15.4.

Statisztika és közgazdaságtan.

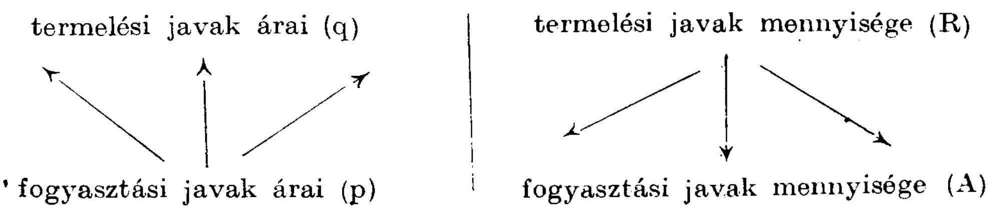
Köztudomásu az a hatás, amit a statisztikai kutatási módszer fejlődése a konjunkturaelméletre gyakorolt. El lehet mondani, hogy a konjunktura modern elmélete egész létét ugyszólván a statisztikai feldolgozás kifinomodásának köszönheti.

Kevésbé ismeretes azonban az a hatás, amelyet az általános közgazdasági elmélet köszönhet a statisztikának. Erre nézve kivánunk néhány adalékkal szolgálni, s mivel a célunk az, hogy olyanok is merithessenek tanulságot sorainkból, akik a statisztika modern módszerét kevéssé ismerik és a matematika formanyelvében alig jártasak, igyekszünk előadásunkat olyan egyszerüre fogni, amennyire csak lehet, és az elvont formulákat lehetőleg példákkal illusztráljuk. Az e cikk kereteit meghaladó magyarázatokra nézve azonban kénytelenek vagyunk bizonyos standardmunkák megfelelő helyeire utalni.

A közgazdaságtan jelentékeny részben mennyiségi összefüggéseket tárgyal, amiből szükségképpen folyik a matematika formanyelvének alkalmazása. Számos és nem éppen jelentéktelen közgazdászra áll azonban, hogy matematikai ismeretei hiányosak, ami összefügg az egyetemi közgazdasági képzés hiányaival. Abból persze, hogy számos kiváló közgazdász nem ért a matematikához, még nem következik, hogy aki nem ért a matematikához, már azt higyje, hogy ennélfogva kiváló közgazdász lehet belőle. Remélhető azonban, hogy a belátható jövőben a matematikai képzettség olyan elengedhetetlen lesz a tudományosan képzett közgazdász, a közgazdaságtannal tudományosan foglalkozó kutató számára, mint akár a természettudományokban. A közgazdásznak a matematikához való viszonya csak annyiban lehetne különböző, amennyire különbözik az elméleti fizikusnak és a kisérleti fizikusnak a matematikához való viszonya. Ma még persze előfordul, hogy vitatják a matematikai módszer alkalmazhatóságát, vitatják természetesen azok, akik a matematikai módszerben nem járatosak. De hogy az idő folyása egyre jobban ellenükre fordul, bizonyitják a tények. „... The mathematical method has become so general in economic and statistical studies that ... the value of that method ... is now seldom, if ever, challenged," mondja (egy kissé erőszakosan összesürített mondatba foglalva) Irving *Fisher* az 1927. évi angol *Cournot*-kiadás bevezetésében. A matematikai módszer alkalmazása oly általános lesz, a statisztikai adatoknak és eljárásoknak az elméleti eredményekkel való összekapcsolása oly alapvető fontosságra tesz szert, hogy a közgazdasági elmélethez való hozzászólás elengedhetetlen előfeltételévé válik a matematikai formanyelvnek bizonyos minimális ismerete.

Másfelől természetesen a felelőtlen matematikai spekuláció veszélyeit se lehet lekicsinyelni s nem lehet azt hinni, hogy azért, mert valaki jó matematikus, már jó közgazdász is lehet egyuttal. A matematika a közgazdász számára csak eszköz s az eszközzel való szemfényvesztő bűvészkedés még nem közgazdaságtan.[1] Ez pedig, sajnos, a matematikai közgazdaságtan nem kis részére áll és igen jó példákat lehetne erre nézve idézni. De ahogy a természettudományok matematikai feldolgozását ez a veszély nem hátráltathatta, igy van ez, legalább is igy kell hogy legyen ez a közgazdaságtanban is.

A közgazdaságtan adatai alapjában kétfélék: árak és mennyiségek. Az árak a költségtörvény alapján, a mennyiségek a termelési rokonságnál fogva függnek össze s *Walras* egyenletei az áraknak, illetve a mennyiségeknek egymásközti összefüggését az alábbi sémában kifejezhető módon határozták meg:



Az *áraknál* a *fogyasztási* javak árait bontja fel a termelési javak áraira, a *mennyiségeknél* a *termelési* javak mennyiségeit osztja fel a fogyasztási javak közt. Ezt az összefüggést fejezi ki az alábbi két egyenletsor a *Cassel* átirásában:

$$
(1)\quad \begin{array}{l} p_1 = a_{11} q_1 + a_{12} q_2 + \ldots + a_{1r} q_r \\ p_2 = a_{21} q_1 + a_{22} q_2 + \ldots + a_{2r} q_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n = a_{n1} q_1 + a_{n2} q_2 + \ldots + a_{nr} q_r \end{array}
\qquad
\begin{array}{l} R_1 = a_{11} A_1 + a_{21} A_2 + \ldots + a_{n1} A_n \\ R_2 = a_{12} A_1 + a_{22} A_2 + \ldots + a_{n2} A_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_r = a_{1r} A_1 + a_{2r} A_2 + \ldots + a_{nr} A_n \end{array} \quad (2)
$$

Ebből most már két probléma adódik. Az egyik az előbbi viszonyok megforditása, vagyis az *áraknál* a *termelési* javak árainak összeállitása a fogyasztási javak áraiból s a *mennyi-*

[1] Knut *Wicksell*, a közgazdaságtan matematikai módszerének jeles mestere irta, hogy a közgazdaságtan igazságát a legszellemesebb matematikai fejtegetésnek sem szabad áldozatul dobni. Über Wert, Kapital und Rente. 1893.

ségeknél a *fogyasztási* javak mennyiségeinek összeállitása a termelési javak mennyiségeiből. A másik az árak *és* a mennyiségek egymásközti viszonyának meghatározása.

Ami az első problémát illeti, a termelési javak árainak meghatározására nézve kisérletet sem találunk, ha csak annak nem tekintjük *Cassel*nek ama kijelentését, hogy a termelési javak árainak meghatározását az egyenletrendszer végső ismeretleneinek tekinti. De egy képletben kifejezve a termelési javak árait meghatározó tényezőket nála sem találjuk. Már a fogyasztási javak mennyiségére nézve másképp áll a helyzet, mert ennek megoldását már *Walras* kereste a határtermelékenységi elv alapján. *Walras* szerint a következő két összefüggés áll fenn *(Cassel* jelzéseivel kifejezve):

$$
(3)\quad
\begin{array}{l}
A_1 = \varphi_1 (a_{11} A_1, a_{12} A_1, \ldots, a_{1r} A_1) \\
A_2 = \varphi_2 (a_{21} A_2, a_{22} A_2, \ldots a_{2r} A_2) \\
\text{-------------------------------} \\
A_n = \varphi_n (a_{n1} A_n, a_{n2} A_n, . a_{nr} A\ )
\end{array}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{array}{l}
\varphi_1 (a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots\ldots, a_{1r}) = 0 \\
\varphi_2 (a_{21}, a_{21}, \ldots\ldots\ldots, a_{2r}) = 0 \\
\text{-------------------------------} \\
\varphi_n (a_{n1}, a_{n2}, \ldots\ldots\ldots, a_{nr}) = 0
\end{array}
\quad (4)
$$

A baloldali egyenlet független változói az előző (2) egyenletsor értelmében a termelési javak mennyiségét fejezik ki, s igy a fogyasztási javak mennyisége megfelelő függvényekkel *qualitative* meg volna határozva. A quantitativ meghatározás irányában azonban *Walras* nem tudott többet nyujtani,[2] mint a (4) egyenletsort, amely azt akarja kifejezni, hogy a (3) egyenletsorban előforduló függvények a (4) egyenletsor alakjában 0 értéket nyernek, mert ha az a-k, vagyis a termelési koefficiensek egyike kisebbedik, akkor másika nő és megforditva. Ha az (1) egyenletsorban az árakat állandóknak tekintjük, az egyenleteket a baloldalnak jobbra való átvitelével 0-val egyenlővé tesszük és az állandókat a függvényben elhagyjuk, akkor a (4) egyenletsor semmi más, mint az (1) egyenletsornak határozatlan formában való felirása. Ha az (1) egyenletsor egyenleteit mindkét oldalon sorjában A_1, $A_2, \ldots, A_n$-nel megszorozzuk és az árakat megint állandóknak tekintjük, amelyek a függvényben elhagyhatók, megkapjuk a (3) egyenletsort, miután a szorzóval egy uj változót vittünk az egyenletbe. A kérdés csak az, hogy jogosultak vagyunk-e arra, hogy a (3) és (4) egyenletsor függvényeit ugyanazzal a jelzéssel lássuk el. Egy másik kérdés az, hogyha csupán az (1) egyenletsor alapján állunk, nyerhetünk-e valami uj ismeretet a (3) és (4) egyenletsor adta irásmódból. *Walras* azon megjegyzéséből, hogy a termelési koefficiensek összegét konstansnak kivánja tekinteni, következik, hogy ő a (4) egyenletsorban lényegileg nem az (1) egyenletsorra gondolt, hanem a termelési koefficiensek oly összefüggésére,

[2] *Walras* végső határtermelékenységi egyenletére vonatkozó álláspontunkat lásd még alább.

amely a (3) egyenletsornak az (1) egyenletsortól független uj meghatározást is adhat. Walras a (3) egyenletsorral összekötötte a termelési költség minimumának gondolatát, gondolván arra, hogy az igénybevett termelési javak mennyisége, tehát a termelési koefficiensek összege minimum legyen. Ez azonban a (4) egyenletsorral még kifejezésre nem jut, mert a minimum mathematikai feltétele, hogy a függvények első differenciálhányadosa, $\frac{d\varphi}{da} = 0$ és második differenciálhányadosa, $\frac{d^2\varphi}{da^2} > 0$, vagyis pozitiv legyen. Ennek megértéséhez képzeljünk el egy hullámvonalat, mely a vizszintes tengelyhez viszonyitva legmagasabb és legmélyebb pontokat ér el. Ha a hullámvonalhoz huzott érintő a hullámvonalhoz huzható vizszintes tengellyel párhuzamos, akkor a hullámvonal biztosan egy maximum vagy minimum pontot ér el. Ennek jellemzéseképpen az első differenciálhányados, vagyis az érintőnek a vizszintes tengellyel bezárt szöge 0 (pontosan e szög tangense 0). Ha a hullámvonalhoz több ilyen érintőt huzunk, azt tapasztaljuk, hogy ezek az érintők vagy a vizszintes tengely irányában jobbra, vagy pedig a vizszintes tengely irányától balra haladnak. Ha a hajlás jobbra tart, biztosak lehetünk, hogy nyert szélső pontunk maximum. Ezt mutatja a második differenciálhányados negativ előjele. Ha a hajlás balra tart, szélső pontunk minimum s a második differenciálhányados pozitiv.

Ha a termelési koefficiensek összefüggésére és értékére valamilyen megközelitő becslést keresnénk, az (1) és (2) egyenletsorból a következő eredményt kaphatjuk (mindkét sorból csak az első egyenleten bemutatva):

$$a_{11}\frac{q_1}{p_1} + a_{12}\frac{q_2}{p_1} + \ldots + a_{1r}\frac{q_r}{p_1} = 1 \qquad a_{11}\frac{A_1}{R_1} + a_{12}\frac{A_2}{R_1} + \ldots + a_{1r}\frac{A_n}{R_1} = 1$$

Elképzelhető most már, hogy a termelési koefficiensek között a következő összefüggés áll fenn:

$$a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1r} = a_1.$$

mely a_1-nek az értéke csak egész kivételes esetben lehet 1-gyel vagy akármilyen más konstans értékkel egyenlő. Ha az utóbbi egyenletből indulnánk ki, akkor megkonstruálhatnánk egy függvényt, melynek egyenlete a következő lenne:

$$f_1\,(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r}, a_1) = 0,$$

amiből mindjárt látszik, hogy a fenti (4) egyenletsor egyenletei miért nem lehetnek egyenlők 0-val. Amig a termelési koefficiensek között más összefüggést, mint azt, amely az (1) és (2) egyenletsorból adódik, megalkotni nem tudunk, addig a fenti (4) egyenletsor az adott formában lehetetlen és elfogadhatatlan. Ehhez hozzájárul az, hogy még abban az esetben is, ha a (4) egyenletsor az (1) egyenletsortól függetlenül helytállna, a (3) és (4) egyenletsor függvényeinek egyenlő jelzése jogosulatlan lenne, mert a függvények egyenlősége csak egész kivételes esetben lenne elképzelhető, ha ugyanis $A = A^n \varphi(a)$ és $A^{1-n} = \lim_{n=\infty} 0$ lenne. Ehhez képest igazat adunk Henry *Schultz*nak abban, hogy a két függvénysort különbözőképen kellene jelölni.[3] Ezzel azonban a (3) egyenletsor minden további meghatározás nélkül marad. Egész elemi megfontolásból azonban egész egyszerü megoldás kinálkozik a következő módon, s ez az eljárás amellett nemcsak a (3) egyenletsor quantitativ meghatározására alkalmazható, hanem felhasználható a termelési javak árának meghatározására is. Az (1) és (2) egyenletsor ugyanis a következőkép is irható (megint csak az első egyenleten bemutatva): [4]

$$p_1 = \frac{p_1}{z_{11}} + \frac{p_1}{z_{12}} + \ldots + \frac{p_1}{z_{1r}} \qquad R_1 = \frac{R_1}{r_{11}} + \frac{R_1}{r_{21}} + \ldots + \frac{R_1}{r_{n1}}$$

