmezése egy véletlenszerű internethasználó mozgását szimulálja, aki minden lépésben d valószínűséggel követ egy hivatkozást az aktuális oldalról, és $(1 - d)$ valószínűséggel „megunja” és véletlenszerűen egy másik oldalra ugrik.

A megfelelő képlet: $PageRank(i) = (1-d)/N + d \sum_{j \in M(i)} PageRank(j)/L(j)$, ahol N az oldalak száma, $M(i)$ azoknak az oldalaknak a halmaza, amelyek hivatkoznak az i . oldalra, és $L(j)$ pedig a j . oldalról kimenő linkek száma. A d csillapítási tényezőt tipikusan 0,85-ra szokás állítani.

Az algoritmus lépései

- **Kezdeti értékadás:** minden csúcs PageRank értékét állítsuk $1/N$ -re.
- **Iteratív frissítés:** minden lépésben minden csúcs (kivéve a nyelőket) új PageRank értéket kap a fentebb megadott képlet szerint. Célszerű használni egy segéd tömböt a frissített értékek kiszámításához.
- **Nyelő csomópontok kezelése:** ha egy csúcsnak nincs kimenő éle, akkor az aktuális PageRank értékét egyenlően szétosztjuk az összes csúcs között. Ez megakadályozza, hogy a szóban forgó PageRank értékek „elszivároghassanak”.
- **Megállási feltétel (konvergencia):** addig iterálunk, amíg az aktuális lépésben az értékek változása (összeadva minden csúcsra) kisebb nem lesz egy ε tűrészathatárnál (például: $1e-6$).

13. Viselkedési zuhatag szimuláció hálózaton

Mi a cél? Modellezni, hogyan terjed egy új viselkedés egy hálózatban, ha az emberek a szomszédaik döntéseire igazodva váltanak – küszöbszabály szerint.

A modell összefoglalása

- Irányítatlan gráf: emberek hálózata.
- Állapotok: A vagy B . Kezdetben mindenki a B viselkedést követi. Egyes csúcsok, a zuhatag beindítása végett, A viselkedésre váltanak.
- Küszöbérték: egy csúcs csak akkor vált A -ra, ha legalább $b/(a+b)$ arányban már A -viselkedésű szomszédjai vannak.
- Dinamika: a váltások lépésenként, szinkron módon történnek. Az A -ra váltás visszafordíthatatlan.

Az algoritmus vázlata

- **Inicializálások:** olvasd be a gráfot, és tárold szomszédsági listaként. Állítsd be az a és b paramétereket, számítsd ki a $T = b/(a+b)$ küszöbértéket, valamint társíts minden csúcshoz B viselkedést, kivéve a kezdeti befogadókat, akik legyenek A viselkedésűek.
- **Zuhatag szimuláció (ismétlés, amíg van változás):** minden körben állítsd A -ra azokat a B csúcsokat, amelyek elérik a küszöbértéket.

REZUMAT

În rețeaua relațiilor: Teoria grafurilor în slujba rețelelor sociale

Această carte oferă o introducere amplă și interdisciplinară în teoria grafurilor și aplicarea sa în studiul rețelelor sociale. Ea face legătura între conceptele clasice din matematică și provocările moderne din știința datelor, sociologie, economie și biologie.

Pornind de la noțiuni fundamentale ale teoriei grafurilor, cititorul este ghidat prin aplicații practice precum algoritmi de căutare Google, strategia în fotbal, secvențierea genomului sau modelarea piețelor. Un accent deosebit este pus pe rolul structural al muchiilor și nodurilor, pe dinamica relațiilor (pozitive și negative), precum și pe influența strategică a punctelor de articulație în rețelele reale.

Capitolele explorează, de asemenea, concepte precum homofilia, segregarea, cascadele comportamentale și luarea deciziilor în rețea prin prisma teoriei jocurilor. Studii de caz concrete – cum ar fi rețeaua de pase a FC Barcelona sau Proiectul Genomului Uman – demonstrează legătura profundă dintre structurile grafurilor și sistemele sociale complexe.

Volumul este ideal pentru studenți, cercetători și profesioniști care doresc să înțeleagă cum structurile matematice pot revela arhitectura invizibilă a vieții noastre sociale și informaționale.

