EREDETI DOLGOZATOK.

Az elsőrendű háromszögelési szögmérésekről.

Irta ifj. BODOLA LAJOS.*)

Egy egész országot sűrűn behálózó háromszögelésnél a kiegyenlítendő mérések és a kielégítendő föltételek száma oly nagy, hogy az egész hálózatot minden részében összefüggő egésznek tekinteni és mint olyat kiegyenlíteni, rendkivül fáradságos, és bármilyen kiegyenlítő rendszer mellett is szinte megoldhatatlan föladat. Ezért szokás a legnagyobb kiterjedésű, úgynevezett elsőrendű háromszögek hálózatát a többitől függetlenül egymagában kiegyenlíteni, hogy a kisebb háromszögek majdan hozzájuk csatolandó vagy közzéjük illesztendő másod-, harmad- és negyedrendű hálózatai számára mintegy változatlan alapul szolgáljanak.

Sőt az elsőrendű hálózatok is nagyobb országoknál oly nagy kiterjedésűek, hogy már azért is, hogy ne kelljen a részletes munkálatokkal az egész fölvétel és kiegyenlítés befejeztéig várni, szükségessé válik azokat is egyes elkülönített részekben kiegyenlíteni.

Minden ilyen esetben a már végrehajtott kiegyenlítések végeredményei minden további számításnál változatlanul megtartandók, mi által természe-

*) Midőn mult év tavaszán a m. kir. József-műegyetemnek reám nézve rendkivül megtisztelő javaslatára, ő Excellentiája a vallás- és közoktatásügyi miniszter úr engemet, a felső geodaesia terén teendő beható tanulmányok céljából államköltségen külföldre kiküldeni kegyeskedett, abban a kiváló szerencsében részesültem, hogy a Berlinben székelő porosz geodaesiai intézet vezetése alatt az idő tájt Berlin, Zossen, Kiel, Königsberg és Goldap városok közelében végzett geodaesiai mérésekben és astronomiai megfigyelésekben, nemkülönben a téli hónapokban az intézetben folytatott számító munkálatokban, hét hónapi szabadságom lejártáig szakadatlanul részt vehettem.

A fent nevezett intézet nagyhírű igazgatójának, Helmert tanár úrnak, és többi tudós tagjának köszönhetem, hogy a felső geodaesia minden fontosabb kérdésében részletes tanulmányokat tehettem. E tanulmányaim egyik, úgy gondolom, nem érdektelen tárgya az, melyről szerencsém van jelen cikkben értekezni; reménylem, hogy lesz később alkalmam más, hitem szerint minden geodaetát egyaránt érdeklő tárgyakról is értekezni.

tesen minden utólagosan csatlakozó hálózat-részre egy bizonyos kényszer származik át. E kényszernek azonban, minden olyan esetben, midőn a közös csatlakozási pontok képezte geometriai ábrát az új hálózat kevésbbé pontosan határozza meg mint a már kiegyenlített, alig van káros hatása.

Az elsőrendű hálózat tehát mintegy vázát képezi az egész országos háromszögelésnek, melynek sikere teljesen annak helyes foganatosításától függ.

A célszerűen tervezett általános elrendezéstől, a bázis-mérésektől stb. eltekintve, a háromszögelő hálózat fölvételével célzott geometriai meghatározás pontossága lényegesen a szögek mérésének az egyes állomásokon elért pontosságától függ.

Erre vonatkozólag, elsőrendű háromszögeléseknél, két fő és ellentétes mérő mód különböztetendő meg. Az egyik szerint minden mérési sorozatba az állomáson meghatározandó irányok közül minél többet (lehetőleg mindegyiket) törekszünk fölvenni; mig ellenben a másik szerint mindig csak kettőre, tehát a legkisebb számra szorítkozunk. Az első mód az iránymérés, a második a szögmérés. Amaz Struve-tól*) származik, és Bessel ideje óta, ki klaszikus kelet-poroszországi fokmérésénél alkalmazta,**) a felső geodaesiai praxisban majdnem kizárólag követtetett; emez pedig lényegére nézve Gauss-tól ered, ki azt hannoverai fokmérésénél használta.***) A szögmérésnek ugyanis a végrehajtás szempontjából két módozatát kell megkülönböztetni: az egyik a Gauss használta ismétlő szögmérés; a másik a mostani műszereknél elért nagy leolvasási pontosságnak inkább megfelelő egyszerű szögmérés. Fennebb szögmérés alatt ez utóbbit értettük és ezután is mindig ezt fogjuk érteni.

Az első, ki a geodaesiai irodalomban, a mintegy 40 évig kizárólag követett gyakorlat ellenére, elsőrendű hálózatoknál az egyszerű szögmérésnek az iránymérés fölött az elsőséget föltétlenül oda ítélte, Helmert volt. (Zeitschrift für Vermessungswesen: VI. kötet, 1877, 610 lap.)

Az érdem azonban, hogy e mérő mód a gyakorlatban méltó helyet vívhatott ki magának, Schreiber ezredest, a porosz országos háromszögelés fővezetőjét illeti. Már 1871 óta ugyanis Poroszországban az ő vezetése alatt történt valamennyi elsőrendű trigonometriai hálózat- és láncolat-fölvételnél kizárólag egyszerű szögmérés alkalmaztatott.

Schreiber főérdemét azonban a szögmérésnek általa adott azon rendkivül egyszerű és szép elrendezése képezi, melynek könnyen keresztülvihető teljes symmetriája folytán, az egyes állomások kiegyenlítéséből nyert irány-

*) Astronomische Nachrichten: II. kötet, 1824, 47. és 48. sz.

**) Gradmessung in Ostpreussen; Berlin 1838; 67 lap.

***) Supplementum theoriae combinationis etc. 1826. Börsch és Simon német fordításában: „Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, von Carl Friedrich Gauss": Berlin, 1887; 85 lap.

értékek, mint egyetlenegy, nagy pontossággal mért teljes forduló*) eredményei tekinthetők, és így a rendszer kiegyenlítésébe is mint egyenlő súlyú, egymástól független és közvetetlenül meghatározott értékek bevezethetők. Ez által a rendszer kiegyenlítése is nagyon egyszerűvé válik és fölveszi azt az alakot, melyet Gauss az ő hannoverai fokmérésénél alkalmazott, habár az általa követett szögmérési elrendezés részletei, melyek ezen eredményre vezettek, még nem teljesen ismeretesek.

Schreiber szögmérő módjának az iránymetéréssel ezen értekezés végén történendő összehasonlításából az is ki fog tűnni, hogy az iránymérés mellett fölhozható azon egyedüli előny is, mely szerint az kevesebb irányzást és így rövidebb időt is kiván mint a szögmérés, az egyenlő idők alatt, hasonló körülmények közt elérhető pontosság mértékéhez viszonyítva, teljesen illusorius előny.