Ezáltal lehetségessé válik a termelési javak árainak a fogyasztási javak áraiban s a fogyasztási javak mennyiségeinek a termelési javak mennyiségeiben való kifejezése. Az (1) és (2) egyenletsorból és az előbbi képletekből következik ugyanis, hogy

$$\frac{p_1}{z_{11}} = a_{11}q_1, \quad \frac{p_1}{z_{12}} = a_{12}q_2, \ldots, \quad \frac{p_1}{z_{1r}} = a_{1r}q_r$$

$$\frac{R_1}{r_{11}} = a_{11}A_1, \quad \frac{R_1}{r_{21}} = a_{21}A_2, \ldots, \quad \frac{R_1}{r_{n1}} = a_{n1}A_n$$

Ha ezt az összes egyenletekben végrehajtjuk, a termelési javak áraira és a fogyasztási javak mennyiségeire nézve a következő meghatározásokat kapjuk (q_1-re és A_1-re bemutatva):

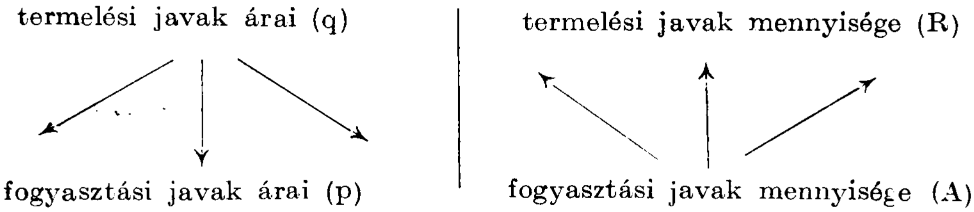
$$q_1 = \frac{p_1}{a_{11}\,z_{11}} = \frac{p_2}{a_{21}\,z_{21}} = \ldots = \frac{p_n}{a_{n1}\,z_{n1}} \qquad A_1 = \frac{R_1}{r_{11}\,a_{11}} = \frac{R_2}{r_{12}\,a_{12}} = \ldots = \frac{R_r}{r_{1r}\,a_{1r}}$$

Ha van értelme annak, hogy a fogyasztási javak árát z-vel, a beszámitási koefficienssel elosszuk, akkor annak is van értelme, hogy a fogyasztási javak mennyiségét ezzel a beszámitási koefficienssel elosztjuk. Ezt alkalmazzuk A-nál. Ha van értelme annak, hogy a termelési javak mennyiségét r-rel a szétosztási koefficienssel elosszuk, akkor annak is van értelme, hogy a termelési javak árát ezzel a szétosztási ko-

[3] Marginal productivity and the general pricing process. Journal of Political Economy. 1929. X. 545—546. old.

[4] A beszámitási koefficiens (z) azt fejezi ki, hogy mennyit számitunk be a fogyasztási javak árából az egyes termelési javak árainak. A szétosztási koefficiens (r) azt mutatja, hogy mily arányban osztjuk fel a termelési javakat a termelési ágak közt.

efficienssel elosztjuk. Ezt alkalmazzuk q-nál. Igy megkaphatjuk a következő két összefüggésnek a meghatározását:



Ez semmi mas, mint megforditása az eredeti összefüggésnek és háromféle koefficiensünk segitségével a következő két egyenletsorban jut kifejezésre:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{p_1}{a_{11}\, z_{11}\, r_{11}} + \frac{p_2}{a_{21}\, z_{21}\, r_{21}} + \ldots + \frac{p_n}{a_{n1}\, z_{n1}\, r_{n1}}\\
q_2 &= \frac{p_1}{a_{12}\, z_{12}\, r_{12}} + \frac{p_2}{a_{22}\, z_{22}\, r_{22}} + \ldots + \frac{p_n}{a_{n2}\, z_{n2}\, r_{n2}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
q_r &= \frac{p_1}{a_{1r}\, z_{1r}\, r_{\,r}} + \frac{p_2}{a_{2r}\, z_{2r}\, r_{2r}} + \ldots + \frac{p_n}{a_{nr}\, z_{nr}\, r_{nr}}
\end{aligned}
$$

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{R_1}{a_{11}\, r_{11}\, z_{11}} + \frac{R_2}{a_{12}\, r_{12}\, z_{12}} + \ldots + \frac{R_r}{a_{1r}\, r_{1r}\, z_{1r}}\\
A_2 &= \frac{R_1}{a_{21}\, r_{21}\, z_{21}} + \frac{R_2}{a_{22}\, r_{22}\, z_{22}} + \ldots + \frac{R_r}{a_{2r}\, r_{2r}\, z_{2r}}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_n &= \frac{R_1}{a_{n1}\, z_{n1}\, r_{n1}} + \frac{R_2}{a_{n2}\, z_{n2}\, r_{n2}} + \ldots + \frac{R_r}{a_{nr}\, z_{nr}\, r_{nr}}
\end{aligned}
$$

Visszatérve a (3) egyenletsorhoz, meg kell emlitenünk, hogy ezt az egyenlettipust *Pareto* a (4) egyenletsor alapján kifogás tárgyává tette, kétségbevonva a (3) egyenletsor egyértelmüségét.[5] Nagyon messzire vinne, ha ebbe a kontroverziába bele akarnánk itt elegyedni. A bizonyitásnak más alkalomra való fenntartása mellett azt hisszük, hogy *Pareto* kifogásainak csak formális jelentősége van. Az egész a független változókként felfogott termelési javak definicióján mulik. Ha a definicióhoz a mi szétosztási koefficiensünket használjuk fel, akkor kifejezhetjük azt, amit *Walras* lényegileg akart s amiben, nézetünk szerint, igaza maradt *Pareto*val szemben. A (3) egyenletsor a szétosztási koefficiens segitségével a következő elv alapján volna felépithető:

$$A_1 = \psi_1\left(\frac{R_1}{r_{11}}, \frac{R_2}{r_{12}}, \ldots, \frac{R_r}{r_{1r}}\right),$$

ami tartalmilag teljesen megfelel annak a *Walras*-féle egyenletnek, amelyet módjában állt *Pareto*nak formailag kifogásolnia.

[5] Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie (1902). 1117. old. Encyklopedie der mathematischen Wissenschaften. I. Band. Zweiter Teil. 1900—1904. Leipzig. Továbbá: Cours d'économie politique. 1896—97. I. köt. 82—86. old.

Ezt az utóbbi egyenletet irhatjuk a *Walras* jelzéseivel is (pl. a *c* fogyasztási jószágra):

$$Q_c = \varphi\,(T_c, \ldots, P_c, \ldots, K_c, \ldots), \tag{7}$$

ahogy *Moore*nál is szerepel, aki a termelési koefficiensek *Walras*-féle definicióját is átveszi, amely szerint a termelési koefficiensek

$$\frac{T_c}{Q_c}, \ldots, \frac{P_c}{Q_c}, \ldots, \frac{K_c}{Q_c}, \ldots$$

hányadosokkal egyenlők, ami nem más, mintha mi azt mondanók, hogy

$$a_{11} = \frac{R_1}{r_{11} A_1}, \quad a_{12} = \frac{R_2}{r_{12} A_1}, \quad a_{21} = \frac{R_1}{r_{21} A_2}, \quad \ldots$$

Ezzel szemben *Pareto* függvényeket alkot a következő formára (*Cassel* jelzéseivel):

$$R_1 = F\,(A_1, A_2, \ldots, A_n),$$

ami nem más, mint a *Walras*-féle, fentebb (2) alatt adott egyenletsornak határozatlan formában való kifejezése. *Pareto* ebből a termelési koefficienseket parciális differenciálás utján kapja meg a következőképpen:

$$a_{11} = \frac{\delta F}{\delta A_1}.$$

De ez az eredmény csak látszólag tér el a *Walras*étól, mert ha a (2) egyenletsor első egyenletét A_1 után parciálisan differenciáljuk, ugyanazt az eredményt kapjuk, ez pedig egyben egyenlő azzal az értékkel is, amelyet *Walras* adott a termelési koefficiensnek, a két eredmény között tehát nincs különbség. Ugyanis a (2) egyenletsor első egyenletének A_1 utáni parciális differenciálása utján a következő eredményt kapjuk:

$$a_{11} = \frac{\delta R_1}{\delta A_1},$$

ami nem más, mint a *Pareto* képlete. Az (1) egyenletsor első egyenletének A_1-gyel való szorzatából pedig az egységár helyett egy termelvény összértékének meghatározását kapjuk:

$$A_1 p_1 = a_{11} A_1 q_1 + a_{12} A_1 q_2 + \ldots + a_{1n} A_1 q_n,$$

amelyben minden termelési jószág ára az igénybevett termelési jószágmennyiséggel egyenlő szorzóval van megszorozva. Ha ezeknek a mennyiségeknek *Walras*-val ugy adunk kifejezést, hogy például az első szorzóra nézve megállapitjuk, hogy

$$a_{11} A_1 = T_1$$

ebből következik, hogy

$$a_{11} = \frac{T_1}{A_1},$$

Ugyanazon egyenletrendszerben kapunk tehát a_{11}-re nézve kétféle értéket, amelyeknek ennélfogva egyenlőknek kell lenniök, vagyis

$$a_{11} = \frac{\delta R_1}{\delta A_1} = \frac{T_1}{A_1}.$$

Sőt még további meghatározásokat találhatunk a_{11}-re, ha az (1) egyenletsor első egyenletét q_1-re nézve parciálisan differenciáljuk, mert akkor

$$a_{11} = \frac{\delta p_1}{\delta q_1}$$

s ha visszaemlékezünk a mi beszámitási és szétosztási koefficiensünkre, mely szerint

$$a_{11} = \frac{p_1}{z_{11}\, q_1}, \qquad a_{11} = \frac{R_1}{r_{11}\, A_1},$$

ugyhogy a_{11}-nek ötféle meghatározását kapjuk:

$$a_{11} = \frac{T_1}{A_1} = \frac{R_1}{r_{11}\, A_1} = \frac{p_1}{z_{11}\, q_1} = \frac{\delta R_1}{\delta A_1} = \frac{\delta\, p_1}{\delta\, q_1}.$$

Pareto még egy lépéssel továbbment s hogy kifejezze a termelési koefficiensek változását a termelés méreteivel, a fenti (1) egyenletsor helyébe egy másik összefüggést helyezett, amelyben nem a fogyasztási javak árai, hanem a termelt fogyasztási javak összértéke van meghatározva. Egy ilyen egyenlet (részben *Cassel* jelzéseivel) a következő:

$$\pi_1 = p_1\, A_1 = \pi_{11} + \int (a'_{11}\, q_1 + a_{12}\, q_2 + \ldots + a'_{1r}\, q_r)\, d\, A_1,$$

Mivel azonban minket az érdekel, hogy mi a fogyasztási javak *ára*, a *Pareto*-féle képletből azt még ki kell hámozni. Egy ilyen meghatározás lenne a következő:

$$p_1 = \frac{\pi_{11}}{A_1} + q_1 \frac{1}{A_1}\int a'_{11}\, dA_1 + q_2 \frac{1}{A_1}\int a'_{12}\, dA_1 + \ldots + q_r \frac{1}{A_1}\int a'_{1r}\, dA_1$$

Ez összeg első tagja a fogyasztási jószág egy egységére eső általános üzleti költségeket, az igazgatási stb. költséghányadot fejeze ki. A többi tagok állandói a termelési javak egységárai, integrálandó mennyiségei a termelés terjedelmével változó termelési koefficiensek összes értékei, elosztva a fogyasztási javak mennyiségével.

Ha ezt az egyenletet az (1) egyenletsor első egyenletével összehasonlitjuk, azt mondhatjuk, hogy a *Walras*-féle egyenlet csak egyszerübb és általánosabb kifejezése ugyanannak, ami a *Pareto*-féle egyenletben rejtőzik, ugyhogy a *Pareto*-féle egyenletnek csak másodlagos jelentőséget tudnánk tulajdonitani, s a továbbiakban bátran figyelmen kivül hagyhatjuk. Különösen nyilvánvalóvá tehetjük ezt, ha az összeg első tagját tovább elemezzük. E tag ugyanis a következőkép bontható fel:

$$\frac{\pi_{11}}{A_1} = p_0 = a_{01}\, q_1 + a_{02}\, q_2 + \ldots + a_{0r}\, q_r$$

Ebből pedig az következik, hogy előző egyenletünknek a következő általánosabb alakot adhatjuk:

$$p_1 = q_1 \left(a_{01} + \frac{1}{A_1}\int a'_{11}\, dA_1\right) + q_2\left(a_{02} + \frac{1}{A_1}\int a'_{12}\, dA_1\right) + \ldots +$$

$$+ q_r \left(a_{0r} + \frac{1}{A_1}\int a'_{1r}\, dA_1\right)$$

amiből további általánositással és egyszerüsitéssel már kaphatunk egy olyan egyenletet, amelyik miben sem különbözik a fenti (1) egyenletsor első egyenletétől.

Visszatérve *Walras*-hoz, meg kell emlitenünk, hogy *Walras* az (1) egyenletsorból kiindulva a (3) egyenletsornak egy quantitativ meghatározást is adott a következőképpen. Ha az (1) egyenletsor első egyenletét $\frac{A_1}{p_1}$-gyel megszorozzuk, akkor a következő egyenletet kapjuk:

$$A_1 = a_{11}\, A_1 \frac{q_1}{p_1} + a_{12}\, A_1 \frac{q_2}{p_1} + \ldots + a_{r}\, A_1 \frac{q_r}{p_r}$$

Ez egyenletben a törtek szorzói az igénybevett termelési javak mennyiségét jelenti. Adjunk ezeknek megfelelő jelzést, mint a (7) egyenletben:

$$a_{11}\, A_1 = T_1,\quad a_{12}\, A_1 = P_1,\ \ldots,\quad a_{1r}\, A_1 = K_1$$

Helyettesitsük be ezeket az előbbi egyenletbe:

$$A_1 = T_1 \frac{q_1}{p_1} + P_1 \frac{q_2}{p_1} + \ldots + K_1 \frac{q_r}{p_r}$$

Differenciáljuk parciálisan ezt az egyenletet a termelési javak mennyiségére egymásután, akkor a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{\delta A_1}{\delta T_1} = \frac{q_1}{p_1},\quad \frac{\delta A_1}{\delta P_1} = \frac{q_2}{p_1},\quad \ldots,\quad \frac{\delta A_1}{\delta K_1} = \frac{q_r}{p_r}$$

Helyettesitsük ezt be az előbbi egyenletbe:

$$A_1 = T_1 \frac{\delta A_1}{\delta T_1} + P_1 \frac{\delta A_1}{\delta P_1} + \ldots + K_1 \frac{\delta A_1}{\delta K_1} \qquad (8)$$

Ez az egyenlet ugy tünik fel, mintha a fogyasztási javak mennyiségét a termelési javak mennyiségével fejezné ki, holott a fogyasztási javak mennyisége csakis *ugyanezen* fogyasztási javak parciális differenciálhányadosaiban nyer kifejezést. A határtermelékenységi elmélet igazolásának sem mondható ez az eredmény, mint ahogy *Moore* értékeli, mert a differenciálhányadosok értéke (6) egyenletsorunk első egyenlete értelmében egyszerüen

$$\frac{\delta A_1}{\delta T_1} = \frac{1}{a_{11} z_{11}}, \ \frac{\delta A_1}{\delta P_1} = \frac{1}{a_{12} z_{12}}, \ldots, \frac{\delta A_1}{\delta K_1} = \frac{1}{a_{1r} z_{1r}}$$

Csak ha ezeket az értékeket a differenciálhányadosok helyére behelyettesitjük, kapjuk meg azt, ami a (3) egyenletsor quantitativ meghatározásaképpen hiányzik. Hogy a (8) egyenlet önmagában nem kielégitő, mutatja *Moore* példája is, aki a (7) egyenlet meghatározására egész más utakat keresett, noha eredményének ellenőrzéséül a (8) egyenletet is felhasználta. A (7) egyenlet további vizsgálatát elhalasztjuk most már akkorra, amikor *Moore* egyenletrendszerére térünk át.

