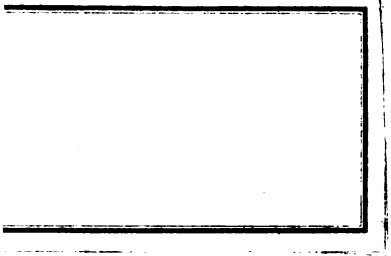


P.A. 24. F. 16.

KAIS. KÖN. HOF  BIBLIOTHEK

19.814-B

ALT-



19814-B.

SZORSZÁMTAN

'S EGYSZERSMIND

ELŐKÉSZÜLET A' FELLENGŐS MÉRTANRA.

írta

KEREKES FERENCZ,

A' HELV. HITVALLÁSUK' DEBRECZENI FŐISKOLÁJÁBAN ALKALMAZOTT
MÉR- ÉS TERMÉSZETTAN K. R. OKTATÓJA, MAGYAR. T. TÁRSASÁG'
I. TAGJA.

DEBRECZENBEN,
NYOMATOTT TÓTH ENDRE ÁLTAL.

1845.

Előszó.

Mikor Napier a 17-ik század elején a szorzások (logarithmusokat) először kigondolta, és kiszámította, az ő célja csak az volt, hogy a háromszegmérés számvetéseket könnyébbítse meg; a honnan ő nem is általában a számoknak, hanem csak a sinusoknak és tangenseknek logarithmusait kereste.

De csakhamar általlátták a számvetéssel foglalatokodó tudósok, hogy a szorzások nem csak a háromszegmérés, hanem minden más számvetéseket is, hol nagy számokat egymással sokszorozunk, vagy osztunk, hatalmakra emelnünk, vagy belőlök gyökereket vonunk szükséges, — a milyenek például a kamatok kamatai- (anatocismus), a leszámítolás- (discontirozás), az adósságtörlesztés- (amortisatio), az évi járandóságok- (annuitások), 's több efféle pénzügyi kérdések megfejtése körül előforduló munkálatok is, — végtelenül megkönnyébbítenek.

Azonban, a mennyiben a szorzások csak a háromszegmérés számvetések könnyítésére valók is, azoknak nem csak a Földmérők (Geometrák) vehetik hasznát; sőt inkább azoknak csupán háromszegmérés hasznai is igen szélesen kiterjedők. Mert a csillagászatban, a fénytanban, a mozgás tudományának minden részeiben, sőt az egész természettannak csaknem minden ágaiban az erők, mint szintén az erők hatásainak irányai, sebességeik, és eredményeik is mind vonalak, szegletek, és lapok által terjesztvén elő, ez által a tertan (geometria) törvényei alá vonatnak, 's az ismeretlen mennyiségek úgy kerestetvén mindennütt, mint valamely háromszög egyik vagy másik ismeretlen része az ismeretesekből, annak kiszámítása mindig há-

romszegmérési szorszámok' segítségével által történik; úgy hogy a' ki a' természettanban alapos ismereteket akar magának szerezni, annak a' szorszámok' és a' háromszegmérés' tudományát nélkülöznie nem lehet, és ezeket úgy kell néznünk, mint a' természettanra előkészítő tudományokat, 's én is főképp' ily szempontból tekintve tartom ezeket általános fontosságúaknak, 's ily célból kívántam főképp' kifejteni, 's közrebocsátani most ugyan a' szorszámok tudományát, nem sokára pedig a' háromszegmérést is.

Mint hogy azonban a' feladatok, melyeknek megfejtésére szorszámok kívántatnak, vagy legalább haszonnal alkalmaztathatnak, vagy az alsóbb számvetés, vagy a' felsőbb analysis körébe tartoznak; annyira pedig még a' legtudósabb nemzetek' legfőbb iskolái sem mehettek, hogy ott a' tanítók a' természetnek azon törvényeit is, melyeknek kifejtésére felsőbb analysis kívántatik, alaposan adhatnák elő; igen kevesen találattván hallgatóik között, kik a' felsőbb analysisben nem mondom alapos ismeretekkel bírnának, de ezen tudományhoz csak valamit is sejténének: tehát én is jónak láttam logaritmusokróli tanításomat két részre osztani, 's az első részben, melyet alsóbb szorszámotannak neveztem, csak annyit fejteni ki világosan ezen tudományból, a' mennyi minden olyan természetani, sőt akármi más mértani kérdéseknek megfejtésére is, hol még felsőbb analysis nem kívántatik, de szorszámokkal haszonnal élhetünk, elégséges. És ez a' része munkámnak az, melyet úgy kívánok tekintetni, mint készítő tudományt a' természettanra, úgy a' mint ezt a' felsőbb analysis mostani állapotjában, hol ahoz csak igen kevesen, 's azok is csak nagy ügygyel bajjal juthatnak, még a' legfőbb iskolákban is tanítani lehet. Mivel azonban célom az, hogy, ha Isten életemnek kedvezend, a' felsőbb analysist, 's annál fogva a' természet legfönsége-sebb törvényeinek kifejtését is, mindeneknek, kiknek ezekhez kedvök leend, könnyen hozzájuthatóvá, 's a' tudós

nemzetek főiskoláiban taníthatóvá tegyem: e' végett a' logarithmusok tudományának második részét, melyet felsőbb szorszámtannak nevezem, és a' mely az olyan kérdések körül használható, melyeknek megfejtésére már felsőbb analysis kívántatik, úgy igyekeztem kifejtetni, hogy az egyszersmind a' felsőbb analysisre is előkészületül szolgáljon. 'S reménylem is, hogy valamint ezen logarithmusokróli tanításomnak mind két részét, mind azok, kik a' számtanból az ugynevezett négy speciést, és az arany szabályt mind egész, mind tört, még pedig tizedes szinte úgy, mint közönséges törtszámokkal alaposan megtanulták, 's az algebra elemeivel is nem egészen ismeretlenek, minden akadály nélkül meg fogják érteni: épen úgy kik ezen logarithmusokróli munkámnak mind két részét jól megértendik, a' felsőbb analysis igazságainak felfogásában, úgy a' mint én azokat kifejtendem, semmi nehézségre nem fognak találni.

Első része munkámnak, vagy is az alsóbb szorszám tan áll, a' bevezetésen kívül, mely a' szorszámoknak alapúl szolgáló hatványok tudományát adja elő, 's hol az 0 igaz fogalma is alkalmilag kifejtetik, három szakaszból. Az első tanít a' logarithmusokról általjában, 's ugyanott kifejtek alkalmilag a' szertelen számok természete is; a' második a' közönséges logarithmusokról, 's megismerkedtet a' briggféle szorszám táblákkal, és azoknak hasznávetelét minden előfordúlható esetekben megtanítja; a' harmadik pedig csupa gyakorlatokat foglal magában, hol sok nevezetes pénzügyi kérdések fejtetnek meg logarithmusok segítségével. Ezen kérdések megfejtését részint azért vettem fel ide előleges gyakorlatúl a' logarithmusokkali számvetésben, mivel úgy tapasztaltam, hogy a' logarithmusok elvont tudományát az azt tanulókkal megkedveltetni semmi sincs oly alkalmas mint az efféle életbe vágó nehéz kérdéseknek az általi könnyű megfejtése; részint pedig azért, mivel minél inkább ébredszik hazánkban a' pénzügyek körüli eszmélke-

dés, annál érdekesebb kezd lenni reánk nézve országostúl az ilyen kérdések megfejtése; úgy hogy hazánk jelen körülményei között talám szégyen is vólna felsőbb tudományokat végzett ifjagnak, kivált ha political pályára készülnek, úgy kerülni ki az iskolából, hogy az efféle pénzügyi kérdéseket megfejtteni nem tudnák.

A' m^j továbbá munkám 2-dik részét, vagyis a' felsőbb szorszám tant illeti, ez is hasonlókép' három szakaszra oszlik. Az elsőben kifejtetnek az általános számvetésnek (arithmetic universalis) a' természeti szorszámokra vezető törvényei; nevezetesen először a' kéttagi törvény (lex binomia) melynek érvényessége minden lehető esetekben, megmutatatik, a' helytelenül úgy nevezett positiva és negativa mennyiségek' természete is itten alkalmilag kifejtetvén; továbbá a' hatványjeli törvény (lex exponentialis), ennek általánossága is hasonlóképpen behizonyíttatván. A' második tant a' természeti szorszámokról, kifejtvén a' logaritmusi törvényt, mely szerint a' természeti logaritmusok könnyű móddal kiszámíttathatnak; 's mikép esik ezen kiszámítás, példákban megmutatja. A' harmadik végezetre előadja, mikép lehet, ha kívántatik, a' természeti és közönséges szorszámokat egymásra átváltoztatni, 's akármely szám logaritmusának mind két rendszerbeni egyenes kiszámítására mutat egy könnyű gyakorlati módot.

