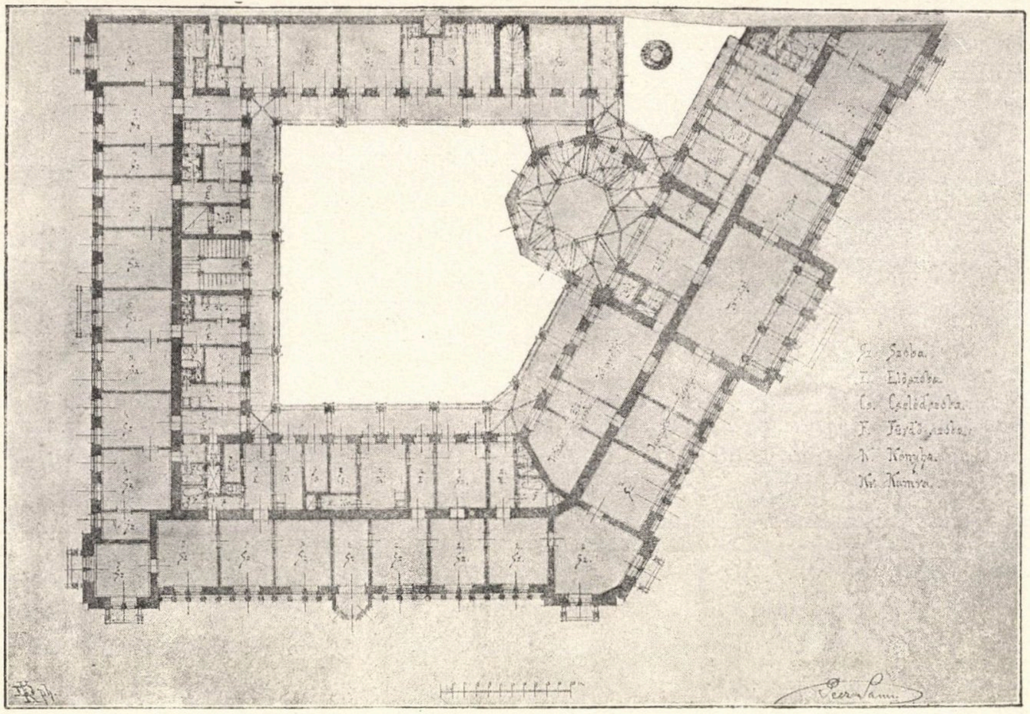
tetlen napfénynyel ellátni s így annak használhatóságát tetemesen fokozni.

Megemlítendő, hogy a kávéházi helyiség magasabbra emelt része s a többi részek között a kávéházi emelvény melletti kétfeljárásos kényelmes lépcső közvetíti a

Az épület Körúti és Dohány-utcai homlokzatát (III. tábla és 1. ábra) egészen faragott kőből, a Miksa-utcai homlokzaton a fontosabb szerkezeti részeket kőből, a falsikokat pedig céméntvakolatból valónak gondoltuk. Az udvar falait és arkádszerű folyosóit faragottkő-osz-



4. ábra. A »New-York« életbiztosító-társaság budapesti palotájának pályaterve. I. emelet. Tervezte *Pecz Samu* építész.

közlekedést; a vendéglőt és a kávéházi helyiségeket pedig két, az utcáról is közvetetlenül hozzáférhető, tágas és kényelmes lépcső köti össze.

A vendéglőt egészen, a kávéházat pedig az udvarba helyezett üvegfedelű helyiség kivételével, gazdag boltozással láttuk el.

A főlépcső elrendezésénél is azt tartottuk szem előtt, hogy az lehető gazdag térhatású, világos és kényelmes legyen. A szabályos nyolcszög alaprajzú lépcsőház széles, lassan emelkedő karjai, karcsú oszlopokkal tartott boltozó rendszerrel gyámolítvák.

lopokkal, iszapolt téglaburkolattal és céméntvakolással terveztük.

Az egész épület beépített területe $2941{\cdot}_{70}$ m^2.

A pince beépített területe $2862{\cdot}_{70}$ m^2, a földszinté $2502{\cdot}_{45}$ m^2, az emeleteké egyenkint $2365{\cdot}_{70}$ m^2. A pincemagasság részben $3{\cdot}_{40}$ m, részben $5{\cdot}_{00}$ és $5{\cdot}_{50}$ m. A földszint magassága $7{\cdot}_{50}$, földszinttől a főpárkányig $18{\cdot}_{50}$ m.

Az épület összes beépített köbtartalma a pincetalajtól a főpárkányig $74{,}857{\cdot}_{82}$ m^3.

Az építő költség $10{\cdot}_{50}$ frt m^3-kint $=$ $786{,}007{\cdot}_{11}$ frt.

A prizmatikus tükörrendszerekről és a háromélű prizmákról különös tekintettel a szögkitűzésre.

Bodola Lajostól.

II.

Prizmatikus tükörrendszerek.

9. Izotróp közegben a P világító pontból induló fénysugarak, ha valamely *egyszerű sík tükörbe** ütköznek, tükrözésük után úgy irányulnak, mintha abból a P_1 pontból sugároznának ki, mely P-nek szimmetrikusa a tükröző lapra nézve. A gyujtófelületek a gyujtóvonalakkal együtt ebbe az egy gyujtópontba húzódnak össze, mely pont a világító pontnak a szem helyétől független helyű virtuális képe.

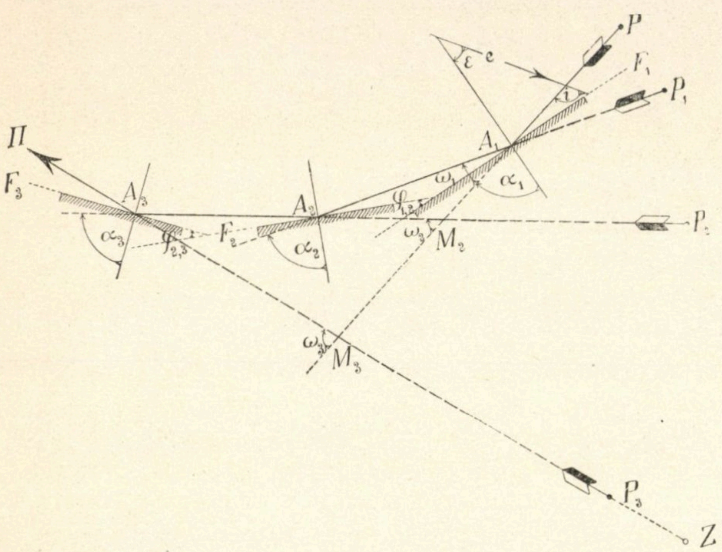
Az egyszerű sík tükör tehát s minden egyszerű síktükrökből alkotott optikai rendszer *aplanatikus* rendszer, a melynél a kép látását közvetítő valamennyi sugárkéve *homocentrikus*. Az ily rendszerektől alkotott képek vizsgálatakor egyszerűség okáért többször sugárkévék helyett egyes sugarakról fogunk szólani, a melyek alatt azonban mindig a megfelelő sugárkévék középsugarai értendők.

* Fénytörés nélkül tükröző csiszolt sík lap.

Sík tükörnél a kép helye nemcsak független a szem helyétől, hanem változatlan marad akkor is, ha a tükröt valamely normálisa körül forgatjuk.

10. *Prizmatikus tükörrendszer* alatt a sík tükrök oly rendszerét értjük, a melyben a tükröző lapok, vagy azoknak megnyújtásai parallel egyenesekben metszik egymást.

A 11. ábrában P-ből jövő fénysugár (kéve-középsugár), miután a prizmatikus tükörrendszer $F_1, F_2, \ldots, F_n$-nel jelölt lapjai (az ábrában $n = 3$) $A_1, A_2, \ldots, A_n$ pontokban ismételten tovább tükrözték, a szem Π első csomópontjába érkezik. P pont képe az első tükörben P_1; ez a kép világító pontként hat a második tükörre és létre hozza benne a második képet, P_2-t, emez pedig a harmadik tükörben P_3-t és így tovább P_n-ig. A sugár folytató-



11. ábra.

lagos tükrözése és természetesen a további képalkotás is valamely F_k tükrön tüstént megakad, mihelyt a tükrözés sorrendjében megelőző tükör szolgáltatta kép az F_k tükör tükröző lapja mögé esik. A $P_1, P_2, \ldots, P_n$ képpontok P világító ponttal együtt a prizmatikus tükörnek ugyanegy, az élekre normális sík metszetén feküsznek, melyet célszerűen az ábra síkjául választhatunk és egyelőre, egyszerűség okáért, tegyük fel, hogy a szem is ugyanezen a normális metszeten fekszik. A $P_1, P_2, \ldots, P_n$ képsorozatban P_n az a kép, melyet a szem épen néz.

Számítsuk az irányokat az ábra síkjául szolgáló normális metszeten, az óra mutató forgásával egyértelműleg, a normális metszeten tetszés szerint fölvett e egyenesen nyillal megjelölt kezdő iránytól. Jelölje $\varphi_{1,2}$ a különbséget az első és második tükör iránya között, $\varphi_{2,3}$ ugyanazt a második és harmadik tükör között és így végig $\varphi_{n-1,\,n}$-ig, az $(n-1)$-ik és n-ik tükör iránya közötti különbségig. Legyen ω_1 az iránykülönbség az egy tükrözést szenvedett $A_1 A_2$ sugárrész és PA_1 világító sugár között, ω_2 az iránykülönbség a két tükrözésen átment $A_2 A_3$ sugárrész és PA_1 között és így tovább ω_n-ig, az n tükrözést kiállott, a prizmatikus tükörből kilépő $A_n \Pi$ sugárrész és a tükörbe belépő PA_1 közötti iránykülönbségig, vagy más szavakkal: legyenek $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ az $1, 2, \ldots, n$ tükrözéstől okozott sugárelhajlások; végül pedig legyenek $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ az egymásután következő tükrözések beesésszögei.

Ezeknek megfelelően, ha i a belépő PA_1 sugárrész, i_1 az egy tükrözést szenvedett sugárrész, i_2 a két tükrözésen átment sugárrész, $\ldots, i_n$ pedig a tükörrendszerből kilépő sugárrész iránya és ε az a szög, melyet az első tükör normálisának a tükör belseje felé tartó iránya a felvett kezdő iránynyal bezár, leend

$$i = \varepsilon + \alpha_1$$

$$i_1 = \varepsilon + \alpha_1 + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) =$$

$$= i + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)$$

$$i_2 = \varepsilon + \alpha_1 + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) =$$

$$= i + 2\varphi_{1,2}$$

$$i_3 = \varepsilon + \alpha_1 + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_3\right) =$$

$$= i + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) + 2\varphi_{2,3}$$

stb.