Ezzel kiindulópontul választott sémánk megforditott alakban való vizsgálatát egyelőre befejeztük. Most a másik problémára kell figyelmünket irányitanunk, amely az árak és a mennyiségek egymásközti viszonyának meghatározásában áll. Már *Cournot* ugy fogta fel az egyes gazdasági javak mennyiségét, hogy azokat áraik függvényének kell tekinteni. *Walras* általánositotta a tételt, mondván, hogy minden gazdasági jószág mennyisége függvénye az összes áraknak, vagyis (*Cassel* jelzéseivel):

$$(9)\quad \begin{array}{l} A_1 = F_1 (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_r) \\ A_2 = F_2 (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n = F_n (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_r) \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} R_1 = f_1 (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_r) \\ R_2 = f_2 (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_r = f_r (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_r) \end{array} \quad (10)$$

Ezzel a mennyiségeknek az áraktól való függése *qualitative* meg van határozva. A quantitativ meghatározás irányában csak annyi történt, hogy *Walras* az egyes gazdasági alanyok határhaszonnivójában összefüggésbe hozta a mennyiségeket az árakkal. Ez azonban sokat vesztett meghatározó erejéből azáltal, hogy *Auspitz* és *Lieben*, *Edgeworth*, *Fisher* és *Pareto* óta szokásossá vált a határhasznokat nem csupán egy-egy jószág, hanem minden jószág mennyiségének függvényeként fogni fel. Ha egy egyenletnek, mint

$$A_1 = F_1 (p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_r)$$

meghatározására csak a következő egyenleteket tudjuk nyujtani, mint

$$\begin{array}{l} U_1 = \Phi_1 (A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{n1}) \\ U_2 = \Phi_2 (A_{12}, A_{22}, \ldots, A_{n2}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_x = \Phi_x (A_{1x}, A_{2x}, \ldots, A_{nx}) \end{array}$$

amelyek parciális differenciálhányadosai az egyes gazdasági alanyokra és javakra vonatkozó határhasznok, mint például

$$\frac{\delta \Phi_1}{\delta A_{11}}, \ \frac{\delta \Phi_1}{\delta A_{21}}, \ \ldots, \ \frac{\delta \Phi_2}{\delta A_{22}}, \ \ldots, \ \frac{\delta \Phi_x}{\delta A_{nx}}$$

akkor az előbbi határozatlan összefüggés helyébe csak még határozatlanabb összefüggések sorozatát helyeztük, nem is beszélve a határhaszon mérhetőségének és realitásának problematikus voltáról. Már-már ugy látszott, hogy a kérdés itt megfeneklik, amikor a matematikai statisztika fejlődése uj lehetőségeket nyujtott és itt Karl *Pearson*nak, a matematikai statisztika legnagyobb mesterének nevét kell a legnagyobb tisztelet hangján megemlitenünk. *Pearsont* nem a közgazdaságtan problematikája vezette, mikor a többszörös korreláció elméletét kidolgozta, de elmondhatjuk Henry *Schultz*-cal[6] hogy „it would seem as if the method of multiple correlation were expressly invented for the purpose of deriving dynamic laws of demand". Valójában a többszörös korreláció módszere nem ad sem statikai, sem dinamikai törvényszerüségeket, csak empirikus összefüggések quantitativ meghatározását teszi lehetővé. De az empirikusan talált eredményeknek az elmélet álláspontjaival való összekapcsolódása már magában véve igen nagy haladás, amely az elmélet további fejlődésére sem maradhatott minden hatás nélkül, mint ahogy azt Henry Ludwell *Moore* munkássága oly igen szépen is mutatja. A matematikai statisztika fejlődése a legtermékenyebb matematikai módszereket tette a közgazdaságtan elmélete számára hasznosithatóvá. Először a legkisebb négyzetek módszerének segitségével igen egyszerü feladat egy gazdasági jelentőségü változó értékének változását kifejezni az időben, amin a trendszámitás alapszik. Már a tiszta empirizmustól való nagyobb eltávolodást jelent a többszörös korreláció módszerének alkalmazása, mely több gazdasági jelentőségü változónak párhuzamos változását szemlélteti s lehetségessé teszi minden egyes változó változásának meghatározását a többi változó változásából. Más szóval quantitativ összefüggést ad a gazdaságilag jelentős tényezők között és igy a határozatlan függvények quantitativ meghatározására elsőranguan alkalmas. *Moore* az elaszticitás fogalmának felhasználásával még egy mélyebb összefüggést is talált, mely azonban, mint látni fogjuk, a többszörös korreláció módszerének eredményeivel a legszorosabb összefüggésben marad.

A matematika határozatlan függvények összefüggésének quantitativ meghatározására különböző megközelitő lehetőségeket ismer, amelyek egy függvénynek, mint amilyen

$$A_1 = F_1 (p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_r)$$

a következő megoldásait nyujtják. Első megközelitésként:

$$A_1 = a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n + a_{n+1} q_1 + \ldots + a_{n+r} q_r$$

[6] Statistical Laws of Demand and Supply. 1928. 30. old.

Második és általános megközelitésként:

$$
\begin{aligned}
A_1 = a_0 & + a_1 p_1 + b_1 p_1^2 + c_1 p_1^3 + \ldots \\
& + a_2 p_2 + b_2 p_2^2 + c_2 p_2^3 + \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + a_n p_n + b_n p_n^2 + c_n p_n^3 + \ldots \\
& + a_{n+1} q_1 + b_{n+1} q_1^2 + c_{n+1} q_1^3 + \ldots \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + a_{n+r} q_r + b_{n+r} q_r^2 + c_{n+r} q_r^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

Ezek a meghatározások mindaddig, amig a statisztika segitségül nem vehető, tartalmatlanok és semmitmondók. Ép azért tartozunk nagy köszönettel a statisztikának, hogy a fenti egyenletekben szereplő parametereknek (a, b, c...) értelmet adott. Az első megközelitésképpen alkalmazott összefüggés fordul elő a többszörös korreláció elméletében, ugyhogy a fenti összefüggés a statisztikában szokásos jelzésekkel irva, a következő alakot nyeri:

$$X_1 = a_{1..n} + b_{12..n} X_2 + b_{13..n} X_3 + b_{14..n} X_4 + \ldots$$

A második és általános megközelités fordul elő az egyetlen változó (y) időegyenletében, a trendegyenletben, ahol *t* az időtartam:

$$y = a + bt + ct^2 + dt^3 + \ldots$$

A feladat mindkét esetben a parameterek meghatározása s erre a matematikai statisztikának igen jó módszerei vannak. Hogy az ezekben az egyenletekben szereplő jelek értelmét világosan lássuk magunk előtt s hogy egyben tudjuk, hogy mi mindenre van szükségünk a fenti egyenletek meghatározásánál, legjobb lesz, ha klasszikus példákat idézünk.

I. Egy korrelációs egyenlet meghatározása.[7]

Anglia egyik kerületében 20 éven át megfigyelték és feljegyezték a vetési szénatermés nagyságát acre-onként cwt-ben (X_1), a tavaszi esőzés mennyiségét inch-ben (X_2) és a tavaszi hőmérséklet melegmennyiségét 42° Fahrenheit-en felül (X_3). Ezekből az adatokból a következő jelzőszámok voltak kiszámithatók:

X_1 számtani átlaga $\frac{\Sigma X_1}{n} = M_1 = 28.02$ ahol $n=20$

X_2 „ „ $\frac{\Sigma X_2}{n} = M_2 = 4.91$ „ „

X_3 „ „ $\frac{\Sigma X_3}{n} = M_3 = 5.94$ „ „

[7] *Yule:* An Introduction to the Theory of Statistics. 9. kiad. 1929. 253. old. *Czuber:* Die statistischen Forschungsmethoden. 1921. 165—166. old. *Rietz:* Handbook of Mathematical Statistics. 1924. 141. old.

A szóródások, vagyis az évi adatoknak a huszéves átlagtól való közepes eltérései, ha az eltérések meghatározása

$$x_1 = X_1 - M_1 \qquad x_2 = X_2 - M_2 \qquad x_3 = X_3 - M_3$$

akkor X_1 közepes eltérései $\sqrt{\dfrac{\Sigma(x_1^2)}{n}} = \sigma_1 = 4.42$

X_2 „ „ $\sqrt{\dfrac{\Sigma(x_2^2)}{n}} = \sigma_2 = 1.10$

X_3 „ „ $\sqrt{\dfrac{\Sigma(x_3^2)}{n}} = \sigma_3 = 85$

A korrelációs koefficiensek, vagyis X_1-nek X_2-vel, X_1-nek X_3-mal és X_2-nek X_3-mal való összefüggését mutató együtthatók:

X_1 és X_2 összefüggési együtthatója $\dfrac{\Sigma(x_1 x_2)}{n\,\sigma_1\,\sigma_2} = r_{12} = +\,0.80$

X_1 és X_3 „ „ $\dfrac{\Sigma(x_1 x_3)}{n\,\sigma_1\,\sigma_3} = r_{13} = -\,0.40$

X_2 és X_3 „ „ $\dfrac{\Sigma(x_2 x_3)}{n\,\sigma_2\,\sigma_3} = r_{23} = -\,0.56$

Mint látható, a korreláció pozitiv és negativ egyaránt lehet. A korrelációs koefficiens +1-től —1-ig minden értéket felvehet. A statisztika elmélete még lehetővé teszi, hogy a közepes eltérések, valamint a korrelációs koefficiensek értékét módositsuk, ha több változót veszünk figyelembe.

Igy változik a jelen esetben is a közepes eltérések értéke σ_1, σ_2, σ_3 a következő képletek alapján:

X_1-re nézve $S_{1\cdot 23} = \sigma_1 \sqrt{\left(1-r_{12}^2\right)\left(1-r_{13\cdot 2}^2\right)} = 2.64$

X_2-re „ $S_{2\cdot 13} = \sigma_2 \sqrt{\left(1-r_{12}^2\right)\left(1-r_{23\cdot 1}^2\right)} = 0.59$

X_3-ra „ $S_{3\cdot 12} = \sigma_3 \sqrt{\left(1-r_{13}^2\right)\left(1-r_{23\cdot 1}^2\right)} = 68.65$

A korrelációs koefficiensek változott értéke már ezekben a képletekben szerepel. Kiszámitásuk a következőképpen történik:

$$X_1,\ X_2 \text{ között } r_{12\cdot3} = \frac{r_{12} - r_{13}\, r_{23}}{\sqrt{\left(1-r_{13}^2\right)\left(1-r_{23}^2\right)}} = +\ 0\cdot76$$

$$X_1,\ X_3 \quad ,, \quad r_{13\cdot2} = \frac{r_{13} - r_{12}\, r_{23}}{\sqrt{\left(1-r_{12}^2\right)\left(1-r_{23}^2\right)}} = +\ 0\cdot10$$

$$X_2,\ X_3 \quad ,, \quad r_{23\cdot1} = \frac{r_{23} - r_{12}\, r_{13}}{\sqrt{\left(1-r_{12}^2\right)\left(1-r_{13}^2\right)}} = -\ 0\cdot44$$

A módositott közepes eltérés még egy másik módon is meghatározható, még pedig ugy, hogy benne csak egy korrelációs koefficiens szerepel, egy generális koefficiens, amely kifejezi egy változónak az összes többi változókkal való együttes összefüggését. Igy X_1-nek X_2-vel és X_3-mal egyszerre való összefüggésére nézve kapjuk a következőket:

$$S_{1\cdot23} = \sigma_1 \sqrt{1 - R_{1\cdot23}^2} = 2\cdot64$$

amelyben

$$1 - R_{1\cdot23}^2 = \left(1 - r_{12}^2\right)\left(1 - r_{13\cdot2}^2\right)$$

és ebből X_1 generális korrelációs koefficiense

$$R_{1\cdot23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2\, r_{12}\, r_{13}\, r_{23}}{1 - r_{23}^2}} = +\ 0\cdot80$$

Ha ugyanezt az eljárást X_2-re és X_3-ra nézve is végrehajtanók, a következő eredményeket kapnók:

$$R_{2\cdot13} = +\ 0\cdot84 \qquad\qquad R_{3\cdot12} = +\ 0\cdot57$$

Ezzel adva vannak számunkra az összes adatok, amelyek egy korrelációs egyenlet felállitásához szükségesek. Ha csak két változó összefüggéséről volna szó, akkor ezek összefüggését egy sik-koordinátarendszerben szemléletessé tehetjük. Ha kiindulópontul mindegyik változó átlagértékét választjuk, ugyhogy a koordináták az átlagértékektől való eltérésekkel azonosok, akkor a két változó összefüggésére nézve a következő két korrelációs egyenlet állitható fel:

$$x_1 = b_{12}x_2 \qquad\qquad x_2 = b_{21}x_1$$

Hogy áttérhessünk a változók abszolut értékeire, nem kell mást tennünk, mint a koordinátarendszer kezdőpontját áthelyeznünk. Igy kapjuk, hogy

$$X_1 - M_1 = b_{12}\,(X_2 - M_2) \qquad\qquad X_2 - M_2 = b_{21}\,(X_1 - M_1)$$
$$X_1 = (M_1 - b_{12}\,M_2) + b_{12}\,X_2 \qquad\qquad X_2 = (M_2 - b_{21}\,M_1) + b_{21}\,X_1$$
$$X_1 = a_1 + b_{12}\,X_2 \qquad\qquad X_2 = a_2 + b_{21}\,X_1$$

Az első parameter (a) ezzel meg van határozva. A kérdés csak az, hogy mi a második parameter (b) értéke. Erre nézve a következő meghatározásaink vannak:

$$b_{12} = r_{12}\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \qquad b_{21} = r_{12}\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \qquad r_{12} = \sqrt{b_{12}b_{21}}$$

Ezt a második parametert regressziós koefficiensnek nevezzük és pedig b_2-et X_1 regressziós koefficiensének X_2-vel szemben (X_2 regresszijójának X_1-gyel szemben) és b_1-t X_2 regressziós koefficiensének X_1-gyel szemben (X_1 regressziójának X_2-vel szemben).

