

hegyesi gazdasági iparvasútnak s a Neufeldt-féle kőrösvölgyi vasútnak a leírását s jellemzését fűzi.

A szerző e két keskeny vágányú vasútnak tervezésében s megalkotásában tevékeny részt vett s korábbi hasonló vállalatokban szerzett tapasztalatait értékesítette.

»A doboj—tuzlai vasút« című értekezés szoros benső kapcsolatban áll az előző dolgozattal.

A szerző az értekezésben ismerteti a doboj—tuzlai vasút tervezésénél, költségvetésénél irányadó elveket, jellemzi és megokolja a vasút irány- és lejtési viszonyait, a fel- és alépítményt, járó műveket stb.

A jellemzés becsét növeli még az a körülmény, hogy éppen a szerző volt az építésvezetőség irodafőnöke s mint ilyen a vasút alkotói között szerepel.

Ez értekezés imént közölt tartalmánál, a bennfoglalt számadatoknál, költség-kimutatásoknál fogva mintegy kiegészítő részét képezi az előző dolgozatnak.

E tartalmi, valamint alaki tulajdonságainál, valamint a tárgy nemzetgazdasági jelentőségénél fogva e két értekezést véltük másodsorban díjazandónak.

Kérjük a t. választmányt jelentésünk szives tudomásul vételére.

Budapest, 1893. évi februárius 16-ikán.

Nej Béla.

Dr. Hoor Mór.

Kelényi Ödön.

Lipthay Sándor.

Dolecskó Mihály.

Kiss István.

A prizmatikus tükörrendszerekről és a háromélű prizmákról különös tekintettel a szögkitűzésre.

Bodola Lajostól.

A geodéziai és földmértani műszerekben a tükröket és prizmákat sokféleképpen alkalmazzák. Azt hiszem hasznos szolgálatot teszek, midőn a következőkben ezeknek az optikai elemeknek fénytánát a műszertani alkalmazások speciális céljainak megfelelően dolgozom fel, mert műszert helyesen csak úgy szerkeszthetünk és használhatunk, ha minden alkotó elemének hatását jól ismerjük.

A tárgyaláskor a mennyire lehet általános módszereket használok, hogy megkönnyítsem a speciális eseteknek sokszor bonyodalmas és általános következtetések levonására alkalmatlan külön vizsgálatát.

A tárgyat minden részletében kimerítenem már azért sem lehet, mert átlépném azokat a határokat, a melyeket e folyóirat természete szab meg és csak arra szorítkozom, a mit rendesen a fentjelzett célnak meg nem felelően, vagy csak hiányosan, vagy éppen helytelenül tárgyalnak; minthogy azonban tükröknek és prizmáknak kisebb pontosságú szögkitűzéseknél közvetlen szerepük is van, a vizsgálatnak egyik gyakorlati alkalmazását bemutatandó, e kitérésre különös tekintettel vagyok.

I.

Bevezetés.

1. Az alábbiakban vizsgált optikai rendszerek mind igen egyszerűek. Optikai hatásuk katoptrikai része ugyanis mindig *egyszerű síktükrök** hatásával, dioptrikai része pedig *plánparallel izotróp rétegek* dioptrikai hatásával

egyezik meg. Hogy pedig tárgyalásuk is lehetőleg egyszerű lehessen, a későbbiek megvilágítására szükséges mértékben, a fénytörés utóbb említett esetével külön e szakaszban foglalkozom.

Ismeretes a fénytánból *Malusnak Dupintól* általánosított az a tétele, hogy *izotróp közegekben egyeredetű fénysugarak, vagyis olyanok, melyek ugyanegy P világító pontból sugároznak ki, vagy ugyanegy Φ hullámfelület normálisai, miután tetszés szerinti számú tükrözéseket és töréseket szenvedtek, ismét ugyanegy Φ_1 felület normálisaiivá lesznek*, a hol Φ és Φ_1 tudvalevőleg ugyanannak a fényhullámnak egy-egy reális vagy virtuális helyzete az első és utolsó izotróp mediumban.

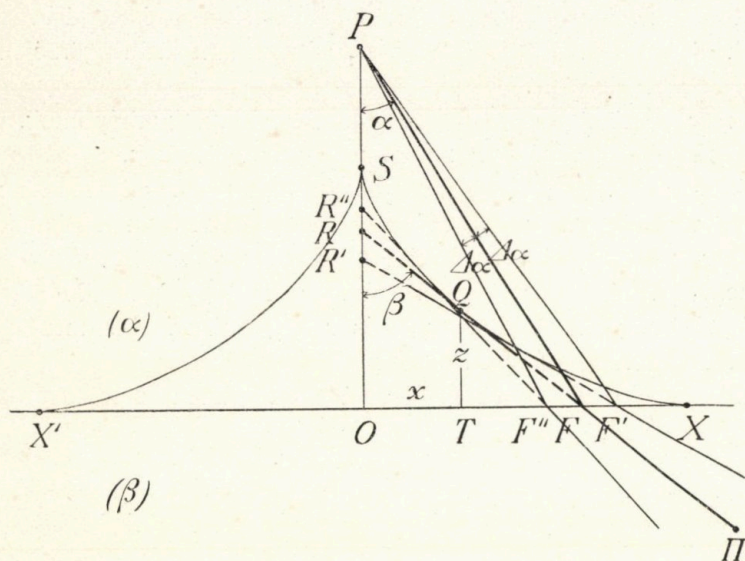
Ha Φ_1 felület gömb, vagyis az említett tükrözéseket és töréseket okozó optikai rendszerből kilépő egyeredetű fénysugarak valamennyien egy reális vagy virtuális pontba futnak össze és ez a világító tárgy minden P pontjára nézve így van, a rendszert *aplanatikusnak* mondjuk. Az ily rendszereken át megfigyelt tárgyak képeit, esetleges diffrakció-jelenségektől eltekintve, tisztán, élesen látjuk és a képeknek mind helye, mind alakja a szem helyétől független.

Ha Φ_1 nem gömb, a rendszerből kilépő egyeredetű fénysugarak sem futnak többé egy pontba össze, hanem két reális vagy virtuális gyújtó felület közös érintőivé lesznek, mely felületek Φ_1 nagyobb, illetőleg kisebb főgömbületi középpontjainak mértani helyei.* Az ilyen hatású rendszert *asztigmatikusnak* mondjuk.

* Lehet a két gyújtófelületet egy gyújtó (kausztikai) felület két részének is tekinteni.

* Fénytörés nélkül tükröző csiszolt síklapok.