ABSTRACT

In the Web of Connections: Graph Theory in the Service of Social Networks

This book offers a comprehensive and interdisciplinary introduction into the world of graph theory and its applications in the analysis of social networks. It bridges classical concepts in mathematics and modern challenges in data science, sociology, economics, and biology.

Starting from fundamental notions of graph theory, the reader is guided through practical applications ranging from Google search algorithms and football strategy to genome sequencing and market modelling. Special focus is given to the structural roles of edges and nodes in real-world networks, the dynamics of relationships (both positive and negative), and the strategic influence of articulation points.

Chapters also explore homophily, segregation, cascades of behaviour, and game-theoretic decision-making in networks. Real-world case studies – such as the FC Barcelona passing network or the Human Genome Project – illustrate the powerful synergy between theoretical graph structures and complex social systems.

This volume is ideal for students, researchers, and professionals seeking to understand how mathematical structures illuminate the invisible architecture of our social and informational lives.

A SZERZŐRŐL

Kátai Zoltán 1968. március 13-án született Nagyváradon. Középiskolai tanulmányait a marosvásárhelyi Bolyai Farkas Elméleti Líceumban végezte 1982–1986 között, egyetemi tanulmányait pedig a Kolozsvári Műszaki Egyetem Automatizálás és Számítógépek Karán 1987–1992 között. 1992–2005 között informatikatanár a marosvásárhelyi Bolyai Farkas Elméleti Líceumban, 2002-től pedig a Sapientia Erdélyi Magyar Tudományegyetem Marosvásárhelyi Kara Matematika–Informatika Tanszékének oktatója és kutatója. Fő kutatási területe a programozási technikák (főleg ezek gráfelméleti háttere), kiemelten a dinamikus programozás. Oktatástudományi vonalon az érzékszervek bevonása a programozásoktatás folyamatába témakörben mélyült el. A szerző kezdeményezte az AlgoRhythmic projektet, amelynek keretében született meg a YouTube-on is népszerűvé vált tíz algoritmus-tánc-koreográfia. Az AlgoRhythmic projekt 2013-ban elnyerte az Informatics Europe által felajánlott Best practice in education díjat.

Scientia Kiadó

400112 Kolozsvár (Cluj-Napoca)
Mátyás király (Matei Corvin) u. 4. sz.
Tel./fax: +40-364-401454
E-mail: scientia@kpi.sapientia.ro
www.scientiakiado.ro

Korrektúra:

Szenkovics Enikő

Műszaki szerkesztés:

Metaforma Kft.

Tipográfia:

Könczey Elemér

Sorozatborító:

Tipotéka Kft.

Nyomdai munkálatok:

F&F INTERNATIONAL Kft.
Felelős vezető: Ambrus Enikő igazgató

Fedezd fel, hogyan tárja fel a matematika a kapcsolatok láthatatlan hálóját! Ez a könyv átfogó és izgalmas bevezetést kínál a gráfelmélet világába, annak lenyűgöző alkalmazásaiba, így a társadalmi hálózatok elemzésébe. Ötvözi a matematika klasszikus alapjait az adattudomány, a szociológia, a közgazdaságtan és a biológia kortárs irányzataival, szemléletesen példázva, miként fonódik össze az elmélet és a valóság. Ideális útitárs diákoknak, kutatóknak és szakembereknek, akik szeretnék megérteni, hogyan világítanak rá a matematikai struktúrák a társadalmi és információs életünk rejtett szerkezetére.

Az olvasó a gráfelmélet alapfogalmaiból kiindulva, lépésről lépésre ismerkedhet meg olyan gyakorlati példákkal, amelyek a Google keresőalgoritmusaitól és a futballstratégiák elemzésétől kezdve a genom szekvenáláson át egészen a piaci hálózatok modellezéséig terjednek. A könyvben különös hangsúlyt fektetünk az élek és csomópontok szerepére a valós hálózatokban, a kapcsolatok dinamikájára – legyenek akár barátiak, akár versengők –, valamint azokra a kulcspontokra, amelyek az egész rendszer viselkedését meghatározzák. Olyan témák is feltárássra kerülnek, mint a homofília, a szegregáció, a viselkedészuhatagok és a játékelméleti döntéshozatal a hálózatokban, ugyanakkor valós esettanulmányok – például az FC Barcelona passzhálózata vagy az Emberi Genom Projekt – szemléltetik, miként találkozik a gráfelmélet elméleti világa a komplex társadalmi rendszerek működésével.