Ezek a regressziós koefficiensek is változnak azonban, mihelyt több változóra térünk át. A számuk is megszaporodik, mert minden változó pár között uj regressziók jönnek létre. Igy változik b_{12} is a következőképpen:

$$b_{12\cdot3} = r_{12\cdot3}\frac{S_{1\cdot23}}{S_{2\ 13}} = \frac{r_{12} - r_{13}\,r_{23}}{1 - r^2_{23}} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \beta_{12\cdot3}\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

A β alatt a regressziós koefficiensnek egy módositott alakját értjük, amelynek használata bizonyos számitásbeli előnyökkel jár és a korrelációs egyenletre alkalmazva nem jelent mást, mint a koordinátarendszer (ezuttal már tér-koordinátarendszer) kezdőpontjának áthelyezését. Ha ellenben abszolut értékekre térünk át, a módositott regressziós koefficiensek visszamódosulnak. Három változóval X_1-re nézve most már a következő korrelációs egyenleteket állithatjuk fel [5]

$$\overline{X}_1 = \beta_{\cdot 2\cdot3}\,\overline{X}_2 + \beta_{13\cdot2}\,\overline{X}_3$$

$$x_1 = b_{12\cdot3}\,x_2 + b_{13\cdot2}\,x_3$$

$$X_1 = (M_1 - b_{12\cdot3}\,M_2 - b_{13\cdot2}\,M_3) + b_{12\cdot3}\,X_2 + b_{13\cdot2}\,X_3$$

$$X_1 = a_{1\cdot23} + b_{12\cdot3}\,X_2 + b_{13\cdot2}\,X_3$$

A regressziós koefficiensek kiszámitásánál nagy könnyebbséget okoz, ha a „null-foku“ korrelációs koefficiensekből egy determinánst készitünk *Pearson* mintájára, ebből a módositott koefficienseket (β) kiszámitjuk, amelyből a tulajdonképpeni koefficiensek (b) az általános formula alapján azonnal megkaphatók. Az adott esetben a determináns a következő:

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{12} & 1 & r_{23} \\ r_{13} & r_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

Ebből a módositott regressziós koefficiensek és a generális korrelációs koefficiens értéke a következő formulák alapján kapható meg:

[5] Az $\overline{x}_1$ $\overline{x}_2$ $\overline{x}_3$ értéke per definitionem $\frac{X_1-M_1}{\sigma_1}$, $\frac{X_2-M_2}{\sigma_2}$, $\frac{X_3-M_3}{\sigma_3}$.

$$\beta_{12\cdot 3} = \triangle_{12}/\triangle_{11}, \quad \beta_{13\cdot 2} = -\triangle_{13}/\triangle_{11}, \quad R_{1\cdot 23} = \sqrt{1 - \triangle/\triangle_{11}}$$

amely formulákban az index-szel ellátott determinánsok a fenti determináns aldeterminánsait jelzik s az indexek számai az aldeterminánsok képzésénél kihagyandó hasábokat és sorokat jelzik. Igy például $\triangle_{12}$ értéke:

$$\triangle_{12} = \begin{vmatrix} r_{12} & r_{23} \\ r_{13} & 1 \end{vmatrix} = r_{12} - r_{13}r_{23}$$

Ez az eljárás mindhárom változónk korrelációs egyenletének regressziós koefficienseire megfelelően alkalmazható. Ezen az alapon X_1-re nézve a következő korrelációs egyenleteket kapjuk, kiszámitott parameterekkel:

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= 0{\cdot}83916\ \bar{X}_2 + 0{\cdot}06993\ \bar{X}_3 \\ x_1 &= 3{\cdot}37\ x_2 + 0{\cdot}0037\ x_3 \\ X_1 &= 9.28 + 3.37\ X_2 + 0{\cdot}0037\ X_3 \end{aligned}$$

Ugyanezen a módon felállithatjuk X_2 és X_3 korrelációs egyenletét is a következő parameterekkel:

$$\begin{aligned} X_2 &= -\ 40{\cdot}74 + 1{\cdot}71\ X_1 - 0{\cdot}0038\ X_3 \\ X_3 &= 526{\cdot}13 + 2{\cdot}51\ X_1 - 0{\cdot}50\ X_3 \end{aligned}$$

A három változó korrelációs egyenletének összefüggésére érdemes egyet (pl. X_1-et) valamennyiből kiszámitani. Akkor a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} X_1 &= 9{\cdot}28 + 3{\cdot}37\ X_2 + 0{\cdot}0037\ X_3 \\ X_1 &= 23{\cdot}825 + 0{\cdot}5526\ X_2 + 0{\cdot}0022\ X_3 \\ X_1 &= -\ 209{\cdot}61 + 0{\cdot}3984\ X_2 + 0{\cdot}1992\ X_3 \end{aligned}$$

Ez az eredmény kell, hogy a parameterek jelentőségére nézve bizonyos óvatosságra intsen, mert ha árak és mennyiségek hasonló korrelációs egyenleteiből a parameterek segitségével elaszticitásokat akarunk kiszámitani, mint ahogy Henry *Schultz* tette, ellentmondó eredményeket kaphatunk, aszerint, hogy melyik korrelációs egyenletből indulunk ki. Azt hisszük azonban, hogy a fenti három egyenlet közül csakis az elsőnek van racionális értelme és igy az az ellentmondás, amelyet Henry *Schultz* talált, voltaképpen nem is létezik. Adott példánkban ez igy van, árak és mennyiségek kölcsönhatásánál azonban nem ilyen kétségtelenül van igy és legalább is oda kell vezetnie, hogy az árelaszticitás (flexibility) és a mennyiségelaszticitás (elasticity) egymásnak nem reciprok értéke, mint ahogy *Moore* definiciójából következnék. Valamilyen ellentmondás tehát mindenképpen adódik ez egyenletekből, ha a közgazdasági elméletben nyert felhasználásukat tekintjük.[9] Erre

[9] Ez az ellentmondás csak akkor kerülhető el, ha *Henry Schultz* példájára több korrelációs egyenletet egyetlenegy közös egyenletbe vonunk össze. Lásd később.

a kérdésre még visszatérünk az elaszticitás fogalmának magyarázatánál.

II. Egy trendegyenlet meghatározása.[10]

1897 elejétől 1921 végéig az Egyesült Államokban az üzleti bukások száma 301.958 volt. Ha egy koordinátarendszerben az abscisszatengelyre (x) felmérjük az időpontot s a koordinátatengelyre (y) az évenkinti bukások számát s a koordinátarendszer sikjában igy nyert pontokat összekötjük, egy görbét kapunk, amely jellegzetesen fluktuál fel és le egy közbül elképzelhető középvonal körül, mint amelynek meghatározására a trendszámitás irányul is. A trend, mint a fluktuáció tengelye, állandó irányvonala, ellenállhatatlanul szuggerálja az embernek azt a hitet, hogy ez a trendvonal egy relativ egyensulyhelyzet kifejezője és nem is lehet ennélfogva csodálkoznunk azon, ha *Moore* dinamikai elméletében a trendvonal a mozgó egyensuly (moving equilibrium), a dinamikai egyensulyvonal szerepét játssza. A korrelációs egyenlet geometriai értelme szerint a változók abszolut értékeinek szóródása közepette egy egyenest, egy tengelyvonalat határoz meg, ugyanigy határoz meg egy tengelyvonalat a trendegyenlet is, mely a megközelités mértéke szerint lehet egyenes, másodfoku parabola, harmadfoku parabola és igy tovább. A görbe kiegyengetése (smoothing) egyszerüen mozgó átlagok (moving averages) segitségével is történhetik, aminek illusztrálására szolgáljon a következő példa. 1897 elejétől 1906 végéig az üzleti bukások száma az Egyesült Államokban az évek sorrendjében a következő volt:

13083, 11615, 9642, 9912, 10648, 9973, 9775, 10417, 9967, 9385.

Ebből az 1—5, 2—6, 3—7, 4—8, 5—9, 6—10 év összege elosztva az évek számával, 5-tel;

10980, 10358, 9990, 10145, 10156, 9903·4.

Ezek a mozgó átlagok, amelyek az előbbi számokat már lényegesen kiegyengetik. Sokkal tökéletesebb módszer ellenben az, amely a legkisebb négyzetek módszerét hivja segitségül s amely matematikailag sokkal pontosabb eredményre vezet. A legkisebb négyzetek módszerének igazolását itt természetesen nem adhatjuk, de *Czuber*, *Rietz*, *Mills*, *Bowley* statisztikai munkáiban nagyon jó magyarázatokat találhatunk. Itt csak az eljárást mutatjuk be emlitett példánkon s ez az eljárás valóban nagyon egyszerü, ha sok számolással jár is, melyet a logarithmustábla használata bizonyára megkönnyithet. A feladat egy trendegyenlet parametereinek meghatározása, amely aszerint változik, hogy milyen megközelitéssel (egyenes, másodfoku parabola, harmadfoku parabola stb.) akarunk dolgozni. Az első három megközelitésre vonatkozó egyenletek tipusai:

[10] *Mills:* Statistical Methods applied to Economics and Business. 1925. 284—288. old. *Rietz:* Handbook of Mathematical Statistics. 1924. 66—67. old.

$$
\begin{aligned}
y &= a + bt \\
y &= a + bt + ct^2 \\
y &= a + bt + ct^2 + dt^3
\end{aligned}
$$

A számitásainkat lényegesen leegyszerüsithetjük, ha kezdőidőpontul a 25 évi időtartam közepét, 1909-et vesszük, mert akkor az előző időpontok negativ előjelt kapnak és az időpontok összege 0-val lesz egyenlő. Az egyenletek meghatározásához a statisztikai adatokból a következő összegeket kell kiszámitanunk:

$$
\begin{array}{llll}
n = 25 & \Sigma(t) = 0 & \Sigma(t^3) = 0 & \Sigma(t^5) = 0 \\
 & \Sigma(t^2) = 1300 & \Sigma(t^4) = 121.420 & \Sigma(t^6) = 13{,}471.900 \\
 & \Sigma(y) = 301.958 & \Sigma(ty) = 188.084 & \\
 & \Sigma(t^2y) = 15{,}516.228 & \Sigma(t^3y) = 9{,}881.156 &
\end{array}
$$

Ezekkel az összegekkel kiszámithatjuk az alábbi „normál"-egyenletekből a szükséges parametereket. Egyenes vonal esetében:

$$
\begin{aligned}
\Sigma(y) &= na + \cancel{b\,\Sigma(t)} \\
\Sigma(ty) &= \cancel{a\,\Sigma(t)} + b\,\Sigma(t^2)
\end{aligned}
$$

Az áthuzott tagok az adott esetben nullával egyenlők és a kiszámitott parameterek (a, b) segitségével a trendegyenlet:

$$y = 12.078 + 144{\cdot}7\ t$$

A normálegyenletek a másodfoku parabola esetében:

$$
\begin{aligned}
\Sigma(y) &= na + \cancel{b\,\Sigma(t)} + c\,\Sigma(t^2) \\
\Sigma(ty) &= \cancel{a\,\Sigma(t)} + b\,\Sigma(t^2) + \cancel{c\,\Sigma(t^3)} \\
\Sigma(t^2y) &= a\,\Sigma(t^2) + \cancel{b\,\Sigma(t^3)} + c\,\Sigma(t^4)
\end{aligned}
$$

Az áthuzott tagok megint nullával egyenlők és a kiszámitott parameterek (a, b, c) segitségével a trendegyenlet:

$$y = 12\text{-}258 + 144{\cdot}7\ t - 3{\cdot}45\ t^2$$

A normálegyenletek a harmadfoku parabola esetében:

$$
\begin{aligned}
\Sigma(y) &= na + \cancel{b\,\Sigma(t)} + c\,\Sigma(t^2) + \cancel{d\,\Sigma(t^3)} \\
\Sigma(ty) &= \cancel{a\,\Sigma(t)} + b\,\Sigma(t^2) + \cancel{c\,\Sigma(t^3)} + d\,\Sigma(t^4) \\
\Sigma(t^2y) &= a\,\Sigma(t^2) + \cancel{b\,\Sigma(t^3)} + c\,\Sigma(t^4) + \cancel{d\,\Sigma(t^5)} \\
\Sigma(t^3y) &= \cancel{a\,\Sigma(t^6)} + b\,\Sigma(t^4) + \cancel{c\,\Sigma(t^5)} + d\,\Sigma(t^6)
\end{aligned}
$$

Az áthuzott tagok ezuttal is nullával egyenlők és a kiszámitott parameterek (a, b, c, d) segitségével a trendegyenlet:

$$y = 12.258 + 482\ t - 3{\cdot}45\ t^2 - 3{\cdot}61\ t^3$$

Ezzel a trendegyenlet képzési módjáról és a normálegyenletek alakulásáról is bizonyos fogalmat alkothatunk magunknak, amihez még hozzáfüzzük a következőket. A legkisebb négyzetek módszerének kiindulópontja az volt, hogy egy és ugyanazon értékre vonatkozólag különböző megfigyeléseink (egyenleteink) vannak, amelyek egymással nem férnek össze. Igyekeznünk kell tehát egyenleteinket ugy átformálni, hogy az ellentmondás kiküszöböltessék, de ugy, hogy eltérésünk a tényleg megfigyelt adatoktól mégis csak a lehető legkisebb legyen. Ha egyszerüen az eltérések összege szerint itélnénk, megtörténhetnék, hogy két ellenkező irányu nagy hiba az összegben eltünnék, holott a valóságban eredményünket teljesen értéktelenné tenné. Ezt kerüli el az eltérések négyzeteinek összegezése, mert a négyzetreemeléssel az összes eltérések pozitiv előjelt kapnak. Ez a gondolat az alapja a szóródás, a közepes eltérés kiszámitásának is és ez az alapja az ellentmondó megfigyelések olyan adjusztálásának, amelynél az adjusztálással a legkisebb hibát akarjuk elkövetni. A megfigyelt adatok trendszerü kiegyengetése is ugy történik, mintha a különböző időpontokban megfigyelt adatoknak egymástól való eltérése „hiba" volna. A feladat tehát az, hogy ezeket az ellentmondó eltéréseket kiküszöböljük s eközben a megfigyelt adatokon mégis a legkisebb erőszakot kövessük el. Emellett annyi egyenletet kell képeznünk, ahány ismeretlenünk van s az adjusztált egyenleteknek ez a megfelelő száma az, amelyeket normálegyenleteknek hivunk. Ez alapon az ismeretlenek kiszámitása már egyszerü feladat s az igy kapott trendegyenlet a lehető legkisebb eltérés elve alapján jellemző az összes feldolgozott eltérő adatokra.