Ha az asztigmatikus rendszerből kilépő egyeredetű fénysugarak közül megfigyeljük azt a végtelen kicsiny sugárkévét, mely valamely kilépő sugár, mint középsugár közvetlen szomszédságában haladó fénysugarak összeségéből áll, azt tapasztaljuk, hogy ez a kéve sem fut többé egy pontba össze, hanem két egyenesnek tekinthető reális vagy virtuális vonalelemen, a kéve úgynevezett gyújtóvonalaival halad át, melyek a középsugárnak a két gyújtófelülettel való érintéspontjain mennek keresztül és ezeken a felületeken fekszenek. Ezek a pontok a középsugár gyújtópontjai és egymástól távolságuk a végtelen kis kéve gyújtóköze. Minthogy a világító pontnak, illetőleg képének látását ilyen, vagy fizikailag ilyennek tekinthető sugárkévével képzelhetjük közvetítve, mely kéve a rendszerből kilépve, a néző szem pupiláján fér be és középsugara a szem első csomópontjába fut,¹ természetes, hogy asztigmatikus rendszer esetében éles, határozott képről általánosságban többé szó sem lehet.



1. ábra.

A gyújtóvonalaik Φ_1 felületnek a kéve középsugarán át vezethető fő normális metszeteiben, a kéve úgynevezett gyújtósíkjaiban fekszenek,² egymásra tehát merőlegesek; azonban a szem felfogta fénysugarak hosszában nézve egymást fedni látszanak.

Valahányszor a gyújtósíkok egyike Φ_1 felületnek szimmetriai síkja, mindannyiszor a másik gyújtósíkban fekvő gyújtóvonala a középsugárra merőleges.

A két gyújtóvonala csak azokon a sugarakon olvad egyetlen közös pontba össze, melyeket a közvetlen szomszédos sugarak valamennyien e közös pontban metszenek. Hamilton az ilyen sugarakat fősugaraknak mondja. Világos, hogy fősugarak csak ott lehetnek, ahol a két gyújtófelületnek közös pontjai is vannak.³

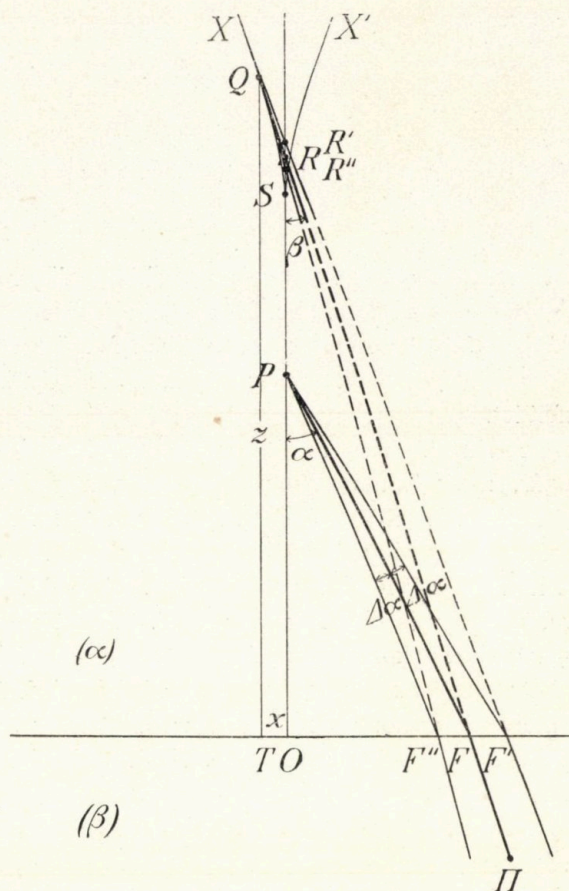
¹ A félszemen való nézésre gondolunk itt, mely optikai eszközök alkalmazásánál a rendes eset.

² A gyújtósíkokban haladnak azok a fénysugarak, melyek a középsugarat metszik.

³ Az ezeknek megfelelő végtelen kicsiny sugárkévét *homocentrikusoknak* is szokás mondani.

Asztigmatikus rendszerekben tehát csak azok a sugárkévék adhatnak éles jó képeket, a melyek annyira közel esnek valamely fősugarhoz, hogy gyújtóvonalaik a nézőre egyetlen pont hatását teszik.⁴

Szemünkkel közvetlenül megfigyelt kép nem éles voltán kívül, még a szem helyváltozásával járó hely és alak változása is szembetűnő és ez a tulajdonsága, reális gyújtófelületek esetében, megkülönböztethetővé teszi a tárgynak ernyőn felfogható képétől. Eltorzulás ugyanis



2. ábra.

emennek alakjában is mutatkozik, csak hogy ez az eltorzulás, valamint a kép helye is, a szem helyétől független.

2. Ilyen asztigmatikus rendszer a plánparallel izotróp fénytörő réteg és a két izotróp mediumot elválasztó törő sík, melynek kétszeri párvonalas alkalmazása a plánparallel rétegre vezet.

Vizsgáljuk először az egyszerű törő síkot. Ez a vizsgálat egyszerűsíthető, mert a világító tárgy képe az egyes alkotó pontok képeinek mértani helye és azokból összeállítható; a vizsgálatot tehát egyetlenegy világító pontra szoríthatjuk.

Legyen ez a kiválasztott világító pont P (1. és 2. ábra). Nevezzük el a törő síkra normális fénysugaron átmenő síkokat meridián síkoknak és válasszuk az ábra síkjául

⁴ Az eddigieket illetőleg I.: Sturm, Mémoire sur la théorie de la vision, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, XX. kötet, Paris 1845; Kummer, Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 57. kötet Berlin, 1860.

a szem első csomópontján átmenő meridián síkot, melyet a szem meridián síkjának nevezünk el. Legyen II a szem első csomópontja; (α) a világitó pontot, (β) a szemet körülvevő izotróp médium; OF a törő sík átmetszése az ábra síkjával és végül, egyszerűség okáért homogén fényt gondolva, legyen $\mu_{\alpha\beta}$ az ennek a fénynek (α) -ból (β) -ba való átmenetelésnek megfelelő viszonylagos törésgyűjtőhatóság. Az 1. ábra $\mu_{\alpha\beta} < 1$, a 2. ábra pedig $\mu_{\alpha\beta} > 1$ esetének felel meg.

Mindenekelőtt könnyű belátni, hogy azon Φ_1 felület melyre a fénysugarak a törés után normálisok, forgási felület, melynek a törő síkra normális fénysugár a tengelye. Ennek okát abban a szimmetriában leljük, melyet az optikai rendszer a normális fénysugár körül minden oldalról egyaránt mutat. E felület bármely pontjához tartozó két fő normális metszet közül tehát az egyik, mint meridián metszet, mindig a forgástengelyen megy keresztül, a másikkal pedig a megfelelő főgörbületi középpontja esik e tengelybe. Ennek megfelelően a két gyújtófelület közül az egyik a tengelyben fekvő egyszerű egyenes vonal, a másik pedig egyazon tengely körüli forgásfelület.