A mint az eddigiekből kivehető, jelen soraink fő célja a Schreiber-féle szögmérő-rendszer ismertetése, a miben leginkább azon két értekezés lesz segítségünkre, melyet Schreiber a „Zeitschrift für Vermessungswesen“ című folyóirat VII. és VIII. kötetében tett közzé. Ezek közül az első (VII. kötet, 1878; 4. füzet): „Ueber die Anordnung von Horizontalwinkel-Beobachtungen auf der Station“, a második pedig (VIII. kötet, 1879; 3. füzet): „Richtungsbeobachtungen und Winkelbeobachtungen“ cím alatt jelent meg.

Az állomás-kiegyenlítésnek a legkisebb négyzetek elmélete alapján való tárgyalásában azonban a Schreiberétől kissé eltérő utat fogunk követni. Az elérendő eredmény mindenesetre ugyanaz marad; annak megítélését pedig, hogy ezen utat követve, mennyivel jobban jártunk el a mondott elmélet szellemében, az olvasóra bizzuk. Az idézett két értekezésről csak annyit jegyzünk meg, hogy azok minden geodaetára nézve egyaránt érdekes és tanulságos olvasmányt képeznek.

Ezeket előre bocsátva, térjünk most át közvetetlenül a szögmérés azon gyakorlati elrendezésének leirására, melyet Schreiber elsőrendű állomások fölvételénél alkalmaz.

Ha egy állomáson a meghatározandó irányok száma ν, és mindegyik szög, melyet ezen irányok egymás közt képeznek (ν irány összesen $\frac{1}{2}\nu\,(\nu-1)$

* Bessel elnevezése módjának megfelelően, az egy állomásból kiágazó két vagy több irány összefüggő egymásutánban történt egyszeri megfigyelését: észlelési vagy mérési sorozatnak (Beobachtungsreihe) nevezzük. Két, egymásra következő sorozat: oda és vissza: olyan, hogy az egyik, a beirányzott tárgyak sorrendjét illetőleg, a másiknak megfordítottja, egy fordulót (Satz, Gyrus) képez és elválaszthatatlanul együtt jár. Egy sorozatot vagy fordulót akkor mondunk teljesnek, ha benne mindegyik, az állomáson meghatározandó irány egymásutáni sorrendben előfordul.

A szögmérésnél a sorozatban csak két irány vétetik föl, péld.: A, B; a fordulóban pedig e két irány a következő sorrendben fordul elő: A, B, B, A.

egymástól különböző szöget képez), külön-külön $2p$-szer méretik meg, még pedig úgy, hogy az irányoknak minden kettős combinátiója számára $2p$ sorozat p fordulóban méretik meg; ha továbbá a súlyok egységeül az egy fordulóba tartozó két szögmérés számtani közepének, az ú. n. forduló-középértéknek súlyát választjuk, akkor minden irányérték a kiegyenlítés után $p\nu$ súlylyal fog birni, a mit a később levezetendő kiegyenlítő egyenletek igazolni fognak.

Ha tehát azt akarjuk, hogy egy hálózat összes állomásain a kiegyenlített irányok valamennyien P közös súlylyal birjanak, az egyes állomásokon minden szög számára megmérendő fordulók számát, p-t, akként nyerjük meg, hogy P-t az illető állomások irányszámával, ν-vel, osztjuk.

Ennek értelmében, ha, úgy mint Schreiber, azt akarjuk, hogy valamennyi kiegyenlített irányérték pontosan vagy legalább is igen megközelítőleg $P = 24$ súlylyal birjon, akkor:

$\nu =$ 2	3	4	5	6	7	8 irány esetén,	
$p =$ 12	8	6	5	4	4	3-nak választandó, azaz	

minden egyes szög:

$2p =$ 24	16	12	10	8	8	6-szor megmérendő. E

mellett lesz az egyes állomásokon elért súly:

$P = p\nu =$ 24	24	24	25	24	28	24.

A $\frac{P}{\nu}$ osztások végrehajtásánál a p quotiensek, valahányszor nem egész számok, a legközelebbi nagyobb egész számra egészíttetnek ki. Az ennek folytán keletkező csekély súlyeltérések a rendszer kiegyenlítésénél számításba vehetők, vagy egyszerűen elhanyagolhatók.

A mérés tényleg úgy történik, hogy minden szög p egymástól $\frac{180}{p}$ fokra eső limbus-állásban méretik meg (mindegyik állásban tehát egy forduló, úgymint: A, B, B, A; vagyis az illető szög kétszer: egyszer o d a, egyszer v i s s z a).

Minden oly szög számára, melynek egy másik szöggel egy közös iránya van, a p limbus-állását a beosztás egy másik pontjától kezdve kell számítani, hogy ez által a közös irányokat tartalmazó fordulók mind különböző állásokban méressenek meg. E végett szükséges egyikét a p intervallumnak, melyet kezdő intervallumnak akarunk nevezni, még annyi részre osztani, a mennyi szükséges arra, hogy elegendő számú kezdő pontot nyerjünk a fent kikötött föltételnek mind a $\frac{1}{2}\nu(\nu - 1)$ szögnél való kielégítésére. E mellett törekedni kell a szükséges minimumra szorítkozni, hogy minden fölösleges limbusforgatást elkerülhessünk. E szükséges minimum páratlan ν esetén maga a ν szám, párosnál pedig $(\nu - 1)$.

Hogy melyik szögnek melyik kezdő állás jusson, azt schematikuson a következő két mintában találjuk meg, melyeknek elseje minden páratlan, másika pedig minden páros ν-re szolgál:

5 irány: $\nu = 5$.

	2	3	4	5
1	I	II	III	IV
2		III	IV	V
3			V	I
4				II

6 irány: $\nu = 6$.

	2	3	4	5	6
1	I	II	III	IV	V
2		III	IV	V	II
3			V	I	IV
4				II	I
5					III

Ezekben 1, 2, 3, . . . az irányokat; I, II, III, . . . a ν illetőleg (ν—1) kezdő állást jelentik. Ez utóbbiak minden vízszintes és függőleges sorban egymásutáni sorrendben következnek; csak a második minta utolsó függőleges sora képez ez alól kivételt, a mennyiben ott egy hely a sorrendben mindig átugratik. Egy adott szögnek, pl. 2 . 3-nak p limbus-állásaira a kezdő állást mindkét mintában ott találjuk meg, a hol a 2-es vízszintes sor a 3-as függőlegest átmetszi: mindkét mintánál tehát a III.

A mérések akadálytalan és gyors végzésének elősegítésére, a limbuskör, mely a függőleges tengely körül forgatható, a rendes beosztáson kivül, sárgaréz szélén még egy másik, szabad szemmel könnyen leolvasható segédbeosztással is bir, mely minden fokot 4 részre oszt. E beosztással és egy álló index segítségével, mialatt az észlelő még az új tárgy beirányzásával van elfoglalva, a segéd (és erre alig egy pár másodperc szükséges) megadja a limbusnak a műszer mellett tartott schemáról hamarjában leolvasott új állást. Az egész művelet a mérésben semmi fennakadást nem okoz.