Ha most visszagondolunk a mi „ellentmondó" korrelációs egyenleteinkre, akkor mindjárt azt hihetnők, hogy készen kinálkozik ott is a megoldás. Nem kellene egyebet tennünk, mint a legkisebb eltérés elve alapján a különböző korrelációs egyenleteket összeolvasztanunk, hogy egyenletünk a közgazdasági elmélet igényeinek megfeleljen. De az az eljárás, amelyet a trendegyenletnél alkalmaztunk, itt most már nem használható, mert amint Henry *Schultz* két változó korrelációs egyenleteivel kapcsolatban rámutatott, a két egyenlet voltaképpen összemérhetetlen, mert az alapjául szolgáló legkisebb eltérések más irányuak, amennyiben az eltérések egyik csoportja az abscisszatengely, másik csoportja a koordinátatengely irányát követi.[11] Két változó mellett tehát a megoldás az, hogy a két korrelációs egyenletnek megfelelő két egyenes között egy közbenső egyenest találjunk, melynél a mindkét irányu eltérés négyzeteinek összege a legkisebb. Igy határozta meg Henry *Schultz* a cukor keresleti „görbéjét" az Egyesült Államokra és az 1890 elejétől 1914 végéig terjedő 25 évi időszakra. Láncrelativokat alkalmazva abszolut számok helyett (amire még visszatérünk) a két korrelációs egyenlet és a belőlük alkotott

[11] Statistical Laws of Demand and Supply. 1928. 43. old. A különböző korrelációs egyenletek kiszámitásának alapjául ugyanis szintén a legkisebb négyzetek módszere szolgál. De minden egyes korrelációs egyenletnél az eltérések négyzeteinek minimálása más irányban történik. A különböző korrelációs egyenletek összevonásánál tehát arra kell törekedni, hogy a minimum minden irányban egyszerre mutatkozzék.

„best fitting“ egyenlet a következő volt (x mennyiségekre, y árakra vonatkozik):

$$x = 1\cdot482 - 0\cdot4435\ y \qquad y = 2\cdot084 - 1\cdot0471\ x$$
$$y = 2.910 - 1\cdot8404\ x$$

Ugyanigy járva el trendrációk alkalmazásánál láncrelativok helyett (amire szintén visszatérünk), a következő eredményt kapta:

$$x = 1\cdot451 - 0\cdot4509\ y \qquad y = 2\cdot34 - 133\ 424\ x$$
$$y = 2\cdot979 - 1\cdot9782\ x$$

Mindkét esetben a harmadik egyenlet már megfelelhet a közgazdasági elmélet igényeinek. Egyben megállapitható, hogy ennek az elvnek megfelelő alkalmazására volna több változó esetében is szükségünk, de ez az eljárás ezidőszerint még kellőképpen kidolgozva nincs, noha *Pearson* már 1901-ben alkalmazta ugyanezt az elvet három változóra, *Uhler* pedig 1925-ben négy változóra.

A többszörös korreláció módszerének alkalmazása szempontjából közömbös, hogy abszolut számokat helyezünk-e korrelációba, vagy pedig viszonyszámokat. Igen heterogén természetü mennyiségek összehasonlitásánál a viszonyszámoknak nagy előnyeik vannak s amellett a viszonyszámoktól is bármikor visszatérhetünk az abszolut számokhoz. Amikor árakat és mennyiségeket hasonlitunk össze egymással, határozottan előnyös láncrelativok vagy trendrációk alkalmazása, mert ezek révén ugy az áraknál, mint a mennyiségeknél olyan értékeket kapunk, amelyek nagysága 1 körül ingadozik, hol több, hol kevesebb. Szinte azt mondhatnók, hogy ezzel a fogással sikerül heterogén mennyiségeket közös nevezőre hozni. Az az előnye is van viszonyszámok alkalmazásának, hogy ezek többévi átlaga esetleg éppen 1-gyel lehet egyenlő, aminek nem lebecsülendő számitásbeli előnyei vannak. Láncrelativok jönnek létre, ha az egy évre vonatkozó értékeket az előző év hasonló értékeivel elosztjuk. Trendrációt pedig ugy kapunk, ha egy évre vonatkozó abszolut értékeket az ugyanazon évre vonatkozó trendértékekkel elosztjuk. Igy kapcsolódik össze a korrelációs módszer a trendszámitással, ha trendrációkat szándékszunk korrelációba hozni egymással. Az adatok további adjusztálása is lehetséges, ha láncrelativok vagy trendrációk képzése előtt az abszolut adatokból elimináljuk a pénzérték változását és a népesség szaporodását. Az előbbit elérhetjük, ha az árakat a mindenkori árindexszel elosztjuk, az utóbbit, ha a mennyiségeket a mindenkori népesség számával elosztjuk. Henry *Schultz* mindkettőt megtette s ez alapon előbb közölt cukorkeresleti egyenletei a) láncrelativokban, b) trendrációkban a következőkép változtak:

a) láncrelativokkal:

$$x = 1\cdot416 - 0\cdot3995\ y \qquad y = 2\cdot119 - 1\cdot1090\ x$$

$$y = 3\cdot113 - 2\cdot0817\ x$$

b) trendrációkkal:

$$x = 1\cdot427 - 0\cdot4268\ y \qquad y = 2\cdot480 - 1\cdot4801\ x$$

$$y = 3\cdot136 - 2.1356\ x$$

Ha ezeket az egyenleteket az előzőkkel összehasonlitjuk, azt látjuk, hogy az eltérések a különbözőképpen meghatározott egyenletek között nem olyan nagyok, mint várni lehetne.

Ezek után az ember nagy érdeklődéssel várhatná ez egyenleteknek, mint a *kereslet* „görbéjét" meghatározó egyenleteknek szembeállitását hasonló egyenletekkel, mely utóbbiak azonban a *kinálat* „görbéjét" volnának hivatva meghatározni. Azt tapasztaljuk azonban, hogy a kinálat görbéjének meghatározása nagyobb nehézségekbe ütközik. Ez az eredmény kell, hogy némi meglepetést keltsen, mert hisz az elméletben hozzászoktunk ahhoz, hogy a kinálat meghatározása sokkal kevesebb gondot okoz, mint a keresleté. Az elméleti viták nagyobb része nem a kinálat, hanem a kereslet körül folyt le, s ime most azt tapasztaljuk, hogy a statisztikai vizsgálatban a szerepek kicserélődtek. Az ok abban áll, hogy a statisztika árakat és mennyiségeket helyez szembe egymással, ugyanazokkal az árakkal, egy értelemben, ugyanazokat a mennyiségeket két értelemben kellene szembehelyezni. Ha feltételezzük, hogy a mennyiségek a kinálatot fejezik ki, mint ahogy az elméletben hozzászoktunk, akkor a kereslet meghatározása problematikus. Ha ellenben a statisztikai vizsgálat a mennyiségeket a kereslettel azonositja, akkor a kinálatnak kell problematikussá válnia. Amennyire logikus az előbbi, annyira igazolt statisztikailag az utóbbi. A fogyasztásról ugyanis van elég megbizható statisztika, a termelésről ellenben igen gyakran nincsen. A fogyasztott mennyiségekkel tehát lehet operálni, a kereslet meghatározásánál, a termelt mennyiségekkel ellenben nem lehet, a kinálatnál. Amellett a fogyasztást kell és lehet egy szükebb területre, egy országra, korlátozva vizsgálni, a termelést ellenben, különösen világpiaci áruknál, nem lehet. Igy történhetett, hogy amig a burgonyára még találhatott *Moore* kinálati görbét, az Egyesült Államokra korlátozva, a cukorra ez *Schultz*nak már nem sikerülhetett. Igy *Moore* szembeállithatta a burgonya keresleti és kinálati egyenletét egy szerencsés ötletnek, a „lagging method"-nak (késleltető módszernek) segitségével, olyformán, hogy minden évi mennyiséget (fogyasztást) a folyó évi árakkal szembeállitva keresletnek, az előző évi árakkal szembeállitva pedig kinálatnak minősitett. Az 1900 elejétől 1913 végéig terjedő időszakra kiszámitott trendrációknál a kereslet korrelációs koefficiense $r = -0.95$ volt a folyó évi árakkal, s a kinálat korrelációs koefficiense r = +0.80 volt az előző évi árakkal, ami igen magas és megfelel annak a követelménynek is, hogy a kereslet forditott arányban, a kinálat ellenben egyenes arányban változik az árakkal. A burgonyánál az évi „lagging" megfelel a termelési időtartam okozta eltolódásnak, minélfogva lehetséges, hogy a kinálat az előző évi s a kereslet a folyó évi árak hatása alatt áll. A burgonyára nézve az Egyesült Államok ugy a termelés, mint a fogyasztás szempontjából zárt terület, ugyhogy nem csodálható, hogy *Moore* módszere a háboru előtti aránylag csendes 14 évre eredményesnek bizonyult. A „lagging" módszerének még az az érdekessége is megvan, hogy pusztán ezzel az egy változtatással lehetséges egy gazdasági ciklust létrehozni, amely soha egyensulyba nem jön és az egyensulytól egyre jobban el se távolodik. Szükséges ezt hangsulyozni Umberto *Ricci*nek *Moore* fölött gyakorolt ellenkező értelmü és nézetünk szerint helyt nem álló kritikájával szemben.[12] Ha ugyanis árindexeket, keresletindexeket és kinálatindexeket helyezünk egymással szembe, logikusan az alábbi csoportositás lehetséges, amely megfelel egy négyéves ciklusnak, mert, mint látható, az ötödik évben minden előlről kezdődik. A táblázat érthetővé válik, ha arra gondolunk, hogy az árat a kereslet és a kinálat együttesen határozza meg, a keresletet a folyó évi, a kinálatot az előző évi ár irányitja s a keresletnek az árral való korrelációja negativ, mig a kinálaté pozitiv:

	1 év	2 év	3 év	4 év	5 év	
(1) ár	100	110	100	90	100	
(2) kereslet	100	90	100	110	100	$r_{12} = -$
(3) kinálat	90	100	110	100	90	$r_{13} = +$

Moore-nak a „lagging" módszerével sikerült a kereslet és kinálat egyenletét felállitani a fentemlitett adatokra vonatkozólag és pedig (y árak, x mennyiségek):

$$y = 2 \cdot 425 - 1 \cdot 425\ x \qquad\qquad y = -\ 0 \cdot 222 + 1 \cdot 222\ x$$

ahol a baloldali egyenlet a kereslet, a jobboldali egyenlet pedig a kinálat egyenlete. Mindenesetre a két egyenlet egyszerü korrelációs egyenlet, amelyek a *Schultz*-féle „best-fitting" probléma egyszerü elmellőzésével készültek. Már a cukornál más volt az eredmény. *Schultz* vizsgálatai azt bizonyitják, hogy a „lagging" módszere nem vezet sikerre. A nyert korrelációs ko-

[12] Die „synthesische Ökonomie" von H. L. Moore. Zeitschrift für Nationalökonomie. 1930. I. köt., 5. füzet, 694—668 old. *Ricci* tévedése onnan ered, hogy csak a kinálat és az ár egymásrahatását vizsgálja, a kereslet behatásáról pedig megfeledkezik. Lásd különösen a 655. oldalt, ahol teljesen hamis alapon egy „wachsendes Ungleichgewicht"-et számit ki, persze a keresletről teljesen megfeledkezve.

efficiensek nem felelnek meg az elméleti követelményeknek, amennyiben r = +1-et megközelitő érték helyett *Schultz* adjusztált trendrációknál egyenesen r = —0.1-et talált s a korreláció egy eljárás mellett sem volt kielégitő (nem adjusztált trendrációknál +0.01, adjusztált láncrelativoknál +0.32, nem adjusztált láncrelativoknál +0.43). *Schultz* ennélfogva megpróbálta az időszakok variálását az ár-átlagok kiszámitásánál s a mennyiségeknél a belföldi termelést, a gyarmati behozatalt s a külföldi behozatalt külön-külön és együttesen korrelálta a különböző árátlagokkal, anélkül, hogy bármelyik módszer is olyan kielégitő eredményre vezetett volna, hogy segitségével egy reprezentativ kinálati „görbét" tudott volna megszerkeszteni. A végén azután a világ cukortermelését és cukorfogyasztását állitotta szembe pusztán azon az alapon, hogy a világ cukortermelésének adatai az előző évi newyorki cukorárakkal pozitiv korrelációban (r = +0.59) és a folyó évi newyorki cukorárakkal negativ korrelációban (r = —0.85) vannak. Ez tehát visszatérés a „lagging" módszeréhez, amely mellett azonban a korrelációs koefficiens nem az ellenőrzés, hanem a bizonyitás szerepét játssza, az eredmény tehát nem mondható kielégitőnek. Összehasonlitás kedvéért ideiktatjuk *Schultz*nak igy talált keresleti és kinálati egyenletét, amely láncrelativokban van számitva:

$$y = 2{\cdot}5539 - 1{\cdot}4888\,x \qquad y = -\,0.7506 + 1{\cdot}6788\,x$$

ahol a baloldalon megint a kereslet és jobboldalon a kinálat egyenlete szerepel. *Schultz* még beható vizsgálat alá vette az elaszticitás statisztikai értelmét és kimutatta annak többértelmüségét, aszerint, hogy milyen egyenletet differenciálunk, mert a különböző egyenletek eltérő parameterei belemennek az elaszticitás quantitativ meghatározásába. Ennek a vizsgálódásnak egyik termékeny mellékhajtása volt, hogy sikerült szerencsésen agyonütnie *Pigou*-nak egy nagyigényü képletét a vám áremelő hatásának meghatározásáról, mely képlet érdemleges tartalma csak annyi, hogy az Egyesült Államok cukorvámjának 83%-a áremelő hatásu, mert az Egyesült Államokon kivüli cukortermelés a világtermelés 83%-a! Ez a kapitány életkorának meghatározására a hajó tonnatartalmából! *Pigou* az „Economics of Welfare" 1929. évi (3-ik) kiadásából nagyigényü képletét szép csendben el is távolitotta.[13]