Legyen PF a szem meridián síkjában haladó az a fénysugár, mely, miután F -ben megtörött, a szem első csomópontjába fut; legyen α ennek a sugárnak a hajlásszöge a normális fénysugárhoz, R pedig az a pont, a melyben a sugár FII megtörött ága, visszafelé megnyújtva, a normális fénysugarat metszi. Vegyük szemügyre az összes köröskörül fekvő, α hajlású világitó sugarakat; ezeknek összesége egy világitó kúpfelületet alkot, melynek a normális fénysugár a tengelye, P a csúcspontja és α a fél nyílásszöge. Ez a világitó kúp a törő síkon, az OF sugarú kör kerületén megtörik és abba a vele egy tengelyű törési kúpfelületbe megy át, melynek a megfelelő törött sugarak az alkotói, R a virtuális csúcspontja és β a fél nyílásszöge.

Hasonlóképpen keletkezik két új törési kúp, ha azokat a világitó kúpot vesszük figyelembe, melyeknek $\alpha + \Delta\alpha$ és $\alpha - \Delta\alpha$ a fél nyílásszögei. Ezek az OF' és OF'' sugarú körök kerületén törnek meg és a megfelelő törési kúpot virtuális csúcspontjai R' és R'' . Az R' , R és R'' kúpfelületek kölcsönösen metszik egymást három, a törő síkkal párvonalas virtuális körben; mentől kisebb azonban $\Delta\alpha$, annál közelebb jut e három kör egymáshoz, míg végre a végtelen kicsiny falvastagságú világitó kúp határesetében, azon egy körvonalba olvad össze, melynek a szem felőli átmetszését a szem meridián síkjával az ábrákban Q betű jelöli.

A végtelen kicsiny falvastagságú világitó kúpnak megfelelő összes kilépő sugarak tehát keresztül mennek ezen a virtuális körvonalon, meg az $R'R''$ végtelen kicsiny tengelydarabon.

Válaszszuk ki e kilépő sugarak összeségéből azt a látást közvetítő végtelen kicsiny sugárkévét, melynek középsugara FII , és tüstént megkapjuk a neki megfelelő gyújtóvonalakat: az egyiket, melyet ezentúl *elsőnek* fogunk mondani, a Q körnek azon végtelen kicsiny

egyenesnek tekinthető ívelemében, mely a középsugár Q pontján megy át a szem meridián síkjára merőlegesen; a másikat pedig, melyet *másodikkal* nevezünk, a tengelynek a középsugár R pontján átmenő végtelen kicsiny $R'R''$ darabjában. Q és R a középsugár gyújtópontjai. A gyújtóvonalak valóban merőlegesek egymásra és a Q ponton átmenő első gyújtóvonal a középsugárra is merőleges, minthogy tényleg az a fő normális metszet, melyben a második gyújtóvonal fekszik, mint meridián metszet, Φ_1 felületnek szimmetriai síkja.

Ha most valamennyi a törő síkra eső és a világitó sugarak összeségét magukban foglaló világitó kúpot tekintjük, mindeniknek megfelelőleg egy-egy törési kúpot kapunk; tehát a törési kúpotoknak egész serege keletkezik és a sereget burkoló forgási felület lesz az első gyújtófelület, melynek a kilépő sugarak meridián érintői.

A második gyújtófelület egyszerű egyenes vonal, mely a tengelynek SO darabjából áll. Valamennyi kilépő sugár keresztül megy rajta és S határpontjából az első gyújtófelületnek, az ábrákon is feltüntetett SX meridián görbéje indul ki, mely Φ_1 felület meridián görbéjének evolútája.

A törő sík esetében, a mint látjuk, gyújtópontok, vonalak és felületek valamennyien virtuálisok.

3. A gyújtópontok és S határpont meghatározása céljából jelöljük a világitó pontnak a törő síktól számított és megadottnak vett PO merőleges távolságát p -vel és a fénytörés helyétől számított PF , QF és RF távolságokat sorjában a , b és c -vel, továbbá SO merőleges távolságot s -sel.

FPF' és FQF' háromszögekben a közös oldal értékét fejezve ki

$$FF' = PF \frac{\sin FPF'}{\sin FFP} = QF \frac{\sin FQF'}{\sin FF'Q}$$

találjuk, miből

$$QF = PF \frac{\sin FPF'}{\sin FQF'} \frac{\sin FF'Q}{\sin FF'P}$$

következik, vagy $FPF' = \Delta\alpha$ szögnek minden határon túli kisebbitésével a kifejezés határértékére térve át:

$$b = a \frac{d\alpha}{d\beta} \frac{\cos \beta}{\cos \alpha},$$

mibe $\frac{d\alpha}{d\beta}$ -nak $\sin \alpha = \mu_{\alpha\beta} \sin \beta$ -ből kiszámítható értékét bevezetve

$$b = \mu_{\alpha\beta} a \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \dots \dots \dots I.$$

adódik ki.

R gyújtópontra nézve pedig $OFFP$ és $OFFR$ háromszögekből

$$OF = a \sin \alpha = c \sin \beta'$$

következik, miből közvetlenül:

$$c = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} a = \mu_{\alpha\beta} a \dots \dots \dots II.$$

A gyújtóköz:

$$g = c - b = \mu_{\alpha\beta} a \left(1 - \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} \right)$$

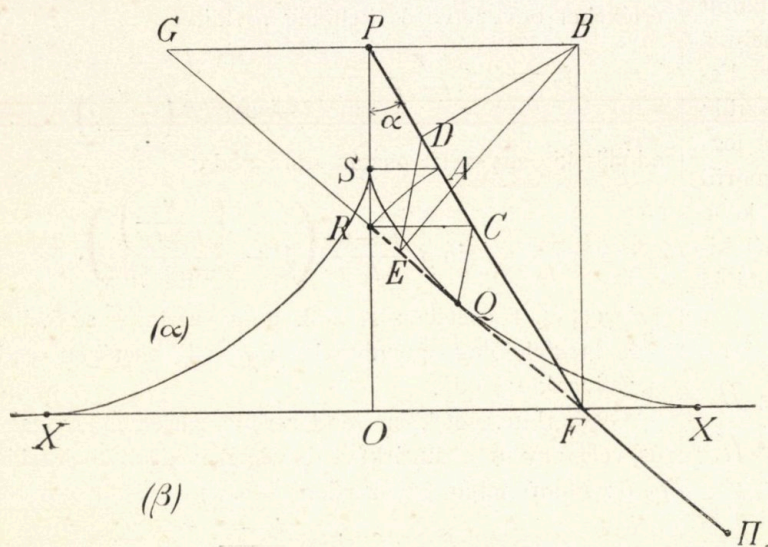
csak akkor nulla, ha β egyenlő α -val, vagyis $\sin \alpha = \mu_{\alpha\beta} \sin \beta$ -ra tekintettel, ha α is, β is végtelen kicsiny. Ez esetben a kéve középsugara végtelen közel áll a normális fénysugárhoz, mely a rendszernek egyedüli fősugara. E fősugár S ponton, a két gyújtófelület egyedüli közös pontján halad keresztül, mely pont, mint a fősugár gyújtópontja és Q és R közös határa, fő gyújtópontnak is nevezhető.