és ennek megfelelőleg a sugárelhajlások:

$$\omega_1 = i_1 - i = 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)$$

$$\omega_2 = i_2 - i = 2\varphi_{1,2}$$

$$\omega_3 = i_3 - i = 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) + 2\varphi_{2,3}$$

stb.

átalánosságban pedig leend *páros* n esetében:

$$i = \varepsilon + \alpha_1$$

$$i_n = i + 2(\varphi_{1,2} + \varphi_{3,4} + \cdots + \varphi_{n-1,\,n}) =$$

$$= C + i$$

$$\omega_n = i_n - i = 2(\varphi_{1,2} + \varphi_{3,4} + \cdots + \varphi_{n-1,\,n}) =$$

$$= C;$$

páratlan n esetében:

$$i = \varepsilon + \alpha_1$$

$$i_n = i + 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) + 2(\varphi_{2,3} + \varphi_{4,5} + \cdots + \varphi_{n-1,\,n}) =$$

$$= C' + i - 2\alpha_1 = C' - i + 2\varepsilon$$

$$\omega_n = i_n - i = 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) + 2(\varphi_{2,3} + \varphi_{4,5} + \cdots + \varphi_{n-1,\,n}) =$$

$$= C' - 2\alpha_1 = C' - 2i + 2\varepsilon,$$

hol C és C' állandókat jelentenek és pedig:

$$C = 2(\varphi_{1,2} + \varphi_{3,4} + \cdots + \varphi_{n-1,\,n})$$

$$C' = 2(\varphi_{2,3} + \varphi_{4,5} + \cdots + \varphi_{n-1,\,n}) + \pi.$$

Az i_n és ω_n számára nyert kifejezésekből azt látjuk, hogy ha a világító, vagy belépő sugár i irányát változatlanul hagyjuk, a prizmatikus tükörrendszert pedig valamely az élekkel párvonalas tengely körül forgatjuk, a mi ε-nak növekedését vagy fogyását okozza, az n tükrözésen átmenet $A_n \Pi$ kilépő sugár i_n iránya *páros* n esetében változatlan marad, *páratlan* n esetében pedig ugyanazon értelemben két annyit fordul, mint a mennyit a tükör fordult; továbbá, hogy ω_n, vagyis a kilépő sugár elhajlása a belépő sugárhoz képest, *páros* n esetében állandóan ugyanakkora marad, bárhol legyenek is a szem és a világító pont a normális metszeten, hacsak viszonylagos fekvésük olyan marad, hogy ugyanaz az n tükrözés mindannyiszor újból végbemehet. Megjegyzendő még, hogy *páros* n esetében az n-ik kép a tárgygyal kongruens, *páratlan* n esetében pedig invers-egyenlő, vagy, a mint közönségesen mondani szokás, tükörkép.

A képpontok megszerkesztése igen egyszerű. P_1-t úgy nyerjük meg, hogy megszerkesztjük P-nek az első tükröző felületre nézve szimmetrikusan fekvő pontját; P_2-őt pedig úgy, hogy P_1-nek határozzuk meg a második tükröző felületre nézve szimmetrikus pontját és így tovább. Meglévén a képek, könnyű lesz a Π pontba futó fénysugár $P A_1 A_2 \ldots A_n \Pi$ útját is megszerkeszteni. Visszafelé haladva, kössük össze Π-t P_n-nel: az a pont, melyben ΠP_n összekötő egyenes F_n tükröt találja A_n pont, az n-ik tükrözés helye. Ha az összekötő egyenes a tükröt nem találja, Π pontról P_n nem látható. Kössük ezután össze A_n-et P_{n-1}-gyel: az a pont, a melyben ez az új összekötő egyenes az $(n-1)$-ik tükröt találja A_{n-1} pont, az $(n-1)$-ik tükrözés helye: találnia pedig ismét kell, mert különben a látás Π pontban újból lehetetlen volna. Hasonló módon tovább haladva, kössük össze A_{n-1}-et P_{n-2}-vel: megkapjuk A_{n-2}-t és így végig, a míg A_2-nek összekötése P_1-gyel megadja A_1-et, A_1-nek összekötése P-vel pedig megadja a Π-hez eljutó fénysugárnak legelső, a prizmatikus tükörrendszerbe belépő részét, a világító sugarat és ezzel a szerkesztés véget ér.

Természetesen megeshetik, hogy az a tükör, a mely a tükrözések sorrendjében a k-ik, nem éppen ugyanaz, a mely a szerkezetben is az, mert a fénysugár, tükrözésről tükrözésre haladva, egyes tükröket átugorhat, másokra meg visszatérhet, még pedig többször is. Az itt használt indexek kizárólag a tükrözések egymásutánját jelzik.

11. Ha a szem, a mint eddig föltettük, a világító ponttal és a képekkel együtt a prizmatikus tükörrendszernek ugyanabban a normális metszetében fekszik, a fénysugár is mindvégig ezen a metszeten halad. Nem úgy akkor, a mikor a szem nincsen ugyanabban a normális metszetben. Ebben az alkalmazásoknál leginkább előforduló esetben ugyanis a fénysugárnak egyik szakasza sem halad normális metszetben és a $P A_1 A_2 \ldots A_n \Pi$ útvonal egy P-től Π-ig emelkedő, vagy sülyedő törött vonal. A 11. ábrán és az előadott szerkesztésen mitsem kell azért változtatnunk; de más lesz a húzott vonalak és a megjelölt pontok jelentése. A prizmatikus tükörrendszernek tetszés szerinti normális metszetét gondolhatjuk ugyanis ábrasíkul fölvéve, a melyen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ újból az egyes tükrök átmetszései, csakhogy e normális metszeten $P, P_1, P_2, \ldots, P_n, \Pi$ és $A_1, A_2, \ldots, A_n$ betűk többé nem a megfelelő pontokat, hanem azoknak orthogonális projekcióit jelölik és ennek megfelelően $P A_1 A_2 \ldots A_n \Pi$ törött vonal sem ábrázolja többé a sugár útvonalát, hanem annak csak projekcióját; épp így $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ is a megfelelő beesésszögek projekcióit. Az az egyenlőség, mely beesésszögek és tükrözésszögek között fennáll, nyilvánvalóan azoknak orthogonális projekciói között is fennmarad. $M_2, M_3, \ldots, M_n$ pontokban sugármetszés a térben valósággal nem történik és azokban csak a megfelelő sugárszakaszok projekciói metszik egymást és az $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ szögek is csak e projekciók egymásután való irányváltozásait, az egymásután következő sugárelhajlások orthogonális projekcióit mérik; az i szögek is projekcióban mért irányszögek és egyedül csak a φ szögek őrzik meg az F vonalakkal együtt eredeti jelentésöket.

Az így módosított jelentésben az i, i_n és ω_n számára nyert képletek továbbra is fennállanak, különösen pedig *páros* n esetében ismét leend

$$\omega_n = C.$$

Ebben a gyakorlat szempontjából fontos esetben tehát a sugárelhajlás, a normális metszetre orthogonális projekciójában mérve, ismét állandóan ugyanakkora marad, bárhol legyenek is a szem és a világító pont a térben, vagy bármennyire forgassuk is el a tükröt valamely az élekkel párvonalas tengely körül, föltéve, hogy a viszonylagos fekvés olyan marad, hogy az n tükrözés ugyanazon sorrendben, ugyanazokon a tükrökön mindannyiszor újból ismétlődhetik.

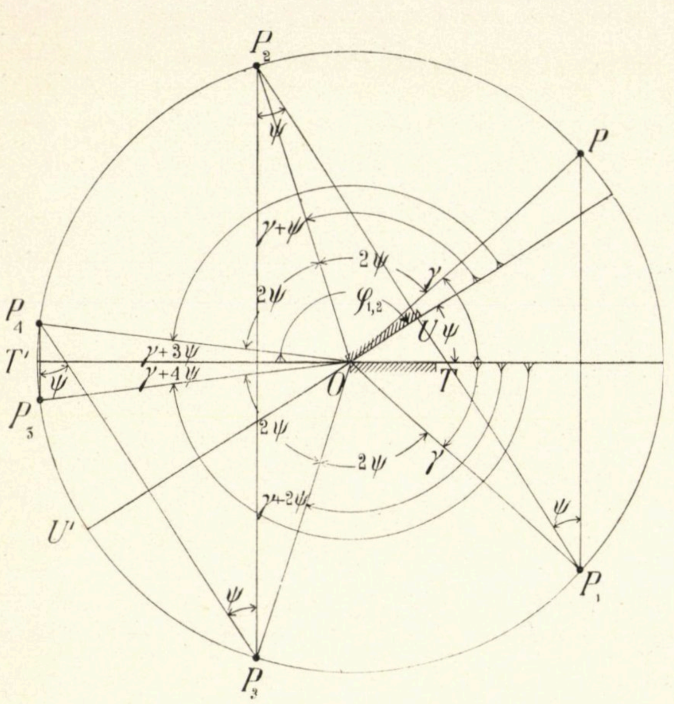
Ez a tulajdonság teszi alkalmatossá a földmértanban a prizmatikus tükörrendszereket meghatározott nagyságú szögek kitűzésére.

A 11. ábrában P pont nemcsak egy pont, hanem mindama pontok közös projekciójának tekinthető, melyek ugyanegy a normális metszetre merőleges egyenes vonal hosszában feküsznek. Minden a tükörrendszerbe belépő olyan fénysugár, mely az egyenes valamely pontjából sugároz ki és az n tükrözésen átesve, a szembe jut, benne fekszik abban a normális metszetre merőleges síkban, melynek PA_1 a projekciója, illetőleg átmetszése az ábra síkjával; a neki megfelelő kilépő sugár pedig, mely az egyenesnek az n tükrözésből származó képének megfelelő pontjából látszik kisugározni, benne fekszik abban a másik, a normális metszetre szintén merőleges síkban, melynek projekciója, illetőleg átmetszése $P_n A_n \Pi$. A két sík átmetszésvonala M_n ponton megy át és egymáshozi hajlásuk ω_n. Ha tehát P helyre függőlegesen egy pontjelző rúdat állítunk föl és a prizmatikus tükörszerkezetet, a mint a 11. ábra mutatja, a Π-ben lévő szem előtt úgy tartjuk, hogy élei függőlegesek legyenek, normális metszete tehát vízszintes, és hol F_n tükörben a P rúdnak *páros* n számú tükrözésből keletkező P_n képét, hol pedig a tükör fölött a Z helyen függőlegesen tartott másik pontjelző rúdat nézve, a Z rúdat úgy állíttatjuk föl, hogy P_n képpel egy irányba essék, a művelet eredménye oly $P M_n Z$ szög kitűzése leend, melynek M_n a csúcs pontja és ω_n a vízszintes projekciója.