Fenti (9) és (10) függvényegyenletsorunk quantitativ meghatározása tekintetében, mondhatnók, uj korszakot jelent Henry Ludwell *Moore* munkássága. Ő volt az, aki a többszörös korreláció módszerét először alkalmazta módszeresen gazdasági problémák meghatározására. Az Egyesült Államok gyapottermésének a termésjelentésekkel (előzetes becslésekkel), az idő-

[13] Lásd az 1924. évi (2-ik) kiadás 745—749. oldalát. *Schultz* ezzel a kérdéssel idézett könyvének 193—205. oldalán foglalkozik.

járással és az árakkal kapcsolatos vizsgálata az 1890 elejétől 1914 végéig terjedő időszakra nagyon sok, igen érdekes részletet tartalmaz. *Moore*nak erről szóló könyve[14] a többszörös korreláció módszerének megértésére nézve is igen tanulságos. De ennek a könyvnek a jelentőségénél még sokkal nagyobb jelentőségü legujabb munkája, a „Synthetic Economics", mely 1929-ben jelent meg és összefoglalja *Moore* ujabb vizsgálatainak eredményét. Nagyjelentőségü, hogy *Moore* teljes, zárt egységü elméletet igyekszik adni, a dinamikai egyensuly elméletét, melyet szerves kapcsolatba hoz *Walras*-nak felül nem mult statikai egyensulyelméletével és egyben összekapcsolja a statisztikai elmélet legujabb eredményeit s a gazdasági statisztika empirikus adatait a gazdasági elmélet megállapitásaival. Azt is mondhatnók, hogy a közgazdaságtan matematikai módszerének nagy sikereként kell tekintenünk *Moore* eredményeit.

Moore rendszerének középpontjában az *elaszticitás* fogalma áll, melynek értéke a *Marshall* által szerencsés kézzel meghatározott képlet szerint 1 körül ingadozik. Inelasztikus keresletnél az elaszticitás 1-nél kisebb, elasztikus keresletnél pedig 1-nél nagyobb. *Moore* most már az elaszticitás fogalmát általánositotta, amennyiben hatféle elaszticitást különböztetett meg: 1. a kereslet elaszticitását (elasticity of demand), 2. ennek reciprok értékét, a keresleti ár elaszticitását (flexibility of price), 3. a kinálat elaszticitását (elasticity of supply), 4. ennek reciprok értékét, a kinálati ár elaszticitását (responsiveness of price), 5. a termelési költségek elaszticitását (relative cost of production), 6. a termelés elaszticitását (relative efficiency of organisation).

Ha a keresletet és kinálatot megkülönböztetjük, akkor fenti (9) és (10) egyenletsorunkat külön kell felállitanunk a keresletre és külön a kinálatra. Mivel azonban *Moore* a fogyasztási javaknál általában a keresletet, termelési javaknál általában a kinálatot veszi figyelembe, a rövidség kedvéért az alábbiakban a (9) egyenletsort csak a kereslet, a (10) egyenletsort csak a kinálat szempontjából fogjuk figyelembe venni s kifejezetten megemlitjük, ha ettől a szokástól eltérünk. A kereslet elaszticitását tehát a fogyasztási javakra, a kinálat elaszticitását pedig a termelési javakra fogjuk meghatározni s a termelés elaszticitásánál megint a fogyasztási javakra leszünk figyelemmel. Eszerint a kereslet elaszticitásának képlete (A_1 árura, melynek ára p_1):

$$
\begin{aligned}
{}_A\eta_{11} = \frac{p_1\, \partial A_1}{A_1\, \partial p_1} &= \beta_{11} \\
&= \beta_{11} + \beta'_{11}\, p_1 \\
&= \beta_{11} + \beta'_{11}\, p_1 + \beta''_{11}\, p_1^2
\end{aligned}
$$

[14] Forecasting the Price and Yield of Cotton. 1917.

Ez azt jelenti, hogy az ár és a keresleti mennyiség hányadosát megszorozzuk mindkét érték változásának forditott hányadosával és az érték lehet állandó minden változás mellett (konstans), lehet az árváltozással számtani arányban változó (lineáris), lehet az árváltozással mértani arányban változó (parabolikus). A parciális differenciálás jele azért fordul elő, mert a differenciálhányadost a (9) egyenletsor első egyenletéből képzettnek kell tekinteni.

A keresleti ár elaszticitása az előbbi képlet reciprok értéke:

$$
\begin{aligned}
{}_A\Phi_{11} &= \frac{A_1}{p_1}\frac{\delta p_1}{\delta A_1} = \alpha_{11} \\
&= \alpha_{11} + \alpha'_{11} A_1 \\
&= \alpha_{11} + \alpha'_{11} A_1 + \alpha''_{11} A_1^2
\end{aligned}
$$

A kinálat elaszticitásának képlete (R_1 árura, melynek ára q_1):

$$
\begin{aligned}
{}_R\eta_{11} &= \frac{q_1}{R_1}\frac{\delta R_1}{\delta q_1} = \beta_{11} \\
&= \beta_{11} + \beta'_{11} q_1 \\
&= \beta_{11} + \beta'_{11} q_1 + \beta'' q_1^2
\end{aligned}
$$

A kinálati ár elaszticitása az előbbi képlet reciprok értéke:

$$
\begin{aligned}
{}_R\Phi_{11} &= \frac{R_1}{q_1}\frac{\delta q_1}{\delta R_1} = \delta_{11} \\
&= \delta_{11} + \delta'_{11} R_1 \\
&= \delta_{11} = \delta'_{11} R_1 + \delta''_{11} R_1^2
\end{aligned}
$$

Ahol *Cassel* jelzéseit nem alkalmazhattuk, igyekeztünk *Moore* jelzéseit használni. Kár, hogy δ, a parciális differenciálás jele az utóbbi képletben más értelemben szintén előfordul, aminthogy az is kár, hogy α és β a sorrendben fel van cserélve és hogy β a módositott regressziós koefficiens jele is.

A termelési költségek elaszticitása az előbbiekkel összhangban a következőképpen irható fel (A_1 árura és q_1 árra):

$$
\begin{aligned}
K_{11} &= \frac{A_1}{q_1}\frac{\delta q_1}{\delta A_1} = \zeta_{11} \\
&= \zeta_{11} + \zeta_{11} A_1 \\
&= \zeta_{11} + \zeta'_{11} A_1 + \zeta''_{11} A_1^2
\end{aligned}
$$

A termelés elaszticitása az előbbi képlet reciprok értéke. Itt azonban *Moore*-nál egy kis hiba van, mert a termelés elaszticitásának először ezt a definiciót adta $\left(\omega = \frac{1}{\varkappa}\right)$. Később azonban egy elnézésen keresztül a termelés elaszticitását a termelési koefficienssel hozta összefüggésbe ($\omega = \varepsilon$). A két definició nem egyenlő minden további nélkül egymással s igy *Moore* egyenletrendszerében itt egy kis egyenetlenség van. Ennek eredete onnan van, hogy *Moore*, az első definicióból kiindulva könyvének 77—86. oldalán P_c-t, ami pedig *Walras*-nál termelési jószágmennyiséget jelent, mint „*cost* of services"-t kezeli, a 87. oldaltól kezdve pedig már *Walras-val* egyetértésben „quantity of services" gyanánt beszél róla. A legélesebben kidomborodik ez azután a 116. oldalon. A két különböző definiciónak pedig két különböző függvény a feltétele. És pedig (az oldalszámot indexnek használjuk):

$$\omega_{77} = \frac{p_p}{Q_c} \cdot \frac{\delta Q_c}{\delta p_p} = \frac{1}{K} \qquad \text{feltétel:} \quad Q_c = \varphi\,(p_t, \ldots, p_p, \ldots, p_k, \ldots)$$

$$\omega_{87} = \frac{P_c}{Q_c} \cdot \frac{\delta Q_c}{\delta P_c} = \varepsilon \qquad \text{,,} \quad Q_c = \varphi\,(T_c, \ldots, P_c, \ldots, K_c, \ldots)$$

A hiba exponálása kedvéért igyekeztünk *Moore* jelzéseit megtartani. A hiba azonban nem olyan nagy, mint amilyennek látszik. Ha ugyanis (1) egyenletsorunk egy egyenletét *Walras-Moore* jelzéseivel felirjuk és Q_c-vel megszorozzuk, valamint p_c-vel elosztjuk, akkor a következő eredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} Q_c &= T_c \frac{p_t}{p_c} + P_c \frac{p_p}{p_c} + K_c \frac{p_k}{p_c} + \ldots \\ &= \frac{T_c}{p_c} p_t + \frac{P_c}{p_c} p_p + \frac{K_c}{p_c} p_k + \ldots \end{aligned}$$

Ha ezt a két egyenletet parciálisan differenciáljuk, az elsőt P_c és a másodikat p_p után, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{\delta Q_c}{\delta P_c} = \frac{p_p}{p_c}, \qquad \frac{\delta Q_c}{\delta p_p} = \frac{P_c}{p_c}.$$

Helyettesitsük be az elsőt ω_{87} és a másodikat ω_{77} értékébe:

$$\omega_{87} = \frac{P_c}{Q_c} \frac{p_p}{p_c} \qquad \omega_{77} = \frac{p_p}{Q_c} \frac{P_c}{p_c}$$

Azt kapjuk tehát, hogy $\omega_{77} = \omega_{87}$.

Most már abban a helyzetben vagyunk, hogy a termelés elaszticitását meghatározzuk:

$$\begin{aligned} \omega_{11} = \frac{q_1}{A_1} \cdot \frac{\delta A_1}{\delta q_1} &= \frac{R_1}{r_{11} A_1} \cdot \frac{\delta A_1}{\delta\left(\frac{R_1}{r_{11}}\right)} = \varepsilon_{11} \\ &= \varepsilon_{11} + \varepsilon'_{11} \frac{R_1}{r_{11}} \\ &= \varepsilon_{11} + \varepsilon'_{11} \frac{R_1}{r_{11}} + \varepsilon''_{11} \frac{R_1^2}{r_{11}^2} \end{aligned}$$

Az elaszticitásnak ezekkel a fogalmaival *Moore* módot talált arra, hogy fenti (9) és (10) egyenletsorunkat, valamint egy a (7) egyenletnek megfelelő egyenletsort, vagyis a mi (3) egyenletsorunkat quantitative meghatározza. Az eljárás a következő volt. Induljunk ki a kereslet elaszticitásának képletéből. Tekintsük a keresletet csak egy ár függvényének, tekintsük az elaszticitást konstansnak s hagyjuk el az indexeket, akkor az elaszticitás képlete a következő lesz:

$$\beta = \frac{p}{A}\frac{dA}{dp} = \frac{dA}{A}\Big/\frac{dp}{p}\quad,\quad \beta\frac{dp}{p} = \frac{dA}{A}$$

Ezt logarithmikusan integrálhatjuk, mert $\frac{dA}{A} = d\ln A$ és $\frac{dp}{p} = d\ln p$, vagyis $\int\frac{dA}{A} = \ln A$ és $\int\frac{dp}{p} = \ln p$, és az integrálás eredménye az integrációs konstanssal (B) a következő lesz, hozzáadva mindjárt az eredményt abszolút számokban:

$$\ln A = \beta \ln p + \ln B \qquad A = Bp^{\beta}$$

Ha az elaszticitást lineárisnak vesszük, a képletek a következőképpen módosulnak:

$$\beta + \beta' p = \frac{p}{A}\frac{dA}{dp} = \frac{dA}{A}\Big/\frac{dp}{p}\quad,\quad \beta\frac{dp}{p} + \beta' dp = \frac{dA}{A},$$

$$\ln A = \beta \ln p + \beta' p + \ln B \quad,\quad A = Bp^{\beta} e^{\beta' p}$$

ahol *e* a naturális logarithmusok bázisa ($\ln 2.71828 = \ln e = 1$).