A törő sík tehát csak azoknál a sugaraknál adhat jó képeket, melyek igen közel esnek a normális fénysugárhoz.

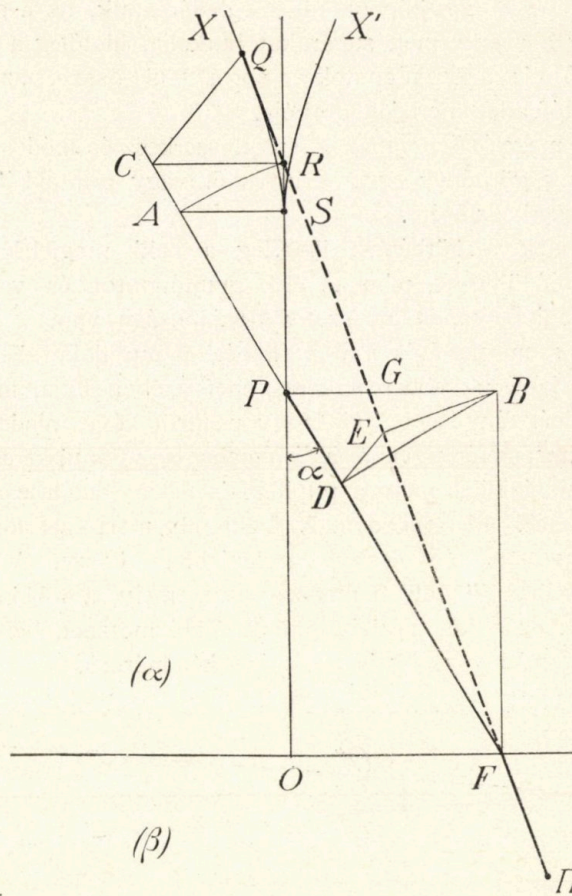
A normális fénysugár S gyújtópontját illetőleg

$$b = c = s = \mu_{\alpha\beta} p \dots \text{III.}$$

A talált képletek segítségével a törő síkot adott α beesésszög alatt érő PF fénysugárnak $F\Pi$ megtörött ága és ennek megnyújtásán a gyújtópontok, nemkülönbén a főgyújtópont is könnyen szerkeszthetők.



3. ábra.



4. ábra.

E végből (3. és 4. ábra) jelöljük meg a normális fénysugaron S pontot úgy, hogy $SO:PO = \mu_{\alpha\beta}$ legyen, mi a III. egyenlet értelmében közvetlenül a főgyújtópontot szolgáltatja.

Húzzunk S -en át OF -fel párvonalat és legyen A ennek metszéspontja az adott sugárral. Irjuk le F -ből, mint középpontból, FA sugárral AR körívet, mely R -ben metszi a normális fénysugarat és kössük össze R pontot F ponttal. Az így nyert RF összekötő egyenes $F\Pi$ kilépő sugár megnyújtásába esik, mely ez által meg is van határozva; R pedig a második gyújtópont.

Az első gyújtópont következőképpen határozható meg. Húzzunk P ponton át OF -fel párvonalat, F pontból pedig OF -re merőlegeset; legyen B e két vonal metszéspontja. Húzzunk R ponton keresztül ismét OF -fel párvonalat, mely az adott sugarat C -ben metszi; bocsássunk B -ből PF -re és RF -re merőlegeset és jelöljük a megfelelő talppontokat D -vel és E -vel; végül pedig húzzunk meg C ponton át CQ -t DE -vel párvonalasan. Ennek Q átmetszése RF -fel az első gyújtópont.

Mindezek igazolására először is a sinus tételnek PPR háromszögre alkalmazásából következik

$$\frac{\sin FPR}{\sin FRP} = \frac{\sin \alpha}{\sin FRO} = \frac{RF}{PF} = \frac{AF}{PF} = \frac{SO}{PO} = \mu_{\alpha\beta}$$

miből közvetlenül $FRO = \beta$ adódik ki s ezzel a szerkesztés helyes voltát a megtörött sugár irányára és a második gyújtópontra vonatkozólag be is bizonyítottuk.

R valóban ott van, a hol a megtörött sugár megnyújtása a normális sugarat metszi

$$RF = AF = \mu_{\alpha\beta} PF = \mu_{\alpha\beta} a = c,$$

a II. egyenletnek megfelelő távolságban a fénytörés helyétől.

Az első gyújtópontra térve át, nyujtsuk meg FR -t G -ig, a hol a P ponton át húzott párvonalat metszi. FBP és FBG derékszögű háromszögekből a következő mértani vonatkozásokat nyerjük:

$$DF = PF \cos^2 PFB = a \cos^2 \alpha$$

$$EF = GF \cos^2 GFB = GF \cos^2 \beta;$$

továbbá CF számára RFC és GFP hasonló háromszögekből:

$$CF = PF \frac{RF}{GF} = a \frac{c}{GF} = \mu_{\alpha\beta} \frac{a^2}{GF},$$

QF számára pedig, QFC és EFD hasonló háromszögekből:

$$QF = CF \frac{EF}{DF},$$

mibe CF , EF és DF -nek fennebbi értékét bevezetve:

$$QF = \mu_{\alpha\beta} a \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha}$$

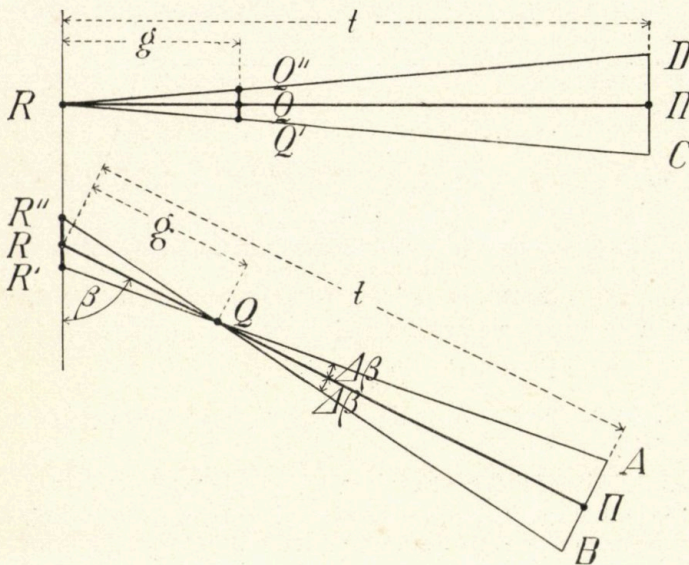
adódik ki és ebből az I. egyenlet értelmében $QF = b$, ami bebizonyítandó volt.