12. A legegyszerűbb prizmatikus tükörrendszer a két tükörből álló, melyet a szögkitűzésre kiváló alkalmatosságánál fogva a földmértanban *szögtükörnek* neveznek.

Ez az egyszerű kis műszer, mely annyi jeles szolgálatot tesz, megérdemli, hogy a szokásosnál valamivel részletesebben vizsgáljuk meg, annyival is inkább, mert e vizsgálat reá vezet arra is, miképpen kell a szögtükröt leghelyesebben szerkeszteni és használni és oly részleteket nyújt, a melyek egyéb hasonló vizsgálatoknál haszonnal értékesíthetők.

Legyenek TO és UO a derékszögű négyszögalakú tükrök átmetszései a szögtükörnek ábrasíkul választott normális metszetével (12. ábra); O a szögtükör éle és $\psi = \pi - \varphi_{1,2}$ a tükröző lapok közötti szög, a szögtükör úgynevezett nyílásszöge. A T tükör előtt, O-tól tetszés szerinti távolságban, P-ben világító pont képet alkot P_1-ben, a T tükör mögött szimmetrikusan fekvő pontjában; ez az első kép, világító pontként hatva, ismét képet ad U mögött, P_2-ben; P_2 pedig visszatérő tükrözéssel újból T mögött, P_3-ban és így tovább P-ig.



12. ábra.

Valamennyi kép P-vel együtt a szögtükörnek ugyanabban a normális metszetében fekszik, az O él körül OP sugárral leírt kör kerületén és a $P P_1 P_2 \ldots P_n$ összekötő tört vonal, oly vonal, melynek egyes szakaszai felváltva az egyik és a másik tükörre merőlegesek.

Mihelyt a kölcsönös képalkotás folyamában valamely kép, melyet P_n-nel jelölünk, n-szeri tükrözés után a két tükör mögötti $T' O U'$ térrészbe jut, az a kép egyszersmind az utolsó kép, melynek keletkezése lehetséges; $T O U'$ térrészből ugyanis minden további tükrözés lehetetlen. A mint látni fogjuk, n szám, $\psi = 0$ esetét kivéve, mindig véges szám. A 12. ábra esetében $n = 5$ és P_5 az utolsó lehetséges kép.

Húzzuk meg OP, OP_1, OP_2, . . ., OP_n sugarakat s legyen γ a világító pont felé tartó OP sugárnak hajlásszöge ahhoz a T-vel jelölt tükörhöz, melyen az első tükrözés történik; az OP távolság egyelőre közömbös. Könnyű belátni, hogy valamint a $P P_1 P_2 \ldots P_n$ tört vonalnak az OP sugarú kör belseje felé néző $P P_1 P_2$, $P_1 P_2 P_3$, $P_2 P_3 P_4$, . . . csúcsszögei valamennyien ψ-vel egyenlők, épp úgy a $P O P_2$, $P_2 O P_4$, . . . és $P_1 O P_3$, $P_3 O P_5$, . . . szögek is valamennyien 2ψ-vel egyenlők, $P O P_1$ pedig 2γ-val egyenlő.

Az egyes képpontok felé imént húzott sugaraktól a megfelelő tükrök hátlapjaival bezárt szögek, ψ nyílásszögnek és γ hajlásszögnek megfelelően, a következők:

$$P_1 O T = \gamma$$
$$P_2 O U = \gamma + \psi$$
$$P_3 O T = \gamma + 2\psi$$
. . . .

$$\left.\begin{array}{r} \text{páros } n \text{ esetében } P_n O U \\ \text{páratlan } n \text{ esetében } P_n O T \end{array}\right\} = \gamma + (n-1)\psi,$$

a mely utolsó szög P_n-re, az utolsó képre vonatkozik. Minthogy P_n-nek, mint utolsó képnek, a két tükör mögötti $T' O U'$ térrészbe kell esnie, a megfelelő tükör hátlapjával bezárt $\gamma + (n-1)\psi$ szögére nézve mindenesetre állania kell, hogy

$$\pi \geqq \gamma + (n-1)\psi > \pi - \psi,$$

vagyis egyszerű átalakítás után:

$$\frac{\pi}{\psi} - \frac{\gamma}{\psi} + 1 > n \geqq \frac{\pi}{\psi} - \frac{\gamma}{\psi};$$

n tehát valóban csak $\psi = 0$, azaz parallel tükrök esetében végtelen nagy, minden más esetben véges.

Tegyük:

$$\frac{\pi}{\psi} = \nu + \vartheta,$$

a hol ν pozitiv egész szám, ϑ pedig pozitiv valódi tört; ennek megfelelően irhatunk:

$$\nu + 1 + \vartheta - \frac{\gamma}{\psi} > n \geqq \nu + \vartheta - \frac{\gamma}{\psi};$$

ebből pedig, tekintettel arra, hogy n pozitiv egész számú értékeinek van csak fizikai jelentése, következik, hogy:

$$\left.\begin{array}{c} 0 < \frac{\gamma}{\psi} < \vartheta, \\ \text{azaz} \\ 0 < \gamma < \vartheta\psi \end{array}\right\} \text{határok közt } n = \nu + 1$$

$$\left.\begin{array}{c} \vartheta < \frac{\gamma}{\psi} < 1 + \vartheta, \\ \text{azaz} \\ \vartheta\psi < \gamma < (1 + \vartheta)\psi \end{array}\right\} \quad » \quad » \quad n = \nu$$

$$\left.\begin{array}{c} 1 + \vartheta < \frac{\gamma}{\psi} < 2 + \vartheta, \\ \text{azaz} \\ (1 + \vartheta)\psi < \gamma < (2 + \vartheta)\psi \end{array}\right\} \quad » \quad » \quad n = \nu - 1$$

és így tovább.

γ-nak természetes felső határa π, a melyen túl γ értékét nem növeszthetjük, ha maradni akarunk az eddig tárgyalt esetnél, a melynél, föltevésünk szerint, az első tükrözésnek a T tükrön kell történnie és így P pontnak T tükör előtt kell maradnia; valóban $\gamma = (\nu + \vartheta)\psi = \pi$ határérték közelében a képek száma már csak egy volna.

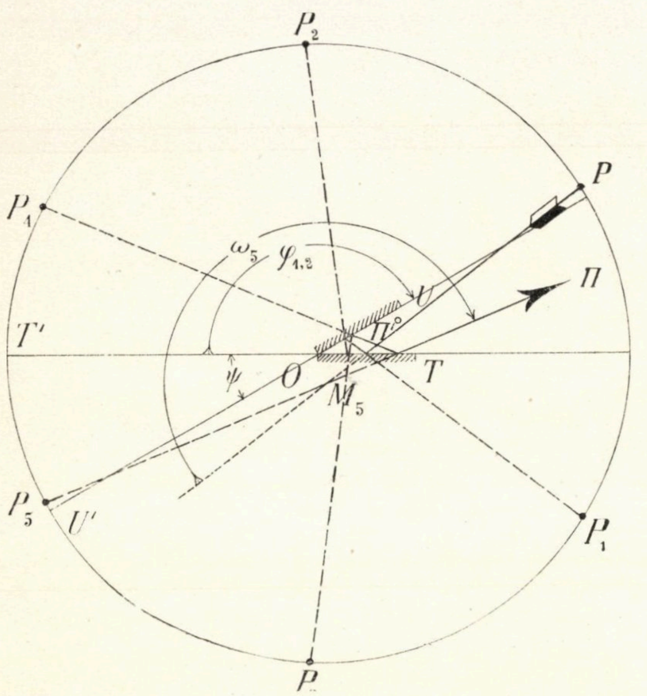
$\gamma = 0$ annak az esetnek felel meg, mikor a világító pont T tükör felületén, vagy annak megnyújtásán fekszik és P_1 képponttal egybeesik. Ha tehát P_1-et, mint képet, ekkor is külön számítjuk, a képek száma ugyanaz marad, a mi $0 < \gamma < \vartheta\,\psi$ határok között volt, azaz $\nu + 1$. $\gamma = \vartheta\,\psi$, $\gamma = (1 + \vartheta)\,\psi$, $\gamma = (2 + \vartheta)\,\psi, \ldots$ értékek azoknak a határeseteknek felelnek meg, melyeknek beálltával az a két kép, a mely közvetetlenül mielőtt a növekedő γ azokat az értékeket eléri, mint utolsó képek a tükrök mögötti tér egyik, vagy másik határfelületének közvetetlen szomszédságában van, azon a határfelületen egybeolvad és egy képet alkot, mi a képek számát mindannyiszor egygyel csökkenti. A képek száma tehát ezekben az esetekben ν, $\nu - 1$, $\nu - 2, \ldots$, minek betudásával az előbbi kifejezéseket következőképpen egészíthetjük ki.

$0 \leq \gamma < \vartheta\,\psi$ határok közt $n = \nu + 1 = n_{\max}$.

$\vartheta\,\psi \leq \gamma < (1 + \vartheta)\,\psi$ » » $n = \nu$

$(1 + \vartheta)\,\psi \leq \gamma < (2 + \vartheta)\,\psi$ » » $n = \nu - 1$

és így tovább.



13. ábra.

A gyakorlatban az a gyakoribb és fontosabb eset, a mikor $\vartheta = 0$, azaz $\dfrac{\pi}{\psi} = \nu$ egész szám. Ez esetben

$$\nu + 1 - \frac{\gamma}{\psi} \geq n \geq \nu - \frac{\gamma}{\psi}$$

és ennek megfelelően:

$0 \leq \gamma < \psi$ határok között $n = \nu = n_{\max}$.

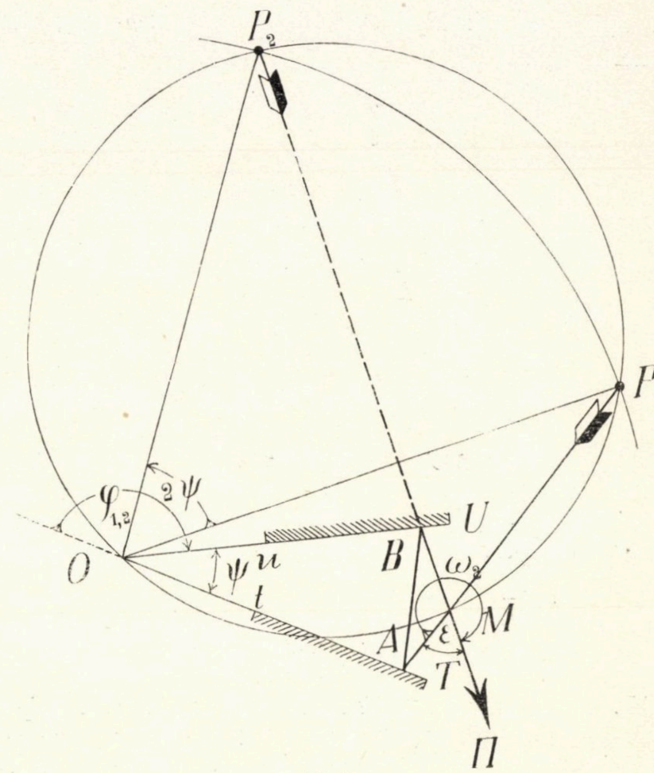
$\psi \leq \gamma < 2\,\psi$ » » $n = \nu - 1$

$2\,\psi \leq \gamma < 3\,\psi$ » » $n = \nu - 2$

és így tovább.