Ha az elaszticitást parabolikusnak vesszük, a képletek a következők lesznek:

$$\beta + \beta' p + \beta'' p^2 = \frac{p}{A}\frac{dA}{dp} = \frac{dA}{A}\Big/\frac{dp}{p}\quad,\quad \beta\frac{dp}{p} + \beta' dp + \beta'' p dp = \frac{dA}{A},$$

$$\ln A = \beta \ln p + \beta' p + \frac{\beta'' p^2}{2} + \ln B \quad,\quad A = B p^{\beta} e^{\beta' p + \frac{1}{2}\beta'' p^2}$$

Ennek az eljárásnak az általánositásával (9), (10) és (3) egyenletsorunk első, második, harmadik megközelitéssel meghatározható és pedig első megközelitéssel lesz:

$$(11)\qquad \begin{aligned} A_1 &= B_1\, p_1^{\beta_{11}} \cdot p_2^{\beta_{12}} \cdots p_n^{\beta_{1n}} \cdot q_1^{\beta_{1n+1}} \cdots q_r^{\beta_{1n+r}} \\ A_2 &= B_2\, p_1^{\beta_{21}} \cdot p_2^{\beta_{22}} \cdots p_n^{\beta_{2n}} \cdot q_1^{\beta_{2n+1}} \cdots q_r^{\beta_{2n+r}} \\ &\vdots \\ A_n &= B_n\, p_1^{\beta_{n1}} \cdot p_2^{\beta_{n2}} \cdots p_n^{\beta_{nn}} \cdot q_1^{\beta_{nn+1}} \cdots q_r^{\beta_{nn+r}} \end{aligned}$$

$$(12)\qquad \begin{aligned} R_1 &= G_1\, p_1^{\vartheta_{11}} \cdot p_2^{\vartheta_{12}} \cdots p_n^{\vartheta_{1n}} \cdot q_1^{\vartheta_{1n+1}} \cdots q_r^{\vartheta_{1n+r}} \\ R_2 &= G_2\, p_1^{\vartheta_{21}} \cdot p_2^{\vartheta_{22}} \cdots p_n^{\vartheta_{2n}} \cdot q_1^{\vartheta_{2n+1}} \cdots q_r^{\vartheta_{2n+r}} \\ &\vdots \\ R_r &= G_r\, p_1^{\vartheta_{r1}} \cdot p_2^{\vartheta_{r2}} \cdots p_n^{\vartheta_{rn}} \cdot q_1^{\vartheta_{rn+1}} \cdots q_r^{\vartheta_{rn+r}} \end{aligned}$$

$$(13)\qquad \begin{aligned} A_1 &= E_1 \left(\frac{R_1}{r_{11}}\right)^{\varepsilon_{11}} \cdot \left(\frac{R_2}{r_{12}}\right)^{\varepsilon_{12}} \cdots \left(\frac{R_r}{r_{1r}}\right)^{\varepsilon_{1r}} \\ A_2 &= E_2 \left(\frac{R_1}{r_{21}}\right)^{\varepsilon_{21}} \cdot \left(\frac{R_2}{r_{22}}\right)^{\varepsilon_{22}} \cdots \left(\frac{R_r}{r_{2r}}\right)^{\varepsilon_{2r}} \\ &\vdots \\ A_n &= E_n \left(\frac{R_1}{r_{n1}}\right)^{\varepsilon_{n1}} \cdot \left(\frac{R_2}{r_{n2}}\right)^{\varepsilon_{n2}} \cdots \left(\frac{R_r}{r_{nr}}\right)^{\varepsilon_{nr}} \end{aligned}$$

Mivel a termelés elaszticitása a termelési koefficienssel szoros kapcsolatban van, a kettőnek egymással kifejezhetőnek kell lennie. Ha visszaemlékszünk arra, hogy $a_{11} = \frac{R_1}{r_{11} A_1}$, készen adódik az összefüggés:

$$\omega_{11} = \frac{R_1}{r_{11} A_1} \frac{\delta A_1}{\delta\left(\frac{R_1}{r_{11}}\right)} = \varepsilon_{11} = a_{11} \cdot \frac{\delta A_1}{\delta\left(\frac{R_1}{r_{11}}\right)} = a_{11} \frac{q_1}{p_1}$$

Ezzel a képlettel lehetségessé válik a termelési koefficienst a termelési elaszticitás segitségével kifejeznünk:

$$a_{11} = \omega_{11} \frac{p_1}{q_1} = \varepsilon_{11} \frac{p_1}{q_1}, \quad a_{12} = \varepsilon_{12} \frac{p_1}{q_2}, \quad a_{21} = \varepsilon_{21} \frac{p_2}{q_1}, \quad \ldots$$

Ha ezt a kifejezést (1) és (2) egyenletsorunkba behelyettesitjük, ezek a következő leegyszerüsitett alakot nyerik *Moore* rendszerében:

$$(14) \qquad \begin{aligned} 1 &= \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \ldots + \varepsilon_{1r} \\ 1 &= \varepsilon_{21} + \varepsilon_{22} + \ldots + \varepsilon_{2r} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 &= \varepsilon_{n1} + \varepsilon_{n2} + \ldots + \varepsilon_{nr} \end{aligned}$$

$$(15) \qquad \begin{aligned} R_1 &= \varepsilon_{11} \frac{p_1}{q_1} A_1 + \varepsilon_{21} \frac{p_2}{q_1} A_2 + \ldots + \varepsilon_{n1} \frac{p_n}{q_1} A_n \\ R_2 &= \varepsilon_{12} \frac{p_1}{q_2} A_1 + \varepsilon_{22} \frac{p_2}{q_2} A_2 + \ldots + \varepsilon_{n2} \frac{p_n}{q_2} A_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_r &= \varepsilon_{1r} \frac{p_1}{q_r} A_1 + \varepsilon_{2r} \frac{p_2}{q_r} A_2 + \ldots + \varepsilon_{nr} \frac{p_n}{q_r} A_n \end{aligned}$$

Alig hisszük, hogy ennek a két egyenletsornak ilyetén felirása többet jelentene, mint előbbi (1) és (2) egyenletsorunk teljes szétverését, tartalmatlanná és használhatatlanná való tételét. Az az egyszerü és világos összefüggés, amely előző két egyenletsorunkat jellemezte, az uj alakkal teljesen veszendőbe megy. A (14) egyenletsornak van azonban egy külön érdekessége, ami abban áll, hogy a termelés elaszticitásának koefficiensei egy és ugyanazon fogyasztási jószágra vonatkozóan összegezve 1-gyel egyenlők. Tekintettel a különböző elaszticitások analóg felépitésére, a jogosult feltevés az, hogy hasonló csoportositás mellett a többi elaszticitási koefficienseknek is 1-es értéket kellene kapniok. Ennek a feltevésnek a vizsgálatára később még ki fogunk térni.

Előzőleg be kell fejeznünk *Moore* rendszerének ismertetését. *Walras* függvényeit *Moore* a (11), (12), (13) egyenletsorral határozza meg. *Walras* két fő egyenletsorát *Moore* a (14) és (15) egyenletsor alakjában irja át. Mivel az (1) egyenletsor világos összefüggése a (14) egyenletsorral elveszett, nem maradna más hátra, mint az ár elaszticitásának felhasználásával a (11) és (12) egyenletsort mintegy megforditanunk és az árak meghatározására alkalmaznunk, vagy más szóval a (11) és

(12) egyenletsor analógiájára az árképleteket az ár elaszticitásai segitségével kifejeznünk. *Moore* azonban ezt csak incidentálisan teszi meg. Példaképpen ilyen képletek volnának *(C, D* konstansokkal):

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
p_1 &= C_1\, A_1^{\alpha_{11}}\, A_2^{\alpha_{12}} \ldots A_n^{\alpha_{1n}} \,.\, R_1^{\alpha_{1n+1}} + \ldots + R_r^{\alpha_{1n+r}} \\
&\vdots \\
p_n &= C_n\, A_1^{\alpha_{n1}}\, A_2^{\alpha_{n2}} \ldots A_n^{\alpha_{nn}}\, R_1^{\alpha_{n,n+1}} \ldots R_r^{\alpha_{n,n+r}}
\end{aligned}
$$

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
q_1 &= D_1\, A_1^{\delta_{11}} \,.\, A_2^{\delta_{12}} \ldots A_n^{\delta_{1n}}\, R_1^{\delta_{1n+1}} \ldots R_r^{\delta_{1,n+r}} \\
&\vdots \\
q_r &= D_r\, A_1^{\delta_{r1}}\, A_2^{\delta_{r2}} \ldots A_n^{\delta_{rn}} \ldots R_1^{\delta_{r,n+1}} \ldots R_r^{\delta_{r,n+r}}
\end{aligned}
$$

Kár, hogy ez a részlet a *Moore* rendszerében eléggé kidolgozva nincsen.

Az eddig felsorolt képletek még stacionér képletek. *Moore* a stacionér gazdaságból a progressziv gazdaságba való áttérést is *Walras* módjára viszi végbe. Igy az eddigi egyenletekkel analóg módon meghatározza, hogy 1. a progressziv gazdaság uj tőkejavainak értéke egyenlő előállitási költségeikkel, 2. a társadalom takarékosságának eredménye, a megtakaritás összege egyenlő az uj tőkejavak értékével, 3. az uj tőkejavak értéke egyenlő hozadékuk tőkeértékével, 4. a megtakaritás függvénye az összes áraknak és a kamatnak, ahol az előbbi mint áru szerepel s a quantitativ meghatározás eszköze a kinálat elaszticitása. Ezek a progressziv gazdaság egyensulyának feltételei. Ugy a stacionér, mint a progressziv gazdaság még statikai gazdaságot jelent. A statikából a dinamikába való áttérést pedig *Moore* ugy viszi végbe, hogy a képletek abszolut számai helyébe trendrációkat helyez. A trend a mozgó egyensuly, a „moving equilibrium“ kifejezője lévén, a trendráció egyben kifejezi a dinamikai egyensuly labilitását és a trend körüli ingadozását. *Moore* még megmutatja egy árindexszámképletnek az ő quantitativ meghatározásu függvényeivel való logarithmikus összefüggését, miközben egy a (16) egyenletsornak megfelelő egyenletsort használ fel trendrációkkal és árelaszticitásokkal, de egy a (17) egyenletsornak megfelelő egyenletsor puszta létezéséről is alig vesz tudomást. A *Moore* indexmeghatározásának különben csak demonstrativ jelentősége van.

Visszatérve az elaszticitások összefüggésének problémájára, *Moore* példáját követve kiindulunk abból, hogy a trendrációk között korrelációs összefüggés áll fenn, melynek, mondjuk, a „best fitting“ értelmében vett egyenlete a következő lenne:

$$\frac{A_1}{\overline{A}_1} = a_1 + b_{11}\frac{p_1}{\overline{p}_1} + b_{12}\frac{p_2}{\overline{p}_2} + \dots$$

ahol a nevezők a trendeket jelzik. Szorozzuk meg mindkét oldalt $\overline{A}_1$-gyel és differenciáljunk parciálisan $p_1, p_2, \dots$ után, akkor

$$\frac{\delta A_1}{\delta p_1} = b_{11}\frac{\overline{A}_1}{\overline{p}_1}\quad \frac{\delta A_1}{\delta p_2} = b_{12}\frac{\overline{A}_1}{\overline{p}_2}, \dots$$

Helyettesitsük ezt be korrelációs egyenletünkbe a regressziós koefficiensek (b) helyére:

$$A_1 = a_1\,\overline{A}_1 + \frac{\delta A_1}{\delta p_1}\frac{p_1}{\overline{A}_1}\overline{A}_1 + \frac{\delta A_1}{\delta p2}\frac{p_2}{\overline{A}_1}\overline{A}_1 + \dots$$

Ha most olyan időközt vesszük figyelembe, melynél a trendráció $\frac{A_1}{\overline{A}_1}$, a keresleti mennyiségre nézve, átlagosan egyenlő 1-gyel,[15] mint ahogy *Moore* nemcsak a burgonyafogyasztás, hanem a burgonyaár átlagára nézve is találta, akkor $A_1 = \overline{A}_1$ és $\frac{\delta A_1}{\delta p_1}\cdot\frac{p_1}{A_1} = \beta_{11}$, $\frac{\delta A_1}{\delta p_2}\cdot\frac{p_2}{A_1} = \beta_{12}, \dots$ Igy a korrelációs egyenlet alakja, mindkét oldalnak A_1-gyel való osztása után, a következő lesz:

$$1 = a_1 + \beta_{11} + \beta_{12} + \dots$$

Moore már az eredeti korrelációs egyenletnél alkalmazta az összes trendrációk átlagértékeinek 1-gyel való egyenlőségét és ugyanerre az esetre azt is kapta, hogy a regressziós koefficiensek (b) egyenlők a kereslet elaszticitásával, de mint a fentiekből láthatjuk, kisebb megszoritással nagyobb eredményt is kaphatunk.[16] Nem is kivánatos a regressziós koeffi-

[15] A korrelációs egyenlet ugyanis az átlagokra ugyanugy érvényes, mint a tényleges előfordulási számokra s igy az állandó (b) kiszámitása legegyszerübben az átlagokkal történhetik.

[16] Azt is megtehetjük, hogy a fenti eredményt minden megszorító feltétel nélkül *egészen* általánositsuk. A fenti egyenletből ugyanis a trendértékek teljesen is kiküszöbölhetők, a jobboldali összeg első tagját kivéve, miután a többi tagban $\overline{A}_1$ szorzóként és osztóként is egyaránt szerepel. Eszerint a fenti egyenlet lesz ($A_1 = \overline{A}_1$ feltételezése *nélkül):*

$$A_1 = a_1\,\overline{A}_1 + \frac{\delta A_1}{\delta p_1}\,p_1 + \frac{\delta A_1}{\delta p_2}\,p_2 + \dots$$

Osszuk el mindkét oldalt A_1-gyel:

$$1 = a_1\frac{\overline{A}_1}{A_1} + \frac{\delta A_1}{\delta p_1}\frac{p_1}{A_1} + \frac{\delta A_1}{\delta p_2}\frac{p_2}{A_1} + \dots$$

ami nem más, mint

$$1 = a_1\frac{\overline{A}_1}{A_1} + \beta_{11} + \beta_{12} + \dots$$

Tegyük az összeg első tagját egyenlővé β_{10}-lal és akkor általánosan irhatjuk:

$$1 = \beta_{10} + \beta_{11} + \beta_{12} + \dots$$

cienst az elaszticitással összezavarni, amikor a kettőnek egyenlősége csak egészen kivételes. Meg kell még jegyeznünk, hogy a mi elaszticitásunk (β) nem is akar módositott regressziós koefficiens lenni abban az értelemben, ahogy az a korrelációs módszerben szerepel. A jelzések kétértelmüsége itt is igen kellemetlen.

A fenti eredményt a kereslet és kinálat elaszticitási koefficienseinek, valamint azok reciprok értékeinek, az árelaszticitási koefficienseknek összefüggésére nézve felhasználhatjuk. Meg lehet azonban már most állapitanunk, hogy eredményünk előbbi feltevésünket nem igazolta, mert az elaszticitási koefficiensek összege nem egyenlő 1-gyel, hanem $(1-a_1)$-gyel. Előző eredményünkhöz képest a következő egyenletsorokat irhatjuk fel:

$$(18)\qquad \begin{array}{l} \beta^{a_1} + \beta_{11} + \dots + \beta_{1n} + \dots + \beta_{1n+r} = 1 \\ \beta^{a_2} + \beta_{21} + \dots + \beta_{2n} + \dots + \beta_{2n+r} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta^{a_n} + \beta_{n1} + \dots + \beta_{nn} + \dots + \beta_{nn+r} = 1 \end{array}$$

$$(19)\qquad \begin{array}{l} \alpha^{a_1} + \alpha_{11} + \dots + \alpha_{1n} + \dots + \alpha_{1n+r} = 1 \\ \alpha^{a_2} + \alpha_{21} + \dots + \alpha_{2n} + \dots + \alpha_{2n+r} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha^{a_n} + \alpha_{n1} + \dots + \alpha_{nn} + \dots + \alpha_{nn+r} = 1 \end{array}$$

$$(20)\qquad \begin{array}{l} \varkappa^{a_1} + \varkappa_{11} + \dots + \varkappa_{1n} + \dots + \varkappa_{1n+r} = 1 \\ \varkappa^{a_2} + \varkappa_{21} + \dots + \varkappa_{2n} + \dots + \varkappa_{2n+r} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varkappa^{a_r} + \varkappa_{r1} + \dots + \varkappa_{rn} + \dots + \varkappa_{r,n+r} = 1 \end{array}$$

$$(21)\qquad \begin{array}{l} \delta^{a_1} + \delta_{11} + \dots + \delta_{1n} + \dots + \delta_{1n+r} = 1 \\ \delta^{a_2} + \delta_{21} + \dots + \delta_{2n} + \dots + \delta_{2n+r} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta^{a_r} + \delta_{r1} + \dots + \delta_{rn} + \dots + \delta_{rn+r} = 1 \end{array}$$

$$(22)\qquad \begin{array}{l} \varepsilon a_1 + \varepsilon_{11} + \dots\dots\dots + \varepsilon_{r} = 1 \\ \varepsilon a_2 + \varepsilon_{21} + \dots\dots\dots + \varepsilon_{2r} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon a_n + \varepsilon_{n1} + \dots\dots\dots + \varepsilon_{nr} = 1 \end{array}$$

$$(23)\qquad \begin{array}{l} \zeta a_1 + \zeta_{11} + \dots\dots\dots + \zeta_{1r} = 1 \\ \zeta a_2 + \zeta_{21} + \dots\dots\dots + \zeta_{2r} = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \zeta a_n + \zeta_{n1} + \dots\dots\dots + \zeta_{nr} = 1 \end{array}$$

(A 16. jegyzet folytatása.)

Ugyanezen eljárás szerint a (19), (20), (21), (22), (23), egyenletsor első egyenlete lenne:

$$\begin{array}{l} 1 = \alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots \\ 1 = \varkappa_{10} + \varkappa_{11} + \varkappa_{12} + \dots \\ 1 = \delta_{10} + \delta_{11} + \delta_{12} + \dots \\ 1 = \varepsilon_{10} + \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \dots \\ 1 = \zeta_{10} + \zeta_{11} + \zeta_{12} + \dots \end{array}$$

ami a koefficiensek quantitativ összefüggésére és analóg felépitésére adhat felvilágositást abban az esetben, ha a koefficiensek értéke állandó.

Az egyenletsoroknak egymástól eltérő alkata a (11), (12) és (13) egyenletsorok eltérő alkatából következik. Ha most már a fenti (22) egyenletsort az előbbi (14) egyenletsorral összehasonlitjuk, azt találjuk, hogy a kettő között az a különbség van, hogy amig a (14) egyenletsor összegeiben csak a elaszticitások szerepelnek, addig a (22) egyenletsor összegei egy taggal bővebbek és ezzel együtt egyenlők csak 1-gyel. A (14) és (22) egyenletsor tehát csak akkor volna egyenlő, ha ez az első tag a (22) egyenletsorban 0 értékü lenne. Ez azonban nem lehetséges, mivel ez a tag azt a különbséget jelzi, ami keletkezik akkor, ha korrelációs egyenletünket az abszolut értékekre állitjuk be az átlagoktól való eltérés helyett. Ha ugyanis az egyenletekben az eltéréseket alkalmazzuk, akkor viszont az elaszticitások esnek ki az egyenletből. Ebből következik, hogy az elaszticitások összege egymagában nem lehet egyenlő 1-gyel és a (14) egyenletsor némi revizióra szorul. Ez a revizió kinálkozik a következő megfontolásból. A (22) egyenletsor összegeinek első tagjára az jellemző, hogy az a korrelációs egyenletnek egyetlen olyan tagja volt, amely tisztán egy állandóból volt képezve, vagyis az egyenlet változóinak változásai nem érintették. Mivel ezuttal a termelési költség egyenlete, a mi (1) egyenletsorunk szolgál alapul, egy ilyen állandónak a feltételezése önkéntelenül a *Pareto*-féle „frais generaux"-t juttatja az eszünkbe, mint amely a termelési költségegyenletnek ilyen állandója gyanánt szerepel. *Pareto* azonban az ő „frais generaux"-ját külön szintén felbontotta ugyanazokra a változókra, mint amelyek az ő termelési költségegyenletének változói, s igy az ő állandója a szó igazi értelmében vett állandónak nem tekinthető. Ha ellenben feltételezzük, hogy a *Pareto*-féle állandónak van egy olyan eleme, amely tényleg állandó s amely ennélfogva nem bontható fel oly összegekre, amelyekben változók fordulnak elő, amely tehát a termelési költségegyenletben a termelési javak áraitól független, vagy legalább is a termelési javak áraival nem változhatik, akkor kapunk egy oly tagot, amely a korrelációs egyenlet első tagjának is megfelelhet. Emellett a feltételezés mellett tehát a (14) egyenletsor a (22) egyenletsor alakjában a többi elaszticitások összefüggésének megfelelően is kifejezhetővé válik és a (14) egyenletsor csak a (22) egyenletsor speciális eseteképpen foglalható fel, amikor a (22) egyenletsor összegeinek első tagját elhanyagolhatónak tekintjük.

Végezetül csak még egyetlenegy kérdéssel kivánunk foglalkozni s ez annak megvilágitása, hogy *Moore* az ő képleteinek azon tagjaira nézve, amelyek a megfigyelt adatokból és a trendszámitásból adva nincsenek, milyen kiszámitási módszert alkalmaz. Ilyen tag kettő van, az egyik az integrációs konstans, a másik az elaszticitás, különböző formáiban. Ami az integrációs konstanst illeti, erre nézve két eljárás fordul elő. Feltételezi a trendrációk átlagának 1-gyel való egyenlőségét, vagy feltételezi, hogy akad olyan speciális konkrét eset, amikor az összes trendrációk értéke 1-gyel egyenlő. Az igy leegyszerüsithető képletből a konstans kiszámitható, értéke egyenlő 1-gyel, vagy kifejezhető az elaszticitási koefficienssel. Egy másik eljárás az, hogy a trendrációkra beállitott képletet abszolut értékre állitja be s azt, ami a két képlet közti különbséget alkotja, beolvasztja az integrációs konstansba. Az elaszticitási koefficiensek kiszámitására a legkisebb négyzetek módszerét alkalmazza oly módon, hogy quantitativ meghatározásu függvényeit logarithmikusan fejezi ki s igy lineáris egyenleteket kap, összegeket szorzatok helyett s a hatványok gyanánt szereplő elaszticitások szorzókká szelidülnek. A logarithmikus lineáris egyenletekből az elaszticitások ugyanazzal az eljárással számithatók ki, mint a nem logarithmikus egyenletekben szorzókként szereplő ismeretlenek. A másik eljárás egy speciális esetre érvényes, amikor a trendrációk átlagánál, vagy egyes konkrét eseteiben feltételezi azoknak 1-gyel való egyenlőségét és igy az elaszticitási koefficiensek nem volnának egyebek, mint a korrelációs egyenletek regressziós koefficiensei.

Ha kiindulunk a következő két képletből:

$$y = C\,x^{\alpha} \qquad\qquad y = D\,x^{\delta}$$

amelyekben C és D az integrációs konstansokat jelenti, y a baloldali és a jobboldali képletben egyaránt az ár trendrációja $\left(\frac{p}{\bar{p}}\right)$, x ellenben a baloldali képletben a keresletnek $\left(\frac{A}{\bar{A}}\right)$ a jobboldali képletben azonban ugyanarra az árura nézve a kinálatnak $\left(\text{mondjuk}\frac{A'}{\bar{A}'}\right)$ a trendrációja, α az ár keresleti, δ az ár kinálati elaszticitása és feltételezzük *Moore*-ral, hogy y és x egyidejüleg akár mint átlag, akár mint speciális konkrétum 1-gyel egyenlő, akkor az állandó *(C*, illetve *D)* a fenti képlet szerint erre az esetre egyenlő 1-gyel s mivel állandó, egyben mindenesetre is egyenlő 1-gyel. Igy a konstansokat egyszerüen ki lehet hagyni és marad

$$y = x^{\alpha} \qquad\qquad y = x^{\delta}$$

amiből α, illetve δ logarithmikusan kiszámitható:

$$\log y = \alpha \log x \qquad\qquad \log y = \delta \log x$$

Igy kapta *Moore* a burgonyára a következő képleteket:

$$y = x^{-1\cdot 2310} \qquad\qquad y = x^{+1\cdot 0828}$$

miután a megfigyelt adatokból a fenti két képlet szerint α-ra és δ-ra vonatkozólag nyerhető különböző eredményeket a legkisebb négyzetek módszere segitségével egy-egy eredményre redukálta.

Vehetjük azonban az elaszticitást lineárisan is, mikor is előbbi két képletünk a következő lesz:

$$y = Cx^{\alpha}e^{\alpha' x} \qquad y = Dx^{\delta}e^{\delta' x}$$

Ha most is feltételezzük, hogy *y és x* speciálisan egyenlő lehet egyidejüleg 1-gyel, akkor

$$C = e^{-\alpha'} \qquad D = e^{-\delta'}$$

s ha ezt behelyettesitjük az előbbi képletekbe, a konstansok eltünnek:

$$y = x^{\alpha}e^{\alpha'(x-1)} \qquad y = x^{\delta}e^{\delta'(x-1)}$$

Moore itt azt is bemutatta, hogy hogyan lehet a trendrációktól abszolut értékekhez áttérni és a megfelelő konstanst kiszámitani. Kiindulva a trendrációs képletből

$$\frac{p}{\bar{p}} = \left(\frac{A}{\bar{A}}\right)^{\alpha} e^{\alpha'\left(\frac{A}{\bar{A}} - 1\right)}$$

$$p = \left(\frac{\bar{p}}{\bar{A}^{\alpha}} e^{-\alpha'}\right) A^{\alpha} e^{\alpha'\left(\frac{A}{\bar{A}}\right)} = CA^{\alpha}e^{\alpha'\left(\frac{A}{\bar{A}}\right)}$$

ahol az alsó képlet első zárójelében levő mennyiség volna a konstans. Ez azonban nem helytálló, amennyiben a trendrációk a képletből még teljesen kiküszöbölve nincsenek. Ez csak az alábbi átalakitás mellett érhető el:

$$p = \left[\frac{\bar{p}}{\bar{A}^{\alpha}} e^{-\alpha'\left(1 + A - \frac{A}{\bar{A}}\right)}\right] A^{\alpha}e^{\alpha' A} = CA^{\alpha}e^{\alpha' A}$$

az integrációs konstans értéke tehát csakis az utóbbi szögletes zárójelben levő mennyiséggel lehetne egyenlő. Igaz viszont, hogy itt meg az a baj, hogy a konstansban előfordul az abszolut változó.

Az elaszticitási koefficiensek kiszámitása az alapegyenlet logarithmikus kifejezése után a legkisebb négyzetek módszere segitségével történik. Kiindulva előbbi egyenleteinkből, amelyekből az integrációs konstanst már kiküszöböltük, a következőket kapjuk:

$$y = x^{\alpha}e^{\alpha'(x-1)} \qquad y = x^{\delta}e^{\delta'(x-1)}$$

$$\log y = \alpha \log x + \alpha'(x-1) \log e \qquad \log y = \delta \log x + \delta'(x-1) \log e$$

A legutóbbi két egyenletből már a megfigyelt adatok és a legkisebb négyzetek módszere segitségével kiszámitható α, α', δ, δ'. Igy kapta *Moore* a burgonyára nézve a baloldali képletből a következő eredményt:

$$y = x^{0\cdot143}\, e^{-1\cdot376\,(x-1)}$$

Ez az eljárás az elaszticitás parabolikus képletére is alkalmazható, vagyis arra az esetre, ha $\alpha'' x^2$, illetve $\delta'' x^2$ is figyelembe jön. Mint már emlitettük, *Moore* a trendrációk korrelációs egyenletében a regressziós koefficienseket azonositotta az elaszticitási koefficiensekkel, ha feltehető, hogy a trendrációk végig egyidejüleg 1-gyel egyenlők is lehetnek. Igy a következő képletből

$$\frac{A_1}{\bar{A}_1} = a_1 + b_{11}\frac{p_1}{\bar{p}_1} + b_{12}\frac{p_2}{\bar{p}_2} + \dots$$

$$A_1 = a_1 \bar{A}_1 + b_{11} \bar{A}_1 \frac{p_1}{\bar{p}_1} + b_{12} \bar{A}_1 \frac{p_2}{\bar{p}_2} + \dots$$

folyik, hogy

$$\frac{\delta A_1}{\delta p_1}\frac{\bar{p}_1}{\bar{A}_1} = b_{11}, \quad \frac{\delta A_1}{\delta p_2}\frac{\bar{p}_2}{\bar{A}_1} = b_{12}, \dots$$

és ha $p_1 = \bar{p}_1$, $p_2 = \bar{p}_2$, ..., $A_1 = \bar{A}_1$, akkor egyuttal

$$\frac{\delta A_1}{\delta p_1}\frac{p_1}{A_1} = b_{11} = \beta_{11}, \quad \frac{\delta A_1}{\delta p_2}\frac{p_2}{A_1} = b_{12} = \beta_{12}$$

vagyis a korrelációs egyenlet regressziós koefficiensei egyenlők az elaszticitási koefficiensekkel. A β két értelemben vett használata miatt megint hangsulyoznunk kell, hogy itt a β *nem* módositott regressziós koefficiens, hanem elaszticitást akar jelenteni.

Végül az integrációs konstans kiszámitható ugy is, hogy a trendrációkat nem vesszük 1-gyel egyenlőknek, hanem 1-től eltérő tényleges átlagukat használjuk fel, amint például *Schultz* is a legkülönbözőbb képleteket számitotta ki a cukorra nézve *Moore* módszere alapján. Ezekből a példákból láthatjuk, hogy a statisztika módszereinek és adatainak a közgazdaságtan elméletébe való bekapcsolódása mily uj perspektivákat és lehetőségeket nyit a közgazdasági elmélet fejlődése számára, melynek ma még csak kezdeteit, de sok tekintetben igen biztató kezdeteit éljük. *Neubauer Gyula.*