4. Ha mindazokhoz a világító sugarakhoz, melyek a szem meridián síkjában a törő síkból kiléphetnek a megfelelő kilépő sugarakat megszerkesztjük, vagy a megfelelő első gyújtópontokat meghatározzuk, az a görbe, mely a szerkesztett sugarakat burkolja, illetőleg a megfelelő első gyújtópontokat sorra köti össze, az első gyújtófelület meridián görbéje.

A megelőző pontban előadott szerkesztés módot nyújt tehát e görbének egyes érintőkből vagy pontokból való megszerkesztésére.

Ennek a görbének, illetőleg a neki megfelelő első gyújtófelületnek, mint az első gyújtópontok és vonalak mértani helyének, nevezetes tulajdonsága van.

A szem ugyanis P pont képét a pupilláján behatolt sugárkévének abban a keresztmetszetében látja, mely a többinél fényesebb; minthogy pedig a kéve minden keresztmetszetén ugyanaz a fény mennyiség vonul keresztül: az tudni illik, mely a pupillán is befér: az lesz a legfényesebb metszet, a mely legkisebb, mert ezen tömörül a mondott fény mennyiség legjobban össze. A kéve hosszában két olyan metszet van, mely a többinél kisebb; ez a két gyújtóvonal. A többi metszet, bárhol és bárhogyan vesszük is föl, mind két méretű.



5. ábra.

Az 5. ábra felül a sugárkévének a szem meridián síkjára merőleges, alul pedig az ebbe a meridián síkba eső hosszanti metszetét tünteti fel, abban a következőkre nézve egyedül fontos esetben, midőn $\mu_{\alpha\beta} < 1$. AB a pupillának a meridián síkban fekvő, CD az arra merőleges átmérője. Ezt a két átmérőt egyenlőnek tekinthetjük és ennek megfelelően a sugárkéve keresztmetszetét a szem első csomópontjánál körnek vehetjük, melynek középpontján a kéve középsugara megy át. Jelöljük e kör átmérőjét $2r$ -rel, az első gyújtóvonal $Q'Q''$ hosz-

súságát f_1 -gyel, a második gyújtóvonal $R'R''$ hosszúságát pedig f_2 -vel; továbbá a sugárkéve QR gyújtóközét g -vel, a szem Π első gyújtópontjának távolságát R gyújtóponttól t -vel és végül $AQ\Pi = BQ\Pi$ szöveget $\Delta\beta$ -val.

A felső metszetből

$$f_1 = 2g \frac{r}{t},$$

az alsóból pedig

$$RR' = g \frac{\sin \Delta\beta}{\sin(\beta + \Delta\beta)} \text{ és } RR'' = g \frac{\sin \Delta\beta}{\sin(\beta - \Delta\beta)}$$

következik és összeadva:

$$R'R'' = f_2 = g \sin \Delta\beta \frac{\sin(\beta + \Delta\beta) + \sin(\beta - \Delta\beta)}{\sin(\beta + \Delta\beta) \sin(\beta - \Delta\beta)},$$

mibe még

$$\sin \Delta\beta = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (t-g)^2}} \text{ és}$$

$$\cos \Delta\beta = \frac{t-g}{\sqrt{r^2 + (t-g)^2}}$$

értékeket bevezetve és kellőleg rövidítve,

$$f_2 = 2g \frac{r}{t-g} \frac{\sin \beta}{\sin^2 \beta - \cos^2 \beta \left(\frac{r}{t-g} \right)^2}$$

adódik ki, egyszerű osztás után pedig

$$\frac{f_1}{f_2} = \sin \beta \frac{t-g}{t} \left(1 - \frac{\left(\frac{r}{t-g} \right)^2}{\tan^2 \beta} \right),$$

hol $\mu_{\alpha\beta} < 1$ esetében g , a 3. pont szerint és az 5. ábrának megfelelőleg, pozitívnak, $\mu_{\alpha\beta} > 1$ esetében pedig negatívnak veendő.

Gyakorlati esetekben rendszerint a zárjelbeli levonandó és vele együtt a sugárkéve is végtelen kicsinynek tekinthető: írható tehát egyszerűen

$$f_1 = f_2 \sin \beta \frac{t-g}{t},$$

hol $f_2 \sin \beta$ a második gyújtóvonalnak a középsugárra merőleges vetülete; és tulajdonképpen csakis ilyenkor tekinthető az első gyújtóvonal valóban vonalnak.

A következőkben egyedül $\mu_{\alpha\beta} < 1$ esetének, vagyis más szavakkal az optikailag sűrűbb mediumból az optikailag ritkább mediumba való fényátmenetelnek van gyakorlati szerepe.

Ez esetben a fenti kifejezések tanúsága szerint $\frac{f_1}{f_2}$ viszonzyszám, β szög minden értékénél, kisebb az egység-nél, vagyis f_1 kisebb f_2 -nél; az első gyújtóvonal tehát a sugárkéve legfényesebb metszete: a világító pont képének helye.*

* $\mu_{\alpha\beta} > 1$ esetében, tekintettel g -nek a 3. pontban levezetett értékére, $\frac{f_1}{f_2}$ csak addig kisebb az egység-nél, a míg β -nak a maximális értékhez közel fekvő értékeit kerüljük. β legnagyobb értéke ez esetben $\alpha - \frac{\pi}{2}$ -nek felel meg és egyenlő a teljes tükrözés határszögével. A fentiekhez hasonló kifejezéseket nyerünk a homorú gömbtükörré is, melynél a gyújtófelületek reális volta következtében, a gyújtóvonalak szabad szemmel is külön-külön figyelhetők meg.

Ennek megfelelően ezentúl az első gyújtópontot a *kép helyének*, az első gyújtóvonalat pedig egyszerűen *képnek* is fogjuk mondani.

A világító tárgy képe tehát, melyet a szem lát, azon első gyújtóvonalak egyeteméből álland, melyeket a tárgy egyes pontjaiból kisugárzó és törés után a pupillán bejutó sugárkévék alkotnak, a mit egyszerű kísérlet megerősít (8. pont).

A képet alkotó bármely gyújtóvonal helyét úgy kapjuk meg, hogy a megfelelő világító pont első gyújtófelületének a szem meridián síkjában fekvő meridián görbéjéhez a szem első csomópontjából érintőt húzunk: az érintés helye, *Q*, a keresett hely.

A 3. pontban bemutatott szerkesztés adott világító sugárból indult ki; a fordított feladat, melyben annak a fénysugárnak megszerkesztéséről van szó, mely adott fénypontból indulva ki, adott szempontba jut, illetőleg a megfelelő *Q* pont meghatározásáról, mely feladat a kép helyének fent előadott megszerkesztésekor jön alkalmazásba, csak közelítőleg oldható meg körzövel és vonalzóval. Nagyobb pontosságot, ha szükséges, számítással érhetni el.