A fénysugár útja ugyanúgy szerkeszthető meg, mint a prizmatikus tükörrendszereknél átalánosságban előadtuk; példát a 13. ábra mutat. Az ábrában a kilépő sugár elhajlásának csak azt a részét jelöltük ω_5-tel, a mely a két teljes körülforgáson túl terjed. A Π-ben levő szem csakis P_5 képet láthatja, mert csak a $\Pi\,P_5$ néző sugár metszi a megfelelő tükröt. Ha Π'-be visszük át a szemet, akkor P_1 kivételével mindenik kép látható, mert $\Pi' P_1$ kivételével mindenik néző sugár metszi a megfelelő képet alkotó tükröt. Ha Π nincsen P-vel egy normális metszetben, a néző sugarak mind hajlottan haladnak és a képek látása csak úgy lehetséges, ha a szögtükör fekvése és méretei olyanok, hogy azok a tükrözések, melyek az ábrában projekcióban mutatkoznak, a térben valóban végbe is mehetnek.

Szögkitűzéskor rendesen csak az egyik tükrön meginduló többszörös tükrözésnek vesszük hasznát; könnyű azonban a nyert eredményeket a mind a két tükrön egyszerre meginduló többszörös tükrözésekből származó képek együttes számának meghatározására is felhasználni. Példa erre a kaleidoszkop, melynél a világító pont a két tükör között lévén, a tükrözés mindig mind a két tükrön egyszerre indul meg.



14. ábra.

13. Szögkitűzésre, elméletileg véve, minden páros többszörös tükrözés alkalmas; gyakorlati jelentőségűnek azonban csak a kétszeres tekinthető. Ennek esetét látjuk a 14. ábrában feltüntetve. A fénysugár $P\,A\,B\,\Pi$ úton haladva jut el a szemhez; az első tükrözés T tükrön A pontban, a második U tükrön B pontban történik; PA a belépő, $B\,\Pi$ a kilépő sugár; az $O\,T$ és $O\,U$ méreteket egyenlőknek vesszük. A kétszeri tükrözésből származó, a kilépő sugár megnyújtásán P_2-ben látszó kép, az első tükrözésből származó P_1 kép szerkesztésének mellőzésével, közvetetlenül is meghatározható az által, hogy P pontot O körül $P\,O\,P_2 = 2\,\psi$ szöggel forgatjuk el ugyanabban az irányban, a melyben a fénysugár az első tükrözéstől a második felé halad. (12. pont.) A kilépő sugár haladó iránya a belépő sugár haladó irányától számítva, az óramutató forgásával egyértelműen ω_2 szöggel

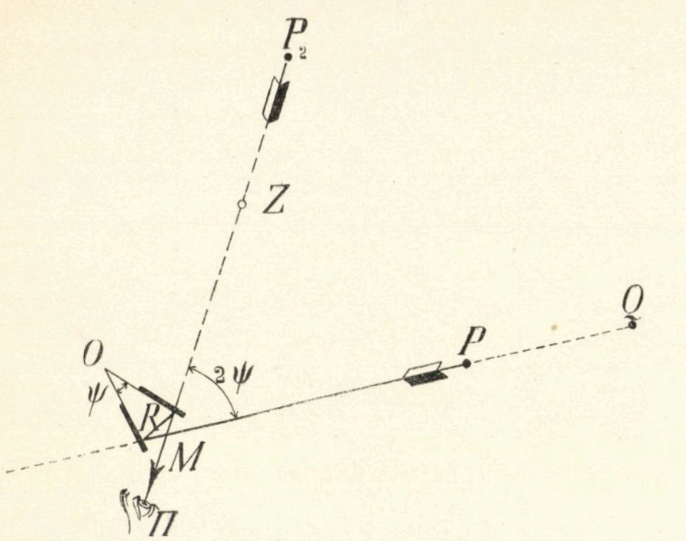
hajlik el és a két sugár M pontban metszi egymást. Természetesen, ha Π más normális metszetben fekszik mint P, minden a mit itt és később a sugarakról szólunk, a sugarak projekcióira értendő.

Tegyük $2\pi - \omega_2 = \varepsilon$ és irjunk az ω_n számára a 10. pontban nyert kifejezésben a jelen esetnek megfelelőleg n helyébe 2-őt, ω_2 helyébe pedig $(2\pi - \varepsilon)$-t és $\varphi_{1,2}$ helyébe $(\pi - \psi)$-t s lesz belőle

$$\varepsilon = 2\psi.$$

A két sugár haladó irányai tehát M pontban kétszer akkora szög alatt metszik egymást, mint a mekkora a szögtükör nyilásszöge.

M metszéspont annak a körnek kerületén fekszik, mely P, P_2 és O ponton megy keresztül. Ez a kör ugyanis mértani helye mindazoknak a pontoknak, a melyekben egy P-ről jövő és egy P_2-ről jövő fénysugár egymást 2ψ szög alatt metszik; ilyen pont azonban O is, a melyben PO és P_2O sugarak szintén 2ψ szög alatt metszik egymást.



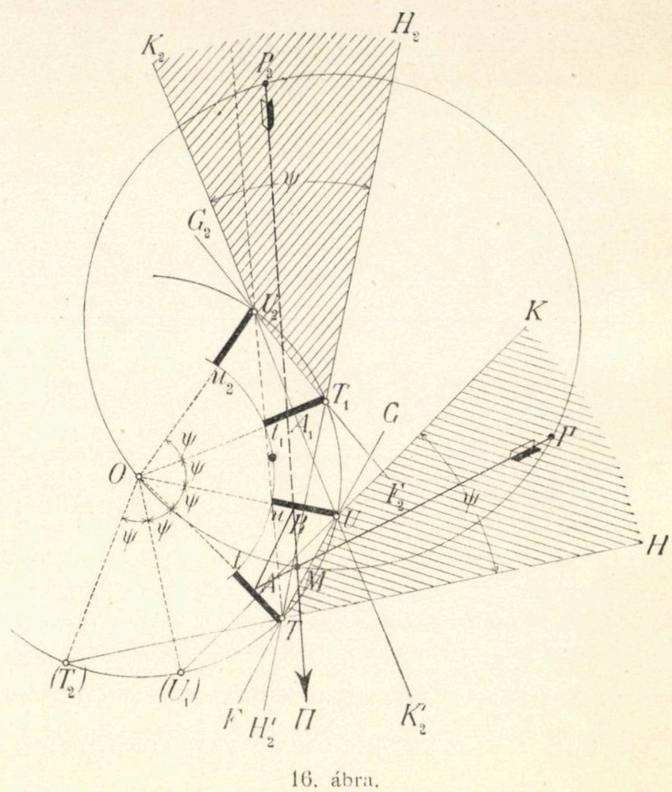
15. ábra.

Ha tehát, miután a fennebb említett módon P_2-őt megszerkesztettük, POP_2 kört is megrajzoljuk, könnyű lesz e kör segítségével minden megadott PA belépő sugárhoz megszerkeszteni a megfelelő P_2M kilépő sugarat és B pontot és viszont minden megadott $P_2B\Pi$ kilépő sugárhoz a megfelelő PM belépő sugarat és A pontot. Mindkét esetben ugyanis az adott sugár meghatározza a kör kerületén az M pontot, mely a megszerkesztendő sugárnak is pontja lévén, annak megszerkesztésére használható föl.

Az ε szögnek 2ψ-vel egyenlő állandó volta alkalmatossá teszi a szögtükröt oly szögek kitűzésére, melyeknek orthogonális projekciójuk a szögtükör normális metszetére 2ψ-vel egyenlő; ha pedig a szögtükröt O élével függőlegesen tartjuk, oly szögek kitűzésére, melyeknek vízszintes projekciójuk 2ψ. Tudvalevően ez utóbbi eset a földmértani kitűzések esete.

Megállunk például a P és Q függőlegesen felállított rudak PQ összekötő egyenesében (függőleges síkjában) megjelölt R pontnál és tartjuk rajta függőleges éllel a szögtükröt, a mint a 15. ábra mutatja. Kitűzetjük azután Z rúdat függőlegesen úgy, hogy Π-ről U tükör fölött nézve, Z egy irányba essék P-nek U tükörben látszó P_2 képével. Ezzel PQ egyenes R pontjában kitűztük PRZ szöget, melynek vízszintes projekciója 2ψ. Megfordítva is járhatunk el, a mennyiben adott Z ponthoz kereshetjük a megfelelő R pontot PQ egyenesen és más hasonló feladatokat oldhatunk meg. A mint azonban e rövid leírásból is kitetszik, a szögkitűzés csak akkor mondható helyesnek, ha éppen a fénysugárnak előbb említett M metszéspontját tartjuk a megjelölt R pont fölé, illetőleg éppen azt az R pontot jelöljük meg a talajon, a mely M alatt van. Hogy ez mennyire lehetséges és szükséges, arra majd később visszatérünk.

14. A mint Π pontról (16. ábra) a szemben álló U tükörbe nézünk, abban nem csak P_2-t látjuk környezetével együtt,



16. ábra.

hanem látjuk még T tükörnek U-tól tükrözött T_1 képét is és abban, illetőleg amögött U_2-t, mint az U tükörnek, és T_1OU_2-t, mint a szögtükör belső terének a kétszeri tükrözésből származó képét. Úgy hat a szemre az egész, mintha P világító pont és környezete, a belépő sugár és a szögtükör belső tere, mint merev egész 2ψ szöggel odébb fordult volna O körül.

Fektessünk a szögtükör nyilásának támasztva, $FTUG$ egyenesen át egy, a szögtükör O élvonalával párvonalas sík felületet. Szögkitűzésekkor a világító pontok mind kivül esnek ezen a határsíkon és ha továbbá föltesszük, hogy Π nézőpont is ezen a síkon kivül áll és mindig TU nyilás előtt foglal helyet, (a minek, miként később látni fogjuk, gyakorlati haszna van), világos, hogy a szögtükörben, kétszeri tükrözés révén, csakis az oly P pontot láthatjuk. melynek 2ψ-vel odébb fekvő P_2 képéből kisugározni látszó fénysugarak között olyanok is vannak, a melyek $T_1 U_2$ nyíláson belépni, TU nyiláson pedig kilépni képesek.