Ezen második részéből munkámnak én eddig is csak néha némely kitünőbb tanítványimnak tanítottam valamit különös órákon; miután pedig már munkám ki leszsz nyomtatva, a' tanulókra nézve különben is minden tekintelben oly üdvös magán-szorgalom ébresztésére, egészen magokra fogom hagyni tanítványimra, hogy ezen második részt magán szorgalom által végezzék el, 's az általános számvetésnek ebben kifejtett szép és érdekes törvényeit tegyék magokévé; különös tekintettel lévén az osztályozásban és rendezésben azokra, kik ezt teljesítendik. De szemem előtt tartottam munkám e-

zen részének kidolgozásában főkép azokat magyar tanuló ifjaink közül — bár mely iskolának növendékei legyenek is — kik vagy csupa hajlamból, vagy egyszersmind azon meggyőződésből is, hogy elméletileg és gyakorlatilag tökéletesen kiképzett Mathematicusokra és Physicusokra ezután mindig több több szükség lesz hazánkban, magukat különösen a' Mathesisre és Physicára adják, és ezen tudományoknak a' mélyére kívánnak bocsátkozni. Ezeknek akartam oly könyvet adni kezökbe, mely őket közelebb a' fellengős mértannak, 's ennek segítsége által aztán a' legmélyebb természetannak is alapos megértésére vezesse.

Ezek szerint látni való, mikép munkám 2-dik részének, hogy mind tanítványim, mind mások, kik hasznát kívánják venni, magoktól is könnyen megérthessék, a' tárgyakat bőven és világosan kifejtőnek kellett lennie, 's következőképen rövid nem lehetett. Az első részt ugyan lehetett volna rövidebbre is özveszorítanom, ha csak tanítványim számára írtam volna azt; mert ha mi homályt a' könyvben a' rövidség okozna, azt az élő szóvali magyarázat el fogná oszlatni. De hogy könyvem ezen része Tanítóknak is kézikönyvül szolgálhasson, sőt hogy ebből mindenek, kik a' számtan' 's az algebra elemeivel már ismeretesek, de a' logarithmusok tudományát még vagy épen nem, vagy legalább nem eléggé alaposan tanulták, azt, ha kedvök tartja, iskolán kívül magoktól is megtanúlhassák: jónak láttam itt is ép oly bőven és világosan fejteni ki mindent, mint a' 2-dik részben. Így, azonkívül hogy a' számvetésnek egy igen érdekes gyakorlati részével többen megismerkedhetnek, tanítványimnak is lesz az a' nyereségök, hogy munkámból, az abban foglalt számvetési törvényeken kívül, azt is megtanulhatják, mikép lehet mathesisi, szintúgy mint más akármely tudománybeli igazságokat egy alap fogalomból elemi módon kifejteni; nekem pedig, hogy így talám csak találkozik mun-

kámnak a' két magyar hazában annyi olvasója, hogy a' nyomtatásra teendő költségem vissza forduland.

A' mi végre azt illeti, hogy ezen aránylag különben sem rövid munkámba néhány olyan mértani fogalmak fejtegetését is felvettem, melyek tulajdonkép' nem ide, hanem a' tudománynak alsóbb részeibe tartoznak: ezt tenni kényszerítve éreztem magamat; mivel ezen fogalmak kikerülhetetlenek voltak munkámban, azomban némelyeket közülök még sehol sem találtam világosan kifejtve, másokra nézve pedig azt tapasztaltam, hogy sok tanítóktól kevésbé tartatván érdekesekeknek, nem igen szoktak taníttatni, 's annál fogva sokak előtt tanítványim közül ismeretlenek. Mind ezeket majd ki lehet innen hagyni, ha amaz elsőbbek átszivárognak az elemi számtanba, a' maguk illő helyére, az utóbbiaknak pedig megtanítása az iskolákban közönségesebbé leszsz, úgy hogy ha például azt kérdem elemi Mathesist már végzett tanítványomtól; micsoda számok neveztetnek első számoknak? nem feleli rá ezt: minden számok az 1-től a' 10-ig, vagy nem mondja, hogy arról nem tanultak. De több az, hogy felvettem ezen munkámba egy pár olyan fejtegetést is, melyek nem csak a' logaritmusok tudományába, de általjában a' számtanba sem tartoznak. Az egyiket azomban a' tárgy természete, melyet a' logaritmusokkali számvetésben való gyakorlásra felvettem, 's hazánk állapotja e' tekintetben, szinte szükségessé tették. A' másik bátran elmaradhatott volna; mindazáltal talám az sem áll ott, a' hova tettem, egészen rossz helyen. Én legalább azt hiszem, hogy akármely szakbeli író sem lehet kárhóztatni, ha valamely veszedelmes balvélekedést, — bár mely tudományba tartozzék is az — megczáfolni igyekezik ott, hol arra az alkalom az ő tudományában önkényt ajánlkozik.

Írtam Debreczenben Őszelő 3-án 1845.

a' szerző.

ELSŐ RÉSZ.
ALSÓBB SZORSZÁMTAN.

Bevezetés.

1. §. Mik a' logaritmusok, és miért nevezem azokat magyarul szorzásoknak, majd alább fogom megmondani, miután a' fogalmakat, melyek azoknak megértésére szükségesek, kifejtettem. Azértis, mivel a' szorzások tudománya egészen a' hatványok tudományán épül: mindenek' előtt szükség világos és kiemelő fogalmat szereznünk magunknak a' hatványokról.

2. §. A' mértani könyvek rendszerint azt tanítják, hogy akár mely számnak is, — melynek általános kifejezése lehet a , — hatványai (potentiae) nem egyebek, mint annak több ízbeli önmagával szorzásából származó szorzatok; például, hogy ha $aa = b$, $aaa = c$, $aaaa = d$, vagy mint az ilyeneket az algebrában rövidebben hatványjelekkel írni szokás, ha $a^2 = b$, $a^3 = c$, $a^4 = d$: úgy b 2dik, c 3dik, d 4dik hatványa az a-nak stb. és hogy ilyenkor a' hatványjel 2, 3, 4, stb. az a felett azt jelenti, hányszor van az a önmagával szorozva. De ez hibás meghatározás; mert például ebben $b = a^2 = aa$, melyet így mondunk ki: a-szor a, az a csak egyszer szoroztatik magával, holott ez az a-nak 2dik hatványa. Mások, hogy ezen hibát elkerüljék, azt mondják, hogy az ilyenekben mint a^2 , a^3 , a^4 , a' hatványjel 2, 3, 4, stb az a felett nem azt teszi, hányszor van az a önmagával szorozva; hanem például ebben: $a^3 = c$, a' hatványjel 3 az a felett azt jelenti; hogy az a 3szor van meg mint szorzó a' c-ben, azaz, hogy az a-t 3szor kell leírni mint szorzókat egymás mellé aaa , 's ezeknek egymással szorzásából kerekedik a' c. Helyesen! De hát ebben: $a^0 = 1$, — mi pedig hogy igaz, más úton bebizonyítatik, — lehet-é azt mondani, hogy a' hatványjel 0 az a felett itt is azt teszi, hogy az a az 1-ben 0-szor van meg mint szorzó? vagy hogy az a 0-szor van leírva egymás mellé mint szorzó, 's ezeknek a' 0-szor egymás mellé irt a szorzóknak egymással szorzásából származik az 1? 's ha ezt mondjuk micsoda beszéd lessz ez? 's ki értheti ezt? Továbbá, hát

ez mit tesz: $a^{2/3} = d$ Azt, hogy az $a^{2/3}$ -szer van meg a' d-ben mint szorzó? vagy hogy az a-t $2/3$ -szer kell írni egymás mellé mint szorzót, 's ezeknek egymással szorzásából származik a' d? De ki értheti mind ezeket? Hátha még azt mondjuk, hogy $a^{-1/2} = b$ ezt teszi: az a a' b-ben tagadólag $1/2$ szer van meg mint szorzó, vagy ezt: az a tagadólag félszer van egymás mellé írva mint szorzó, 's ennek a tagadólag $1/2$ -szer egymás után irt a-nak egymással szorzásából származik mint szorzat a' b! van ennek valami józan értelme? Valóban úgy látszik, hogy mind ezek értelem nélkül való beszédek. Lássuk hát mi értelmet lehet ezeknek adni, 's mikép lehet a' hatványok fogalmát úgy fejteni ki, hogy az egészen kimerítő legyen, 's minden esetre illjék, akármilyen szám legyen is a' hatványjel.

3. §. Tudjuk, hogy a' szorzásban azokat a' számokat, melyek egymással szoroztatnak, műveseknek (factores), azt pedig, melyeknek szorzásából származik, műveletnek (factum) is szokás nevezni. Ezen műszavai a' számtannak, mint szintén több hasonló is, melynek például: gyökér, gyökérkivonás, hatvány vagy hatalom, 's hatalomra emelés stb. mind átvitelek (metaphorák). De az átvitel itt nem egészen szerencsésen van találva, mert mikép áll elő a' művelet, ha mives kettő is van, anyag pedig, a' miből dolgozzanak, semmi sincsen? Az úgy nevezett két mives közül tehát, helyesebb metaphorával csak az egyiket kell művesnek képzelnünk, a' másikat anyagnak. Mives leszsz t. i. az, melyet úgy képzelünk, hogy a' másikat veszi és teszi annyiszor, a' hány egységből ő maga áll, egyszóval a' szorzó (multiplicator); anyag pedig a' másik, melyet ez annyiszor, a' hány egység ő magában van, vesz és tesz, egy szóval a' szorzandó (multiplicandus). Például ebben, 2 szer 3, mives a' 2, anyag a' 3; mert úgy képzeljük, hogy amaz veszi mintegy és teszi ezt, mint anyagot 2 szer, és épít belőle eképen: 3+3. Ha pedig így mondjuk: 3 szor 2: akkor mives a' 3, anyag a' 2; mert amaz veszi mintegy és teszi ezt mint anyagot 3szor, és épít belőle eképen: 2+2+2. A' művelet (factum) mind a' két esetben =6. Minthogy pedig itt az egész működős az anyagszámnak ennyiszor vagy annyiszor tevéséből áll, talám még helyesebb leszsz, ha a' tesz igétől származtatott, 's mostanában már ilyen értelemben különben is divatba jött szókkal a' műveletet, mint a' tevés' (szélesebb értelemben cselekvés') eredményét ténynek (factum), a' mivest pedig mely tevés (cselekvés) által tényt alkot, tényezőnek (factor) nevezzük.

4. §. Ezeket így értvén, már most a' hatványok' általános fogalmát e'kép határozhatjuk meg: Ha anyagszámnak az 1-et vesszük fel, tényezőnek pedig akármely számot, melyet közönségesen a-nak nevezhetünk: ebben a' különös esetben mind azok a' tények, melyek az a-nak mint tényezőnek az 1-re mint anyagszámra hatásából származnak, neveztetnek az a hatványainak, még pedig mindegyik ilyen tény az a annyiadik hatványának, a' hányszor hatott az a mint tényező az 1-re, mint anyagszámra, vagyis a' hányszor járult az a mint szorzó az 1-hez mint anyagszámhoz. Például a. 1, azaz a szor 1 leszsz az a-nak 1-ső; aa. 1 azaz a-szor a-szor. 1 leszsz az a-nak 2-dik, aaa. 1, azaz a-szor a-szor a-szor 1 leszsz az a-nak 3-dik hatványa stb. Hogy ezen meghatározása a' hatvány-nak minden hatványokra egyformán illő, és így általános és kimerítő, mindjárt meg fogjuk látni.

5. §. A' hatványoknak a. 1, aa. 1, aaa. 1, aaaa. 1, stb. leírásában kétféle rövidítéssel szokás élni. Egyik ez, hogy az anyagszámot, 1, nem írják ki, hanem csak oda gondolják, mint az különben is természetl minden szám mellé oda értetik; mert például $9 = 9$ szer 1, $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ szer 1, vagy $\frac{2}{3}$ -ad része az 1-nek, stb; a' honnan azt mondjuk, hogy minden számnak, a, mint az 1-re ható tényezőnek első hatványa olyan nagy mint maga a' tényező, a; mert azt mondani, hogy az a maga magának első hatványa, igen képtelen metaphora lenne, mivel ez azt tenné fel, hogy az a maga a' maga hatásának eredménye, és így hogy az a elébb megvolt, mint meglett volna. Ezen első rövidítéssel már az a-nak négy elsőbb hatványai így lesznek: a, aa, aaa, aaaa; de azért nem kell elfelejtenünk, hogy ezen tényezők mellé — elől avagy hátul mindegy — mindig oda kell érteni, vagy, ha szükség, nagyobb világosság okáért ki is írni az 1-et mint anyagszámot. A' második, 's az elsőnél még nagyobb rövidítés továbbá abban áll, hogy a' tényezőt, a, nem írják le annyiszor, a' hányszor az az 1-re hat, hanem írják csak egyszer, 's jobb felől apróbb számjegyekkel felibe jegyzik, hányszor kellene azt írni, e'képen: a^1 , a^2 , a^3 , a^4 stb. melyeket így mondunk ki: az a-nak 1-ső, 2-dik, 3-dik, 4-dik hatványa, vagy hatalma, stb. Igaz, hogy ezek helyett szoktunk így is szólani: a felemelve 1-ső, 2-dik, 3-dik, 4-dik hatalomra stb, vagy még rövidebben így is: a felemelve 1-re, 2-re, 3-ra, 4-re stb. De mi most maradjunk csak ama' legelső, leghelyesebb, 's legvilágosabb fogalmat adó metaphora

mellett, mely szerint $a^1, a^2, a^3, a^4, \text{ stb. } a'$ tényező a 1-ső, 2-dik, 3-dik, 4-ik stb. hatványainak nevezetnek.

6. §. Ezek szerint már most, ha az a -nak különböző hatványait egyszer a' közelebb említett két rövidítéssel, egyszer pedig minden rövidítés nélkül leírjuk, és e' két rendbeli kifejezéseket, mint ugyanazont jelentőket egymással egyenletbe teszszük, kezdvén csak a' 4-dik hatványon 's onnan egyel egyel alább szállván az 1-sőig, következő egyenleteket nyerünk:

$a^4 = 1. a a a a$ (melyeket így mondunk ki: az a -nak 4-dik hatványa
 $a^3 = 1. a a a$)annyi mint 1, melyre az a 4-szer hat, mint tényező,
 $a^2 = 1. a a$)vagyis annyi mint 1, mellyhez az a 4-szer járul, mint
 $a^1 = 1. a$)szorzó; továbbá, az a -nak 3-dik hatványa annyi
 mint 1, melyhez az a 3-szor járul mint szorzó; az a -nak 2-dik hatványa annyi mint 1, melyhez az a 2-szer járul mint szorzó, 's végre az a -nak első hatványa, a^1 , vagy csak a , annyi mint 1, melyhez az a 1-szer járul mint szorzó.

7. §. De ezt a' felsőbb hatalomról alsóbbra egyel egyel alább szállást lehet folytatni még tovább is. Mert valamint eddig az egyel felsőbb hatalomból az egyel alsóbbat úgy származtattuk, hogy az egyenlet baloldalán az a hatványjelét alább szállítottuk egyel, a' jobb oldalt pedig elosztottuk a -val, 's így p. ebből

$a^4 = 1. a a a a$ egyel alsóbb hatalom lett: $a^{4-1} = \frac{1. a a a a}{a}$, azaz

$a^3 = 1. a a a$; ebből ismét egyel alsóbb így: $a^{3-1} = \frac{1. a a a}{a}$, azaz

$a^2 = 1. a a$; ebből ismét egyel alsóbb így: $a^{2-1} = \frac{1. a a}{a}$, azaz

$a^1 = 1. a$: éppen úgy lesz ez utolsóból

ismét egyel alsóbb így: $a^{1-1} = \frac{1. a}{a}$, azaz

$a^0 = 1$. De, hát ezt hogy mondjuk ki szóval? Ez attól függ, mi-csoda fogalmat kötünk össze ezzel a' számtani jegygyel: 0. Van-nak, kik úgy vélekednek, hogy ezzel semmi fogalom sincs össze-kötve, hanem ez csak arra való, hogy a' számjegyet, vagy szám-jegyeket, melyek tőle balkézre esnek egyel elébb tolja, és tizszerte nagyobb értékűvé tegye; mint például, ha e' két számjegy mellé: 85, mely így nyolczvanötöt jelent, jobb felől még egy 0-t írunk e' képpen: 850, ez a' 0 itt csak arra való, hogy az 5-öt az egyes helyről a' tízesre, a' 8-at pedig a' tízes helyről a' százásra elébb tolván, amannak értékét öt-ből ötvenre, zét pedig nyolczvanból

nyolczszázra emelje. Úgy van! de hát ebben: a^0 , hol a^0 egyedül maga áll mint hatványjel, mit tol ez elébb? Itt nincs, látni való, semmi, mit elébb toljon, 's minek jelentését tiszszerezze, és így, ha a^0 csak arra való volna, hogy más számjegyeket elébb tolván, azoknak jelentését tiszszerezze, úgy itt nem volna semmi helye. Kétségkívül kell hát ezen jegynek 0 magában is bizonyos jelentésének lenni; még pedig látni való az is, hogy a^0 jelentése nem olyan, mint a^+ , a^- , a^{\times} , 's több efféle számvetési műtételeket jelentő jegyeké, hanem olyan, mint ezen kilencz számjegyeké: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; mivel a^0 mindig olyan helyen áll, hol, ha 0 nem állana, valamelyiknek kellene állani ama kilencz számjegyek közül; egyezőval, látni való, hogy a^0 számjegy, szintúgy mint ama kilencz közül akármelyik. Csak az hát a^0 kérdés, micsoda számot, micsoda számfogalmat kell öszvekötnünk ezzel a^0 jeggyel: 0 ? Talám ezt: semmi? Éppen nem! mert hiszen ez: semmi, nem szám. Ugyanis ezt: mi a^0 szám? kétfélekép' lehet meghatározni, t. i. vagy így: szám az, a^0 mivel ezen kérdésre felelünk: hány? vagy pedig egészen lényegesen így: szám az 1 , és minden fogalom, mely az 1 -ből származik. Úgyde erre: semmi, egyik meghatározás sem illik. Az utóbbi nem; mert ez: semmi, a^0 minek, valaminek, vagy való, lévő-minek, azaz minden létezőnek tagadását jelenti, ez a^0 fogalom pedig, látni való, nem az 1 . fogalmából származik: de amaz elsőbb sem; mert ha p. o. valaki egy főt felröppenő seregély közé lövén, egygyet sem találna, 's valaki ezt kérdené tőle: hány esett le? erre nem felelhetne okosan így: semmi; mivel így nem erre a^0 kérdésre felelne: hány esett le? hanem erre: mi esett le? Hogy kellene hát felelnie? Kétségkívül így: egysem, 's éppen ez az egysem (nullus, a, um = non ullum = non unulum) az a^0 fogalom, melyet a^0 jegy jelent, és ez már szám mind a^0 két meghatározás szerint; mert erre a^0 kérdésre felelünk vele hány, azonban az 1 . fogalmából származik, sőt nem egyéb, mint az 1 . fogalma a^0 nem létező fogalmával egybekötve. — De hogy még jobban megértsék olvasóim, mit tesz 0 , képzeljék, hogy egy szalmaszálnak, mely 1 lábnyi hosszúságú, az egyik vége meggyúl, és az égés haladván odábbodább a^0 másik vége fele, a^0 feladat ez: az égés eredményét akármely szempillantásban meg kell határozni a^0 hosszúság mértékül felvett egységgel, a^0 lábbal. Ezt, mind addig, míg még van meg valami a^0 szalmaszálból, kétképen lehet meghatározni; mert vagy azt mondjuk meg, hogy a^0 lábnak ennyi 's ennyi ennyid része

már elégett, már elenyészett, és így már nincs meg; vagy azt, hogy a' lánknak ennyi 's ennyi ennyid része még meg van. De mikor az 1 lánki szalmaszál egészen elégett, már akkor meglévő részről nem lehet szó, hanem csak azt lehet meghatározni, a' mi már elégett, elenyészett, és így már nincs. Ezt pedig a' mértékül felvett egységgel, a' lábbal csak úgy lehet meghatározni, látni való, hogy képzeljük az 1 láb hosszát szalmaszálból, 's hozzá gondoljuk, hogy az már egészen nincs; és ez az 1 egész fogalma a' nem lételem fogalmával öszveköttve az, a' mit a' 0 jeggyel kiteszünk. Szám hát a' 0, még pedig nem tört, hanem egész szám; mert az egész 1-nek nem létét jelenti *). Ezt a' fogalmat magyarul kitezhetjük ugyan, mint már láttuk, ezzel: egy sem. De ez, szorosán véve, tudományos műszónak még sem alkalmas; mert egy sem, azaz, egy is nem, nem tisztán az 1-nek tagadása lévén, mint a' latin nullum, hanem az is jelentése is bele lévén zavarva, nem teszi ki kétségtelenül azt, a' mit a' 0 számjegyet jelent. Például, ha azt kérdik valakitől, hány garas van a' zsebében? és ezt feleli: egy sincs (azaz egy sem van, vagy egy is nem van), ez nem teszi ki kétségtelenül azt, hogy a' felelő zsebében annyi garas van, a' mennyit a' 0 jegy jelent, azaz, hogy meglévő része a' garasnak nincs a' zsebében legkisebb is, hanem az egész 1 garas a' nemlételem fogalmával egybeköttve van ott; sőt inkább teheti azt is, hogy a' pénz, mely az ő zsebében van, oly kevés, hogy az még csak egy egész garas sincs, hanem az 1 garasnak csak valamely részét, például $\frac{1}{3}$, v. $\frac{5}{6}$ részét teszi. Ilyen kétértelmű szó pedig tudomány-, annyival inkább mathesisbeli műszónak éppen nem alkalmas. — Hozzá járul ehhez még az is, hogy a' 0 jeggyel összeköttött fogalom' kitételére olyan szó kell, mely azt is, hogy benne az egy és a' tagadás fogalmi oly szorosán egybe vannak köttetve egymással, hogy, úgy

*) Nem kell gondolni, mintha ez a' 0 jeggyel öszveköttött fogalomnak illetően fejtegetése, és az egy sem-nek a' semmitől megkülönböztetése csak valami haszontalan elmefuttatás, vagy sikertelen szószálhasogatás volna. Sőt inkább oly érdekes ez az egész tudományra nézve, minél érdekesebb semmi nem lehet; mivel ennek alkalmazása fog a' Mathesis felsőbb részeiben oly világosságot terjeszteni el, mely ezen tudományból minden homályt elűz; ez fogja a' fellengős mathesist a' fellegekbe, melyekbe most burkolva van, alá hozni a' földre, hogy az mindennek, ki az elemi Mathesist elvégezte, könnyen hozzá járulható legyen; mint ezt majd — ha Isten éltet — a' fellengős mértan-elveinek kifejtésében meg fogom mutatni.

szólván, egy fogalommá lettek, kijelentse az által; hogy ő is az egy és a' tagadás neveiből egy szóvá olvadjon össze, mint a' latin nullum (non ullum, non un'lum, non unulum): Úgyde ez: egy sem, ha szinte összeírjuk is így: egysem; ez által egy szóvá nem olvad, és sem ejtegetni magát, mint összetett szó; nem engedi, — mert nem mondhatjuk: egysemé; egysemnek, egysemet; stb.; sem számnevek után tétetni szokott végezeteket fel nem vehet, — mert nem szólhatunk így: egysemszer, egysemedik, stb. Ha pedig így mondjuk: egyszer sem; egyedik sem: nem is olvad egybe a' két szó, azonban ez: egyedik, így magában nincs is szokásban; hanem csak az öszvetett számnevekben használtatik, mint tizenegyedik százegyedik stb. — Ezek szerint tehát mulhatatlan szüksége lévén nyelvünknek tudományos tekintetben egy a' O jeggyel öszvekötött fogalmat kifejező szóra, vagy új magyar szót kell e' végre gyártanunk, vagy idegen nyelvbeli szót által vennünk. Én az elsőt megkísértvén, jobbat kigondolni nem tudtam ennél; hogy a' O által jelentetett fogalom neve lenne magyarúl e n y e g y (azaz enyészett- vagy elenyészett egy),*) 's' innen származnának enyegyszer; enyegyedik; stb. Ha pedig talám ez még most, míg az elemi számtanban hozzá nem szokunk, visszatetszik, ám maradjon magyar számvetésünkben a' O fogalmának neve továbbra is; az eddig is sokaknál szokásban volt, 's' a' fogalom' ismerése nélkül is mintegy ösztönkép szerencsésen talált latin n u l l a, vagy még rövidebben null, honnan helyesen lehet származtatni más itt szükséges szavakat is; mint nullszor; nulladik stb.**)

*) Hogy ezen magyar szavainkban: enyészni, elenyészni (vanescere, evanescere), henyélni (nil agere), enyelegni (vanitatem-; nullitatem agere; nugari), az eny nem egyéb, mint a' tagadó n meglágyulása; erre lásd „Ertekezés és Kitérések“ című munkámban az 'első kitérést a' tagadó n-ről és annak származékiról különböző nyelvekben.

**) A' mi az O jegynek számtani könyveinkben előforduló neveit illeti: ezeket Maróthi György 1743-ban kijött Áritmetikája' elején így számlálja elő: Tzifra, Nulla, Zerus, Semmi, melyekhez azóta tudomra csak egy jött; t. i. ez: Üres; de a' mely a' semmivel igen egyre megy ki; mert üres az a' miben semmi sincs. A' semmiről és a' nulláról már szólottunk; de hát a' Zerusról és a' Tzifráról mit szóljunk? mit tesznek ezek? Kétség kívül ezen nevek magokkal az arabiai vagy inkább indiai számjegyekkel együtt jöttek az Arabok révén Ásiából Európába; 's' vétettek be az európai nyelvekbe; és így ezeknek jelentéseiket csak a' keleti nyelvekből lehet kitanulni. Azért is ezeknek bővebb fejtegetését a' keleti nyelvekben járatos tudós hazafiakra; közelebb helybeli tisztársam t. LUGOSSY József urra bízván; én itt csak ezeket jegyzem meg. Először is

És már most ott vagyunk, hogy ezt: $a^0 = 1$, ki tudjuk fejezni szóval is e képen: az a -nak nulla dik hatványa, vagy nulla dik hatalma annyi mint 1 , melyre az a nullszor hat, vagyis egyszerűen sem hat mint tényező, vagy másképp, melyhez az a egyszerűen járul mint szorzó, 's annál fogva nem esik rajta semmi változás, hanem marad úgy a mint van $= 1$; 's minthogy a akármely számot jelenthet, nyilván van, hogy akármely számnak is nulladik hatványa $= 1$.

úgy látszik, hogy zerus, vagy a mint ezt a szót az Olaszok, Francziák, és Angolok írják, zero, nem a^0 jegynek megfelelő fogalmat, hanem ezen jegynek csak külső formáját jelenti, és ezt teszi: karika; mit abból gyanítok, hogy a heber nyelvben **א** (olv. Zér) valaminek a kerületét vagy pártázatát jelenti (2 Mos. 25. 24), 's azon szószármazási elvek szerint, melyeket én „Értekezés és Kitérések“ című munkámban kifejtettem, ez a szó is a kerek séget jelentő kr gyökértől származott-, 's a legkülönbözőbb nyelvekben nagy számmal találtató szók' seregébe tartozik. A mi pedig az 0 jegynek ezen nevét illeti: tzipra, erről Maximus Planudes 13-ik századbeli görög szerzetes **λογισμη ενδιμη** (indus számvetés) című, 's több könyvtárokban máig is kéziratban lévő munkájában, miután a kilencz első természetes számok jegyeit, melyeket indus charactereknek nevez, előszámlálta volna, így szól: „Ezekhez járul a tizedik jegy, 0 , melynek neve **Τζιφρα** (olv. tzipra), a mi valami nem létezőt jelent.“ Eddig Planudes. Azt mondják, hogy az arabs nyelvben tziphar ezt teszi: üresnek lenni; mi ha úgy van, a^0 jegynek ezen neve tzipra, alkalmasint az arabs tziphar tól származott, és annyit tesz mint üres, hol semmi létező nincsen. De különös figyelmet érdemel itt, hogy ehez a szóhoz: tzipra, nagyon hasonló, 's egymással mind egy eredetű szók különböző európai nyelvekben, például a németben Ziffer (olv. tziifr.), az olaszban Cifra (olv. csifra), a francziában Chiffre (olv. siffr.), az angolban Cipher (olv. szájfer), stb. — mely szókat ezen nemzetek kétség kívül mind az arabs vagy indus számjegyekkel vettek által —, Zérót vagy teljességgel nem, vagy legalább nem csak azt, hanem átaljában minden számjegyeket jelentenek. Ezen jelentésben már ezek a szók, látni való, nem származhattak az arabs nyelvben ürességet jelentő tziphar szótól, hanem olyan arabs, vagy más keleti szótól kellett származniok, úgy gondolom, mely mind formájára, mind jelentésére nézve atyafias lehet ezen heber szóval: **ספָר** (olv. szapár) = számlált (numeravit), melyel egy eredetű ezen magyar szavunk is: sáfár = számadó, kire gazdasági dolgokban bevétel és kiadás, számadás terhe alatt van bízva. (Adj számot sáfár stb.) A honnan ha ezen öszvetett szavaink helyett: számjegy, számbetű, egyszerű törzsök szót akarunk behozni nyelvünkbe, hátran felvehetjük, nem mondom ezt czifra, mivel ennek más jelentése is van nyelvünkben, hanem ezt sifra; 's ehez egy európai nemzetnek sincs annyi joga, mint neküök Magyaroknak. Mert a keleti nyelvekben a másalhangzók tévén a szók lényegét, a sifra szó lényege, sfr, ezen módon meg van nyelvünknek im e szavában: sáfár, 's csak az önhangzók változnak; azonban fogalma is mind a két szónak (sáfár és sifra) egy eredetre mutat (**ספָר** = számlált).

8. §. De az a hatványainak alább alább szállításában mehetünk még tovább is. Ugyanis az egyenlet' bal oldalán; miután a' célirányos *) (positivus) hatványjel egyel egyel kevesedvén, utoljára egész a' nullig (0-ig) alászállott; ha még tovább megyünk, következnek a' célellenes *) (negativus) hatványjelek: — 1, — 2, — 3, stb; a' jobb oldalon pedig; ha az a-val való osztást tovább is folytatjuk, következnek: $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, stb, és így fog lenni:

$$a^{-1} = \frac{1}{a};$$

$$a^{-2} = \frac{1}{aa};$$

$$a^{-3} = \frac{1}{aaa};$$

$$a^{-4} = \frac{1}{aaaa};$$

melyeket e'kép mondunk ki: az a-nak első célellenes hatványa annyi mint 1; melyre az a 1-szer hat mint célellenes tényező; azaz mint osztó. Mert ha a' szorzót (multiplicator) célirányos tényezőnek (positivus factor) képzeljük; úgy az osztó (divisor) valóságos célellenes tényező (negativus factor) lesz; mivel az osztónak hatása a' szorzóéval egyenesen ellenkezik, ez annyiszorta nagyobbá; amaz ellenben annyiszorta kisebbé tévén valamely számot, a' hány 1-ből ő maga áll; vagyis, még általánosabb kifejezéssel, két egyenlő szám ha egyik mint szorzó, másik mint osztó járul valamely számhoz; egymás' hatását tökéletesen lerontván; például $\frac{8 \cdot 2}{2} = 8$; $\frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 10$. Hasonlóképen

eztis $a^{-2} = \frac{1}{aa}$ így mondjuk ki: az a-nak 2-dik célellenes hatványa annyi mint 1; melyre az a 2-szer hatott mint célellenes tényező; azaz; mint osztó; és így tovább:

9. §: Ezek szerint világos, hogy az ilyen egyenletekben; mint:

$$a^4 = 1. \text{ aaaa}$$

$$a^3 = 1. \text{ aaa}$$

$$a^2 = 1. \text{ aa}$$

$$a^1 = 1. \text{ a}$$

$$a^0 = 1.$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{aa}$$

$$a^{-3} = \frac{1}{aaa}$$

$$a^{-4} = \frac{1}{aaaa}$$

melyeket felfelé és lefelé lehet folytatni a' meddig tetszik, a' hatványjelnek, mely itt mindenütt egész szám — mert hogy a' 0 is szám, még pedig egész szám, már megmutattuk — jelentését mindenütt egyformán így határozhatjuk meg: A' hatványjel azt jelenti; hogy a' szám, a, mely felett az áll, hány-szor hat az 1-re mint tényező; még pedig ha célirányos szám a' hatványjel; mint célirányos tényező azaz mint szorzó, ha pedig célellenes szám az, mint célellenes tényező, azaz mint osztó. A' ketlő közt közbül esik $a^0 = 1$, melyet teljesen így kel-

*) Szabad legyen nekem a' helytelenül úgynevezett positivus és negativus számokat, addig is, míg ezeknek fogalmát alább kifejteném, célirányos és célellenes számoknak neveznem.

lene írni $a^{\pm 0} = 1$, hol az a feletti hatványjel: ± 0 azt teszi, hogy az a egyszer sem hat az 1-re, sem úgy mint célirányos, sem úgy mint célellesenes tényező, azaz, sem úgy mint szorzó, sem úgy mint osztó; miszerint az anyagszám, 1, a' tényezőnek, a, minden legkisebb szaporító vagy fogyasztó reá hatása nélkül marad mint volt $= 1$.

10. §. De a' hatványnak és hatványjelnek itt kifejtett jelentése nem csak akkor áll, mikor a' hatványjel egész szám, hanem akkor is mikor az törtszám. Például $a^{2/3}$ azt teszi hogy az a, mint tényező, az 1-re, mint anyagszámra nem hat egy egészszer, hanem csak $2/3$ -ad részszer, vagyis, hogy az 1-re mint anyagszámra nem az egész a hat mint tényező, hanem az a-nak, mint tényezőnek, csak $2/3$ -ad része; a' mit így kell érteni. Ha az a-t mint tényezőt, szét bontjuk 3 egyenlő tényezőkre e'képen: $a = b.b.b$: tehát egy ezen három egyenlő tényező között, az a-nak, mint tényezőnek egy harmad részét, kettő pedig, szorzóul írva egymás mellé, $b.b$, az a-nak, mint tényezőnek két harmad részét, végre mind a' három szorzóul írva egymás mellé, $b.b.b$. az a-nak, mint tényezőnek három harmad részét, ázaz az egész a-t, mint tényezőt teszi. E' szerint ha $a = bbb$: úgy $a^{1/3}$ annyi mint 1, melyhez az a, mint tényező, csak $1/3$ -szer, vagyis melyhez az a-nak, mint tényezőnek csak $1/3$ -része járul mint szorzó, azaz, $a^{1/3} = 1.b$; továbbá $a^{2/3}$ annyi mint 1, melyhez az a mint tényező $2/3$ -szer, vagyis melyhez az a-nak mint tényezőnek csak két harmad része járul mint szorzó, azaz, $a^{2/3} = 1.bb$, végre $a^{3/3}$ annyi mint 1, melyhez az a-nak mint tényezőnek mind a' három harmad része, mely épen annyi mint az egész a, hozzá járul mint szorzó, azaz, $a^{3/3} = 1.bbb$; mely épen annyit tesz mint $a^1 = 1.a$. Például ha teszszük, hogy legyen $a = 64$, és ezt szétbontjuk 3 egyenlő tényezőre e'képen: $64 = 4.4.4$: úgy fog lenni $64^{1/3} = 1.4 = 4$; $64^{2/3} = 1.4.4 = 16$; $64^{3/3} = 1.4.4.4 = 64$. Hasonlóképen, ha teszszük, hogy legyen $a = 16$, és ezt szétbontjuk négy egyenlő tényezőkre e'képen: $16 = 2.2.2.2$: így fog lenni: $16^{1/4} = 1.2 = 2$; $16^{2/4} = 1.2.2 = 4$; $16^{3/4} = 1.2.2.2 = 8$; $16^{4/4} = 1.2.2.2.2 = 16$. Sőt mehetünk itt tovább is, ha tetszik, például: $16^{5/4} = 1.2.2.2.2 = 32$; $16^{6/4} = 1.2.2.2.2.2 = 64$, stb.

11. §. Ha a' hatványjel czélelleses törtszám, a' dolog csak annyit változik, látni való, hogy ilyenkor azon egyenlő tényezők közül, melyekre az a szétbomlik, ennyinek 's ennyinek az 1-re, mint anyag számra hatása czélelleses lesz, azaz, hogy azok ilyenkor nem úgy fognak hatni az 1-re, mint czélirányos, hanem úgy mint czélelleses tényezők, azaz, nem úgy mint szorzók, hanem mint osztók. Például, ha $a = bbb$: úgy $a^{-2/3} = \frac{1}{b b}$; ha $a = cccc$: úgy $a^{-3/4} = \frac{1}{c c c}$, vagy meghatározott számokkal, ha $a = 64 = 4.4.4$, úgy $64^{-2/3} = \frac{1}{4.4} = \frac{1}{16}$; ha $a = 16 = 2.2.2.2$: úgy $16^{-3/4} = \frac{1}{2.2.2} = \frac{1}{8}$.

12. §. Eddig van a' hatvány fogalmának, 's a' mi ezzel szorosan egybefügg, a' hatványjel jelentésének kifejtése, mi is már most egy summába öszvefoglalva rövideden ide megyen ki: Az a'-nak — azaz akármely számnak — hatványai mind azok a' számok, melyek az 1-ből, mint anyagszámból származnak, ha ahoz az a mint tényező, — még pedig akár mint czélirányos, akár mint czélelleses tényező, azaz akár mint szorzó, akár mint osztó — többször vagy kevesebbszer, egészben, vagy részszerint, vagy épen egyszer sem járúl; a' hatványjel pedig az a felett azt jelenti, mennyiségével ugyan, hogy hányszor, + vagy — jegyével pedig hogy mikép járúl az a az 1-hez mint anyagszámhoz, úgy-é mint czélirányos, vagy úgy mint czélelleses tényező, azaz úgy-é mint szorzó, vagy úgy mint osztó.

13. §. A' hatványokkal (potentiae) oly szoros kapcsolatban állanak a' gyökerek (radices), hogy amazoknak tökéletes megértésére szükség ezekről is szóllanunk rövideden. Az a' szám, mely mint tényező az 1-hez mint anyagszámhoz valahányszor járúl, az ez által származó hatványra nézve neveztetik, a' növényektől vett metaphorával, annak gyökerének, még pedig annyiadik gyökerének, a' hányszor kell neki mint tényezőnek az 1-hez mint anyagszámhoz járúlnia, hogy abból mint szorzat ezen hatvány kerekedjék. Például ha b'-nek 2-szer: c'-nek 3-szor, d'-nek 4-szer kell az 1-hez mint anyagszámhoz szorzókép' járúlnia, hogy abból az a mint hatvány származzék; vagyis ha $a = 1.bb$; $a = 1.ccc$; $a = 1.dddd$: úgy b 2-dik, c 3-dik, d 4-dik gyökere az a'-nak, melyeket jegyekkel rövi-

den így szokás írni $b = \sqrt[2]{a}$, vagy csak $b = \sqrt{a}$; $c = \sqrt[3]{a}$; $d = \sqrt[4]{a}$; stb. *) Úgy de a' fentebb mondattak szerint meg, ugyanazon feltétellel, — ha t. i. $a = 1$. bb; $a = 1$. ccc; $a = 1$. dddd—, fog lenni tört hatványjelekkel: $a^{1/2} = 1$. b; $a^{1/3} = 1$. c; $a^{1/4} = 1$. d, vagy az anyag-számot, mely különben is oda értetik, elhagyván: $b = a^{1/2}$; $c = a^{1/3}$; $d = a^{1/4}$; stb. A' honnan, ha az a, b, c, d, stb. értékeinek két külön-

böző kifejezéseit egymással egyenletbe teszszük, fog lenni $\sqrt[2]{a} = a^{1/2}$; $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$, $\sqrt[4]{a} = a^{1/4}$, stb. Úgy van mert például $\sqrt[4]{a}$, azaz az a-nak 4-dik gyökere olyan számot jelent, mely ha 4-szer íratik az 1 mellé mint szorzó a' szorzat leszsz $= a$; ez pedig: $a^{1/4}$, azt teszi, hogy az a-nak mint tényezőnek csak $1/4$ része íratik az 1 mellé mint szorzó, azaz, az a elbontatik 4 egyenlő tényezőkre, és ezek közül egy íratik az 1 mellé mint szorzó; e' kettő pedig egyre megyen ki, látni való. Mert ha az a-t szétbontjuk 4 egyenlő szorzóra e' képen: $a = dddd$, 's ezek közül egyet írunk az 1 mellé szorzóul, az eredmény leszsz 1. $d = d$, és így $a^{1/4} = d$. Úgy de más felől meg, ha $a = dddd = 1$. dddd, úgy az a' szám is, mely ha 4-szer íratik mint szorzó az 1 mellé, a' szorzat leszsz $= a$, nem egyéb mint d, azaz: $\sqrt[4]{a} = d$, következésképen $\sqrt[4]{a} = a^{1/4}$. Minthogy pedig ez az okoskodás áll, akarmely más számot tegyünk is itt a' 4 helyett: tehát általánosan mondhatjuk, hogy az a-nak n-dik gyökerét, vagyis olyan számot keresni, mely n-szer íratván mint szorzó az 1 mellé, a' szorzat $= a$

*) Ezt a' jegyet: $\sqrt{\quad}$, mely a' latin radix (gyökér) első betűjének kiszélesítéséből formáltattot nevezik gyökérjegynek (signum radicale), a' bele írt számot pedig, mely azt jelenti hanyadik gyökér kívántatik, gyökérjelenek (exponens radialis). Egyébiránt a' gyökérjegy: $\sqrt{\quad}$, felesleg való, és sokkal szebben jönne ki, ha valamint a' hatványjelt minden a' potentia első betűjéből formált hatványjegy nélkül pusztán írjuk a' szám felibe jobbról apróbb szám betűkkel, épen úgy írónak a' gyökérjelt is minden a' radix első betűjéből formált gyökérjegy nélkül a' szám' felibe apróbb számbetűkkel, csakhogy ezt már nem jobb, hanem bal felől, úgy hogy valamint $c^3 = a$ ezt teszi: a' c-nek 3-dik hatványa annyi mint a, úgy ez: ${}^3a = c$ ezt tenné: az a-nak 3-ik gyökere an-

nyi mint c, 's az ilyen helyett mint $\sqrt[5]{(a+b-c)}$, írónak csak: ${}^5(a+b-c)$. Quid fieri potest per pauca etc.

legyen, $\sqrt[n]{a}$; vagy pedig az a -t $\frac{1}{n}$ ed részszere írni az 1 mellé mint szorzót, azaz, az a -t n egyenlő tényezőkre bontani szét, és e-zekből egyet írni az 1 mellé mint szorzót, $a^{1/n}$, e' kettő tökéletesen egyre megyen ki, látnivaló, azaz, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

14. §. De látnivaló továbbá az is, hogy ha az ilyen tört hatványjelű mennyiségek mint $a^{1/2}$, $a^{1/3}$, $a^{1/4}$, stb, melyekben t. i. a ' tört hatványjelnek bár mi legyen is nevezője, számlálója mindenkor $=1$, nem egyebek az a -nak olyan gyökereinél, melyeknek gyökérjeleik az ilyen tört hatvány jeleknek mint $1/2$, $1/3$, $1/4$, stb, a ' neve-

zőik, 2 , 3 , 4 , stb, azaz, nem egyebek mint $\sqrt[2]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, stb: úgy az olyan tört hatványjelű mennyiségek meg, melyekben a ' tört hatványjel' számlálója nem egy, hanem több, például 2 , 3 , 4 , 5 , stb, a ' milyenek $a^{2/3}$, $a^{3/4}$, $a^{5/8}$, stb, a ' tört hatványjeleknek fentebbi magyarázata szerint, nem egyebek lesznek, mint mindegyik az a annyiadik gyökerének, a ' hány a ' tört hatványjel' nevezője, annyiadik hatalma, a ' hány ugyanannak számlálója. Például ha $a = d$ d d d d d, és így

$$d = a^{1/5} = \sqrt[5]{a} : \text{úgy fog lenni}$$

$$dd = a^{2/5} = (\sqrt[5]{a})^2$$

$$ddd = a^{3/5} = (\sqrt[5]{a})^3$$

ddd d = $a^{4/5} = (\sqrt[5]{a})^4$, és így tovább. A' honnan következik, hogy a ' tört hatványjel, melyről fentebb azt mondtuk, hogy az is szintúgy mint az egész hatványjel azt jelenti, hányszor kell a ' számot, mely felett az áll, szorozni az 1 -hez (a ' mit azután úgy magyaráztunk, hogy a ' számot, mely felibe a ' tört hatványjel írva van, szét kell bontani annyi egyenlő tényezőkre, a ' hány egyből áll a ' tört hatványjel nevezője, és ezek közül annyit kell az 1 -hez szorozni, a ' hány a ' tört hatványjel számlálója,) már most magyarázhatjuk így is: a ' tört hatványjel- azt teszi, hogy annak a ' számnak, mely felibe az írva van, ki kell vonni annyiadik gyökerét, a ' hány egyből áll a ' tört hatványjel' nevezője, 's azután ezt a ' gyökeret fell kell emelni annyiadik hatalomra, a ' hány 1 -ből áll a ' tört hatványjel' számlálója. Például $a^{3/5}$ annyi mint az a 5-dik gyökerének 3-dik hatalma, vagy

általánosan $a^{\frac{m}{n}}$ annyi, mint az a n -dik gyökerének m -dik hatalma, vagy jegyekkel $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$.

15. §. Végezetre meg lehet mutatni azt is, hogy az a n -dik gyökerének m -dik hatalma meg, annyi mint az a m -dik hatalmának n -dik gyökere, vagy jegyekkel, hogy $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[m]{a^m}$. Ugyanis, ha teszszük hogy legyen $a = d^n$, úgy $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{d^n} = d$, 's innen az egyenlet mind két oldalát m -dik hatalomra emelvén $(\sqrt[n]{a})^m = d^m$. Továbbá ugyanazon feltétellel, ha t. i. $a = d^n$, fog lenni $a^m = (d^n)^m$. Úgyde e' helyett: $(d^n)^m$, mely azt teszi, hogy egy csoportban n -szer van írva egymás után a' d mint tényező, 's ilyen csoport d ismét m -szer van írva tényezőként egymás után, írhatjuk ezt:

$(d^m)^n$, mely azt teszi, hogy egy csoportban m -szer van írva egymás után a' d mint tényező, 's ilyen csoport d ismét n -szer van írva tényezőként egymás után; mert akár az n -szer írt d -t ismételjük m -szer, akár az m -szer írtat n -szer, mind egyre megy ki; mi-

vel $m \times n = n \times m$. Mit ha teszünk, azaz, ha e' helyett: $a^m = (d^n)^m$ ezt írjuk: $a^m = (d^m)^n$: úgy fog lenni: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{(d^m)^n}$, azaz $\sqrt[n]{a^m} = d^m$. Úgy de fentebb meg, a' mint láttuk, volt: $(\sqrt[n]{a})^m = d^m$. A' honnan a' d^m értékének két különböző kifejezéseit egymással egyen-

letbe tévén, lesz: $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$; azaz, az a n -dik gyökerének m -dik hatványa annyi mint az a m -dik hatványának n -dik gyökere, a' mit épen meg akartunk mutatni.

Ezek szerint, mivel már fentebb megmutattuk, hogy

$$(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}};$$

itt pedig hogy $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$: tehát az $(\sqrt[n]{a})^m$ -nak két különböző kifejezéseit egymással egyenletbe tévén lesz $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Miből ismét következik, hogy a' hatványjelt, mikor az törtszám, harmadikféleképen így is lehet magyarázni: a' tört hatványjel, $\frac{m}{n}$, azt

teszi, hogy a' számot, mely felett az áll, elébb fel kell emelni annyiadik hatalomra, a' hány 1-ből áll a' törtszám számlálója, 's azután ezen hatalomnak venni kell annyiadik gyökerét a' hány 1-ből áll a' törtszám nevezője.

16. §. Ezek szerint látjuk, hogy e' három kifejezés $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, mindegyre megyen ki; csak hogy az elsöben határozottan ki van jelentve, hogy a' kérdéses számból, a , elébb kell kivonni az n -dik gyökeret, 's azután ezt kell m -dik hatalomra emelni; a' másodikban szinte oly határozottan kijelentetik, hogy a' kérdéses számot, a , elébb kell felemelni az m -dik hatalomra, 's azután ebből kell kivonni az n -dik gyökeret; a' harmadikban pedig határozatlan hagyatik, melyik munka vitessék azon elébb véghez, a' gyökér kivonás-é, vagy a' hatalomra emelés. Most hát már ezen kifejezést: $a^{\frac{m}{n}}$ háromféleképen is magyarázhatjuk t. i. először így: az a -t $\frac{m}{n}$ -szer kell írni az 1 mellé mint tényezőt, azaz hogy az a -t el kell bontani n egyenlő tényezőkre, és ezek közül m tényezőt kell az 1 mellé írni szorzókúl; másodszer így: az a -ból ki kell vonni az n -dik gyökeret és ezt fel kell emelni az m -dik hatalomra; harmadszor így: az a -t fel kell emelni az m -dik hatalomra; és ebből ki kell vonni az n -dik gyökerét. Mely utolsó magyarázat szerint $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Miből ismét következik, hogy minden gyökeret által lehet változtatni tört jelű hatvánnyá az által, ha a' gyökér jegy alatt álló szám hatványjelének aláírjuk osztókép' a' kivánt gyökérnek a' gyökérjegyre írt gyökérjelét; például $\sqrt[5]{a^3} = a^{3/5}$. Hanem itt arra kell vigyázni, hogy az 1-ső hatalom' hatványjelét $=1$, és a' 2-dik gyökér' gyökérjelét $=2$, melyeket különben nem szokás kiírni az ilyen átváltoztatáskor kiírjuk világosan. Például mivel $\sqrt[3]{a}$ e' helyett van: $\sqrt[3]{a^1}$, tehát fog lenni $\sqrt[3]{a} = a^{1/3}$; hasonlóképen mivel \sqrt{a} teljesen kiírva így volna: $\sqrt[2]{a^1}$, tehet átváltoztatva lesz $\sqrt{a} = a^{1/2}$ *)

*) Valamint a' gyökereket hatványokká, úgy a' hatványokat is mind által lehetne változtatni gyökerekké, ha erre szükség volna. Nevezetesen minden hat-

17. §. Miután e'képen nem csak a' hatványok' fogalmát általánosán kifejtettük, hanem a' számok' gyökereiről is szollottunk, 's nevezetesen láttuk, hogy a' gyökek is nem egyebek törtjelű hatványoknál, következésképen, hogy a' hatványok alatt a' gyökek is befoglalhatnak: most már egy foggal lépünk közelebb célunkhoz, 's lássuk micsoda szabályok szerint kell bännünk ugyanazon egy számnak különböző hatványaival, midőn azokat egymással szorozni, vagy osztani; hatalomra emelni, vagy belőlök gyökereket vonni szükséges.

a) Ha ugyanazon egy számnak különböző hatványait szorozni kell egymással, például $a^2 \times a^3$: mivel ezek teljesen írva így volnának $aa \times aaa$, ezek pedig minden jegy nélkül összeírva (mert a' minden jegy nélküli összeírás is szorzás jegye) így: $aaaaa$, 's végre ez hatványjellel így: a^5 : tehát látni való, hogy a' tényezők hatványjeleinek summája lesz a' ténynek hatványjele; $a^2 \times a^3 = a^{(2+3)} = a^5$. Épen így van a' dolog, látni való, akkor is, mikor a' hatványjelek egy alsóju törtszámok; például $a^{2/7} \times a^{3/7} = a^{(2/7+3/7)} = a^{5/7}$;

ványt melynek hatványjele törtszám, kétkép' is lehetne gyökerré változtatni. Először t. i. úgy, hogy a' tört hatványjel' számlálója meghagyatván hatványjelnek, nevezője gyökérjelül íratnék a' kérdéses szám' ezen hatványa elibe, 's így lenne

például $a^{3/5} = \sqrt[5]{a^3}$; mi csak megfordítása a' közelebbi szabálynak. Ugyanezen szabály szerint lehetne továbbá a' hatványt gyökérré változtatni akkor is, mikor a' hatványjel egész szám, ha azt törtszám formába írjuk, 1-et irván alá osztóul e'

képen: $a^m = a^{m/1} = \sqrt[1]{a^m}$. Úgy van! mert a' gyökérnek fentebb kifejtett fogalma szerint első gyökere akármely számnak is egy olyan szám, melyet egyszer kell az 1 mellé írni mint szorzót, hogy a' kérdéses szám mint szorzat kijöjjön; ez pedig, látni való, épen olyan nagy lesz mint maga a' kérdéses szám, mivel $1 \cdot a^m = a^m$; mi szerint akármely számnak is valamint 1-ső hatványa, úgy 1-ső gyökere is magával a' számmal egyenlő. Másik módja lenne a' hatványok' gyökerekévé változtatásának ez, hogy a' tört hatványjelt megfordítva, azaz úgy írják gyökérjelül a' szám elibe, hogy a' mi a' hatványjelnek nevezője volt, az a' gyökérjelnek számlálója, és megfordítva, a' mi amannak számlálója volt, ennek nevezője lenne; például

így: $a^{2/5} = \sqrt[5]{a^2}$. Úgy van! mert ha $5/3$ -dik gyökerét keresni az a'-nak ezt teszi: keresni egy olyan számot, melyet mint tényezőt $5/3$ -ad részszer, vagyis melynek, mint tényezőnek $5/3$ -ad részét kell írni az 1 mellé szorzóul, hogy a' szorzat $= a$ legyen: látni való, hogy a' keresett szám nem lehet egyéb, mint az a'-nak egy olyan hatványa, melynek hatványjele a' megfordított gyökérjel, azaz nem lehet egyéb mint $a^{3/5} = a^{1/5} a^{1/5} a^{1/5}$; mivel ennek mint tényezőnek $1/5$ -ad része $= a^{1/5}$,

mert az a -nak 7-dik gyökerét 2-szer írni mint tényezőt, 's ezek mellé ugyanazt ismét 3-szor írni mint tényezőt, annyi mint az a -nak 7-dik gyökerét 5-ször írni mint tényezőt, a ' mit pedig, mint már

láttuk, írhatunk így is: $a^{5/7}$, nem csak így $(\sqrt[7]{a})^5$. Hogy ilyenkor a ' törthatványjeleket, ha azok nem egy alsójúak, elébb egy alsóra kell vonni, és azután adni össze, ez magában értendő; például $a^{2/3} \times a^{3/4} = a^{8/12} \times a^{9/12} = a^{17/12}$, azaz, ha az a 3-k gyökerének 2-ik hatalmát szorozzuk az a 4-dik gyökerének 3-dik hatalmával, kijő az a 12-dik gyökerének 17-dik hatalma. Egy szóval, ha m és n a ' tényezők hatványjelei, már ezek akár egész akár törtszámokat jelentsenek is, a ' tény' hatványjele lesz mindenkor $(m + n)$, vagy jegyekkel $a^m \times a^n = a^{m+n}$.

b) Ha ugyanazon számnak különböző hatványait osztani kell

egymással, például $\frac{a^5}{a^2}$; mivel itt osztó és osztandó teljesen kiírva
 $\frac{aaaaa}{aa}$
 így volnának $\frac{aaaaa}{aa}$; osztani pedig annyit tesz, mint az osztan-

$\frac{5}{3}$ -ad része pedig $= a^{1/3} \cdot a^{1/6} \cdot a^{1/6} \cdot a^{1/6} \cdot a^{1/6} \cdot a^{1/6} = a^{5/6} = a^1 = a$, mely az 1 mellé írtván szorozól kijő az a , mert 1. $a = a$. Ezen szabályt is lehet alkalmaztatni akkor is, mikor a ' hatványjel egész szám, ha ezt törtszám formában írjuk, például így:

$a^2 = a^{2/1} = \sqrt[1/2]{a}$. Úgy van! mert $\sqrt[1/2]{a}$ olyan számot jelent, melyet mint tényezőt $\frac{1}{2}$ -szer, vagy melynek mint tényezőnek csak $\frac{1}{2}$ -ét kell az 1 mellé írni szorozól, hogy kijöjön az a ; ilyen szám pedig az $a^2 = aa$, melynek mint tényezőnek fele $= a$, mely az 1 mellé írtván szorozól, a ' szorzat: 1. a , $= a$. Épen így; a^{-3}

$= a^{-3/1} = \sqrt[1/3]{a}$. Úgy van! mert $\sqrt[1/3]{a}$ olyan számot jelent, mely mint tényező $\frac{1}{3}$ -d részszer, vagyis melynek mint tényezőnek $\frac{1}{3}$ -d része úgy járulván az 1-hez, mint célelles szorzó, azaz mint osztó, kijő az a ; ez a ' szám pedig épen

$a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}$. mivel ennek mint tényezőnek egy harmadrésze $= \frac{1}{a}$,

mely ha úgy járúl az 1-hez mint célelles szorzó, azaz mint osztó az eredmény lesz a ; mert $\frac{1}{1} = 1 \cdot \frac{a}{1} = 1 \cdot a = a$. sat. De hogy a ' hatványokat e'képen változ-

tassuk gyökerekké, arra semmi szükség sincsen. Van ellenben arra, hogy a ' gyökereket hatványokká változtassuk; mert csak ez által lehet az általános számvetésben (arithmetica universalis) általános szabályokat találni fel. Azonban, ámbár a ' hatványoknak gyökerekké változtatására nincsen is semmi szükség, úgy tartottam, hogy ezen jegyzést, melyet tudtomra még senki sem tett, nem árt ide tennem, hogy annál inkább megtessék mikép a ' gyökér vonás nem egyéb viszszás, vagy megfordított hatalomra emelésnél.

dót úgy nézvéen mint egy tényezőnek egy anyagszámra hatásából származott tény, az osztót pedig mint valamelyiket a' kettő közül, t. i. mint vagy tényezőt, vagy anyagszámot, a' másikat kikeresni: tehát látni való, hogy itt is az osztandó: aaaaa úgy kell egy tényezőre és egy anyagszámra, vagy a' mint mondani szokás, két tényezőre (két factorra) szét bontani, hogy az egyik olyan nagy legyen és így annyi a-ból álljon, mint az osztó; a' mikor aztán a' másik, mely a' hanyados lesz, látni való, annyi a-ból fog állani, a' hány marad, ha az osztandóban lévő a-k számából az osztóban lévőké leszámítatik. