A tudományok tisztelete kétségtelenül a magasabb kultúra bizonyítéka.
Mennyivel magasabb volt már akkor a magyar kultúra, mint a szétdarabolásunkban résztvett utódállamoké.
A franciák mai szövetségeseinek, az oláhoknak és szerbeknek akkor talán fogalmuk se volt arról, hogy Párisban egyetem van s aligha tudták, hogy egyáltalában mi az az egyetem.
És mit jelent az, hogy az ajándékok között a fehér ló is szerepel.
Őseink fehér lovat áldoztak Hadúrnak — a lelküket ajánlották fel a fehér lóval.
A bánatos szülők a fehér ló képében fiuknak lelkét ajánlották fel a párisi egyetemnek, mert ott lelkes tudományban volt része.
A XII-ik századtól kezdve tradició, hogy a tanulni vágyó magyar ifjú lelkét viszi ki a külföldre.
Ilyen lelkes két magyar Hungarista volt Párisban a mult tanévben az a két magyar műegyetemi hallgató, aki dicsőséget hozott a magyar névnek.
Az az ifjúság, amelynek soraiból ily egyéniségek kerülnek ki, csak elismerést érdemel.
Az alma mater büszke reátok.
Köszöntlek benneteket Hungaristák!

A RUDAS TERÜLETMÉRŐKRŐL.

Irta: Dr. BODOLA LAJOS.

I.

Az alapképlet levezetése.[1]

1. A rajzolt idomok területének mérésére szolgáló műszerek közül leghasználatosabbak ezidőszerint a *rudas területmérők* vagy *rudas planiméterek.*

E területmérők jellemző alkotó része a *mérőrúd.*

Merev fémrudacska ez, amelynek szabad végéről hegyes csúcs — a *mérőcsúcs* — nyúlík le függőlegesen a rajz vízszintesen fekvő síkjáig. A mérőcsúcsnak e síkon nyugvó, az ábrákban mindig Q-val jelölt csúcspontját ráállítjuk a zárt idom határvonalának valamely pontjára és ebből kiindulva, szabadkézzel körülvezetjük az egész határvonalon, amíg ismét a kiindulópontba jut.

Eközben a mérőrúd vízszintesen szabadon foroghat a másik végén lévő függőleges forgástengely körül, amelynek a rajz síkján való vetületét P betű jelöli; a forgástengely pedig vízszintesen maga is elmozdulhat, csakhogy nem szabadon, hanem úgy, hogy P vetülete mindig rajta maradhasson egy a rajz síkján képzelhető *kényszerpályán,* amelyet a területmérő szerkezete vagy — e szerkezet közreműködésével — maga a körüljárt idom szab meg.

Ez a kényszerpálya a területmérő *vezetővonala.*

A q hosszúságú PQ egyenest a területmérő *mérőkarjának,* néha azonban röviden *q egyenesnek* is fogom nevezni, s tekintsük a P forgáspontot az egyenes kezdőpontjának, a Q csúcspontot pedig végpontjának és ennek megfelelően a P-től Q felé tartó PQ irányt az egyenes irányának.

Ha ez irányban nézünk, megkülönböztethetjük a mérőkar *jobb-* és *baloldalát,* s nevezzük az elsőt *pozitívnak,* a másodikat *negatívnak.*

[1] A rudas területmérők alapképletéről 1908-ban, a Magyar Tudományos Akadémai *Mathematikai és Természettudományi Értesitőjének* XXVI. kötetében jelent meg egy értekezésem, amelynek e mostani értekezésem átdolgozott és bővített kiadásának tekinthető.

Az egy *Prytz*-féle területmérő kivételével, minden ez értekezésben majd részletesebben is megtárgyalt területmérő mérőrúdja el van látva *mérőkerékkel (mérőhengerrel, mérőorsóval),* amelynek forgástengelye párhuzamos a mérőkarral.

Egyes területmérőknél ez a mérőkerék a rajz papirosán, másoknál ellenben a területmérő szerkezetében külön erre szolgáló felületen gördül.

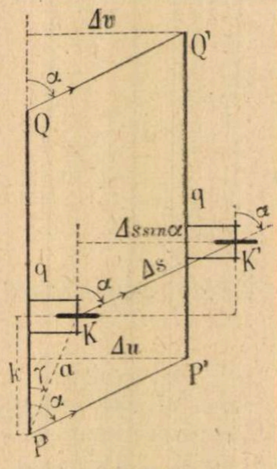
Ez utóbbi berendezés, tudvalevőleg, egyrészt szabatosabbá teszi a gördülést, másrészt pedig, áttételek révén, arra használható fel, hogy nagyobbítsuk a gördülésnek a területegységre eső szögét, ezzel is fokozva a területmérés pontosságát, vagy ahogyan ezt kifejezni szintén szokás, a szerkezet érzékenységét.

Bármin gördüljön is a mérőkerék, *gördülésszöge*, 2π-ben vagy 2π-nek valami alkalmas ν-ed (század, ezred) részében, mint egységben kifejezve, a kapcsolatos *forgásmérővel* mindig mérhető.

Különben is felteszem, hogy az itt tárgyalt területmérők szerkezete és kezelése nem új dolog az olvasó előtt, s majd csak arra a vázlatos ábrázolásukra és leírásukra szorítkozom, amelyre fejtegetéseimben szükségem lesz.

2. A későbbi tárgyalásokat könnyebbítendő, mindjárt itt vizsgálom két elemi vonatkozásában azt az esetet, amikor a mérőrúddal kapcsolatos mérőkerék magán a rajz síkján gördül.

Mihelyt a mérőrúd s vele együtt a mérőkar mozgásba jő, a mozgás minősége szerint a mérőkerék a rajz síkján hol *csúszik,* hol *gördül.*



1. ábra.

Jelöljük α-val (1. ábra) a mérőkeréknek a rajz síkjával érintkező K legalsóbb kerületi pontjának P-től való, pozitívnak számítandó távolságát és γ-val a szöget, amelyet a PK irány bezár a PQ iránnyal, PQ-tól, mint kezdeti iránytól, az óramutató forgásának értelmében pozitívnak számítva.

E megállapodás szerint a mérőkerék síkjának P-től való

$$k = a \cos\gamma \tag{1}$$

távolsága $\cos\gamma$-val együtt pozitív vagy negatív.

Tegyük fel, hogy a mérőkar a rajz síkján úgy mozog, hogy önmagával folyton párhuzamosan haladva, végig súrolja a $PQQ'P'$ parallelogramot (1. ábra). A mérőkerék ezalatt végigjárja a Δs hosszúságú, PP'-vel és QQ'-vel párhuzamos és egyenlő hosszúságú KK' egyenes utat, s jelöljük α-val a szöget, amelyet e párhuzamos pályákon a mozgás iránya bezár a PQ iránnyal.

Számítsuk α-t, γ-hoz hasonlóan, a PQ iránytól, mint kezdeti iránytól, az óramutató forgásának értelmében pozitívnak. A mérőkerék, amint pályáján végigfut, általánosságban nemcsak gördül, hanem csúszik is és gördülése éppen akkora, amekkora lenne, hacsak $\Delta s \sin\alpha = \Delta u = \Delta v$ hosszúságú utat tenne meg saját síkjának nyomvonalán, lévén Δu a P' pontnak, Δv pedig Q' pontnak PQ-tól való távolsága.

Ha tehát a mérőkerék sugarát r-rel, *gördülése szögét* pedig $\Delta\varkappa$-val jelöljük, a gördülés szögének megfelelő ívhossz a mérőkerék kerületén mérve, amit röviden a *gördülés ívének* fogok nevezni, az itt vizsgált mozgásban:

$$r\Delta\varkappa = \Delta s \sin\alpha = \Delta u = \Delta v,$$

a gördülés szöge pedig ebből:

$$\Delta\varkappa = \frac{1}{r}\Delta s \sin\alpha = \frac{1}{r}\Delta u = \frac{1}{r}\Delta v. \tag{2}$$

Amint látjuk, lévén r és Δs mind a kettő pozitív, $\Delta\varkappa$, Δu és Δv mind egyenlő előjelű $\sin\alpha$-val, s megjegyzendő, hogy úgy értelmeztük az α szöget, hogy a Δu és Δv távolságok és velük együtt a gördülés $\Delta\varkappa$ szöge is akkor számítandók pozitívnak, amikor a megfelelő pontok a mérőkarnak az 1. cikkben pozitívnak nevezett oldalával feküsznek egy oldalon, s negatívnak, amikor az ellenkező oldalon feküsznek.

Világos, hogy e megállapodásban bennfoglaltatik a feltevés, hogy a mérőkerék forgásmérőjének skála-számozása olyan értelmű, hogy akkor mutat növekedést, vagyis pozitív $\Delta\varkappa$-t, amikor a mérőkar pozitív oldalával halad önmagával párhuzamosan előre. Ha fordítva lenne, fordítva kellene mindenütt a pozitív és negatív értelmet is megszabni.

Tegyük most fel, hogy a P forgáspont helyt maradván (2 ábra), a mérőkar $\Delta\varphi$ szöggel forog körülötte s végig súrolva a $P-Q'$ körszektort, eljut a PQ' helyzetbe. Számítsuk $\Delta\varphi$-t is az óramutató forgásának értelmében pozitívnak, az ellenkezőben negatívnak.

A kerék végigjárja a $\Delta s = |a\Delta\varphi|$ hosszúságú KK' körívet és pedig úgy, hogy a körív minden pontjában a mozgás iránya állandóan ugyanazt az α szöget zárja be a kerék tengelyének Q felé tartó irányával, amiből ismét az következik, hogy a kerék általánosságban nemcsak gördül, hanem csúszik is és a gördülés íve:

$$r\Delta\varkappa = \Delta s \sin\alpha = |a\Delta\varphi| \sin\alpha.$$

Minthogy azonban, ha $\Delta\varphi$ pozitív:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \gamma \text{ és } \sin\alpha = \cos\gamma,$$

ha pedig $\Delta\varphi$ negatív:

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + \gamma \text{ és } \sin\alpha = -\cos\gamma,$$

a gördülés ívének előbb nyert kifejezése átmegy a következőbe:

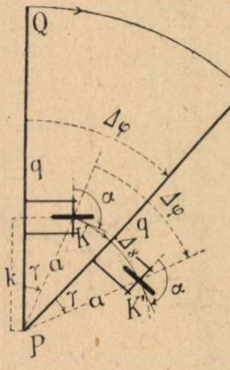
$$r\Delta\varkappa = a\Delta\varphi \cos\gamma,$$

illetőleg, (1)-nek felhasználásával, a következőbe:

$$r\Delta\varkappa = k\Delta\varphi,$$

amiből a gördülés szöge:

$$\Delta\varkappa = \frac{k}{r}\Delta\varphi \qquad (3)$$



2. ábra.

Ebből az tűnik ki, hogy $\Delta\varkappa$ zérus, ha k zérus, még akkor is, ha $\Delta\varphi$ nem zérus, különben pedig, hogy $\Delta\varkappa$ pozitív k mellett $\Delta\varphi$-vel, negatív k mellett pedig $-\Delta\varphi$-vel egyenlő előjelű. A feltevés a forgásmérő skálájára nézve ugyanaz, mint előbb.