Az ilyen pontoknak a képei mind abba, az ábrában vonalozással megkülönböztetett ékalakú térrészbe esnek, melynek a szögtükör O élvonalával párvonalas határlapjai a szögtükör normális metszetét UU_2K_2 és TT_1H_2 egyenesekben metszik; maguk a megfelelő világító pontok pedig ama másik, O körül számítva 2ψ-vel idébb fekvő, projekcióban szintén vonalozott, az előbbivel kongruens és párvonalos ékalakú térrészben vannak, melynek határlapjai a szögtükör normális metszetét $(U_1)UK$ és $(T_2)TH$ egyenesekben metszik. Az első térrészt a szögtükör *képterének*, a másodikat *világító térnek* nevezzük; amaz emennek kongruens képe s mindkettőnek közös nyilás szöge ψ. A képtérrel élellenes térrész, mely H'_2 és K'_2 felé terjed, a *nézőtér;* a szem ugyanis a képtérbe csakis e nézőtérben állva láthat be.

A szögtükör *mezeje* a képtérnek ama szintén ékalakú része, mely adott szemállásból nézve, TU és T_1U_2 nyilásokon át egyszerre átpillantható. A mező annál tágasabb, mentől közelebb vonul a szem a szögtükör nyilásához. Így például az $OT = OU$ sugarú körhenger* valamely pontjáról nézve, a mező tágassága, a normális metszeten mérve, $\frac{1}{2}\psi$, mit egyszersmind a szögtükör mezejének gyakorlati maximális tágasságának tekinthetünk. Ez a maximális mező csak ψ-től függ és a szögtükör egyéb méreteitől független.

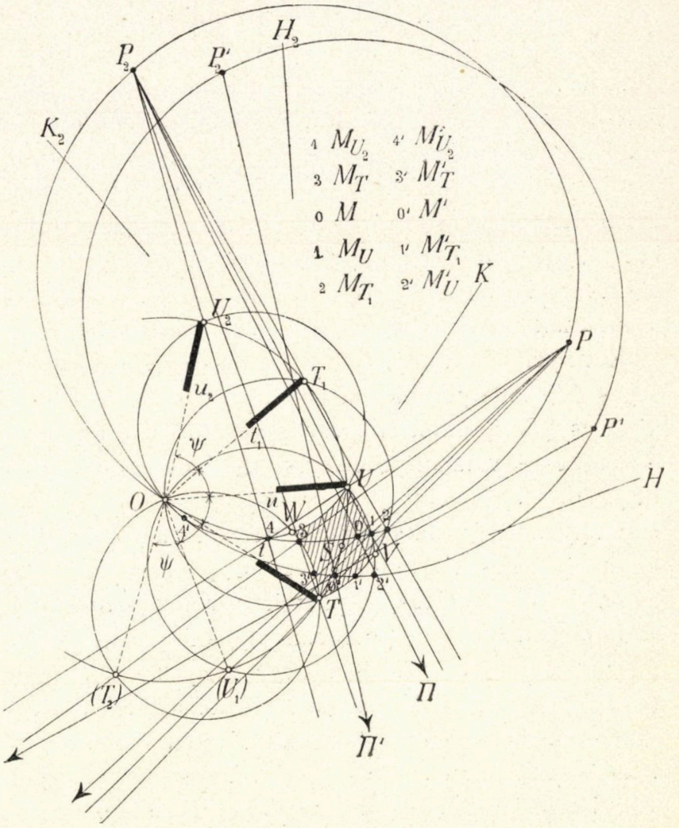
Könnyű belátni, hogy a képtérből eredő fénysugarak közül egy sem találhatja U és T tükröt, illetőleg ez utóbbi képét T_1-t, az O élhez közelebb fekvő helyen, mint azok a sugarak, melyeknek közös projekciójuk U_2T: egy sem találhatja tehát e tükröket beljebb u, illetőleg t_1 pontnál, a mely pontokban U_2T U-t és T_1-t metszi. Ebből az következik, hogy mind U, mind pedig T tükörnek az $Ou = Ot$ sugarú körhengeren belül fekvő részei teljesen fölöslegesek és a szögtükör készítésekor el is hagyandók; de viszont mindkét tükröző lapnak a mondott hengerig okvetetlenül érniök kell, mert különben T él közeléről nézve, a honnan a kitűzés legkényelmesebb a mezőt haszontalanul szűkítenők meg; sőt, ha a tükröket $\frac{1}{2}Uu$-nál, illetőleg $\frac{1}{2}Tt$-nél is rövidebbre szabatjuk, nemcsak hogy a mező mindenütt, hanem a képtér is megfogyatkoznék és a T él környezetéről egyátalán látni sem lehetne.

Még károsabb a hatása annak, ha a tükröket befoglaló rámáknak a tükröknek az O éllel párvonalas és a szögtükör nyilása felől eső T és U szélei mellett széles befoglaló párkányuk van, mert attól mind a képtér, mind pedig a mező nagyon megszűkül. Ezt a párkányt lehetőleg keskenyre kell szabni, vagy még jobb egészen elhagyni.

* A szögtükörnél ugyanis célszerű a derékszögű négyszögalakú tükrök OT és OU méreteit egyenlőre szabni, mert akkor a szögtükör mindkét oldalról egyformán használható; az itt és tovább mondottakra nézve azonban ez nem lényeges.

P_2 kép helye független a szem helyétől és változatlan marad akkor is, ha forgatjuk a szögtükröt O él körül, a miért is szokás az ilyen képet (és hasonló okból minden páros számú tükrözésből származó képet) *álló képnek* nevezni; de látható a kép csak addig lesz, a míg a szögtükör képterében marad. Ha pedig P pontot a világító tér egyik határfelületén gondoljuk, a midőn P_2 a képtér megfelelő határfelületén már látható, könnyű belátni, hogy a szögtükröt legfeljebb ψ szöggel, a világító és képtér nyilásszögével, forgathatjuk odébb O körül, ha azt akarjuk, hogy P_2 azontúl is látható maradjon. A forgatás után P_2 a képtér másik határfelületére kerül.

15. Térjünk vissza arra az M pontra, a melyben a kilépő sugár a belépő sugarat $\varepsilon = 2\psi$ szög alatt metszi.



17. ábra.

A 13. pont szerint M pontnak mértani helye az a kör (vagy henger), a mely keresztül megy P világító ponton, P_2 képponton és a szögtükör O élvonalán. (17. ábra.) Mindazok az M pontok tehát, melyek ugyanegy P_2 képpontból kisugárzó, de folyton más Π szempont felé tartó fénysugaraknak felelnek meg, valamennyien e kör kerületén feküsznek. Világos azonban, hogy a szögtükörnek egy megadott állása mellett, csakis az ennek a körnek egy korlátolt és könnyen meghatározható ívdarabján fekvő M metszéspontoknak van fizikai lehetősége: azoknak tudniillik, a melyek azoknak a sugaraknak felelnek meg, a melyek mind T_1U_2, mind pedig TU nyiláson is akadálytalanul vonulhatnak át.

Induljunk ki oly közepes irányú $P_2M\Pi$ fénysugárból, mely mindkét nyiláson keresztül megy és mozgassuk szemünket jobb felé; a mint a szem odébb halad, folyton más és más, mindinkább jobb felé hajló fénysugár jut belé és M pont is jobb felé mozdul a maga körének kerületén. Mihelyt azonban annyira haladtunk, hogy oly sugarat látunk, a mely már TU vagy $T_1 U_2$ nyilás U vagy T_1 szélét súrolja, a tovább haladásnak vége szakad, mert azontúl a látás lehetetlen. Létezik tehát a kiinduló pontul választott M pont jobb oldalán a kör kerületén két határpont, M_U és M_{T1} és csak az a kérdés, hogy a kettő közül melyik jelentkezik előbb: azon túl már jobb felől nincsen látható metszéspont. Hasonlóan járunk, ha szemünket bal felé mozgatjuk; ismét jelentkezik két határpont, M_T és M_{U2}: összesen tehát négy határpontot kapunk s könnyű belátni, hogy csak azoknak az M metszéspontoknak van fizikai szerepe, a melyek a két közbül álló határpont között feküsznek és $OMPP_2$ körnek csak azon ívdarabjának van fizikai jelentése, a melyet az a két pont határol.

A 17. ábrában P világító pontra nézve a két közbül fekvő határpont M_U és M_T, P' világító pontra nézve pedig M'_{T1} és M'_T.

Ha pedig azt kérdezzük, hogy változó P és változó Π mellett, minő az összes fizikailag lehetséges M pontokat magába záró határábra, melynek kerülete tehát az összes fizikailag lehetséges M_T, M_U, M_{T1} és M_{U2} határpontoknak mértani helye? Könnyen felelhetünk erre is.

Könnyen kimutatható, hogy az összes egyátalán lehetséges M_T határpontok mértani helye oly körvonal, mely T, O és (T_2) pontokon halad keresztül; hasonlóképpen az összes egyátalán lehetséges M_U határpontok mértani helye oly kör, mely U, O és (U_1) pontokon megy át; épp úgy az M_{T1} határpontok mértani helye az a kör, mely T_1, O és T pontokon, az M_{U2} határpontoké pedig az, a mely U_2, O és U pontokon vonul keresztül.

Minden egyes M_T pontban ugyanis két oly sugár metszi egymást 2ψ szög alatt, a melyek közül az egyik (a kilépő $P_2 M_T T$ fénysugár), bárhol legyenek is a világító pont és a szem, állandóan T ponton megy át, a másik pedig (a belépő $P M_T (T_2)$ fénysugár) (T_2) ponton vonul keresztül; az összes egyátalán lehetséges M_T határpontok mértani helye e szerint, ismeretes geométriai okokból, az a kör, a mely T és (T_2) pontokon átmenve, mindazokat a pontokat köti össze, a melyekben egy T-ből jövő és egy (T_2)-ből jövő egyenes 2ψ szög alatt metszik egymást. Ilyen pont azonban O is, a hol TO és $(T_2)O$ egyenesek szintén 2ψ szög alatt metszik egymást; a mondott kör tehát valóban O ponton is keresztül halad. Hasonlóképpen bizonyítható be a tétel a többi határpontokra nézve is.