Megemlítendő még, hogy a p forduló fele része az egyik, A, másik fele része pedig a másik, B, látócső-állásban mérendő meg. Ha a fordulók száma páratlan, akkor minden szögnél a középső forduló egyik szögmérése A, másik szögmérése pedig B látócső-állásban végzendő; e két szögmérés között tehát a látócsövet át kell hajtani.*)

$\nu = 2, 3, 4, 5$ irány esetén péld. a közlött schemák alapján, a limbus- és látócső-állások szerinti elrendezés, a p forduló mindegyikére kiterjesztve, a következő:

2 irány: $\nu = 2$, $p = 12$.

Szög:	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B
1.2	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°

*) Áthajtás, vagy ha a műszer magassága azt közvetetlenül meg nem engedi kiemelés és áthajtás mindegyik szög $2p$ mérése folyamán csak egyszer történik.

3 irány: $\nu = 3$, $p = 8$.

Szög:	*A*	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*	*B*
1.2	0	$22\frac{1}{2}$	45	$67\frac{1}{2}$	90	$112\frac{1}{2}$	135	$157\frac{1}{2}$
1.3	$7\frac{1}{2}$	30	$52\frac{1}{2}$	75	$97\frac{1}{2}$	120	$142\frac{1}{2}$	165
2.3	15	$37\frac{1}{2}$	60	$82\frac{1}{2}$	105	$127\frac{1}{2}$	150	$172\frac{1}{2}$

4 irány: $\nu = 4$, $p = 6$.

Szög:	*A*	*A*	*A*	*B*	*B*	*B*
1.2	0	30	60	90	120	150
1.3	10	40	70	100	130	160
1.4	20	50	80	110	140	170
2.3	20	50	80	110	140	170
2.4	10	40	70	100	130	160
3.4	0	30	60	90	120	150

5 irány: $\nu = 5$, $p = 5$.

Szög:	*A*	*A*	*A. B*	*B*	*B*
1.2	0	36	72	108	144
1.3	$7\frac{1}{4}$	$43\frac{1}{4}$	$79\frac{1}{4}$	$115\frac{1}{4}$	$151\frac{1}{4}$
1.4	$14\frac{3}{8}$	$50\frac{3}{8}$	$86\frac{3}{8}$	$122\frac{3}{8}$	$158\frac{3}{8}$
1.5	$21\frac{5}{8}$	$57\frac{5}{8}$	$93\frac{5}{8}$	$129\frac{5}{8}$	$165\frac{5}{8}$
2.3	$14\frac{3}{8}$	$50\frac{3}{8}$	$86\frac{3}{8}$	$122\frac{3}{8}$	$158\frac{3}{8}$
2.4	$21\frac{5}{8}$	$57\frac{5}{8}$	$93\frac{5}{8}$	$129\frac{5}{8}$	$165\frac{5}{8}$
2.5	$28\frac{3}{4}$	$64\frac{3}{4}$	$100\frac{3}{4}$	$136\frac{3}{4}$	$172\frac{3}{4}$
3.4	$28\frac{3}{4}$	$64\frac{3}{4}$	$100\frac{3}{4}$	$136\frac{3}{4}$	$172\frac{3}{4}$
3.5	0	36	72	108	144
4.5	$7\frac{1}{4}$	$43\frac{1}{4}$	$79\frac{1}{4}$	$115\frac{1}{4}$	$151\frac{1}{4}$

Ez utóbbi schemában a limbus-állások nyolcadrész fokokra egészíttettek ki, mert a negyedfokokat közvetetlenül mutató segédbeosztás fél osztályrészeket még igen könnyen enged beállítani.

Egy már kiegyenlített háromszög-láncolathoz való csatlakozásnál, midőn a csatlakozó állomásokon minden új meghatározandó irány két régi, már kiegyenlített iránynyal kötendő össze, még pedig ugyanannyiszor az egyikkel mint a másikkal, a két kapcsolati irány, a mérések elrendezését illetőleg, egyetlenegy iránynak tekintendő. Legyenek péld! 1 és 2 a kapcsolati irányok, 3, 4 és 5 pedig az új csatlakozó irányok; a szögmérés elrendezése a következő lesz:

Szög:	A	A	$A.B$	$A.B$	B	B
1.3	0	—	60	—	120	—
2.3	—	30	—	90	—	150
1.4	10	—	70	—	130	—
2.4	—	40	—	100	—	160
1.5	20	—	80	—	140	—
2.5	—	50	—	110	—	170
	A	A	A	B	B	B
3.4	20	50	80	110	140	170
3.5	10	40	70	100	130	160
4.5	0	30	60	90	120	150

éppen úgy mint $\nu = 4$-nél.

Az elrendezés, mely a közölt schemákban érvényesül, a következő tulajdonságokkal bir:

1. Mindig programmszerűen végrehajtható, mi a Schreiber vezetése alatt végzett igen számos mérésnél állandóan bebizonyult.

2. Minden kiegyenlített szögérték pontosan, vagy igen megközelítően egyenlő súlyt nyer (nevezetesen pedig 12-őt, vagyis a kiegyenlített irányértékek súlyának felét).

3. Az egy és ugyanazon limbus-állásban mért fordulók sohasem tartalmaznak közös irányokat. Igy példl. $\nu = 4$ irány esetén a 0^0 kezdő limbusállásban (és természetesen a többi $p = 6$, ettől $\frac{180^0}{p} = 30^0$-nyi intervallumokban következő állásban is), csak az 1.2 és 3.4 szögekhez tartozó fordulók méretnek meg, melyeknek nincsen közös irányuk. Ennek folytán, minthogy egy szögnek az ugyanazon limbus-állásban végzett két rendbeli mérése közös beosztási hibával bir, az egyes szögmérések hibái nem tekinthetők többé csupán e s e t l e g e s hibáknak, és az egyes szögmérések ered-

ményei a kiegyenlítő számításba mint független adatok be nem vihetők; az egyes forduló középértékek azonban többé semmi közös állandó hibával nem lesznek terhelve, és így a legkisebb négyzetek módszerével mint független meghatározások tárgyalhatók. Ellenben, ha péld. ettől eltérőleg, a 2.3 és 2.4 szögek ugyanazon limbus-állásban mérettek volna meg, akkor a megfelelő forduló középértékek is egy közös beosztási hibát tartalmaznának, azt t. i., mely e limbus-állásban a 2-es irány leolvasásának felel meg.

4. A különböző limbus-állások, melyekben ugyanazon szög méretik meg, a félkört egyenlő részekre osztják.

5. Ép úgy mint minden más, az irányokra nézve symmetriás elrendezésnél, ennél is az állomás kiegyenlítéséből nyert irányértékek a rendszer kiegyenlítésébe mint egymástól független meghatározások vezethetők be, a mit maga az állomás kiegyenlítése, melynek levezetésére most térünk át, közvetetlenül ki fog mutatni.