5. Az első gyújtófelület meridián görbéje, melyet közönségesen diakausztikai vonalnak neveznek, $\mu_{\alpha\beta} < 1$ esetében evolútája oly ellipszisnek, melynek *O* a középpontja, *P* az egyik gyújtó pontja és $\mu_{\alpha\beta}$ az excentricitása; $\mu_{\alpha\beta} > 1$ esetében pedig evolútája oly hiperbolának, melynek ismét *O* a középpontja, *P* az egyik gyújtó pontja és hasonlóképpen $\mu_{\alpha\beta}$ az excentricitása (1. és 2. ábra).*

Válasszuk *O* pontot oly derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontjául, melynek *OF* az *x*, *OP* pedig a *z* tengelye és legyenek e rendszerben *x*, *z* a kép helyének (*Q* pont) koordinátái.

Az 1. és 2. ábrából egyaránt

$$a = \frac{p}{\cos \alpha} \text{ és } b = \frac{z}{\cos \beta}$$

következik, a mit a 3. pont I. egyenletébe bevezetve, β -t pedig α -nak függvényében fejezve ki, a kép helyének ordinátája számára a következő értéket nyerjük:

$$z = \mu_{\alpha\beta} p \left(1 - \frac{1 - \mu_{\alpha\beta}^2}{\mu_{\alpha\beta}^2} \tan^2 \alpha \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{IV.}$$

Ugyanazokból az ábrákból nyerhető a következő *x*-re vonatkozó mértani vonatkozás is:

$$x = p \tan \alpha - z \tan \beta,$$

melybe ha *z*-t IV. alatti értékével helyettesítjük, β -t pedig ismét α -ban fejezzük ki, a kép helyének abszcisszája számára a következő értéket kapjuk:

$$x = \frac{1 - \mu_{\alpha\beta}^2}{\mu_{\alpha\beta}^2} p \tan^3 \alpha \quad \text{V.}$$

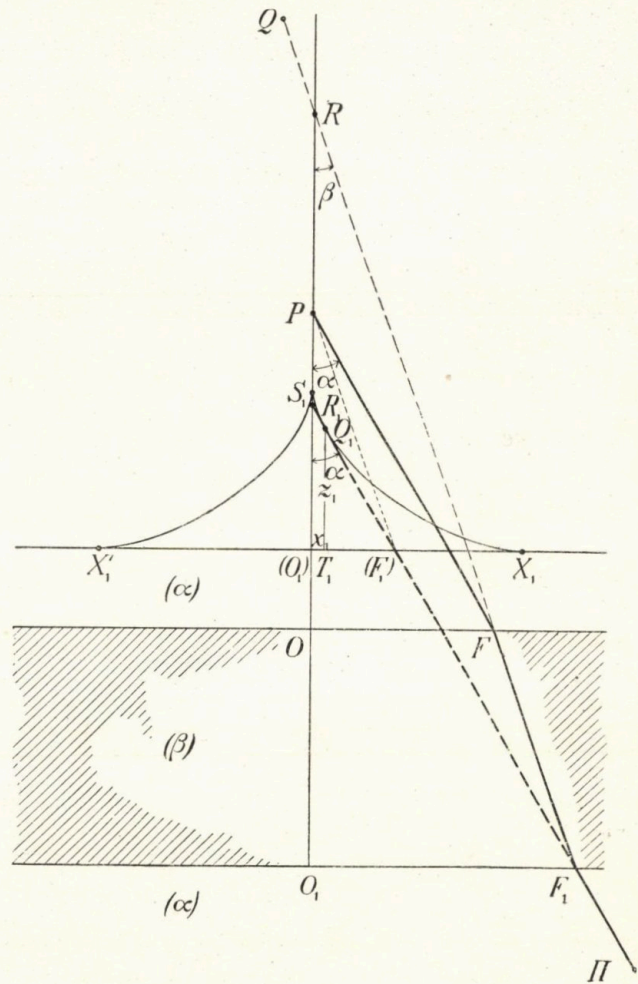
E két egyenletből *Q* pont koordinátái $\mu_{\alpha\beta}$, *p* és α függvényében adódnak ki; ha pedig belőlük $\tan \alpha$ -t kikü-

* Természetesen az evolútának csak a világító pont felé eső felének van fizikai szerepe.

szöböljük, a fent említett evoluta egyenlete áll elő, mely a következő:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{\mu_{\alpha\beta} p}{\sqrt{1 - \mu_{\alpha\beta}^2}} \right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{z^{\frac{2}{3}}}{(\mu_{\alpha\beta} p)^{\frac{2}{3}}} = 1 \quad \text{VI.}$$

6. Az egyszerű fénytörő sík esetéről úgy térünk át a plánparallel izotrop réteg esetére, hogy a már tekintetbe vett törő síkból kilépő fénysugarakat még egy azzal párvonalas törő síkon vezetjük át mielőtt a *II*-ben lévő szemhez jutnának. A szem ugyanazon (α) izotrop mediumban képzeljük, a melyben a világító pont van, a



6. ábra.

réteget pedig (β) izotrop medium tölti ki. A 6. ábra $\mu_{\beta\alpha} < 1$ esetének felel meg, mikor is a fénytörő réteg optikailag sűrűbb mint a környezet. $O_1 F_1$ a második törő sík átmetszése a szemnek ábrásíkul szolgáló meridián síkjával és $F_1 II$ a kilépő fénysugár, mely *PF* belépő sugárral párvonalas, de hozzája képest eltolódott. Egyszerűség kedvéért a szem meridián síkjában haladó sugárkévének csak a *PF F1 II* vonallal jelzett középsugarát rajzoltuk meg.

Ez a sugárkéve a második törés után hasonló szimmetriai okokból, mint a melyenek egy törő síknál érvényesültek, ismét két gyújtóvonalat alkot, melyek közül az első Q_1 gyújtóponton megy át az ábra síkjára, vagyis

a szem meridián síkjára merőlegesen, a második pedig a normális fénysugárban fekszik és R_1 gyújtóponton halad át.

Az első gyújtófelület ismét forgási felület, melynek a normális fénysugár a tengelye, a második gyújtófelület pedig egyenes vonal, mely ebben a tengelyben fekszik; a kettőnek újból csak egy közös pontjuk van: S_1 .

Q_1, R_1 és S_1 meghatározása céljából az eddigi jelölések fentartása mellett, jelöljük még a törő réteg vastagságát v -vel, továbbá a második fénytörés helyétől számított $Q_1 F_1$ és $R_1 F_1$ távolságokat b_1 , illetőleg c_1 -gyel, a középsugárnak a két törő sík közötti FF_1 darabját d -vel és végül P világító pontnak a második törő siktól számított merőleges távolságát p_1 -gyel, S_1 fő gyújtópontját pedig s_1 -gyel.

b_1 közvetlenül az I. egyenletből határozható meg, ha abba $\mu_{\alpha\beta}$ helyébe $\mu_{\beta\alpha} = \frac{1}{\mu_{\alpha\beta}}$, a helyébe $b + d$, β helyébe α és viszont α helyébe β tételik, minek utána

$$b_1 = \mu_{\beta\alpha} (b + d) \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta}$$

adódik ki, illetőleg b -nek ugyancsak I-ből vehető értékének bevezetése és kellő rövidítés után:

$$b_1 = a + \mu_{\beta\alpha} d \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \quad I'$$

c_1 a II. egyenletből nyerhető, ha abba $\mu_{\alpha\beta}$ helyébe ismét $\mu_{\beta\alpha}$ és a helyébe $c + d$ tételik, mikor is lesz

$$c_1 = \mu_{\beta\alpha} (c + d)$$

illetőleg c értékére tekintettel:

$$c_1 = a + \mu_{\beta\alpha} d \quad II'$$

I' és II'-ből a sugár kéve gyújtóköze:

$$g_1 = c_1 - b_1 = \mu_{\beta\alpha} d \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \right),$$

mely tehát annál kisebb, mentől vékonyabb a réteg és zérus, ha $\alpha = \beta$, vagyis a normális fénysugár esetében, mely itt is az egyedüli fősugár. A törő réteg tehát ismét csak oly sugarnál adhat jó képeket, melyek igen közel állanak a normális fénysugárhoz. E normális fénysugárnak, illetőleg S_1 fő gyújtópontnak megfelelőleg

$$b_1 = c_1 = s_1 = p + \mu_{\beta\alpha} v \quad III'$$

Vezessünk a normális fénysugár (O_1) pontján át, P -től a törő réteg felé számítva $P(O_1) = v$ távolságban egy, a törő réteggel párvonalas síkot; ez a sík minden kilépő $F_1 II$ sugár megnyújtását oly (F_1) pontban metszi, a mely F_1 ponttól a megfelelő sugárhoz tartozó a távolságban fekszik. Ha tehát a Q_1 és R_1 pontok távolságait (F_1)-től (b_1) és (c_1)-gyel, S_1 pont merőleges távolságát (O_1)-től pedig (s_1)-gyel jelöljük, I', II' és III'-ből közvetlenül írható

$$(b_1) = \mu_{\beta\alpha} d \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} = \mu_{\beta\alpha} P(F_1) \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} \quad I''$$

$$(c_1) = \mu_{\beta\alpha} d = \mu_{\beta\alpha} P(F_1) \quad II''$$

$$(s_1) = \mu_{\beta\alpha} v = \mu_{\beta\alpha} P(O_1) \quad III''$$

Ezekből az egyenletekből az tűnik ki, hogy Q_1, R_1 és S_1 helye független a törő rétegnek P világító ponttól való távolságától s hogy egyedül csak a viszonylagos törés-együtthatótól, a törő réteg irányától és vastagságától és a világító sugár hajlásszögétől függ; hogy tehát változatlan marad bármennyire mozdítsuk is el a réteget önönmagával párvonalasan, hacsak a szem és a világító pont között tartjuk. El is képzelhetjük az egész réteget a világító pont felé annyira eltolva, míg hátlapjával érinti a világító pontot, s minthogy ekkor a P -ből induló fénysugarak épp úgy viselkednek, mintha útjukat mindjárt a (β) mediumban, vagyis a törő réteg belsejében kezdenék, szükségképpen kell, hogy a törő réteg esetében képződő gyújtófelületek semmiben sem különbözzenek azoktól, melyek akkor keletkeznek, mikor a világító pont a (β) mediumnak belső pontja és fénytörés egyetlenegy P ponttól a szem felé számított v merőleges távolságban fekvő s a réteggel párvonalas törő síkon történik. Erről könnyen megbizonyosodhatunk, ha az I'', II'' és III'' alatti egyenleteket az I., II. és III. alattiakkal hasonlítjuk össze. A teljes azonosság tüstént nyilvánvaló, ha meggondoljuk, hogy a mi különbség közöttük feltűnik, az csupán formai különbség, mely először is annak következtetése, hogy akkor a fénytörés $\alpha\beta$, most meg $\beta\alpha$ irányban történik, mi az α és β betűknek egymással felcserélését okozza, továbbá pedig annak, hogy a mit akkor p -vel és a -val jelöltünk, most v -vel és d -vel jelöljük.

Ezzel a plánparallel réteg esetét visszavezettük az egyszerű törő sík esetére és minden annál előadott szerkesztés és számítás itt is alkalmazható.

A következőkben a plánparallel réteget plánparallel üveglemez, az (α) mediumot pedig levegő alkotja s ennek megfelelőleg $\mu_{\beta\alpha}$ állandóan kisebb az egységnél; a tárgyaknak plánparallel üveglemezeken át látott képeit tehát ismét azoknak az első gyújtóvonalaknak összesége alkotja, melyek a tárgyak egyes pontjaiból kisugárzó és a lemez okozta kétszeri törés után a szembe eljutó sugárkévéknek felelnek meg.

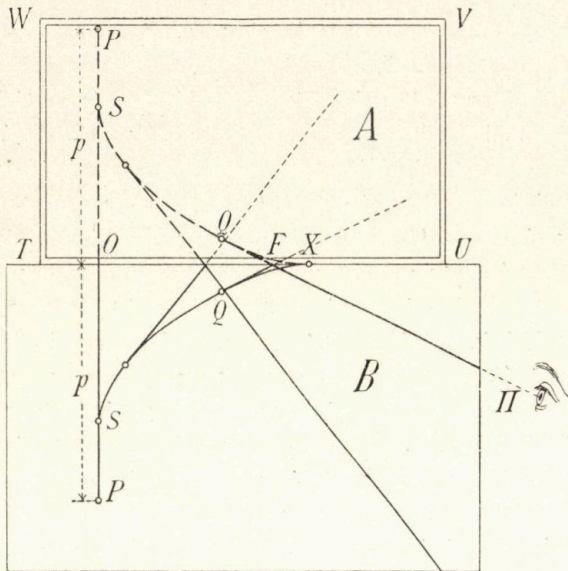
7. A kép tehát nem egymás mellé sorakozó fénypontok, hanem egymásba nyuló fényvonalak halmaza. Ebből magyarázható ki az az elmosódottság, mely, különösen igen ferde nézéskor, a kép körvonalaiiban és részleteiben mutatkozik.

De van a plánparallel üveglemez szolgáltatja képnek még egy nevezetes sajátysága: alakja az említett elmosódottságtól eltekintve, nem is egyezik meg a tárgy alakjával, sőt mértani értelemben véve ahhoz nem is hasonlít. A képnek ez az eltorzulása, a mint már egyszer, az asztigmatikus rendszerekről szólva, általánosságban említettük, a szem helyével együtt változik. Ezt az eltorzulást az okozza, hogy, miként a kép helyének előadott meghatározásából következik, az egyes alkotó pontok képei félreesnek onnan, a hol a pontok vannak még pedig mindenik más irányban és más távolságra.

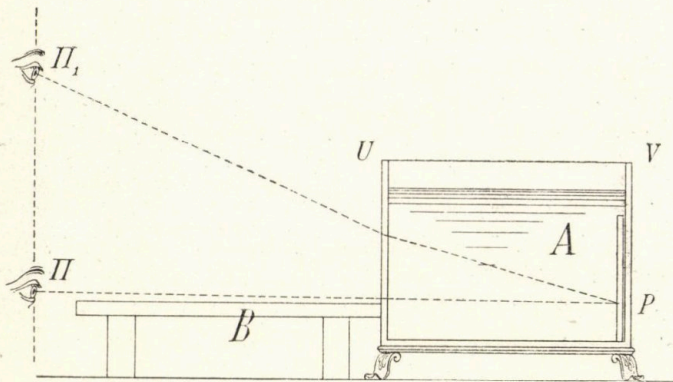
Az eddigiek befejezéseül vizsgálni fogjuk a kép eltorzulását abban, a mérésekkor gyakran előforduló

gyujtófelülete meridián görbéjének tükörképét; húzzunk ennek több alkalmasan választott pontjához érintőket és helyezzük el a rajzot az edény előtt vízszintesen és az edény fenéklapjánál valamivel magasabban a 8. ábra módjára, úgy hogy OX alapvonalával érintse az edény falát, az erre merőleges OP vonalának meghosszabbítása pedig a vízben levő rúd tengelyén vezessen keresztül.

Világítsuk meg lehetőleg erősen (legcélszerűbben a 8. ábra jobb oldala felől) a rajzot és a vízben lévő tárgyat és, akár mesterséges, akár pedig nappali világításnál észleljünk, álljuk el útját minden direkt és reflex zavaró fénynek azzal, hogy az edény tetejére, háta mögé és oldalát, a hol szükséges, fekete ernyőket alkalmazunk és nézzünk be a vízbe.



8. ábra.

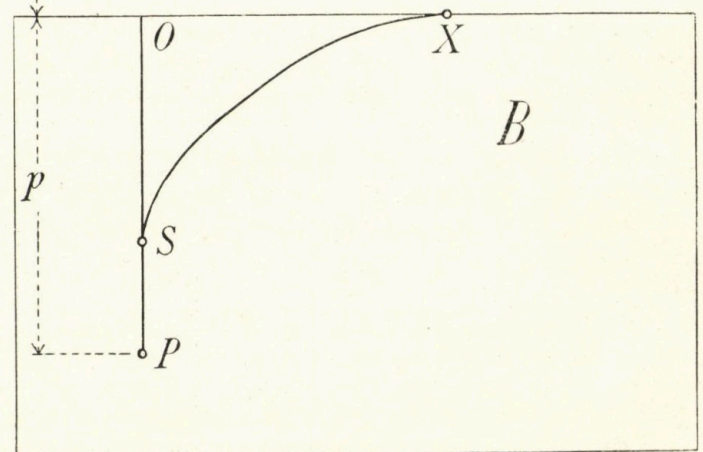
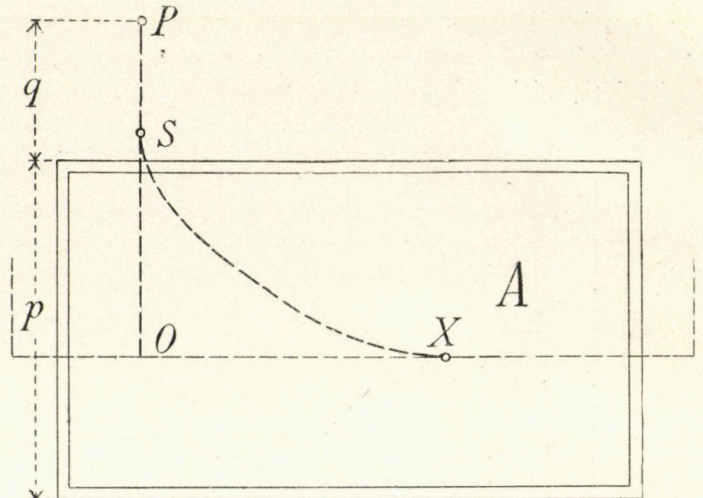


9. ábra.

Látni fogjuk a rudacskanak virtuális képét és az edény falától visszatükrözött a megrajzolt görbének a vízben lebegő tükörképét: a diakauszikai vonalat. A szemet a B lap magasságában lassan jobbra-balra mozgatva, nézzünk úgy be a vízbe, hogy a nézés iránya lehetőleg súrolja a rajzlapot és látni fogjuk, hogy a rúd képének az a pontja, mely a rajzlap magasságában van, folyton a diakauszikai vonalon mutatkozik és S ponttól X pontig vándorolva, azon halad végig, miközben a szem a normális fénysugárnak megfelelő állástól az XO -val egy vonalba eső állásig jár körül. Ha pedig a papiroson már előre megrajzoltuk a kilépő fénysugarak irányvonalait és szemünket valamely ilyen QFI vonal hosszába helyezzük, a rúd képét éppen abban a szintén megjelölt Q pontban látjuk, a mely pontban II néző sugár a diakauszikai vonalat érinti.

Az egyenesnek a 7. pontban előadott képeltorzulása is könnyen észlelhető. Ha ugyanis a szemet állandóan ugyanazon III_1 függőlegesben tartjuk (9. ábra), de a függőleges hosszában mindinkább feljebb és feljebb emeljük, a rúd azon pontjának a képe, mely a rajzlap magasságában van, mind jobban és jobban távozik el Q -tól és az edény TU falához közeledve, oly görbét ír le, melynek projekciója a papiros tükörképén ugyanaz, a mi a 7. pontban az egyenes képének első projekciója volt.

Az egyenes rúddal párvonalas $IIII_1$ egyenes mindig más



10. ábra.

pontjáról nézve a rúdnak mindig ugyanazt a pontját, a kép viszonylagos fekvésében mutatkozó változásnak szükségszerűleg ugyanannak kell lennie, a melyet akkor látunk, ha ugyanazon változatlan helyről a rúdnak mindig más pontját nézzük.

A vizsgált eset nyilvánvalóan nemcsak az egyszerű törő sík esete, hanem a plánpárhuzamos rétegé is, akkor tudniillik, mikor a réteg annyira eltolódott, hogy hátulso lapjával az egyenest érinti. Azt a másik esetet, mikor a réteg a szem és a tárgy között van, a nélkül, hogy az utóbbit érintené, úgy állítjuk elő, hogy a rudat a 10. ábra útmutatása szerint, nem az edény belsejében állítjuk fel, hanem az edény mögött az edény falától q távolságban, a midőn, ha magát a B rajzot is, előbbeni helyzetével párvonalosan q távolságra helyezük el az edény első falától, újra láthatjuk az előbb észlelteket.

(Folytatjuk.)