Ha pedig, a megelőző pontnak értelmében, csakis azokra a világító pontokra szorítkozunk, melyek az ott meghatározott világító térben vannak és azokra a képpontokra, melyek a megfelelő képtérbe esnek, az összes e fizikai föltételnek megfelelőleg lehetséges M metszéspontokat befoglaló határábra az a körívektől határolt $TVUW$ négyszög leend, melynek négy oldalát az imént talált négy kör egy-egy ívdarabja szolgáltatja.

Visszatérve most már arra, a mit a 13 pont végén a szögtükörrel kitűzött szög csúcspontjának helyes megjelöléséről szólottunk, az imént befejezett vizsgálatból azt látjuk, hogy e csúcspont megjelölését a szögtükör csak sajátos és elkerülhetetlen bizonytalansággal végezheti, mert a csúcspont fekvését a $TVUW$ köríves négyszög területén belül határozatlanul hagyja.

E hibaforrás káros hatásának csökkentésére, minden a szögtükröt megbecsülhetetlen egyszerűségéből kivetkeztető mesterkélt berendezést mellőzve, két módunk van.

Az első abból áll, hogy a szögtükör méreteit a gyakorlati minimumra redukáljuk. A mint ugyanis a 14. pontban láttuk, a szögtükör maximális mezeje független a szögtükör méreteitől és csak ψ-től függ, míg ellenben a $TVUW$ ábra e méretekkel együtt fogy.

A méretek gyakorlati minimumát az szabja meg, hogy ha a szögtükör igen kicsiny, szemünket bajosan tarthatjuk oly közel, hogy a maximális mezőt kihasználhassuk. Így például 90°-t kitűző, vagyis 45°-nyi nyilású szögtükörnél célszerűen lehet az $OT = OU$ méretet 20 *mm*-re, sőt 15 *mm*-re is redukálni.

A másik mód a következő. A szögtükröt legpontosabban s egyszersmind legkényelmesebben úgy használhatjuk, hogy nem kézben tartjuk, hanem szemmagasságú vékony, egyenes bot tetejére erősítjük s az utóbbinak alsó végét nehéz fémhegygyel látjuk el. Ha ugyanis a botot felül két ujj közé fogva szabadon lógatjuk, a szög csúcspontjának leprojiciálását és megjelölését sokkal biztosabban foganatosíthatjuk, mint függővel; továbbá a már megjelölt pont fölé is sokkal pontosabban tarthatjuk a szögtükröt, a mennyiben egyszerűen a botot függőlegesen oda beszúrjuk és kezünk szabad marad. Ha tehát ilyen botot használunk, célszerűen úgy erősítjük a tengelyére merőlegesen elvágott felső végére a szögtükröt, hogy a $TVUW$ hibaterület S súlypontja a bot tengelyébe essék. Ha ugyanis így cselekszünk, a bot alsó hegye, mely szintén a tengelybe esik, mindannyiszor oly pontot jelöl meg, illetőleg oly pont fölött áll, mely a helyes csúcsponttól legföljebb a $TVUW$ terület fél átlóméreteivel tér el.

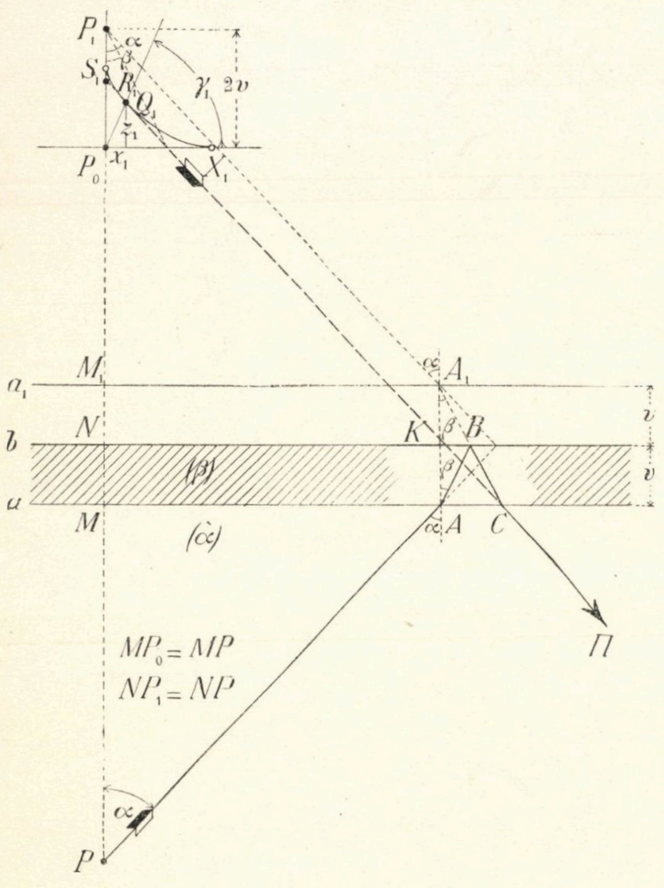
A megerősítést úgy foganatosíthatjuk, hogy a szögtükör talplemezére alúl, az S pontnak megfelelő helyre, mely a TU körív felező pontja, a lemezre merőlegesen henger alakú hosszúkás fémrudacskát alkalmazunk, melyet azután a bot felső végén a tengely irányában fúrt lyukba állítunk be.

A csúcspont megjelölésében mindezek után is még hátramaradó bizonytalanság a szabad szemmel elérhető mérőpontosság határán kívül esik és elhanyagolható.

Sokkal tágabb határok között ingadozik az M metszéspont helye és ennek következtében nagyobb hibának van a kitűzés is kitéve, ha oly fénysugarakat is használunk, a melyek O él felől, vagy T tükör fölött haladva lépnek ki a tükrök közül. A megfelelő M metszéspontok határábrája ugyanis, melyet a 17. ábrában megszerkesztett körök segítségével könnyen határozhatunk meg, sokkal nagyobb. Minthogy azonban e sugarak használatára semmi gyakorlati szükség nincsen, a kitűzésre mindig csak oly sugarakat használjunk, a melyek az előbb már meghatározott nézőtérből láthatók.

16. Minden, a mit fénysugarakról mondottunk, a sugarak projekcióira is vonatkoztatható; ha tehát a világító pont, illetőleg a pontjelző rúd tengelyének egyik pontja sem fekszik a szögtükörnek abban a normális metszetében, a melyben a szem van, még mindig lehet függőlegesen tartott szögtükörrel helyes kitűzést foganatosítani. De dombos és váltakozó lejtésű vidéken a szögtükröt haszonnal alkalmazni még sem lehet.

A kitűzés helyességét ugyanis úgy itéljük meg, hogy megvizsgáljuk, vajjon két rúd közül az egyik egy irányba esik-e a másiknak tükörben látott képével? Ez a kép azonban a megfelelő rúddal egy szintben fekszik. Ha tehát a két rúd szint- vagy magasságkülönbsége akkora,



18. ábra.

hogy a rendesnél hosszabb rudak alkalmazása mellett is a szabad szemmel nézett rúd és a tükörben látott rúd kicsiny részben sem fedik egymást, vagyis a szabad szemmel nézett rúdnak egyik pontja sem esik a rúdkép valamely pontjával ugyanegy, akár vízszintes, akár hajlott irányvonalba, vagy éppen már messze is áll a kettő egymás fölött, a művelet helyessége többé nem ellenőrizhető és a kitűzés szögtükörrel nem foganatosítható.

Ugyanebbe az akadályba ütközik a később vizsgálandó *szögprizma* használata is. Dombos vidékeken a szögtükröt és a szögprizmát a dioptrakereszttel vagy a dioptrakoronggal helyettesíthetjük.

17. A tükrök eddig fénytörés nélkül tükröző csiszolt síklapok voltak; lássuk röviden mi különbség van az ily egyszerű síktükör és a plánparallel üveglemezből, az egyik felület ezüstözése révén készített *üveg síktükör* hatása között.

Először is tudvalevőleg üvegtükörben ugyanegy sugárnak, illetőleg sugárkévének, a belső tükrözések száma szerint, több kép felel meg; egyelőre azonban csak a főképpel foglalkozzunk, a mely az ezüstözött lapon való egyszeri tükrözésből származik. A mellékképekről később lesz szó.

A 18. ábrában P a világító pont, Π_1 a szem első csomópontja és az ábra síkjául a szem meridián síkja szolgál; a az üveglemez szabad felülete, b az ezüstözött felülete és v a vastagsága. A fénysugár $PABC\Pi_1$ úton jut el a szembe.

Ha megszerkesztjük mindannak a tükörképét, a mit a b lap az a lapon benéző szembe visszatükröztet, először is nyerjük magának az üveglemeznek tükörképét, ba_1-et és abban AB sugárrész képét, BA_1-et, a mely BC-vel egy vonalba esik; azután a_1 mögött PA sugárrésznek a kilépő $C\Pi_1$ sugárral párvonalas képét $A_1 P_1$-et és ezzel együtt P-nek képét P_1-et.

A mint ez egyszerű szerkesztésből kitünik, P pontból épp oly irányú, illetőleg irányváltozási törvénynek hódoló fénysugarak jutnak el a szemhez, a milyenek jutnának, ha a világító pont nem P-ben, hanem annak a P_1 virtuális képnek helyén világítana, a melyet a b lap helyét elfoglaló, tehát az üvegtükör a szabad lapja mögött v távolságban fekvő egyszerű síktükör alkot és az abból a P_1 pontból kisugárzó fény, még mielőtt a szemhez jutna, keresztül menne egy a tükörrel párvonalas $2v$ vastagságú üveglemezen.

Minthogy pedig a mi P-re áll, áll a világító tárgynak mindenik pontjára, áll tehát az egész tárgyra, melynek képét szintén ott látjuk, a hol látnók, ha az üvegtükör szabad lapja mögött v távolságban fekvő egyszerű síktükör alkotta képét egy a tükörrel párvonalas $2v$ vastagságú üveglemezen keresztül néznők.

E szerint minden üveg síktükörnek a főképre vonatkozó optikai hatása egy katoptrikai és egy dioptrikai alkotóra bontható, melyek közül az első az egyszerű síktükör hatásával, a második a kétszer olyan vastag üveglemez hatásával egyenlő. Az utóbbinak következtében az üveg síktükör, ellentétben az egyszerű síktükörrel nem aplanatikus, hanem *asztigmatikus* optikai rendszer.