Ha a (2) és (3) alatt nyert eredményeket abból a szempontból vizsgáljuk, hogy minő hatással vannak rájuk a k és γ méretetek, azt látjuk, hogy a (2) alatt álló eredmény teljesen független tőlük és hogy a (3) alatt állóra is csak a k méretnek van hatása. A mérőkerék tehát a saját síkjában vízszintesen bárhová eltolva gondolható. Ezért a következő ábrákban egyszerűség kedvéért úgy ábrázolom, mintha a tengelye és a mérőkar egymás fölött feküdnék.

S könnyű belátni, hogy a kerék ez eltolásának akkor sincs hatása a gördülésre, ha a forgáspont nem P, hanem bárminő más pontja a síknak.

3. Vizsgáljuk most azt a végtelen kicsiny $d\varkappa$ szöget, amellyel a mérőkerék gördül, mialatt a Q csúcspont a megmérendő területű idom körüljárása közben, az idom egyenes vagy görbe határvonalán bejárja végtelen kicsiny QQ' útját (3. ábra), s vele egyidejűleg a P forgáspont is megfutja egyenes vagy görbe kényszerpályáján — a vezetővonalon — végtelen kicsiny PP' útját, aminek eredményeképpen a mérőkar átmegy a PQ helyzetből a végtelen közelfekvő $P'Q'$ helyzetbe.

Jelöljük du-val a P' pontnak a PQ egyenestől való végtelen kicsiny távolságát és $d\varphi$-vel a végtelen kicsiny szöget, amelyet a $P'Q'$ irány bezár a PQ iránnyal és számítsuk mind a kettőt ugyanabban az értelemben pozitívnak, illetőleg negatívnak, amelyben a megelőző cikkben a véges Δu-t és $\Delta \varphi$-t is annak számítottuk.

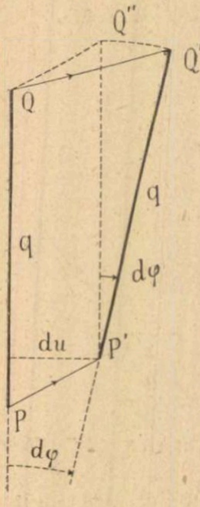
A mérőkar mozgása *eredője* ama kétféle vízszintes irányú mozgásnak, amelyet a mérőrúd minden rudas területmérőben külön-külön, egymástól függetlenül is végezhet. Az egyik *haladó mozgás*, a másik *forgás* a P tengely körül.

A haladás alatt a mérőkar úgy mozog a rajz síkján, hogy megmaradván P forgáspontja állandóan a vezetővonalon, maga, saját irányát a körüljárt idomhoz képest meg nem változtatva, önmagával párhuzamosan megy előre vagy hátra.

A forgás alatt pedig a mérőkar is csak forog P forgáspontja körül.

Mindakét alkotó mozgás okozhat gördülést és a mérőkerék eredő gördülése a kétféle származású gördülésnek algebrai összegeződéséből adódik ki.

A mérőkar a kétféle mozgást rendesen egyidejűleg végzi. Az itt vizsgált, végtelen kicsiny terjedelmű tovavándorlása határain belül azonban, hogy könnyebben számíthassuk ki a $d\varkappa$ gördülést, feltehetjük, hogy nem egyidejűleg, hanem külön-külön, egymásután végzi a két lehetséges sorrend valamelyikében.



3. ábra.

A hiba ugyanis, amit ezzel elkövetünk, az itt kiszámítandó végtelen kicsiny mennyiségekhez mérten magasabbrendű végtelen kicsiny mennyiség, amely, ha külön figyelembe vennők is, a később végrehajtandó integrálásnál úgyis eltűnnék.

Eszerint tehát, ha feltesszük, hogy a mérőkar előbb a du nagyságú haladást végzi, s az ebből származó gördülés szögét $d\varkappa_u$-val jelöljük, és csak azután hajtja végre a $d\varphi$ nagyságú forgást, s az abból származóét $d\varkappa_\varphi$-vel jelöljük, bárminő felületen gördüljön is a mérőkerék,

$$d\varkappa = d\varkappa_u + d\varkappa_\varphi, \tag{4}$$

ahol $d\varkappa_u$ du-nak, $d\varkappa_\varphi$ pedig $d\varphi$ függvénye.

A következőkben fontos szerepet játszó e kifejezés tehát összefüggést állapít meg $d\varkappa$, du és $d\varphi$ között.

Lássuk most, minő ez az összefüggés a rajz síkján gördülő mérőkerék esetében.

Ekkor ugyanis a du haladásnak megfelelő $d\varkappa_u$ gördülést rögtön kiszámíthatjuk (2)-ből azáltal, hogy benne Δu helyébe du-t írjuk, amiből:

$$d\varkappa_u = \frac{1}{r} du$$

adódik ki; $d\varkappa_\varphi$-t pedig (3)-ból azáltal, hogy $d\varphi$-t írjuk $\Delta\varphi$ helyébe, amiből

$$d\varkappa_\varphi = \frac{k}{r} d\varphi$$

következik.

Minden a rajz papirosán gördülő mérőkerékkel ellátott területmérő esetében tehát:

$$d\varkappa = \frac{1}{r} du + \frac{k}{r} d\varphi \tag{4a}$$

S látni fogjuk, hogy ama később közelebbről tárgyalt területmérőknek is, amelyeknek mérőkereke nem a rajz papirosán, hanem külön erre szolgáló felületen gördül, olyan a szerkezete, hogy a (4) alatti kifejezés náluk is a (4a) alattihoz hasonló lineáris alakot ölt; csak du és $d\varphi$ együtthatói mások és mások a szerkezet szerint. Igy például a 11. és 12. cikkben tárgyalt területmérők esetében, amint a (4b) és (4c) alatt ott található kifejezések mutatják, $d\varphi$ együtthatója zérus.

4. Számítsuk az irányszögeket a pozitív X iránytól, mint kezdeti iránytól az óramutató forgásának értelmében pozitívnak 2π-ig növekedőleg, s geodéziai szokás szerint vegyük a pozitív Y tengelyt úgy, hogy irányának irányszöge $\frac{\pi}{2}$ legyen.

Jelöljük röviden $(O\,A\,A'\,O)$-val a mérőszámát annak a területnek, amelyet a vezérsugár a koordinátarendszer síkján lesúrol, mialatt a ϑ és r koordinátájú A ponttól a ϑ' és r' koordinátájú A' pont felé haladva, végigjárjuk az $A\,A'$ egyenesdarabot (4. ábra). E mérőszám:

$$(O\,A\,A'\,O) = \frac{1}{2}\, r\, r' \sin\,(\vartheta' - \vartheta)$$

és a megfelelő területtel együtt pozitív vagy negatív aszerint, amint a $(\vartheta' - \vartheta)$ irányszögkülönbség is pozitív vagy negatív.

Ha ellenkező értelemben, vagyis A'-tól A felé haladva járjuk végig az egyenesdarabot, a súrolt terület mérőszáma:

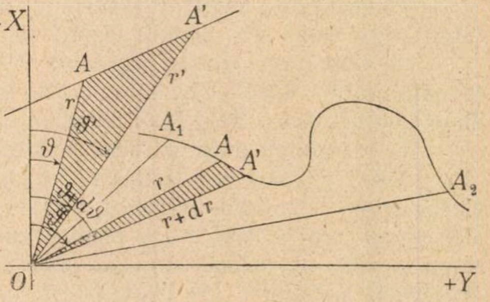
$$(O\,A'\,A\,O) = \frac{1}{2}\, r\, r' \sin\,(\vartheta - \vartheta') = -(O\,A\,A'\,O),$$

azaz mindig

$$(O\,A\,A'\,O) + (O\,A'\,A\,O) = 0. \tag{5}$$

Ha az $A\,A'$ vonaldarab és vele a $(\vartheta' - \vartheta)$ és az $(r' - r)$ koordinátakülönbség is végtelen kicsiny, a vezérsugár súrolta végtelen kicsiny területelem mérőszáma:

$$(O\,A\,A'\,O) = \frac{1}{2}\, r^2\, d\vartheta,$$



4. ábra.

és e területelem is pozitív vagy negatív aszerint, amint $d\vartheta = \vartheta' - \vartheta$ pozitív vagy negatív. E kifejezésben $A\,A'$ nemcsak egyenesnek, hanem akárminő síkgörbének is jelentheti végtelen kicsiny elemét.

Ha zárt sík-idom határvonalán, amelyről fölteszem, hogy önmagát nem metszi, oly értelemben járunk körül, hogy az idom belseje a körüljárás irányában nézve mindvégig jobboldalon fekszik, a körüljárást az itt használt koordinátarendszer mellett pozitívnak, ha pedig baloldalon fekszik, negatívnak szokás nevezni. Minthogy pedig, ha $d\vartheta = \vartheta' - \vartheta$ pozitív, az $O\,A\,A'\,O$ betűsorozat megállapította körüljárás pozitív, ha pedig $d\vartheta$ negatív, a körüljárás is negatív, úgy is mondhatjuk, hogy a vezérsugár súrolta területelem pozitív, ha a mérő számának szimbolumában előforduló betűsorozat pozitív körüljárást, és negatív, ha a betűsorozat negatív körüljárást jelent. Az első esetben a vezérsugár a területelemet a jobboldalával súrolja, amelyet ismét pozitívnak, a másodikban pedig a baloldalával, amelyet negatívnak nevezünk.

Ha már most az $A_1\,A_2$ akárminő, de véges görbe vonaldarabot járjuk végig A_1-től, A- és A'-n át, A_2-ig (4. ábra), a súrolt terület mérőszáma:

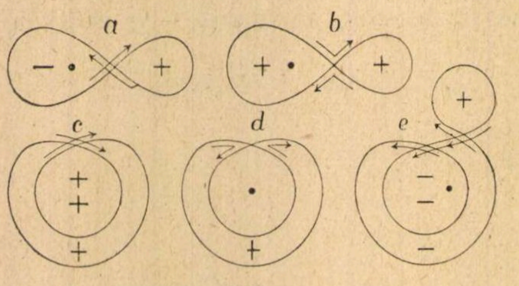
$$(O\,A_1\,A\,A'\,A_2\,O) = \frac{1}{2} \int_{A_1}^{A_2} r^2\, d\vartheta,$$

és ha A_2 összeesik A_1-gyel, vagyis zárt idomot járunk körül:

$$(O\,A_1\,A\,A'\,A_2\,O) = (O\,A_1\,A\,A'\,A_1\,O) = \frac{1}{2} \int_{A_1}^{A_1} r^2\, d\vartheta = (A_1\,A\,A'\,A_1),$$

ahol $(A_1\,A\,A'\,A_1)$ a körüljárt zárt idom területének mérőszáma. És e mérőszám is, ha a körüljárt zárt idom határvonala önmagát nem metszi, pozitív vagy negatív aszerint, amint az $A_1\,A\,A'\,A_1$ betűsorozat megállapította körüljárás, amelyet az idom kerületén az integrálás követ, pozitív vagy negatív.

Ha a határvonal önmagát metszi, a zárt idom két vagy több alkotó zárt idomból tevődik össze, amelyeknek határvonalai önmagukat nem metszik, és az egész idom területe ez alkotó idomok területeinek algebrai összege. A planiméterek is ezt adják a velük való mérés eredménye gyanánt. Mindazok az alkotó idomok, amelyeket az egész határvonalnak végigjárása közben pozitív körüljárással járunk körül, pozitív területűek, amelyeket pedig negatív körüljárással járunk körül, negatív területűek.



5. ábra.

Ha a körüljárást ugyanazon az úton, de ellenkező értelemben hajtjuk végre, az eredmény ugyanakkora, de ellenkező előjelű, vagyis

$$(O A_1 A A' A_1 O) + (O A_1 A' A A_1 O) = 0,$$

vagy rövidebben:

$$(A_1 A A' A_1) + (A_1 A' A A_1) = 0.$$

Azonos eredményre a két körüljárás csak akkor vezet, ha az alkotó területek algebrai összege zérus.

Természetes, hogy az eredmény nemcsak a körüljárás értelmétől, hanem attól is függ, hogy minő úton járunk végig. (5. ábra.)

Ha körüljárás közben ugyanazt a területrészt, mint több alkotó idomba tartozót, többször járjuk körül (5. ábra *c, d, e*) ugyanannyiszor számít is és pedig mindig az illető körüljárásnak megfelelő előjellel.

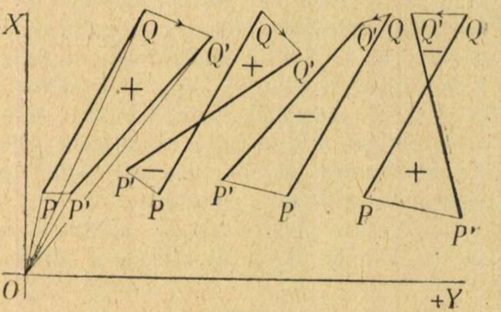
5. Vizsgáljuk most a rudas területmérők mérőkarja súrolta területet.

Amint ugyanis a mérőkar a körüljárandó idom síkján, amelyen a koordinátarendszer is elképzelendő, elmozdul, területet súrol és a vezérsugár súrolta területekhez hasonlóan, állapodjunk meg abban, hogy mindazokat a területeket, amelyeket a mérőkar vagy egyes részei pozitív oldalukkal súrolnak, pozitívnak, amelyeket pedig negatív oldalukkal súrolnak, negatívnak számítjuk. Ha pedig valamely területrész többször súroltatnék, ugyanannyiszor számít is és pedig mindig az itt megállapított előjellel.

E megállapodásnak megfelelően, ha a mérőkar (6. ábra) a PQ helyzetből átmegy a végtelen közelfekvő $P'Q'$ helyzetbe, az átmenet alatt súrolt végtelen kicsiny területelem mérőszáma:

$$(Q Q' P' P Q) = (O Q Q' P' P Q O) =$$
$$= (O Q Q' O) + (O Q' P' O) + (O P' P O) +$$
$$+ (O P Q O), \qquad (6)$$

ahol a körüljárás értelmét a Q csúcspont mozgási iránya szabja meg és a súrolt területelem pozitív vagy negatív aszerint, amint ez a mérőszám pozitív vagy negativ.



6. ábra

Ha tehát a mérőkar (7. ábra), mialatt P forgáspontja az AA' vezetővonalon, Q csúcspontja pedig az idom BB' határvonalán jár, $P_1 Q_1$ kezdeti helyzetből kiindulva és a PQ, $P'Q'$, $P''Q''$,... egymáshoz végtelen közelfekvő helyzeteken átmenve, a $P_1 Q_1$-től véges távolságban fekvő $P_2 Q_2$ helyzetbe jut, az eközben súrolt végtelen kicsiny területelemek mérőszámai, (6) mintájára, sorjában:

. . . .

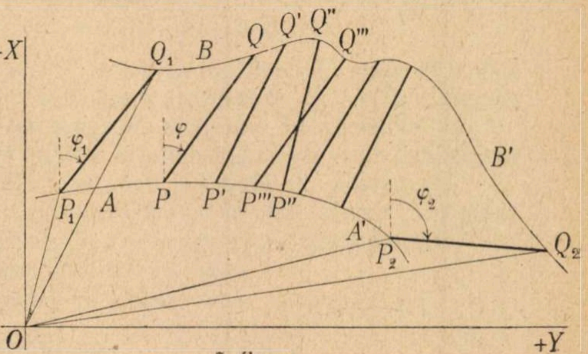
$$(Q Q' P' P Q) \;= (O Q Q' O) + (O Q' P' O) + (O P' P O) + (O P Q O)$$
$$(Q' Q'' P'' P' Q') = (O Q' Q'' O) + (O Q'' P'' O) + (O P'' P' O) + (O P' Q' O)$$

. . . .

és e számok algebrai összege az egész súrolt terület mérőszáma.

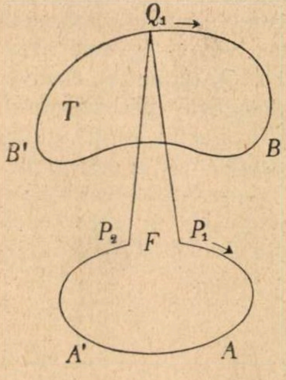
Ha azonban az összegezést a jobboldalon végrehajtjuk, először is könnyű belátni, hogy az első oszlopban álló számok algebrai összege: $(O\,Q_1\,B\,B'\,Q_2\,O)$, a harmadik oszlopban állóké pedig $(O\,P_2\,A'\,A\,P_1\,O)$, ahol A és A', illetőleg B és B' a megfelelő görbéknek P_1 és P_2, illetőleg Q_1 és Q_2 közt fekvő akármelyik két pontja, amelyek közül azonban, amint a görbéken P_1-től P_2 felé, illetőleg Q_1-től Q_2 felé haladunk, A megelőzi A'-t és B megelőzi B'-t.

Ha ugyanis a P és Q pontok közül valamelyik, például P, mert a területmérők esetében a P forgáspont az, amely ezt rendesen megcselekszi, pályájának egyik-másik elemét, amint ide-oda vándorol, egynél többször járja be, és a pályaelem P_1 és P_2 közt fekszik, a járások száma csak páratlan lehet és pedig $n+1$ járás P_2 felé tartó, n pedig P_1 felé tartó, úgy hogy az utóbbiak az előbbiek közül n-et az algebrai összegben mindig törölnek és fennmarad egyetlenegy P_2 felé tartó járás. Ha pedig a P pont a P_1 és P_2 helyeken túl is elvándorol, ami szintén gyakori eset, ott minden pályaelemet, legalább kétszer, általánosságban pedig páros számszor jár be, fele részben az egyik, fele részben a másik értelemben, úgy hogy e járások az algebrai összegben mindig teljesen törlik egymást. És hasonlóképen állana a dolog a Q csúcspontra is, ha az többször járná be pályájának egyik-másik elemét.



7. ábra.

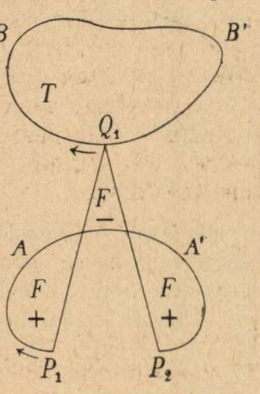
Továbbá, minthogy mindegyik sor jobboldalának második tagja és a következő sor jobboldalának negyedik tagja, mint egyenlő abszolút értékű, de ellenkező előjelű számok, az algebrai összegben (5) mintájára törlik egymást, az egész második oszlopból nem marad meg más, csak az utolsó sorban álló $(O\,Q_2\,P_2\,O)$, a negyedik oszlopból pedig csak az első sorban álló $(O\,P_1\,Q_1\,O)$, úgy hogy végeredményben a mérőkar súrolta terület S mérőszáma:



8. ábra.

$$S = (O\,Q_1\,B\,B'\,Q_2\,O) + (O\,Q_2\,P_2\,O) +$$
$$+ (O\,P_2\,A'\,A\,P_1\,O) + (O\,P_1\,Q_1\,O), \quad (7)$$

ami azonos ama zárt idom területével, amelyet a mérőkarnak kezdeti és végső helyzete, továbbá a BB' görbének Q_1 és Q_2 között fekvő része és az $A\,A'$ görbének P_1 és P_2 között fekvő része határol.



9. ábra.

A következők kedvéért célszerű (7)-ben a jobboldal utolsó három tagját egybefoglalni és írni

$$S = (O\,Q_1\,B\,B'\,Q_2\,O) + (O\,Q_2\,P_2\,A'\,A\,P_1\,Q_1\,O) \quad (8)$$

vagy még

$$S = (O\,Q_1\,B\,B'\,Q_2\,O) - (O\,Q_1\,P_1\,A\,A'\,P_2\,Q_2\,O) \quad (9)$$

6. A területmérőkkel való mérésben Q_2 összeesik Q_1-gyel, mert a mérőcsúcsot egészen körülvezetjük s felteszem, hogy csak egyszer, ama zárt idom határvonalán, amelynek területe megmérendő (8. és 9. ábra).

Ekkor tehát úgy $Q_1\,B\,B'\,Q_2$, azaz most már $Q_1\,B\,B'\,Q_1$, mint $Q_1\,P_1\,A\,A'\,P_2\,Q_2$, azaz $Q_1\,P_1\,A\,A'\,P_2\,Q_1$ zárt idom és ha a megfelelő területeket sorjában T-vel és F-fel jelöljük, a (9) alatt álló kifejezés a következőbe megy át:

$$S = T - F,$$

amiből

$$T = S + F, \tag{A}$$

a *rudas területmérők alapképlete* következik, amelyben

$$T = (O\,Q_1\,B\,B'\,Q_1\,O) = (Q_1\,B\,B'\,Q_1) \tag{10}$$

a körüljárt idom területe, S a mérőkar súrolta terület és

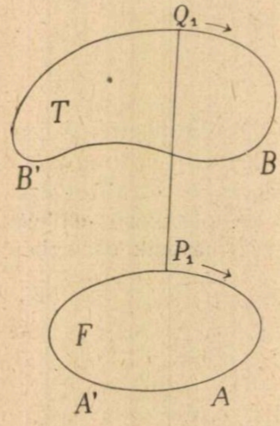
$$F = (O\,Q_1\,P_1\,A\,A'\,P_2\,Q_1\,O) = (Q_1\,P_1\,A\,A'\,P_2\,Q_1) \tag{11}$$

ama zárt idom területe, amelyet a P forgáspontnak általánosságban nyilt $P_1\,A\,A'\,P_2$ pályája a $P_2\,Q_1\,P_1$ szakasszal megtoldva alkot.

T előjele a Q csúcspont mozgása megállapította körüljárásnak, F előjele pedig a P forgáspont mozgása megállapította körüljárásnak megfelelő előjel.

Ha netalán T vagy F határvonala önmagát metszené, itt is érvényes, amit az ilyen idomokra vonatkozólag a 4. cikk említ.

Valahányszor P_2 is összeesik P_1-gyel (10. ábra), s ennek következtében a P forgáspont $P_1\,A\,A'\,P_2$, vagyis most $P_1\,A\,A'\,P_1$ pályája is zárt vonal, ami lineáris és poláris területmérők rendes esete:



10. ábra.

$$F = (O\,Q_1\,P_1\,A\,A'\,P_1\,Q_1\,O) = (P_1\,A\,A'\,P_1). \tag{12}$$

Valahányszor pedig $F = 0$, $T = S$.

Az (A) képlet kifejezte tétel a rudas területmérők elméletének alaptétele.[1]

7. Vizsgáljuk tovább a mérőkar súrolta S területet.

Az a végtelen kicsiny $(Q\,Q'\,P'\,P\,Q) = d\,S$ területelem (3. és 6. ábra), amelyet a mérőkar súrol, mialatt a $P\,Q$ helyzetből átmegy a végtelen közelfekvő $P'\,Q'$ helyzetbe, magasabbrendű végtelen kicsiny különbséget számba nem véve, egyenlő azzal a vele egyrendű végtelen kicsiny $(Q\,Q''\,Q'\,P'P\,Q)$ területtel, amelyet a mérőkar akkor súrolna, ha előbb önmagával párhuzamosan haladna, amíg a $P\,Q$-val párhuzamos $P'\,Q''$ helyzetbe kerül, azután pedig forogna P' körül, amíg a $P'\,Q'$ helyzetbe jut. A két terület ugyanis a $QQ''\,Q'$, háromszöghöz hasonló idom területével különbözik csak egymástól, amely terület, minthogy minden mérete legalább is olyanrendű végtelen kicsiny, mint $P\,P'$ és $Q\,Q'$, az ezekkel az útelemekkel egyenlőrendű $(Q\,Q'\,P'\,P\,Q)$ területhez mérten legalább is másodrendű végtelen kicsiny.

Irható tehát, hogy a súrolt területelem:

$$d\,S = q\,d\,u + \frac{1}{2}\,q^2\,d\varphi,$$

ahol, mint a 3. cikkben is, $d\,u$ P'-nek $P\,Q$-tól való távolsága és $d\,\varphi$ a szög, amelyet a $P'\,Q'$ irány bezár a $P\,Q$ iránnyal.

Az egész súrolt terület tehát

$$S = q \int d\,u + \frac{1}{2}\,q^2 \int d\varphi,$$

vagy még

$$S = q \int d\,u + \frac{1}{2}\,q^2\,(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{13}$$

[1] Az alapképletnek e cikkben és a két megelőzőben foglalt levezetése azonos azzal, amelyet 1908-ban tettem közzé.

Az alapképlet kifejezte tételnek ama speciális esetével, amely felteszi, hogy P_2 összeesik P_1-gyel, azelőtt is találkoztunk a területmérők irodalmában. Ez a speciális tétel azonban azonkívül, hogy nem alkalmazható arra az esetre, amikor P_2 nem esik össze P_1-gyel (*Prytz*-féle területmérő), a T, S és F területek összefüggéséről sem ad helyes felvilágosítást.

az integrálást a P pont egész útjára kiterjesztve és $(\varphi_2 - \varphi_1)$-ben a 2π-nek esetleges pozitív vagy negatív egész számszorosait is figyelembe véve, mert itt $\varphi_2 - \varphi_1$ nem a mérőkar kezdeti és végső helyzetbeli irányszögeinek különbségét, hanem a mérőkarnak a T területű idom körüljárása alatt végbemenő egész forgását fejezi ki.

Ha $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, a súrolt terület:

$$S = q \int d u.$$

Használjuk most fel S-nek (13) alatt nyert értékét az (A) alapképletben. Ezáltal az alapképlet a következő, ezután röviden (B) alaknak nevezett, szintén *általános érvényű* alakot ölti:

$$T = q \int d u + \frac{1}{2} q^2 (\varphi_2 - \varphi_1) + F, \tag{B}$$

amelyben, mint (11), illetőleg (12) alatt:

$$F = (Q_1 P_1 A A' P_2 Q_1), \text{ illetőleg } F = (P_1 A A' P_1)$$

aszerint, amint a P forgáspont pályája nyitott vagy zárt.

Az alapképletnek ez alakjából az olvasható ki, hogyha valamiképpen módunkban van az $\int d u$, $\varphi_2 - \varphi_1$ és F mennyiségeket meghatározni, ezzel egyúttal a körüljárt idom T területe is ismeretessé válik.

Ha $\varphi_2 - \varphi_1$ és F mindkettő zérus,

$$T = q \int d u.$$

8. A rudas területmérők legegyszerűbben aszerint osztályozhatók, hogy milyen a mérőkarjuk forgáspontjának kényszerpályája vagyis a vezetővonaluk.

E szempontból tekintve, először is megkülönböztethetjük az olyan területmérőket, amelyekben a vezetővonal mindig egy és ugyanaz, bárminő idomot járjunk is körül a mérőcsúccsal. Legfeljebb a vezetővonal és az idom viszonylagos helyzete más és más aszerint, hogy hogyan helyezzük el a területmérőt az idom síkján a körüljárás előtt. Másodszor pedig az olyan területmérőket, amelyekben a vezetővonal mindig más és más, amint más-más idomot járunk körül vagy más a területmérőnek az idomhoz képest való elhelyezése a körüljárás kezdetén.

A mostanság használatosabb területmérők közül az első osztályba tartoznak a *lineáris* és a *poláris területmérők,* a másodikba pedig a *Prytz-féle területmérő.*

A lineáris és a poláris területmérők vezetővonala állandó vonal — a lineárisoké *egyenes*, a polárisoké *kör* — a *Prytz*-féléé ellenben változó, de meghatározott fajta, úgynevezett *üldözőgörbe.*

A 3. cikkben, a mérőkarnak már többször vizsgált végtelen kicsiny tovavándorlásának megfelelően (4) alatt azt találtuk, hogy akár a rajz papirosán, akár pedig más felületen gördüljön a mérőkerék, gördülése:

$$d\varkappa = d\varkappa_u + d\varkappa_\varphi$$

amely kifejezés összefüggést állapít meg $d\varkappa$, $d u$ és $d\varphi$ között.

Ha tehát ezt a kifejezést a mérőkarnak az idom körüljárása közben elfoglalt minden egymásutáni helyzetére, azaz más szóval, a P forgáspontnak a vezetővonalon befutott egész útjára terjedőleg integrálva gondoljuk, összefüggést kapunk $\int d\varkappa$, $\int d u$ és $\int d\varphi$ között.

E három integrál közül

$$\int d\varkappa = \varkappa_2 - \varkappa_1 \text{ és } \int d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1,$$

ha tudniillik, $\varkappa_1$ a mérőkerék gördülésszögének és φ_1 a mérőkar irányszögének az idom körüljárása kezdetén való értéke, $\varkappa_2$ és φ_2 pedig ugyanaz a körüljárás végén; s megjegyzendő, hogy nemcsak $(\varphi_2 - \varphi_1$-ben, hanem $(\varkappa_2 - \varkappa_1)$-ben is a 2π-nek esetleges pozitív vagy negatív egész-számszorosai szintén számításba veendők, mert valamint $\varphi_2 - \varphi_1$ a mérőkarnak, azonképpen kell, hogy kifejezze $\varkappa_2 - \varkappa_1$ is a mérőkeréknek az idom körüljárása közben végbemenő egész forgását.

A mérőkeréknek a vele kapcsolatos forgásmérővel mindig könnyen meghatározható $\varkappa_2 - x_1$ gördülése eszerint függvénye az alapképlet (B) alakjának jobboldalán előforduló $\int du$-nak és $(\varphi_2 - \varphi_1)$-nek. Ha tehát e két mennyiség közül az egyik más úton ismeretes — például a lineáris és a poláris területmérőknél, amelyeknél $\varphi_2 - \varphi_1$ vagy zérus, vagy egyébképpen is könnyen meghatározható — felhasználhatjuk a forgásmérővel megmérhető $(\varkappa_2 - \varkappa_1)$-t a másiknak meghatározására — az említett területmérőknél $\int du$ meghatározására. A *Prytz*-féle területmérőnél ellenben, amelynél $\int du$ mindig zérus, ha mérőkereket alkalmazunk reá, amint a 14. cikkben látni fogjuk, felhasználhatjuk ennek $\varkappa_2 - \varkappa_1$ gördülését az e területmérőnél mindig ismeretlen $\varphi_2 - \varphi_1$ meghatározására.

Hajtsuk most végre az imént említett integrálást a (4) alatti kifejezésnek a 3. cikkben, (4a) alatt nyert alakján, amely érvényes a körüljárt idom síkján gördülő mérőkerékkel ellátott területmérőkre.

(4a) szerint, az ilyen területmérőknél:

$$d\varkappa = \frac{1}{r} du + \frac{k}{r} d\varphi ;$$

ebből pedig, integrálva, az következik, hogy

$$\varkappa_2 - \varkappa_1 = \frac{1}{r} \int du + \frac{k}{r} (\varphi_2 - \varphi_1) \tag{14}$$

és ebből

$$\int du = r(\varkappa_2 - \varkappa_1) - k(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{15}$$

Legyen a mérőkerékkel kapcsolatos forgásmérő skálaegysége: $\frac{2\pi}{v}$, s ez egységben kifejezve, legyen a mérőkerék egész forgása:

$$\varkappa_2 - \varkappa_1 = n \frac{2\pi}{v}, \tag{16}$$

ahol

$$n = l_2 - l_1, \tag{17}$$

lévén l_1 a forgásmérő skáláján a körüljárás megkezdése előtt, l_2 pedig a befejezése után tett leolvasás.

Ennek felhasználásával a (15) alatti kifejezés következőképpen írható:

$$\int du = r n \frac{2\pi}{v} - k(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{18}$$

s ha most $\int du$-nak ezt az értékét levezetjük az alapképlet (B) alakjába, azt nyerjük, hogy a körüljárt idom területe:

$$T = q r n \frac{2\pi}{v} + q\left(\frac{1}{2} q - k\right)(\varphi_2 - \varphi_1) + F, \tag{19}$$

amit emigy is írhatunk:

$$T = T_1 n + q\left(\frac{1}{2} q - k\right)(\varphi_2 - \varphi_1) + F, \tag{C}$$

ahol

$$T_1 = q r \frac{2\pi}{v} \tag{20}$$

úgynevezett *műszerállandó* és (17) szerint

$$n = l_2 - l_1,$$

F pedig ugyanazt jelenti, amit már az (A) és a (B) alakban is jelentett.

Megjegyzésre méltó, hogyha $k = \frac{1}{2} q$, a jobboldalon a második tag, $\varphi_2 - \varphi_1$-től függetlenül zérus.

A (C) alakban az alapképletnek olyan *speciális* alakját nyertük, amely közvetetlenül alkalmazható *minden a rajz papirosán gördülő mérőkerékkel ellátott rudas területmérőre.*

Ezeknek előrebocsátása után lássuk most röviden az alapképletnek néhány leginkább használt területmérőre való alkalmazását. A *Prytz*-félén kívül csak a nálunk legjobban elterjedt, *Coradi*-nál, Zürichben készülő területmérőket veszem vizsgálat alá.[1]

II.

Az alapképlet alkalmazása.

9. Egyszerű lineáris területmérő. Vázlata a 11. ábrában.

A mérőrúd és a P forgáspont egyenes járását biztosító vonalzó: ezek ennek a területmérőnek a fő alkotórészei.

Vezetővonala az A-val jelölt egyenes.

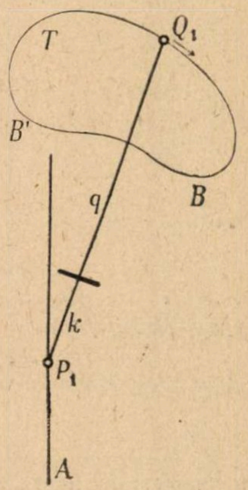
Mérőkereke a rajz síkján gördül, amiből az következik, hogy reá az alapképlet (C) alakja alkalmazható.

Használat közben a q egyenes vagyis a mérőkar sohasem megy át a vezetővonalra *normális* helyzeten, amiből az következik, hogy a P forgáspont a körüljárás végén mindig visszatér kiinduló helyére, azaz P_2 összeesik P_1-gyel s így, lévén a P pont pályája egyenes, az F terület zérus és zérus a q egyenesnek $\varphi_2 - \varphi_1$ eredő forgása is, amiknek figyelembe vételével, az alapképlet (C) alakjából a körüljárt idom területe, e területmérő használata esetében, következőképpen számítható ki:

$$T = T_1\, n.$$

A $T_1 = q\, r \dfrac{2\pi}{v}$ állandó tudvalevőleg előre ismeretes területű idom körüljárásával határozható meg.

Ha $n = 1$, $T = T_1$, ami azt jelenti, hogy T_1 úgy értelmezhető, mint a forgásmérő skálaegységének megfelelő terület.



11. ábra.

10. Egyszerű poláris területmérő. Feltalálója után többnyire *Amsler*-félének nevezik. Vázlata a 12. ábrában.[2]

A P tengely foroghatólag köti össze a PQ mérőrudat az OP poláris rúddal, emez pedig, s vele együtt az egész területmérő, foroghat az O pólus körül. A szerkezet gondoskodik róla, hogy az O pólus, mérés közben, el ne mozdulhasson a körüljárt idom síkján.

Mint eddig következetesen a mérőkar PQ hosszúságát q-val, jelöljük ezután a poláris kar OP hosszúságát p-vel.

A P forgáspont vezetővonala az A-val jelölt p sugarú kör.

A mérőkerék e területmérőnel is a rajz síkján gördül, reá is tehát az alapképlet (C) alakja alkalmazható.

Gondoljuk először a területmérőt a rajz síkján úgy elhelyezve (12. ábra, a), hogy pólusa kívül essék a T idomon.

[1] Lásd *G Coradi: Die Planimeter Coradi, Zürich.* E már sok kiadást megért kis füzet olvasása mindenkinek hasznos, akinek területmérőkkel van dolga. Nemcsak a különféle Coradinál készülő kitűnő területmérők gondos leírása található meg benne, hanem sok becses útmutatás is a területmérők kezelésére és gondozására.

[2] Lásd: *Jakob Amsler: Über die mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes, der statischen Momente und der Trägheitsmomente ebener Figuren, insbesondere über einen neuen Planimeter. Schaffhausen,* 1856.

Alfred Amsler: Über den Flächeninhalt und das Volumen durch Bewegung erzeugter Curven und Flächen und über mechanische Integrationen. Schaffhausen, 1881.

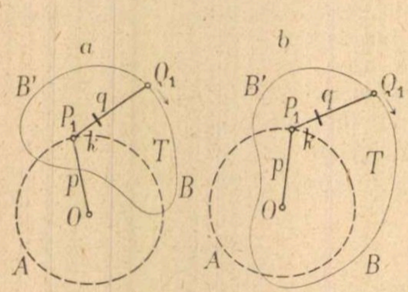
Mérés közben a mérőkar itt sem megy át a vezetővonalra, vagyis a p sugarú vezetőkörre normális (sugár-) irányon, a P pont tehát a körüljárás végén itt is visszatér kiinduló helyére, azaz P_2 ismét összeesik P_1-gyel, s minthogy bármelyik és bármekkora részét a vezetőkörnek járja is be a P pont. és bárhányszor is, mindig ugyanannyiszor az ellenkező értelemben is bejárja, az F terület ismét zérus, valamint $\varphi_2 - \varphi_1$ is, úgy hogy az alapképlet (C) alakjából itt is az következik, hogy a körüljárt idom területe:

$$T = T_1 n. \tag{21}$$

Amint látjuk, az idomon kívül fekvő pólus mellett, $T_1 = q r \frac{2\pi}{v}$ e területmérőnél is úgy értelmezhető, mint a forgásmérő skálaegységének megfelelő terület.

Gondoljuk most a poláris területmérőt úgy elhelyezve (12 ábra, b), hogy pólusa belül álljon a T idomon.

Minthogy a mérőkar mérés közben ekkor sem szokott normális helyzeten átmenni, P_2 újból is összeesik P_1-gyel, a körüljárás alatt azonban a P pont mindig teljesen körüljárja a vezetőkört ugyanabban az értelemben, amelyben a Q pont az idomot és pedig úgy, hogyha valamelyik részét a körnek többször járja be, mindig eggyel többször ebben az értelemben, mint az ellenkezőben.



12. ábra.

Belül fekvő pólus mellett tehát F nem zérus, hanem egyenlő a vezetőkör területével, azaz

$$F = \pi p^2.$$

Továbbá $\varphi_2 - \varphi_1$ sem zérus, mert a mérőkar ugyanabban az értelemben egyszer teljesen megfordul s így

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$$

és (C)-ből az következik, hogy

$$T = T_1 n + q\left(\frac{1}{2} q - k\right) 2\pi + \pi p^2,$$

vagy összevonva:

$$T = T_1 n + \pi (p^2 + q^2 - 2qk),$$

vagy még rövidebben:

$$T = T_1 n + T_0 \tag{22}$$

ahol $T_0 = \pi (p^2 + q^2 - 2qk)$ a poláris területmérőnek egy második állandója, amely úgy értelmezhető, mint az O pólus körül

$$\varrho_0 = (p^2 + q^2 - 2qk)^{\frac{1}{2}}$$

sugárral leírt kör területe, s könnyű meggyőződni, hogy ϱ_0 egyenlő a mérőcsúcsnak a pólustól való távolságával akkor, amikor a poláris kar és a mérőkar úgy hajlik egymáshoz, hogy a mérőkerék síkja éppen a póluson megy át.

Ha a mérőcsúcs ezen a körön járna körül, $n = 0$ volna. A mérőkerék ugyanis csak csúsznék és nem gördülne.

A T_1 és T_0 állandók előre ismeretes területű idomnak belül és kívül fekvő pólussal való körüljárásával határozhatók meg.

A kívül álló pólus esetében, éppen úgy mint a lineáris területmérők esetében is, semmi különbséget sem okoz, hogy a körüljárt idom határvonala metszi-e önmagát vagy sem. A belül álló pólus esetében egyelőre hallgatagon azt tettem fel, hogy nem metszi. Ha azt tesszük fel, hogy metszi, amikor is az idom több alkotó zárt idomból tevődik össze, amelyeknek határvonalai önmagukat nem metszik, és ha $m_p + m_n$ mindazoknak az alkotó idomoknak a száma, amelyeknek a pólus egyidejűleg a belsejében fekszik és ezek közül m_p azoknak a száma, amelyeket a mérőcsúcs pozitív körüljárással, m_n pedig azoké, amelyeket negatív körüljárással jár körül:

$$F = m\pi p^2, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = m\,2\pi$$

és

$$T = T_1 n + T_0 m, \tag{23}$$

ahol

$$m = m_p - m_n$$

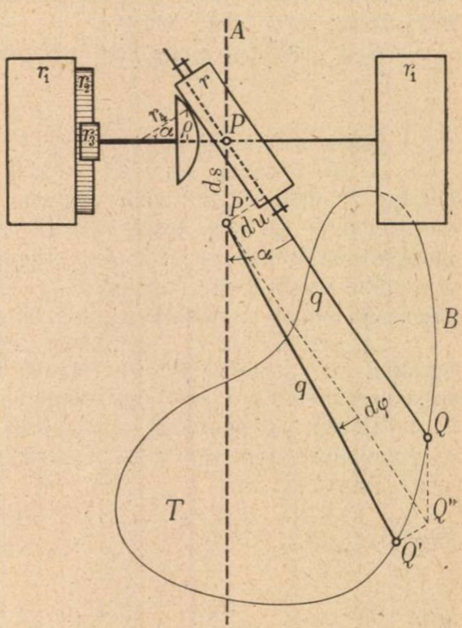
pozitív vagy negatív egész szám vagy zérus is lehet.

Amint látjuk, a (21) és (22) alatt álló képletek, amelyekre a poláris területmérőnek általánosan szokásos önálló tárgyalása is vezet, csak speciális esetei a (23) alatt álló képletnek.

Igy például, ha az 5. ábrában az *a, b, c, d* és *e* idomokban a pólust a ponttal jelölt alkotó idom belsejében gondoljuk elhelyezve és a nyilakkal jelzett úton és értelemben járunk körül, az m szám sorjában: -1, $+1$, $+2$, 0 és -2.

11. Gömbszeletes lineáris területmérő. Vázlata a 13. ábrában.[1]

Mialatt körülvezetjük a Q mérőcsúcsot a T területű idom B határvonalán, ez a területmérő — parányi úthengerlőhöz hasonlóan, amelynek a mérőrúd a húzó-tolórúdja — a rajz papirosán gördülő két vaskos hengeren jár, még pedig mindig egyazon egyenes pályán előre-hátra, mert a két henger, szilárdan hozzá lévén a közös forgástengelyhez erősítve, csak együttesen gördülhet, sugaruk meg egyenlő. Ezenkívül meglehetősen súlyos is ez a két henger és széles meg érdes felületű, ami, gondos kezelés mellett, megakadályoz az egyenes iránytól való minden félrecsúszást.



13. ábra

Ebből az következik, hogy a P forgáspontnak az ábrában A-val jelölt kényszerpályája — a vezetővonal — egyenes vonal. A területmérő tehát lineáris.

Mihelyt a területmérőt a rúdnál fogva mozgásba hozzuk, s az előbb említett, r_1 sugarú hengerek gördülni kezdenek, a velük egytengelyű és az egyik hengerrel — az ábrában a baloldalival — egy testet alkotó, tehát vele együtt forgó r_2 sugarú fogaskerék forgásba hozza a felülről beléfogódzó r_3 sugarú kis fogaskereket és emez a vele közös forgástengelyű r_4 sugarú gömbszeletet. A gömbszelet azután, a surlódás közreműködésével, forgásba hozza a rugótól húzva, neki támaszkodó, hengeralakú r sugarú mérőorsót, amelynek forgása a vele kapcsolatos forgásmérővel megmérhető.

Az említett rugó tulajdonképpen nem a mérőorsót, hanem azt a mérőrúdon beágyazott és a mérőkarral párhuzamos tengely körül forgó álló rámát húzza a gömbszelet felé, amely a mérőorsónak a mérőkarral szintén párhuzamos forgástengelyét tartja.

A gömbszelet tengelye párhuzamos a két henger közös tengelyével és vele egy függőleges síkban fekvő. Ugyane síkban áll a mérőkarnak P vetületű, függőleges forgástengelye is. A mérőorsó forgástengelye pedig, mikor a mérőkarral együtt merőlegesen áll a hengerek tengelyére, egy vízszintes síkban fekszik a gömbszelet tengelyével s nagyon közel marad e síkhoz minden más állásában is, úgy hogy a mérőorsó a gömbszeleten a csúszásnak szinte teljes kirekesztésével gördül.

Minthogy a mérőkerék szerepét játszó mérőorsó nem a rajz síkján gördül, e területmérőre az alapképletnek nem a (C) speciális, hanem a (B) általános érvényű alakja alkalmazandó.

[1] *Coradi* elnevezése szerint: *Kugelrollplanimeter.*

Hogy pedig alkalmazhassuk, amit a 3. és 8. cikkben a rajz síkján gördülő mérőkerékre vonatkozólag tettünk, meg kell most a gömbszeleten gördülő mérőorsóra vonatkozólag ismételnünk, s vizsgálnunk, hogy minő függvénye a mérőorsó $d\varkappa$ gördülése a mérőkar végtelen kicsiny elmozdulásának, vagyis du-nak és $d\varphi$-nek, illetőleg, integrálás után, minő függvénye $\int d\varkappa = \varkappa_2 - \varkappa_1$ $\int du$-nak és $\int d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$-nek. Ezzel ugyanis módunkban lesz a (B) alakban előforduló $\int du$-t újból a másik két integrál függvényében kifejezni.

A gördülésnek előbb említett $d\varkappa$ végtelen kicsiny szöge, mint a 3. cikkben kifejtettük, egyenlő $(d\varkappa_u + d\varkappa_\varphi)$-vel, ahol $d\varkappa_u$ a külön végrehajtottnak gondolt du haladásból, $d\varkappa_\varphi$ pedig a szintén külön elvégzettnek képzelt $d\varphi$ forgásból származó gördülés.

A mérőkar mozgásának e két alkotója közül azonban e területmérőnél egyedül a haladás okozhat gördülést, mert csak ez az egy hozza a hengereket és velük együtt a fogaskerekeket s ennek folytán a mérőorsót gördítő gömbszeletet is forgásba. A P tengely körüli forgás megváltoztatja ugyan a mérőorsó irányát és ennek következtében az érintkezőpontot is mérőorsó és gömbszelet között, de semminemű más mozgást a szerkezetben nem okoz; $d\varkappa_\varphi$ tehát zérus.

A 3. cikk (4) alatti kifejezése eszerint itt a következő alakot ölti:

$$d\varkappa = d\varkappa_u.$$

Hátra van még, hogy $d\varkappa_u$-t du függvényében fejezzük ki.

A 13. ábrában ds a P pontnak végtelen kicsiny PP' útja; du, mint eddig is mindig, P'-nek PQ-tól való végtelen kicsiny távolsága és $d\varphi$ a végtelen kicsiny szög, amelyet a $P'Q'$ irány bezár a PQ iránnyal, α pedig a szög, amelyet P-ben a P pont mozgásának iránya bezár a PQ iránnyal. Ugyanekkora szöget zár be a gömbszeletnek a fentebb említett érintkezőponthoz tartozó sugara is a gömbszelet tengelyével; ϱ a távolsága ennek az érintkezőpontnak a gömbszelet tengelyétől.

Legyen $d\varepsilon$ az r_1 sugarú két hengernek a ds útnak megfelelő gördülésszöge, amely egyúttal az r_2 sugarú fogaskeréknek is a forgásszöge, s legyen $d\zeta$ az r_3 sugarú kis fogaskeréknek és a vele egy tengelyű gömbszeletnek ebből származó közös forgásszöge.

Először is, minthogy a hengerek minden csúszás nélkül gördülnek, gördülésük íve, a tengelyükre normális metszet kerületén mérve:

$$r_1\, d\varepsilon = d s,$$

amiből

$$d\varepsilon = \frac{1}{r_1} ds$$

következik. Továbbá lévén az r_2 és r_3 sugarú fogaskerekeknek egymásba fogódzása folytán

$$r_3\, d\zeta = r_2\, d\varepsilon = \frac{r_2}{r_1} ds,$$

$$d\zeta = \frac{r_2}{r_1 r_3} ds.$$

A gömbszeletnek $d\zeta$ forgása tehát arányos a P forgáspontnak a vezetővonalon befutott ds útjával. A szerkezetnek ez a tulajdonsága biztosítja $d\varkappa_u$-nak, azaz itt magának $d\varkappa$-nak is, $ds \sin\alpha$-val, vagyis du-val való arányosságát.

A gömbszelet és a mérőorsó közt működő surlódás hatása folytán ugyanis

$$r\, d\varkappa_u = \varrho\, d\zeta = r_4 \sin\alpha\, d\zeta = \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} ds \sin\alpha,$$

s így

$$d\varkappa_u = \frac{1}{r} \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} ds \sin\alpha$$

vagy még $ds \sin\alpha$ helyett du-t, $d\varkappa_u$ helyett pedig $d\varkappa$-t írva:

$$d\varkappa = \frac{1}{r}\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} du \tag{4b}$$

Megvan tehát, amit kívántunk: a mérőorsó gördülése du függvényében kifejezve. Ebből azután, az egész körüljárásra terjedőleg integrálva, a mérőorsó egész gördülése:

$$\varkappa_2 - \varkappa_1 = \frac{1}{r}\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}\int du$$

s viszont

$$\int du = r\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}(\varkappa_2 - \varkappa_1)$$

vagy még, $(\varkappa_2 - \varkappa_1)$-t, (16) mintájára, a forgásmérő skálaegységében kifejezve:

$$\int du = r\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} n \frac{2\pi}{\nu},$$

s ha $\int du$-nak ezt az értékét bevisszük az alapképlet (B) alakjába, leend a körüljárt idom területe az itt tárgyalt területmérő használata esetében:

$$T = qr\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} n \frac{2\pi}{\nu} + \frac{1}{2} q^2(\varphi_2 - \varphi_1) + F$$

vagy rövidebben írva:

$$T = T_1 n + \frac{1}{2} q^2(\varphi_2 - \varphi_1) + F,$$

ahol

$$T_1 = qr\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}\frac{2\pi}{\nu}$$

a területmérő állandója.

Minthogy azonban ugyanazért, amiért az egyszerű lineáris területmérőnél, ennél is $\varphi_2 - \varphi_1$ és F mindkettő zérus, a körüljárt idom területe itt is, mint ott, következőképpen számítható ki:

$$T = T_1 n,$$

ahol (17) szerint $n = l_2 - l_1$.

12. Korongos poláris területmérő. Vázlata a 14. ábrában.[1]

E területmérőben éppen úgy, mint az *Amsler*-félében, a P forgástengely összeköti a PQ mérőrudat az OP poláris rúddal. Itt is q a mérőkar, p a poláris kar hosszúsága.

Az O pólus egy köralakú, r_1 sugarú, fogazott szélű, nehéz tárcsa középpontjában van, amely tárcsa, nagy súlya folytán, mérés közben mozdulatlanul helyén marad a rajz lapján.

A poláris rúdba, közepe táján, egy függőleges forgástengely van beágyazva, amelyhez, alul, az előbb említett tárcsa fogazásába fogódzó r_2 sugarú kis fogaskerék, felül pedig, a mérőrúdon átnyúló felső végéhez, a z-vel jelölt aluminiumkorong van szilárdan hozzáerősítve.

E korongnak vízszintes síklapján gördül az r sugarú mérőkerék.

A mérőkeréknek a mérőkarral párhuzamos tengelyét egy kis ráma tartja, amely maga is a mérőrúdon beágyazott és a mérőkarral szintén párhuzamos tengely körül foroghat és súlyával rányomja a mérőkereket a korongra, ezzel is fokozván közöttük a surlódást.

A mérőkerék síkja keresztülmegy a P forgástengelyen. Az a méret tehát, amelyet a 2. cikkben k-val jelöltünk, itt zérus.

E területmérő vezetővonala, mint az *Amsler*-féléé, az a p sugarú kör, amelynek a pólus a középpontja.

Mihelyt körül kezdjük vezetni a Q mérőcsúcsot a T területű idom B határvonalán, a poláris rúd forogni kezd a pólus körül és eközben a r_2 sugarú kis fogaskerék, a nagy

[1] *Coradi* elnevezése szerint: *Präzisions-Scheibenplanimeter.*

tárcsa fogazásától kényszerítve, maga is forgásba jő s forgásba hozza saját tengelyét az ennek tetejéhez erősített z koronggal együtt; emez pedig, a surlódás közreműködésével, a rajta álló mérőkereket.

Minthogy a mérőkerék nem a rajz síkján gördül, e területmérőre is az alapképlet (B) általános alakja alkalmazandó. Előbb azonban itt is ki kell fejezni az ebben az alakban előforduló $\int du$-t $\varkappa_2 - \varkappa_1$ és $\varphi_2 - \varphi_1$ függvényében.

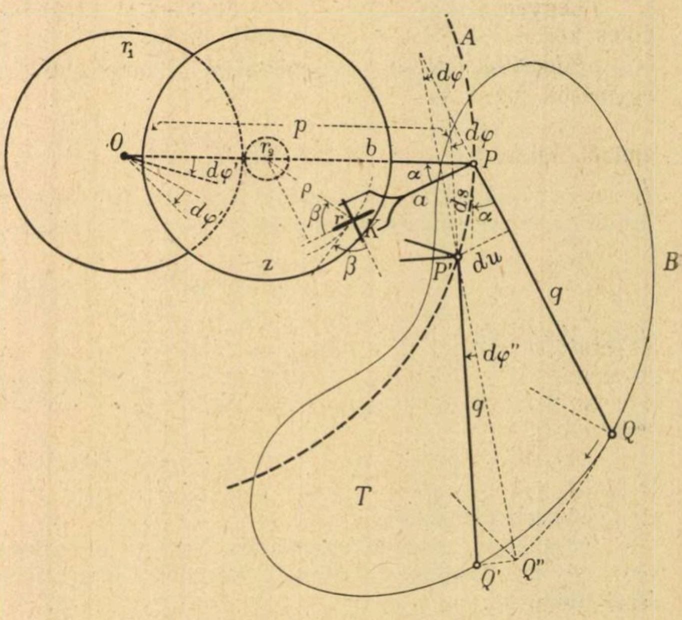
Jelöljük $d\varphi'$-vel a P forgáspont végtelen kicsiny PP' körív útjának szintén végtelen kicsiny középponti szögét, s erre tekintettel írjuk a végtelen kicsiny $d\varphi$ szöget, amelyet a mérőkarnak PQ-tól $P'Q'$-ig terjedő végtelen kicsiny elmozdulásában a $P'Q'$ irány bezár a PQ iránnyal, két részre osztva, a következő alakban:

$$d\varphi = d\varphi' + d\varphi''.$$

Ennél is, mint a többi területmérőnél $d\varkappa = d\varkappa_u + d\varkappa_\varphi$, azaz tekintettel $d\varphi$-nek az imént történt két részre osztására:

$$d\varkappa = d\varkappa_u + d\varkappa_{\varphi'} + d\varkappa_{\varphi''},$$

ami a 3. cikkben mondottak szerint azt fejezi ki, hogy a mérőkeréknek a mérőkar előbb említett végtelen kicsiny tovavándorlása alatt bekövetkező $d\varkappa$ gördülése, a határértékben eltűnő hibával, egyenlőnek tekinthető ama három gördülésnek algebrai összegével, amelyek bekövetkeznének, ha a mérőkar a du haladást meg a $d\varphi'$ és $d\varphi''$ P körüli forgást nem egyidejűleg, hanem egymásután végezné.



14. ábra.

A három gördülés közül azonban a két elsőnek algebrai összege, hasonlóképpen eltűnő hibával, egyenlőnek tekinthető azzal a gördüléssel, amelyet egymaga okozna egy $d\varphi'$ nagyságú, nem a P tengely, hanem az O pólus körül végbemenő forgás, amelyet a mérőkar a poláris karral együtt végezne anélkül, hogy egymáshozi hajlásuk megváltoznék.

Ez a forgás ugyanis az egyidejűleg végbemenő két első alkotó mozgásnak — a du haladásnak, és a P körüli $d\varphi'$ forgásnak — az eredője. Általa éppen úgy eljut P P'-be és PQ az ábrában is feltüntetett, PQ-val $d\varphi'$ szöget záró $P'Q''$-be, mint ama kettő által.

Minthogy azonban ennek a területmérőnek is olyan a szerkezete, hogy a mérőrúdnak P körüli forgása sohasem okozhat mérőkerék-gördülést, s ennek következtében $d\varkappa_{\varphi'}$ és $d\varkappa_{\varphi''}$ mindkettő zérus, a fenti három gördülés közül nemcsak a két elsőnek, hanem mind a háromnak is az algebrai összege, s így maga a keresett $d\varkappa$ is egyenlőnek tekinthető az egy $d\varphi'$ nagyságú, pólus körüli forgás okozta gördüléssel, amely könnyen lévén kiszámítható, $d\varkappa$-nak kényelmes meghatározására szolgál.

Hogy pedig a mérőrúdnak P tengely körüli forgása nem okozhat gördülést, azért van, mert a mérőkerék síkja keresztülmegy a P tengelyen, s így, mikor a mérőrúd és vele együtt a mérőkerék e tengely körül forog, megváltozik ugyan a mérőkerék síkjának iránya és a helyét is megváltoztatja a z korongon a mérőkerék, de nem gördülve, hanem csak csúszva, oldalvást, az a sugarú kör mentén, lévén a a mérőkerék talppontjának távolsága a P tengelytől.

A 14. ábrában du, $d\varphi$, p, q mind ugyanazt jelentik, amit eddig is szoktak jelenteni és α is azt a szöget, amelyet P-ben a P pont mozgási iránya, azaz a vezetőkörnek ez irányt meghatározó P pontbeli érintője bezár a PQ iránnyal. Ugyanekkora szöget zár be a PO irány is a PK iránnyal.

b a z korong középpontjának P-től való távolsága és ϱ a mérőkerék K talppontjának a korong középpontjától való távolsága, β pedig a szög, amelyet ez a ϱ mint vezérsugár bezár a mérőkerék síkjával, amely szög egyenlő azzal, amelyet a mérőkerék alatt forgó korongnak a mérőkereket alátámasztó pontjának mozgási iránya bezár a mérőkerék tengelyének kifelé tartó irányával.

ds a P pontnak végtelen kicsiny PP' útja a vezetőkörön.

$d\varphi'$, $d\varphi''$ és α-ról már szóltam.

Legyen $d\varepsilon$ az r_2 sugarú kis fogaskeréknek és a vele együtt forgó z korongnak a pólus körüli $d\varphi^1$ forgás okozta elfordulása.

Mindenekelőtt az r_2 sugarú kis fogaskeréknek és az r_1 sugarú fogas tárcsának egymásba fogódzása folytán:

$$r_2\, d\varepsilon = r_1\, d\varphi',$$

amiből, tekintettel arra, hogy

$$d\varphi^1 = \frac{ds}{p},$$

$$d\varepsilon = \frac{r_1}{r_2}\frac{1}{p}\, ds$$

következik, s mint a szerkezetre nézve jellemző, megjegyzendő, hogy a z aluminiumkorongnak $d\varepsilon$ forgása itt is arányos a P forgáspontnak a vezetővonalon befutott ds útjával, ami itt is biztosítja a mérőkerék gördülésének $ds \sin\alpha$-val, azaz du-val való arányosságát.

Az aluminiumkorong és a mérőkerék között fellépő surlódás hatása folytán ugyanis, a mérőkerék gördülését máris $d\varkappa$-val jelölve:

$$r\, d\varkappa = \varrho\, d\varepsilon \sin\beta = b\, d\varepsilon \cdot \sin\alpha = \frac{r_1}{r_2}\frac{b}{p}\, ds \sin\alpha$$

azaz, tekintettel arra, hogy határértékében $ds \sin\alpha = du$:

$$r\, d\varkappa = \frac{r_1}{r_2}\frac{b}{p}\, du,$$

s ebből a kivánt eredmény:

$$d\varkappa = \frac{1}{r}\frac{r_1}{r_2}\frac{b}{p}\, du \tag{4c}$$

vagy az egész körüljárásra terjedőleg integrálva, a mérőkerék egész gördülése:

$$\varkappa_2 - \varkappa_1 = \frac{1}{r}\frac{r_1}{r_2}\frac{b}{p}\int du,$$

amiből

$$\int du = r\frac{r_2}{r_1}\frac{p}{b}(\varkappa_2 - \varkappa_1)$$

következik, vagy $(\varkappa_2 - \varkappa_1)$-nek a forgásmérő szolgáltatta $n\dfrac{2\pi}{v}$ értékét használva:

$$\int du = r\frac{r_2}{r_1}\frac{p}{b}\, n\frac{2\pi}{v},$$

aminek a (B) alakba való bevezetésével azt kapjuk, hogy a körüljárt idom területe:

$$T = q\, r\frac{r_2}{r_1}\frac{p}{b}\, n\frac{2\pi}{v} + \frac{1}{2}q^2(\varphi_2 - \varphi_1) + F$$

vagy rövidebben írva:

$$T = T_1 n + \frac{1}{2} q^2 (\varphi_2 - \varphi_1) + F,$$

ahol

$$T_1 = q r \frac{r_2}{r_1} \frac{p}{b} \frac{2\pi}{v}$$

e területmérőnek egyik állandója.

Itt is, mint az *Amsler*-féle poláris területmérőnél, a körüljárt idom milyensége és a területmérő használatának módja szerint, több esetet különböztethetünk meg.

A legáltalánosabb az, amikor az idom határvonala magamagát metszi és a pólust az idom belsejébe helyezzük el. Ez esetben, mint az *Amsler*-féle területmérőnél, itt is

$$F = m \pi p^2 \text{ és } \varphi_2 - \varphi_1 = m 2\pi,$$

ahol $m = m_p - m_n$, minden betűnek ugyanaz lévén a jelentése, mint ott.

Ekkor tehát

$$T = T_1 n + \pi (p^2 + q^2) m,$$

vagy ugyanabban az alakban írva, amelyet ott is használtunk:

$$T = T_1 n + T_o m,$$

ahol $T_o = \pi (p^2 + q^2)$ a területmérőnek egy második állandója, amely úgy értelmezhető, mint az O pólus körül

$$\varrho_o = (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$$

sugárral leírt kör területe. S ha figyelembe vesszük, hogy itt $k = 0$, ez ugyanolyan tulajdonságú kör, amilyenről amott is szó volt.

Ha a határvonal magamagát nem metszi, $m = 1$ és

$$T = T_1 n + T_0.$$

Ha pedig a pólus kívül fekszik az idomon, akár metszi a határvonal önmagát, akár nem, $m = 0$ és

$$T = T_1 n.$$

Minthogy a poláris tárcsa fogazásának rendesen csak egy a tárcsa peremén megjelölt része pontosabban kidolgozott és hasznavehető, mindig csak az utolsó esetnek megfelelően, azaz az idomon kívül elhelyezett pólussal szokás a korongos poláris területmérőt használni.

13. A *Prytz*-féle meglepően egyszerű területmérő gyakorlati szempontból kevésbbé fontos, mint az előbb tárgyalt szerkezetek, mert kevésbbé pontosan mérő és kényelmetlenebb kezelésű, de annál érdekesebb elméleti szempontból.[1]

Egyszerű acélrudacska (15. ábra), amelynek egyik végéről a mérőcsúcs nyúlik le, másik vége pedig, derékszög alatt meghajlítva, egy a mérőcsúcs szárával párhuzamos kampót alkot, amely alul, gömbölyű élű parányi kis baltához hasonlóan, hirtelen domború élben végződik. Az él síkja keresztülmegy a Q csúcsponton és az élnek a rajz síkján nyugvó P pontja a q hosszúságú PQ mérőkar forgáspontja.

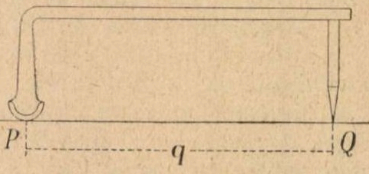
Megfogjuk a mérőcsúcsot alul jobbkezünk mutató- és hüvelykujja közé és ügyelve arra, hogy köztük könnyen fordulhasson, végigvezetjük a zárt idom határvonalán, amíg ismét Q_1 kiinduló pontba tér (16. ábra), arra is ügyelve, hogy az él síkja mindvégig függőleges maradjon. Az éles kis baltának a papirosba való parányi bevágódása arra kényszeríti a P pontot, hogy mindig csak a PQ egyenes irányában mozogjon előre vagy hátra, miközben a PQ egyenes és az egész planiméter a P pont körül szabadon foroghat. Ebből az következik, hogy a PQ egyenes minden helyzetben érintője a P pont pályájának a

[1] Feltalálója, *Prytz* H. dán vezérkari tiszt, *Stang-planimeter* elnevezéssel először 1886-ban ismerlette a *Tekniske Forenings Tidsskrift*-ben. Franciául találóan *planimètre-hachette-nek*, baltás planiméternek nevezte el.

P pontban. A P pont pályája eszerint, vagyis a területmérő vezetővonala nem más, mint a Q pont pályájának, vagyis a körüljárt idom határvonalának *üldöző görbéje* állandó q üldöző távolság mellett.[1]

Mielőtt azonban a Q_1 pontból tovább mennénk és miután oda visszaérkeztünk, balkezünkkel kissé lenyomjuk a területmérőnek él felőli végét, úgy hogy az él két parányi kis bevágást hagy hátra a papiroson, amelyeknek Q_1-től q távolságban fekvő P_1 és P_2 felező pontjai a P forgáspontnak kezdeti és végső helyzetei.

Körüljárás közben tehát a P pont végigjárja a T idom határvonalának $P_1 A A' P_2$ üldöző görbéjét. E görbének a planiméter rendes használatában semmi nyoma sem marad hátra, de ha azon a tájon, amelyen az él vándorol, grafitos papirost helyezünk el a rajzlapon az él alá, erről a papirosról az él nyomása alatt az üldöző görbe lerajzolódik. Igy készült a 16. ábra.



15. ábra.

Amint látjuk, olyan esettel van dolgunk, amikor P nem tér vissza kiindulási helyére, P_2 nem esik össze P_1-gyel és az alapképletnek itt használandó (B) alakjában előforduló $F = (Q_1 P_1 A A' P_2 Q_1)$ terület nem zérus és pedig

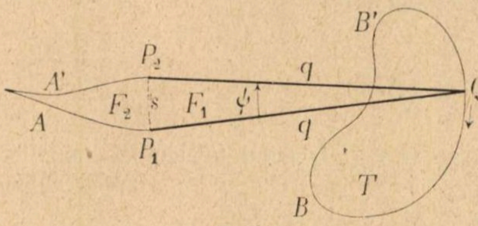
$$F = F_1 + F_2$$

ahol F_1 és F_2 F-nek az a két része, amelyet a Q_1 pontból, mint középpontból, q sugárral leírt $P_1 P_2$ körív választ el egymástól.

Jelöljük ψ-vel a szöget, amelyet a $P_2 Q_1$ irány bezár a $P_1 Q_1$ kezdeti iránnyal. Világos, hogy ez a szög, a q egyenesnek a körüljárás alatt végbemenő forgásának eredőjét is méri, amit eddig (B)-ben a $(\varphi_2 - \varphi_1)$ különbség fejezett ki. Ha tehát mindezeket figyelembe vesszük, a (B) képlet a következő alakban írható:

$$T = q \int d u + \frac{1}{2} q^2 \psi + F_1 + F_2$$

E kifejezés jobboldalán azonban az első tag zérus. Az él ugyanis a q egyenesnek enged haladást a saját irányában, enged forgást a P pont körül, de lehetetlenné tesz minden oldalvást való kitérést. Minden du tehát és így $\int du$ is zérus.



16. ábra.

A harmadik tag pedig:

$$F_1 = \frac{1}{2} q^2 \psi.$$

A körüljárt idom területe tehát:

$$T = q^2 \psi + F_2, \tag{24}$$

amit a következő alakban is írhatunk:

$$T = q s + F_2,$$

ahol

$$s = q \psi$$

a $P_1 P_2$ körív hosszúságát jelenti.

A gyakorlatban úgy igyekszünk használni ezt a területmérőt, hogy annyira kicsinnyé, helyesebben szólva, abszolút értékben egymással annyira közel egyenlő pozitív és negatív

[1] Fölemlítendő, hogy a többi közt olyan szerkezetek is vannak (*Goodman*-féle módosítás), amelyekben az él szára a mérőrúd hosszában eltolható, a q méret tehát bennök megváltoztatható, és olyanok is (*Hamann*-féle módosítás), amelyekben ezenkívül él helyett tengelye körül könnyen forgó éles szélű kerék van, amelynek síkja szintén a mérőcsúcson megy át. Az egy darabból való merevebb szerkezet mindenesetre jobban biztosítja, hogy az él síkja változatlanul a mérőcsúcson menjen keresztül.

részből állóvá tegyük az F_2 területet, hogy megengedhető hibával zérussal tekinthessük egyenlőnek.

Többnyire a következő módon szokás eljárni.[1]

Szemmértékkel megállapítjuk az idom súlypontjának lehetőleg jól megközelítő O helyét és ebből az O pontból egyenest húzunk az idom határvonalának egy tetszés szerint választható Q_1 pontjáig. Legkényelmesebb, ha ez az egyenes a műszert kezelő felé mutat. Azután úgy helyezzük el a területmérőt, hogy csúcsa az O ponton, éle pedig akármerre, de legkényelmesebben balra álljon O-tól, s miután kissé benyomtuk az élt a papirosba, vezetjük a csúcsot az $O\,Q_1$ egyenesen Q_1-ig, ahol elérjük az idom határvonalát, körüljárjuk ezt a határvonalat, amíg ismét Q_1-be jutunk és innen, az egyenesen, visszatérünk O-ba. Ekkor újból kissé benyomjuk az élt.

Végigjártuk tehát az $O\,Q_1\,B\,B'\,Q_1\,O$ utat.

Most átforgatjuk a területmérőt első, kiinduló állásához képest 180°-kal. Csúcsa tehát ismét az O ponton, éle pedig azon az egyenesen áll, amely az O ponton és az első élnyomon át vezet, csakhogy az előbbivel ellenkező oldalon, s még egyszer végigjárjuk ugyanazt az $O\,Q_1\,B\,B'\,Q_1\,O$ utat. Természetesen e második körüljárás előtt és után szintén lenyomjuk kissé a területmérő élfelőli végét.

Két helyen kellene tehát $P_1 P_2$ körív s hosszúságát meghatározni. A két körív helyett azonban a két közvetetlenül és kényelmesen lemérhető húrt szokás felhasználni Ezeknek a számtani középértékét szokás megszorozni q-val és az így nyert szorzatot elfogadni a körüljárt idom területének mérőszámául.

Ez eljárás mellett, a rendesen $q = 25\ cm$ mérőkar-hosszúságú *Prytz*-féle területmérővel, ha a körüljárt idom legnagyobb mérete nem lépi túl a 12 cm-t, olyan viszonylagos hibával kapjuk meg a területet, amely csak a legkedvezőtlenebb alakú idomok esetében éri el a három százalékot, Rendesen jóval kisebb és az idomok méreteinek kisebbedésével gyorsan kisebbedő. Nagyobb méretű idomokat kisebb részekre felosztva szokás mérni.

14. Lássuk végül, mi hasznát vehetnők a mérőkeréknek a *Prytz*-féle területmérőben.

Ha, amit tudtommal eddig még nem tettek, a PQ mérőkarral párhuzamos tengelyű és a rajz síkján gördülő mérőkérékkel látjuk el rúdját, e területmérőre is az alapképlet (C) alakja alkalmazható. Hamarább érünk azonban célt, ha mindjárt a 8. cikk (18) alatti kifejezésében vesszük figyelembe, hogy e területmérőnél $\int d\,u = 0$.

Ekkor ugyanis az következik belőle, hogy

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \psi = \frac{r}{k}\, n\, \frac{2\pi}{v}.$$

és ha ψ-nek ezt az értékét bevezetjük a megelőző cikk (24) alatti képletébe, kiadódik, hogy a körüljárt idom területe:

$$T = q^2 \frac{r}{k}\, n\, \frac{2\pi}{v} + F_2$$

vagy, szokás szerint, rövidebben írva:

$$T = T_1\, n + F_2,$$

ahol

$$T_1 = q^2 \frac{r}{k} \frac{2\pi}{v}$$

a területmérő állandója és

$$n = l_2 - l_1,$$

lévén minden betűnek ugyanaz a jelentése, ami a 8. cikkben is volt.

[1] Lásd: *H. Prytz: The hatchet planimeter, Engineering,* LVII. k., 813. l., 1894. — *C. Runge: Das Stangenplanimeter, Zeitschrift für Vermessungswesen,* XXIV. k., 321. l., 1895. — *A. Poulain Le Stang-Planimètre, Cosmos,* 1894. XII. 15.

Ha tehát F_2 zérus, illetőleg elhanyagolhatóan kicsiny, itt is

$$T = T_1 n.$$

A T_1 állandó kifejezéséből kiolvasható, hogy csak úgy van értelme mérőkerék alkalmazásának, ha k nem zérus, sőt, hogy annál kisebb T_1, vagyis annál érzékenyebb a területmérő kis területek iránt, mennél nagyobb k.

Hogy pedig a mérőkerék csúszásai alkalmával fejlődő surlódás meg ne zavarja az él működését, lehetőleg közel kellene elhelyezni a mérőkerék tengelyét a mérőkarhoz, leghelyesebben egy függőleges síkba vele.

Mérőkerék alkalmazása esetében természetesen sem az él lenyomására, sem pedig korívek vagy húrok hosszúságának meghatározására nem volna többé szükség, mert a $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$ szög, amint az imént láttuk és ahogyan a 8. cikk már előre jelezte, a mérőkerék gördüléséből anélkül is meghatározódik.

Kétségtelen azonban, hogy a mérőkerék teljesen megfosztaná a *Prytz*-féle területmérőt valóban klasszikus egyszerűségétől.

15. Valamennyi előbb tárgyalt területmérőben a T_1 és, ha van, a T_0 állandónak is a számértéke a q, illetőleg a q és a p méret függvénye.

Ezidőszerint többnyire úgy készítik a területmérőket, hogy bennük a q, sőt néha a p méret is, vagyis a mérőkarnak és néha a poláris karnak is a hosszúsága, bizonyos határok közt megváltoztatható, amiből az következik, hogy szükség esetében — például nagyobb számítási kényelem, vagy nagyobb mérési pontosság elérése céljából vagy más valamiért — T_1 és T_0 számértéke, bizonyos határok közt megváltoztatható.

JÓZSEF FŐHERCEG A HUNGARIA PATRÓNUSA.

Megszoktuk, hogy a Hungária február 11-iki rendes közgyűlése mindenkor ünnepi közgyűlésnek nevezhető. Február 11-ike ugyanis — amint ezt a távozó primus beszámolójában mondotta — születésnap, a Hungária születésnapja. Az idei februári közgyűlésnek azonban e születésnapok meghatottságán is messze túlmenő fényt és ünnepiességet adott az a tény, hogy ezen a közgyülésen avatta a Hungária patrónusává József Főherceg Őfenségét.

A külső forma, amely az ünnepség keretét adta — amint egyik közoktatásügyi előkelőségünk mondotta — méltó volt a József-műegyetemhez. Finoman összevágó, precíz rendezés, katonás, kemény sorfal, díszes és előkelő technikus közönség, lelkes, kipirult arcú fiatalság, mely a jövendő napfényét lopja a Műegyetem fenségesen hideg dísztermébe, és öregeken, fiatalokon a közös ideál színei, öregek és fiatalok szemében a jövő Nagy-Magyarország törhetetlen vágya. A tartalom pedig álljon itt teljes egészében alább:

József Főherceg Ő kir. Fensége d. e. 11^h 15′-kor érkezett; a fenséges urat a műegyetem dunaparti főkapujánál *Zelovich* Kornél műegyetemi rektor és dr. ifj. *Szily* Kálmán a Hungária magistere fogadták, akik a hungaristák sorfala között felkísérték őt a díszterembe, amelynek bejáró ajtaja előtt a Hungária ifjúsági vezérei, élükön Berencsy Béla primus-szal, üdvözölték.

A közgyűlés a himnusszal kezdődött, amelyet az Egyetemi Énekkarok adtak elő. *Berencsy* Béla, a Hungária primusa, megnyitotta a közgyűlést, üdvözölte József Főherceget és a megjelenteket.

Ezután következett József Főherceg Ő Kir. Fenségének a Hungária patrónusává való felavatása.

Dr. ifj. *Szily* Kálmán, a Hungária magistere a következő avató beszédet mondta

— Királyi Fenség! Tisztelt Közgyűlés! Hungaristák! A Hungária legutóbbi közgyűlésén József Főherceg Ő Kir. Fenségét egyhangú lelkesedéssel patrónussá választotta; Ő Fensége ezt a választást kegyesen elfogadta, magas megjelenésével