Jelöljük, úgy mint eddig, az egy állomáson meghatározandó irányokat 1, 2, 3, 4, . . . folyó számokkal, a megfelelő irányértékeket pedig A, B, C, D, . . . betükkel. Legyen az irányok száma ν, és legyen minden szög, melyet azok egymás közt bezárnak az előadott módon $2p$-szer megmérve; akkor az egyes szög-középértékek maradékhibái (szög-középérték alatt értve az illető szögnek megfelelő $2p$ mérésnek vagy p forduló-középértéknek számtani közepét) a következők lesznek:

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
v_{1.2} = -\dfrac{[1.2]}{2p} - A + B & & & \\
v_{1.3} = -\dfrac{[1.3]}{2p} - A + C & v_{2.3} = -\dfrac{[2.3]}{2p} - B + C & & \\
v_{1.4} = -\dfrac{[1.4]}{2p} - A + D & v_{2.4} = -\dfrac{[2.4]}{2p} - B + D & v_{3.4} = -\dfrac{[3.4]}{2p} - C + D & \\
\text{stb.} & \text{stb.} & \text{stb.} & \text{stb.}
\end{array}
\qquad (1)
$$

hol [1.2], [1.3] stb. a szokásos symbolumos jelölésben az 1.2, 1.3 stb. szögeknek $2p$ mérésbeli eredményének összegét jelentik.

A p forduló-középértékből alkotott szög-középérték súlyát egyszermindenkorra p-nek véve,*) a most felirt hiba-

*) Ennek megfelelően: súlyegységül egy forduló-középérték súlyát kell vennünk. A súlyegység e fölvétele azonban csak addig helyes, míg az egyes fordulók mentek maradnak oly hibáktól, melyek a szög-középértékben eltűnnek ugyan, de az egyes fordulókban állandó jelleggel lépnek föl. Ilyen hibák péld. a szabályszerű beosztási hibák, valahányszor előjelük változása a limbus-állásokkal véletlenül összefügg, midőn ugyanis azok az egyes fordulókban esetleges hibáknak többé nem tekinthetők. Ilyenek továbbá a látócső collimátiohibája és forgási síkjának a műszer függőleges tengelyéhez hajlott voltából származó hibák, valahányszor az egyes irányok igen különböző magassági szöggel birnak. Ez utóbbi hibák ugyanis, mivel az előadott elrendezés mellett a p forduló fele része az egyik, másik fele része pedig a másik látó-

egyenletek mindegyike szintén p súlyt fog nyerni, és a normális egyenletek a következő alakot veszik föl:

$$\begin{aligned}
(an) &= p(\nu-1)A - pB - pC - pD - \ldots \\
(bn) &= -pA + p(\nu-1)B - pC - pD - \ldots \\
(cn) &= -pA - pB + p(\nu-1)C - pD - \ldots \\
(dn) &= -pA - pB - pC + p(\nu-1)D - \ldots \\
&\text{stb.}
\end{aligned} \tag{2}$$

hol az (an), (bn) stb. baloldali absolut tagok a következő értékekkel birnak:

$$\begin{aligned}
2(an) &= -[1.2] - [1.3] - [1.4] - \ldots \\
2(bn) &= +[1.2] - [2.3] - [2.4] - \ldots \\
2(cn) &= +[1.3] + [2.3] - [3.4] - \ldots \\
2(dn) &= +[1.4] + [2.4] + [3.4] - \ldots \\
&\text{stb.}
\end{aligned} \tag{3}$$

mely kifejezések a következő, 4 irány esetére összeállított, de tetszőleges számú irányra könnyen kiterjeszthető schema segítségével képezhetők:

1	2	3	4	Összeg
	[1.2]	[1.3]	[1.4]	σ_1
		[2.3]	[2.4]	σ_2
			[3.4]	σ_3
Összeg	s_2	s_3	s_4	
$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	$-\sigma_3$		
$2(an)$	$2(bn)$	$2(cn)$	$2(dn)$	

(4)

melyben: s_2, s_3, s_4, illetőleg: σ_1, σ_2, σ_3 a függőleges, illetőleg vízszintes irányban képezett összegeket jelentik; s_1 és σ_ν pedig állandóan zérusok.

cső-állásban méretik meg, az egyes fordulókba tartozó két mérés azonban közös látócső-állásban történik, a forduló-középértékeket mint állandó hibák fogják terhelni, de a szög-középértékből teljesen kiesnek. A beosztási hibáknak úgy lehet elejét venni, hogy az egyes leolvasások az igen gondos külön mérésekkel meghatározott szabályszerű hibáktól megszabadíttatnak; az utóbbiaknak pedig az által, hogy a műszert hegyvidéki méréseknél kettőzött gonddal rectificáljuk.

Teljesen hamis volna a súlyegység fennebbi meghatározása az esetben, ha az egyes fordulók oly hibákkal birnának, melyek a szög-középértékben egyáltalában le nem rontják egymást, vagy pedig sokkal csekélyebb mértékben, mint esetleges természetű hibáktól várni lehet. Ilyen hibák volnának péld. a beosztási hibák az esetben, ha az egy szöghöz tartozó fordulók nem mind különböző limbus-állásokban mérettek volna meg.

Az $(a\,n)$, $(b\,n)$ stb. mennyiségek között a következő összefüggés létezik:

$$\Sigma = (a\,n) + (b\,n) + (c\,n) + (d\,n) + \ldots = 0 \tag{5}$$

melynek érvényes volta a (3) alattiakból egyszerű összegezés által könnyen kitűnik. A normális egyenletek bal oldalainak összege tehát zérus. Ugyanez áll a jobb oldalok összegéről is, még pedig A, B, C. . .-től függetlenül, miről szintén közvetetlen összegezéssel győződhetünk meg. A normális egyenletek összege tehát azonosan eltűnik. Ennek okát már előre is fölismerhettük volna abban a körülményben, hogy minden hibaegyenletben az ismeretlenek együtthatóinak összege zérus.

A normális egyenletek rendszere tehát nem független rendszer; az egyenletek közt fennálló kapcsolat pedig legegyszerűbb alakjában úgy tűnik föl, ha a normális egyenletekből a reducált normális egyenleteket vezetjük le:

$$A - \frac{1}{\nu-1}B - \frac{1}{\nu-1}C - \frac{1}{\nu-1}D - \ldots - \frac{1}{\nu-1}N = \frac{(a\,n)\,\nu}{p\nu(\nu-1)}$$

$$B - \frac{1}{\nu-2}C - \frac{1}{\nu-2}D - \ldots - \frac{1}{\nu-2}N = \frac{(an)+(bn)(\nu-1)}{p\,\nu\,(\nu-2)}$$

$$C - \frac{1}{\nu-3}D - \ldots - \frac{1}{\nu-3}N = \frac{(an)+(bn)+(cn)(\nu-2)}{p\,\nu\,(\nu-3)}$$

$$D - \ldots - \frac{1}{\nu-4}N = \frac{(a\,n)+(b\,n)+(c\,n)+(d\,n)(\nu-3)}{p\,\nu\,(\nu-4)} \tag{6}$$

$$\vdots$$

$$N = \frac{\Sigma}{p\,\nu\,(\nu-\nu)} = \frac{0}{0}.$$

Azt látjuk ugyanis ezekből, hogy a normális egyenletek egy ismeretlent tényleg határozatlanul hagynak meg, a többit pedig emennek függvényében fejezik ki. Erre is előre következtethettünk volna; hiszen az állomáson csak szögeket, azaz iránykülönbségeket mértünk, egy irányérték tehát állandóan határozatlan marad.

Írjunk most a normális egyenletek mindegyikében előforduló: $-p\,(A+B+C+D+\ldots)\,\nu$ tagú kifejezés helyett röviden: $-p\,\nu\,x$, hol

$$x = \frac{A+B+C+D+\ldots}{\nu}; \tag{7}$$

akkor a normális egyenletek a következő alakot veszik föl:

$$\begin{aligned}(a\,n) &= p\,\nu\,A - p\,\nu\,x\\ (b\,n) &= p\,\nu\,B - p\,\nu\,x\\ (c\,n) &= p\,\nu\,C - p\,\nu\,x\\ (d\,n) &= p\,\nu\,D - p\,\nu\,x\\ &\text{stb.,}\end{aligned} \tag{8}$$

mely eredeti alakjuktól csakis egy rövidebb symbolumos jelölés által különbözik. Ennek megfelelően a (6) alatti reducált normális egyenletek a következőkbe mennek át:

$$A - x = \frac{(an)}{p\nu}$$

$$B - x = \frac{(bn)}{p\nu}$$

$$C - x = \frac{(cn)}{p\nu} \qquad (9)$$

$$D - x = \frac{(dn)}{p\nu}$$

stb.

Ezen egyszerű symbolumos jelölés bevezetésével tehát a föladat akként módosult, hogy most már a normális egyenletek mind a ν irányértéket egy $(\nu + 1)$-ik határozatlan x mennyiség függvényében fejezik ki.

Egészen hasonló egyenleteket azonban közvetetlenül is nyerhettünk volna, ha t. i. az illető állomáson szögek helyett egyetlenegy teljes (minden irányt magában foglaló) fordulót mértünk volna meg, $p\nu$ súlynak megfelelő pontossággal, és a mellett valamennyi irányt, úgy mint eddig, kezdőirány fölvétele nélkül, ismeretlennek tekintettünk volna.*)

Az egy állomáson végzett szögmérések összességét tehát úgy lehet tekinteni, mint egyetlenegy $p\nu$ súlyú teljes fordulót, melyet aequivalens fordulónak nevezhetünk;**) az $A - x$, $B - x$ stb. értékeket pedig, mint egymástól független, $p\nu$ súlyú közvetetlen meghatározások eredményeit.

E meghatározások súlya akkor is $p\nu$ marad, ha azon célból, hogy az egyes irányokat concret számértékekben nyerjük, x-nek valami határozott értéket tulajdonítunk. Az így nyert meghatározások azon közös része ugyanis, mely az x-nek tulajdonított számértéktől függ, miután x-nek, mint lényegesen határozatlan mennyiségnek, bármily érték egyenlő joggal, azaz absolut pontossággal tulajdonítható, szintén absolut pontosnak, azaz ∞ súlyúnak tekinthető, olyannak tehát, mely a meghatározás másik részének súlyán mitsem változtat.

Legtermészetesebb megoldás az lesz, ha $x = 0$ tétetik, midőn ugyanis

*) Ez esetben x nem volna egyéb, mint a Besseltől is x-szel jelölt mennyiség.

**) Az aequivalens észleletek számos és fontos alkalmazású módszeréről, melyet Helmert vezetett be a legkisebb négyzetek elméletébe, bővebbet l. F. R. Helmert: Die Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate; Leipzig, 1878, III. fejezet.

a reducált normális egyenletek a következő igen egyszerű alakban jelennek meg:

$$A=\frac{(an)}{p\nu}$$

$$B=\frac{(bn)}{p\nu}$$

$$C=\frac{(cn)}{p\nu} \tag{10}$$

$$D=\frac{(dn)}{p\nu}$$

stb.

mely közvetetlenül a kiegyenlített irányértékeket adja.

Az állomás kiegyenlítése és a rendszer kiegyenlítése között kapcsolatot létesitő súlyegyenletek pedig, a szokásos jelölésben, a következő, szintén igen egyszerű alakot veszik föl:

$$(1)=\frac{[1]}{p\nu}$$

$$(2)=\frac{[2]}{p\nu}$$

$$(3)=\frac{[3]}{p\nu} \tag{11}$$

$$(4)=\frac{[4]}{p\nu}$$

stb.

Hasonló egyszerű végegyenletekre minden más symmetriás elrendezés is vezetne, csakhogy az elrendezés symmetriáját több mint két irányt tartalmazó mérési sorozatoknál, minden egyes állomáson gyakorlatilag is keresztülvinni, soha sem sikerül.

Ez bizonyára egyik kiváló haszna a szögmérésnek, melyet legjobban azok fognak megbecsülni, kik egy nagyobb hálózat kiegyenlítését, nem teljes és nem is symmetriás iránysorozatok mellett, keresztül számították.

Egy kérdésre azonban még tartozunk felelettel. A végegyenletek fennebbi egyszerű alakja ugyanis az által jött létre, hogy $x=0$ tétetett, vagyis az által, hogy az irányértékek közt a következő föltételi egyenlet állíttatott föl:

$$A+B+C+D+\ldots=0.$$

Kérdés most már: szabad-e a (11) alatti súlyegyenleteket a rendszer kiegyenlítésébe egyszerűen bevezetni a nélkül, hogy e föltételi egyenletre többé tekintettel lenni szükséges volna? Ha meggondoljuk azonban, hogy a rendszer valamennyi föltételi egyenletében az $A, B, C, \ldots$ mennyiségek sohasem egyenként, hanem mindig párosával, még pedig (szögeknek megfelelően) mindig egymástól való különbségben fordulnak elő; ha megtartanók is az eredeti helyesebb $A—x, B—x, C—x, \ldots$ kifejezéseket, az x mennyiség a föltételi egyenletekből mégis állandóan kiesnék. x-nek tehát bármilyen érték tulajdonítható a nélkül, hogy erre a rendszer kiegyenlítésénél többé tekintettel lenni szükséges volna; a (10) illetőleg (9) alatti egyenletek értelmében pedig, az azokból nyert irányértékek e kiegyenlítésbe mint egymástól függetlenül nyert, $p\nu$ súlyú közvetetlen meghatározások bevezethetők. A rendszer kiegyenlítése tehát egyszerűen a föltételes meghatározások módjára végezhető.

Csatlakozó állomásoknál, miután azt a föltételt, hogy a két kapcsolati irány közti szög régi értékét meg kell hogy tartsa, a számításba bevittük, a végegyenletek szintén a (10) alatti alakot veszik föl.

A kiegyenlítés kiegészítő részét képező hibaszámításra, nevezetesen pedig a súlyegység középhibájának kiszámítására térve át, abban, a Schreiber-féle elrendezés esetén, különböző utakat követhetünk. Kiindulhatunk ugyanis:

1. A szög-középértékek maradékhibáiból, melyeket a hibaegyenletekben v*)-vel jelöltünk. Ezekből a megfelelő súlyokkal megsokszorzott hibanégyzetek összege, tekintettel arra, hogy minden szög-középérték közös súlya p, a következő lesz:

$$p\,[v\,v] = p\,[v_0\,v_0] - k\text{**)}\,;$$

ha ugyanis v_0 a szög-középértéknek és a számítás egyszerűsítésére fölvett szög-közelítőérték közti különbséget, k pedig a legkisebb négyzetek elméletéből ismeretes:

$$k = (a\,n)\,A + (b\,n)\,B + (c\,n)\,C + \ldots = \frac{(a\,n)^2 + (b\,n)^2 + (c\,n)^2 + \ldots}{p\,\nu} \qquad (12)$$

javítást jelenti.

Vezessük be minden v_0 különbség helyett annak $2p$-szeresét, t. i. a megfelelő szög-középértékben egyesített $2p$ mérésbeli eredménynek ugyanazon közelítő értéktől vett különbségeinek összegét, mit V-vel fogunk jelölni, akkor lesz:

$$p\,[v\,v] = \frac{[V\,V]}{4p} - k\,; \qquad (13)$$

*) v = kiegyenlített szögérték — szög-középérték; kiegyenlített szögérték alatt a megfelelő kiegyenlített irányértékek különbségét értve. Ezért lesz a kiegyenlített szögérték súlya félakkora mint a kiegyenlített irányoké.

**) E képlet rendesen a következő alakban szokott adva lenni:

$$[p\,v\,v] = [p\,n\,n] - [p\,a\,n]\,x - [p\,b\,n]\,y - [p\,c\,n]\,z - \ldots$$

a súlyegység m középhibájának négyzete pedig, miután $p\ [v\,v]$ értékét e képlet segítségével kiszámítottuk, lesz:

$$m^2 = \frac{p\,[v\,v]}{\varrho_v}\ ;\ \varrho_v = \frac{1}{2}\,\nu\,(\nu - 1) - (\nu - 1) \qquad (14)$$

$$= \frac{1}{2}\,(\nu - 1)\,(\nu - 2)$$

ϱ_v nevező ugyanis egyenlő az összes szögek számával, levonva belőle az egymástól független szögek számát.

2. A forduló-középértékek maradékhibáiból, melyeket u-val jelölünk (u = kiegyenlített szögérték — forduló-középérték). Ezekből a megfelelő súlyokkal megsokszorzott hiba-négyzetek összege, tekintettel arra, hogy forduló-középérték súlya az egység, a következő lesz:

$$[u\,u] = [u_0\,u_0] - k,$$

hol u_0, hasonlóan v_0-val, a forduló középértéknek és a megfelelő szög-közelítőérték közti különbséget, k pedig ugyanazt a javítást jelenti.

Vezessük be itt is minden u_0 helyett annak kétszeresét, t. i. a megfelelő forduló-középértékben egyesített 2 mérési eredménynek a közelítő értéktől számított különbségeinek összegét, mit U-val jelölünk, akkor lesz:

$$[u\,u] = \frac{[U\,U]}{4} - \mathrm{k}; \qquad (15)$$

és ezen érték mellett:

$$m^2 = \frac{[u\,u]}{\varrho_u}\ ;\ \varrho_u = p.\ \frac{1}{2}\,\nu\,(\nu - 1) - (\nu - 1) \qquad (16)$$

$$= \frac{1}{2}\,(\nu - 1)\,(p\,\nu - 2)$$

A meghatározás e módja azonban bizonytalanná válik mihelyt a fordulókban oly hibák lépnek föl, melyek a szög-középértékből kiesnek ugyan, de a fordulókban az állandó hibák jellegével birnak. Olyankor a (16) alatti egyenlet m számára a kellőnél nagyobb értéket ad. (L. a jegyzetet a 376. lapon.)

3. Az egyes fordulókban egyesített két szögmérés különbségeiből, melyeket δ-val jelölünk.

Az egy fordulóba tartozó két szögmérés hibái ugyanis mindig egy közös állandó részt tartalmaznak, mely legnagyobb részében a mindkét méréssel közös beosztási hibából áll. Ezen állandó rész a forduló-középértékből nem esik ki, de a különböző fordulókban már az esetleges hibák jellegét veszi föl. A δ különbségek ellenben ezen állandó résztől teljesen mentek; lehetséges lesz tehát belőlük az állandó hibarésztől megszabadított egyszeri szögmérés középhibáját kiszámítani.

Lévén ugyanis a δ különbségek száma: $p \cdot \frac{1}{2} \nu(\nu - 1)$, ennek megfelelően pedig δ^2 középértéke: $\frac{[\delta\delta]}{p \cdot \frac{1}{2}\nu(\nu-1)}$; lévén továbbá két szögmérés különbségének súlya félakkora mint az állandó hibarésztől megszabadított egyszeri szögmérés súlya, lesz ez utóbbi középhibájának négyzete:

$$\mu^2 = \frac{\frac{1}{2}[\delta\delta]}{\varrho_\delta}\,;\ \varrho_\delta = p \cdot \frac{1}{2}\nu(\nu - 1). \tag{17}$$

Ha továbbá az említett állandó hibarészeket t betűvel, négyzeteinek középértékét pedig τ^2-val jelöljük, miután a t hibák az egyes fordulókban mint esetleges hibák lépnek föl, a súlyegység középhibájának négyzete a következő összegből fog állani:

$$m^2 = \frac{1}{2}\mu^2 + \tau^2 \tag{18}$$

Azon esetben midőn a t hibák csupán beosztási hibákból származnak, τ értéke is csak az illető műszer beosztásától fog függeni, és jelenteni fogja az egyszeri szögmérésben előforduló közép beosztási hibát. Ez esetben, miután τ külön e célra végzett igen gondos szögmérésekből (az alább következő (19) egyenlet segítségével) az adott műszer számára egyszer s mindenkorra meghatározható, μ értékét pedig a (17) alatti egyenletből nyerhetjük, a (18)-ik egyenlet m számára tényleg egy új meghatározást nyujt.

A mondott eset azonban a t hibákra vonatkozólag csak igen kiválóan kedvező körülmények közt állhat be, rendesen pedig más hibaforrások is érvényesülnek a t hibákban; megfordítjuk tehát a föladatot és a (18) alatti egyenletet nem m-nek, hanem τ-nak, az egyszeri szögmérésben előforduló közép állandó hibának a meghatározására használjuk föl, miután előzetesen a következő alakra hoztuk:

$$\tau^2 = m^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \tag{19}$$

és m értékét a (14) vagy (16) alatti egyenletek valamelyikéből, μ értékét pedig (17)-ből vesszük.

4. Az egyes szögmérések maradékhibáiból, melyeket ω-val jelölünk. Ha e hibák tisztán esetleges természetűek volnának, akkor minden egyszeri szögmérés súlya: $\frac{1}{2}$, a megfelelő súlyokkal megsokszorzott hibanégyzetek összege pedig: $\frac{1}{2}[\omega\omega]$, és végre a súlyegység középhibájának négyzete:

$$m^2 = \frac{\frac{1}{2}[\omega\omega]}{\varrho_\omega} \tag{20}$$

volna, hol:

$$\varrho_{\omega} = 2\,p \,.\, \frac{1}{2}\,\nu\,(\nu - 1) - (\nu - 1)$$

$$= (\nu - 1)\,(p\,\nu - 1)$$

Minthogy azonban az egy fordulóba tartozó két szögmérés hibái: ω, ω': nem tisztán esetlegesek, hanem egy közös (előbb már t-vel jelölt) állandó részt tartalmaznak, a két mérésből alkotott számtani közép súlya az egyszeri mérés kétszeres súlyánál kisebb lesz. Ha tehát e számtani közép súlyát, mint súlyegységet, 1-nek vesszük, akkor az egyszeri mérés súlya $\frac{1}{2}$-nél nagyobbra veendő, miből az következik, hogy a (20) alatti egyenlet m számára a kellőnél kisebb értéket ad.

Még világosabban látszik meg ez a következő levezetésből.

Az egy fordulóba tartozó két szögmérés hibái között a következő két relatió áll fenn:

$$\omega + \omega' = 2\,u,$$

$$\text{és}\quad \omega - \omega' = \delta.$$

Képzeljük ezeket minden egyes forduló számára külön-külön kiirva, négyzetre emelve és összeadva; a két összeg ismét két relatiót képez, melyek a következők:

$$[\omega\,\omega] + 2\,[\omega\,\omega'] = 4\,[u\,u],$$

$$\text{és}\quad [\omega\,\omega] - 2\,[\omega\,\omega'] = [\delta\,\delta].$$

Ezeket összeadva és 2-vel osztva, lesz:

$$[\omega\,\omega] = 2\,[u\,u] + \frac{1}{2}[\delta\,\delta],$$

vagy másképpen irva:

$$[\omega\,\omega] = 2\,\varrho_u\,\frac{[u\,u]}{\varrho_u} + \varrho_\delta\,\frac{\frac{1}{2}\,[\delta\,\delta]}{\varrho_\delta},$$

vagy még (16)-ra és (17)-re tekintettel:

$$[\omega\,\omega] = 2\,\varrho_u\,m^2 + \varrho_\delta\,\mu^2,$$

mibe továbbá ha m^2-nak (18)-ból vett értékét helyettesítjük, lesz:

$$[\omega\,\omega] = (\varrho_u + \varrho_\delta)\,\mu^2 + 2\,\varrho_u\,\tau^2\,;$$

ebből végre, $\varrho_u + \varrho_\delta$ összeg helyett a vele egyenértékű ϱ_ω-át téve, és μ^2 szerint föloldva, nyerjük:

$$\mu^2 = \frac{[\omega\,\omega]}{\varrho_\omega} - 2\,\frac{\varrho_u}{\varrho_\omega}\,\tau^2.$$

μ^2-nak ezen értékét (18)-ba helyettesítve, lesz a súlyegység középhibájának négyzete:

$$m^2 = \frac{\frac{1}{2}\,[\omega\,\omega]}{\varrho_\omega} + \frac{\varrho_\omega - \varrho_u}{\varrho_\omega}\,\tau^2 = \frac{\frac{1}{2}\,[\omega\,\omega]}{\varrho_\omega} + \frac{p\,\nu}{2\,(p\,\nu - 1)}\,\tau^2. \qquad (21)$$

Ezen érték fennebbi következtetésünket teljesen megerősíti.

A (21) alatti egyenletből kiszámítható τ érték, teljesen azonos azzal, melyet a (19) alattiból nyerünk, miután m^2 és μ^2 értékeit (16)-tal és (17)-tel helyettesítettük.

Schreibernek 1878-iki előbb idézett értekezésében egy 6 irányra vonatkozó kiegyenlítési példa is található. Mind a példa, melyben még egyszer kézzel foghatóan bebizonyítva látjuk a módszer könnyű gyakorlati foganatosítását és rendkivül egyszerű számítási apparátusát, mind a hozzá fűzött hiba-számítási discussio igen tanulságos.

Nem marad most már egyéb hátra, mint röviden elősorolni azon előnyöket, melyeket a szögmérés elsőrendű háromszögeléseknél az iránymérés fölött biztosit.

A végből, hogy a két rendszer mellett elérhető pontosság fokát összehasonlíthassuk, mindkettőnél egyenértékű súlyegységeket kell választani. A szögmérésnél két összetartozó szögmérés számtani közepének súlyát választottuk súlyegységnek; ennek megfelelően az iránymérésnél az egyszeri iránymérés súlyát kell majd (legalább is igen megközelítően) egyenértékű súlyegységnek tekinteni. Ezt tartva szem előtt, ha valamely állomás ν iránya között $2p$ teljes sorozat, vagyis p teljes forduló méretett meg (Bessel), a kiegyenlített irányértékekben elért súly tudvalevően $2p$ lesz, a végzett irányzások száma pedig, mely a reáfordított idő mértékeül szolgálhat: $2p\nu$. Ha ellenben a ν irány között bezárt $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ szög mindegyike külön-külön $2q$-szor méretett meg (Schreiber), a kiegyenlített irányértékekben elért súly, mint előbb láttuk: $q\nu$, és a mérés közben végzett irányzások száma $2q\nu(\nu-1)$.

Ha tehát azt akarjuk, hogy mindkét esetben egyenlő súlyú irányértékeket nyerjünk:

$$q\nu = 2p$$

tartozik lenni, azaz szögmérésnél az irányok minden kettős combinatiója számára $q = \frac{2p}{\nu}$ fordulót kell mérnünk. Ennek megfelelően a szükséges irányzások száma:

$$2q\nu(\nu-1) = 4p(\nu-1)$$

lesz.

Egy kiegyenlített irányérték számára tehát ugyanazt a $2p$ súlyt: teljes iránysorozatok mérése esetén $2p\nu$, szögmérés esetén pedig $4p(\nu-1)$ irányzással érjük el.*)

Adjuk most át Schreibernek a szót:

„. . . . A szögmérés e szerint több, de sohasem kétszer annyi irányzást kiván meg, mint az iránymérés, még ez utóbbi legkedvezőbb esetében sem,

*) Bővebben erről l. Bremiker: Ueber Winkelmessung und Ausgleichung; Astronomische Nachrichten, 89. kötet (1877), 2117. sz.

midőn t. i. csupán teljes fordulókat sikerül megmérni. E legkedvezőbb eset azonban, elsőrendű háromszögméréseknél, a legnagyobb ritkaságok közé tartozik; legritkábban pedig éppen akkor érhető el, mikor a vele együttjáró időnyereség legnagyobb lehetne: nevezetesen sokirányú állomásoknál. Átlag véve, e legkedvezőbb esettől igen is messze járunk, miről bárki is könnyen meggyőződhetik, ha csak valamely újabb elsőrendű háromszögmérés kiadványaiban közöltetni szokott mérési adatokat kissé átnézi. Így például a „Küstenvermessung" 59 állomása közül — két oly állomást nem tekintve, melyen a meghatározandó irányok száma csak 2 volt — csak egy állomás, a bázis-középpont, mutat fel csupa teljes fordulókat; és ez az egy sem fő háromszög-pont, hanem csak bázis-állomás, hol 6 irány méretett meg ugyan, de mind igen rövid tárgytávolsággal (588—2626 toise). Továbbá a porosz geodaesiai intézetnek teljes tizenegy évi működés alatt is csak kétszer sikerült kettőnél több irányú állomásoknál csupán teljes iránysorozatokban mérni."

Nekünk is volt alkalmunk, ugyancsak az ezen intézet által mult nyáron Berlin környékén végeztetett elsőrendű méréseknél, azon (leginkább világításbeli) hosszadalmas nehézségekről meggyőződni, melyek e legkedvezőbb eset megvalósításának már 4, sőt 3 irány mellett is útját állják. Ellenben az ugyanazon időtájt Kiel mellett folyamatban volt szintén elsőrendű méréseknél, melyeknél a geodaesiai intézet a szögmérés módszerét alkalmaztatta, arról a könnyűségről és simaságról győződhettünk meg, melylyel e módszer, az irányok számától függetlenül, minden állomáson egyaránt keresztülvihető.

Mindennek dacára azonban az iránymérés, az irányzások számát illetőleg, a szögméréssel szemben mindig egy kis elsőbbségben marad. Csakhogy ezzel vége is mindannak, a mit előnyére fölhozni lehet, és a következőkben Schreiber után röviden összeállított előnyei a szögmérésnek nagyon is az iránymérés hátrányára fogják billenteni az összehasonlítás mérlegét.

1. Egy rövid sorozat az iránykülönbségeket általánosságban mindig pontosabban adja meg, mint egy hosszú; és ez annál inkább úgy van, minél kevésbbé állós a műszer állása és maga a műszer is. E körülmény az iránymérésnek imént említett előnyét, mely szerint az, ugyanazon súly elérésére, kevesebb irányzással beéri, az elért súly bizonytalanabb volta következtében lényegesen a szögmérés javára szállítja le. Legérezhetőbb e körülmény akkor, mikor állvány-elcsavarodás lép föl, mit a sík és erdős hegyi vidékeken alkalmazandó magas állványoknál elkerülni lehetetlen.

2. Rövid sorozatoknál egyenlő idő alatt több irányzás végezhető, mint hosszúaknál, mert ezeknél a heliotrop-fények eltűnése és más félbeszakítások okozta időveszteségek sokkal nagyobbak mint amazoknál.

3. Szögmérés alkalmazása mellett lehetségessé válik minden állomásnál egy előre megfontolt, célszerűen összeállított tervezet szerint észlelni, mely

a mérések számát, a látócső- és limbus-állásokat minden egyes szögre nézve pontosan megállapítja; míg ellenben irányméréseknél egy ilyen elrendezés betartása teljesen lehetetlen. A szögmérés tehát az állandó hibáknak és a beosztási hibáknak egy sokkal tökéletesebb kiküszöbölését engedi meg mint az iránymérés, mi által a kiegyenlítő számítás is sokkal reálisabb jelleget ölt.

4. A legtöbb állomásnál mindig van egy vagy több olyan irány, melynek megfigyelése a többiénél sokkal nehezebb és mely ritkán sikerül s a többivel csak úgy kapcsolható össze, ha egyes kedvező pillanatokat hirtelen föl tudunk használni. Ilyen kedvező pillanatok kihasználására is sokkal alkalmasabb a szögmérés, mint az iránymérés.

Mindezen előnyöket, melyeket itt csak röviden soroltunk el, Schreiber második értekezésében, bőven kifejtve és számos gyakorlati eredménynyel támogatva találjuk. Ezen értekezés elolvasása, hitünk szerint, még inkább meg fog mindenkit arról győzni, hogy elsőrendű háromszögeléseknél a szögmérés még egyenlő idő alatt is pontosabb eredményekre vezet mint az iránymérés, hogy tehát ez utóbbi fölött, elsőrendű méréseknél, feltétlenül elsőbbségben részesítendő.

A Munkács-beszkidi vasút hegyi pályarészéről.

(XXIII.—XXVI. tábla.)

Irta GROSSMANN VILMOS mérnök.

A Munkács-beszkidi vasút egy szem ama vasutak láncolatában, melyek a Kárpátokat átszelve bennünket a szomszéd Gácsországgal összekötnek.

Munkácsról kiindulva a Latorca folyót követi, melynek itt még elég széles völgyét a trachytból, porphyrból és egyéb vulkáni kőzetből álló munkácsi hegyek szegélyezik. A völgy jellege nagy általánosságban Szolyváig — 26·5 kilométerig — ugyanaz marad, azzal a külömbséggel, hogy szűkebbé válik és a hegyek nagyobb magasságra nyúlnak.

A pálya Szolyvánál elválik a Latorcától és ennek egyik mellékvölgyébe a Vicsa-völgybe fordul. Itt, mintegy varázsütésre egyszerre más látókép tárul elénk. Míg a Latorca az ő medrét szelid eséssel a kavicscsal telehordott talajba ásta, melynek széleit itt még a nagy alföldi rónaságot egykor elborító tenger nyaldosta, addig a Vicsa rohamosan kezd emelkedni, és medrét a sötét palából és kárpáti homokkőből álló sziklákba véste. A szűk Vicsa-szorulat majdnem megszakítás nélkül Volócig — 55·0 k.-mig — húzódik. A Vicsa mindkét oldalán meredek hegyoldalak emelkednek ki, melyek csak itt-ott vannak mély mellékvölgyekkel megszakítva. Ezek a meredeken alácsüngő, sokszor lazán álló szirtek a völgyfenéknek mintegy természetes védelmére sűrű bükkfarengetegekkel, helyenként őserdőséggel vannak benőve.