Az α szög alatt világító PA sugárhoz, mint középsugárhoz tartozó sugárkéve révén látott kép Q_1 helye, vagyis a kéve első gyujtópontja, P_1 pontból mint világító pontból indulva ki, ugyanúgy szerkeszthető meg, a mint a bevezetésben a plánparallel üveglemezre vonatkozólag előadtuk. Ha pedig a P_1P normálisnak P_0 pontját, mely $P_1P_0 = 2v$ távolságban fekszik P_1-től, oly zx orthogonális koordinátarendszer kezdőpontjául választjuk, melynek P_0P_1 a $+z$ tengelye és P_0X_1 a $+x$ tengelye, Q_1 pont z_1 és x_1 koordinátái, a bevezetés 6. és 5. pontja értelmében, a kellő betűváltoztatások után a következők lesznek:

$$z_1 = 2v\mu_{\beta\alpha}\left(1 - \frac{1-\mu^2_{\beta\alpha}}{\mu^2_{\beta\alpha}}\operatorname{tang}^2\beta\right)^{\frac{3}{2}},$$

$$x_1 = 2v\,\frac{1-\mu^2_{\beta\alpha}}{\mu^2_{\beta\alpha}}\operatorname{tang}^3\beta,$$

vagy még:

$$z_1 = 2vZ,$$

$$x_1 = 2vX,$$

ha tudniillik rövidség okáért

$$\mu_{\beta\alpha}\left(1 - \frac{1-\mu^2_{\beta\alpha}}{\mu^2_{\beta\alpha}}\operatorname{tang}^2\beta\right)^{\frac{3}{2}} = Z$$

$$\frac{1-\mu^2_{\beta\alpha}}{\mu^2_{\beta\alpha}}\operatorname{tang}^3\beta = X$$

tesszük; Q_1-nek $P_0\,Q_1$ radius vektorának a pozitiv x tengelytől számított γ_1 hajlásszögének cotangense pedig:

$$\operatorname{cotang}\gamma_1 = \frac{x_1}{z_1} = \frac{X}{Z} = \left(1-\mu^2_{\beta\alpha}\right)\operatorname{tang}^3\alpha,$$

a hol az X és Z képleteiben előforduló β, $\sin\beta = \mu_{\beta\alpha}\sin\alpha$ segítségével, α-ban fejeztetett ki.

R_1 második gyújtópontnak P_0-tól számított $P_0\,R_1 = AK = r_1$ távolsága:

$$r_1 = 2v\,\frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha} = 2v\,\frac{\mu_{\beta\alpha}}{\sqrt{1+(1-\mu^2_{\beta\alpha})\operatorname{tang}^2\alpha}}$$

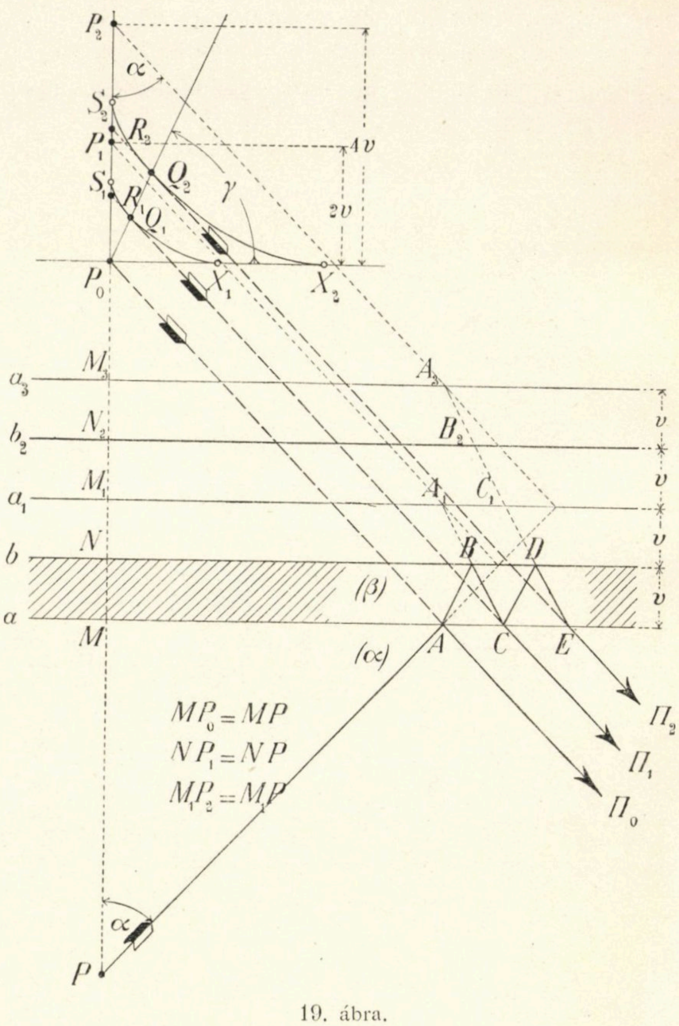
A kép helye, Q_1, csak akkor fekszik a z tengelyben, a normális fénysugár megnyujtásában és γ_1 csak akkor egyenlő $\frac{1}{2}\pi$-vel, a midőn, $\alpha = 0$ lévén, Q_1 R_1-gyel együtt a diakausztikai vonal S_1 csúcspontjába, a főgyújtópontba esik.

Vizsgáljuk most azt a mellékképet, a mit az α szög alatt világító sugárkéve azután alkot, miután a tükör belsejében a b lapon nem egy, hanem két tükrözést szenvedett (19. ábra). $PABCDE\Pi_2$ a középsugár útja, Π_2 a szem új helye.

Ha újból megszerkesztjük mindannak a tükörképét, a mit a b lap az a lapon benéző szembe visszatükröztet, először is nyerjük magának az üveglemeznek $b\,a_1$ tükörképét és abban CD képét, DC_1-et, ED-vel egy vonalban; azután a_1 mögött ismét a lemeznek az a lapon való tükrözésből származó $a_1\,b_2$ képét és abban BC képét, $C_1\,B_2$-t, EDC_1-gyel egy vonalban; végül pedig b_2 mögött újból a lemez képét, $b_2\,a_3$-at, és AB képét, $B_2\,A_3$-at, $EDC_1\,B_2$-vel egy vonalban és a_3 mögött PA-nak a kilépő $E\,\Pi_2$-vel párvonalas képét, $A_3\,P_2$-t. P_2 P-nek a_1-re vonatkozólag szimmetrikus pontja.

A Π_2-ben lévő szem P képét Q_2-ben látja, a kilépő sugár megnyujtásában ugyanottan, a hol látná, ha a_1-ben az üvegtükör szabad lapja mögött $2v$ távolságban egyszerű síktükör volna és az attól alkotott P_2 képet egy a tükörrel párvonalas $4v$ vastagságú üveglemezen át nézné.

Könnyű belátni, hogy a tétel nemcsak Q_1-re és Q_2-re, hanem átalánosságban arra a Q_n képre is áll, a melyet az adott hajlású sugárkéve azután alkot, miután az üvegtükör belsejében az ezüstözött lapon n tükrözést szenvedett. A kilépő sugár hosszában valahol Π_n-ben lévő szem ugyanott látja Q_n-et, a hol látná, ha az üvegtükör helyett, annak szabad lapja mögött nv távolságban egyszerű síktükör állana és az attól alkotott P_n képet egy a tükörrel párvonalas $2nv$ vastagságú üveglemezen keresztül figyelné. Ebből az átalánosításból az a Q_0 kép sincsen kizárva, melyet a sugárkéve, illetőleg a sugár-



19. ábra.

kévének az a része alkot, a mely az üvegtükör belsejébe be sem hatolva, mindjárt a szabad lapon tükröződik vissza; ez esetben ugyanis $n = 0$. Ez a Q_0 kép az egyedüli aplanatikus kép és összeesik az ábrákban P_0-val jelölt ponttal.

Ha megtartjuk ugyanazt a koordináta-rendszert, melyet a főkép tárgyalásánál választottunk, lesz

$$z_n = 2nv\mu_{\beta\alpha}\left(1 - \frac{1-\mu^2_{\beta\alpha}}{\mu^2_{\beta\alpha}}\operatorname{tang}^2\beta\right)^{\frac{3}{2}} = 2nvZ,$$

$$x_n = 2nv\,\frac{1-\mu^2_{\beta\alpha}}{\mu^2_{\beta\alpha}}\operatorname{tang}^3\beta = 2nvX;$$

továbbá

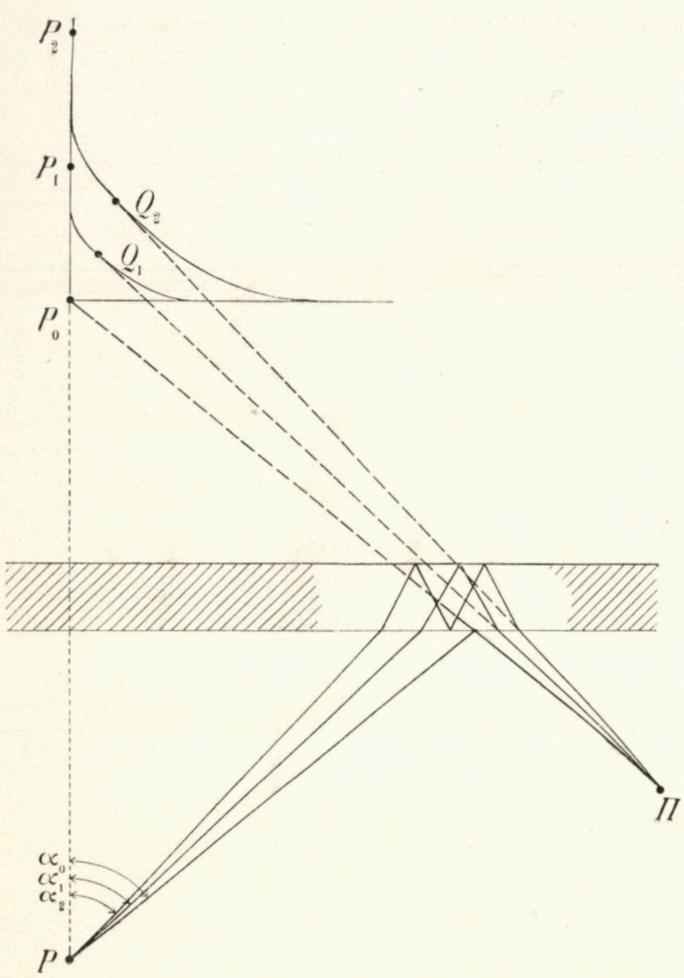
$$\operatorname{cotang}\gamma_n = \frac{X}{Z} = (1-\mu^2_{\beta\alpha})\operatorname{tang}^3\alpha$$

és

$$P_0\, R_n = r_n = 2\, n\, v \frac{\mu_{\beta\alpha}}{\sqrt{1 + (1 - \mu^2_{\beta\alpha})\, \mathrm{tang}^2\, \alpha}},$$

a hol R_n a b lapon n tükrözést szenvedett sugárkéve második gyújtópontja.

Cotang γ_n n-től független értékéből, valamint z_n és x_n n-nel aránylagosan növekedő értékeiből következik, hogy P_0, Q_1, Q_2, . . . , Q_n képek valamennyien ugyanegy radius vektoron feküsznek, egymástól egyenlő távolságokban és ez a radius vektor csak abban az egy esetben merőleges a tükörre, ha maga a világító sugárkéve is az.



20. ábra.

Az α hajlású sugárkévétől alkotott képek közül a szem természetesen egyszerre csak egyet lát: azt az egyet, a melynek kilépő sugarán a csomópontja rajta van. Üvegtükörben azonban tudvalevőleg ugyanegy Π szemállásból is több képét látjuk P világító pontnak, még pedig, legalább elméletileg, végtelen sokat; csakhogy ezek a képek többé nem ugyanegy sugárkévének több rendbeli tükrözéseiből származnak, hanem különböző hajlású sugárkévéknek különböző rendbeli tükrözéseiből. Ezeket látjuk a 20. ábrában. A képeket úgy jelöltük, mint a megelőző ábrában, habár a képek, P_0-t kivéve, többé nem ugyanazok. A képek többé nem feküsznek ugyanazon a radius vektoron, hanem ott vannak, a hol a különböző rendű tükrözéseknek megfelelő diakausztikai vonalakhoz Π-ből vont érintők a vonalakat érintik.

Ha a világító pont a végtelenbe távozik, a világító sugarak mind párvonalasokká válnak, a kilépő sugárkévék pedig mind egybe olvadnak és a szem egyetlenegy képet lát.

18. A megelőző pont értelmében mind a főképnél, mind a mellékképeknél az üveg síktükör hatása egy párvonalas egyszerű síktükör katoptrikai hatásának és egy párvonalas plánparallel üveglemez dioptrikai hatásának eredője. A kilépő sugarak iránya kizárólag az elsőtől függ; a második ugyanis az elsőtől adott irányokat nem változtatja meg, mert csak a sugarak irányvonalait tolja párvonalasan odébb.

Ha tehát prizmatikus tükörrendszert nem egyszerű tükrökből, hanem üvegtükrökből állítunk össze, mindazokat a tulajdonságokat, a melyeket a prizmatikus rendszer a 11. pont értelmében, egyszerű síktükrök alkalmazása mellett a sugaraknak, illetőleg azok projekcióinak irányára vonatkozólag birt, üvegtükrök alkalmazása mellett is megtartja és szögmérésekre, illetőleg kitűzésekre azonos módon használható.

A föllépő dioptrikai hatásnak, illetőleg az avval járó sugáreltolásnak az az egyedüli következménye, hogy az M metszéspontok fekvését és meghatározását újabb ingadozásnak teszi ki.

Méréseknél és kitűzéseknél majdnem kizárólag csak a főképet használjuk, melynél a rendszer minden egyes üvegtükre hatására nézve oly egyszerű tükörrel helyettesíthető, mely az ezüstözött lap helyét foglalja el és oly párvonalas lemezzel, melynek vastagsága kétszer akkora mint az üvegtüköré. Így például ha a szögtükröt állítjuk elő üvegtükrökkel, az M metszéspont (14. ábra) a két tükörtől okozott kisméretű eltolások következtében a belépő sugár hosszában kissé oldalt mozdul el attól a helytől, a melyet rajta a dioptrikai hatás nélkül elfoglal. Ennek az elmozdulásnak a hatása azonban a tükrök aránylag vékony volta következtében, de még inkább ahhoz az ingadozáshoz viszonyítva, a mely a szögtükör használatánál a csúcspont meghatározásában amúgy is elkerülhetetlen, teljesen elhanyagolható.

De egyébképpen is nyilvánul a dioptrikai hatás. Ha ugyanis P nemcsak egy a szemmel ugyanegy normális metszetben fekvő pont, hanem közös projekciója mindazoknak a pontoknak, melyek valamely a normális metszetre merőleges egyenes (a pontjelző rúd tengelye) hosszában feküsznek, akkor, adott Π pontról nézve, az az M metszéspont, a melyet a szemmel egy normális metszetben fekvő P pont szolgáltat, nem egyezik többé meg azokkal a többi metszéspontokkal, a melyeket az egyenes többi pontjai adnak. Ennek okát abban az eltorzulásban találjuk, melyet a planparallel lemezek a 7. pont értelmében az egyenes képében okoznak.

Ennek az eltorzulásnak a következtében ugyanis az egyenes képének különböző pontjaiból eredő fénysugarak projekciói nem esnek többé egybe és így a megfelelő M pontok sem. Minthogy azonban ez M pontok mindenikében a megfelelő sugarak projekciói mégis ugyanazon szög alatt metszik egymást, a P egyenes különböző pontjainak megfelelő M pontok valamennyien rajta feküsznek azon a körön, a mely H és P pontokon halad keresztül. Ebből a kitűzendő szög csúcspontjának meghatározásában újabb ingadozás származik, de csak olyan, a mely az előbb említettel együtt és hasonló okokból a szögkitűzés gyakorlatában bizvást elhanyagolható.

A dioptrikai hatás következménye az is, hogy a páros számú tükrözésekből származó képek többé nem nevezhetők el szigorúan álló képeknek, mert a szögtükörnek éle körül forgatása közben a sugarak beesésszögei megváltoznak, minek tudvalevően a képek helyére is van hatása.

Az üvegtükör optikai hatásának két alkotója közül a katoptrikai aplanatikus, a dioptrikai ellenben asztigmatikus, tehát képrontó is. Valahányszor tehát pontosabb és kényesebb mérésekre szolgáló műszerek valamely alkotórészéül fémtükör helyett üvegtükröt használunk, ne mulaszszuk el megvizsgálni, vajjon mi a hatása ennek az asztigmatikus alkotónak a műszer optikájára, mennyire módositja például annak objektiv vagy okuláris optikai hatását?

Ugyanerre kell ügyelnünk, ha planparallel lemezeket alkalmazunk. (Befejezzük.)

A köztemető-vasút áthidalása a magyar államvasútak ruttkai vonala alatt.

Borosjenői **Kádár Gusztáv**tól.

Hazánk vasúti hálózatának fővonalait nagy részben késznek mondhatjuk és így a vasútépítés terén új korszakba lépünk, melynek főfeladata a meglévő vonalak fejlesztése lesz; ennek megfelelően a vasútépítő-mérnökök munkaköre is változni fog. Eddig a vasútépítő-mérnökök főfeladatát hosszú vonalak legcélszerűbb vezetése, a talajviszonyokban rejlő akadályoknak lehető kikerülése, a helyi viszonyoknak megfelelő műtárgyak tervezése, továbbá a megépítéskor az ismeretlen talajviszonyok felkutatása, az azokhoz való alkalmazkodás, vagy azokkal való küzdés, az építő anyagok beszerzése és szállítása körül felmerülő nehézségek leküzdése stb. képezték, ezután már a meglévő vasútak növekedő forgalmát kielégítő, illetőleg fokozó bővítések, összeköttetések és berendezések helyes megválasztása, a meglévő keretbe való sikeres beillesztése, az adott körülményeknek a legapróbb részletekig való figyelembe vétele, a munka végrehajtásakor pedig a forgalom biztosságának és folytonosságának fenntartása lépnek előtérbe.

Igaz, hogy sok tekintetben könnyebb a meglévő pálya bővítése, mint annak megépítése volt; mert a vonal vezetésének kérdése, az anyagok szállítása körül fölmerülő nehézségek és sok más gyakorta nagy gondot okozó feladat itt egyszerűen megszünik; de ezek helyett a forgalom folytonosságának és biztosságának fenntartása teszi próbára a mérnök képzettségét, találékonyságát és gyakorlati képességét. A legnehezebb feladatok e téren természetesen a meglévő műtárgyak megnyujtása, bővítése, avagy a meglévő pályatestben új műtárgyak építése körül fordulnak elő, s azt hiszem, nem lesz érdektelen ily műtárgy építésének részletes ismertetése.

Közlönyünk folyó évi első füzetében (12—19. oldal) *Szerdahelyi Ágoston* szaktársunk igen érdekesen irta le a főváros legújabb vasútját, az új köztemetőbe vezető vasútat, s megemlítette, hogy ez a vasút a magyar államvasútak vonalait három izben keresztezi, egyszer mindjárt a kerepesiúti temető mögött, a hol fölötte megy el a magyar államvasútnak, másodszor és harmadszor pedig Kőbánya állomás előtt; ezen a tájon van a temetővasútnak legérdekesebb szakasza, mert alig, hogy erős emelkedéssel átjut a talajszínben fekvő budapest—orsovai vonal (volt szab. osztrák-magyar államvasút) vágányai fölött épített hidon, már ismét éles ellenívekkel és erős eséssel fordul meg a M. Á. V. vágányai által képezett deltában, hogy az orsovai vonal szomszédságában a M. Á. V. ruttkai vonalának vágányai alatt átbújva Kőbányára juthasson. Nem célom e helyen vitatni, hogy a vonalnak ily módon való vezetése megokolt-e vagy sem, annyi azonban bizonyos, hogy keresve is alig lehetett volna a főváros környékén több nehézséget találni egy csomóban, mint a mennyivel itt találkozunk.

Az említett vonalkereszteződések közül a két elsőnél a temetővasút felül menvén, az áthidalások építése kevesebb nehézséggel járt, míg a harmadik esetben a M. Á. V. legnagyobb forgalmú négy vágánya alatt lévő töltésben kellett a temetővasút részére aluljárót építeni a forgalom biztosságának és folytonosságának fenntartása mellett; e két föltételnek betartása e műtárgyat a temetővasút legnehezebb pontjává avatta; ennek a műtárgynak megépítését ismertetem a következőkben.

A mint az 1. ábrabeli helyzetrajz láttatja, a M. Á. V. ruttkai vonalán fekvő Kőbánya állomás előtt négy vágány fut egymás mellé, ú. m.: a budapest—ruttkai személyforgalomra szolgáló két vágány, továbbá a józsefvárosi teherpályaudvarról meg a ferencvárosi pályaudvarról jövő tehervágányok; a mint ezek egymás mellé jönnek a Ligettelki-út fölött épített hidra jutnak, e hidtól alig 10 *m*-nyire az orsovai vonal már itt állomást képező négy vágánya fölött épített kétnyilású híd következik, a temetővasút nyomát pedig úgy vezették, hogy az, ennek a kétnyilású hídnak, a megépítendő harmadik nyilása alatt búvik át a M. Á. V. vágányai alatt.

A M. Á. V. vágányai magas töltésen feküdvén, a nyilt tér és szerkezeti magasság néhézséget nem okozott, s így a feladat következőképpen körvonalozható: az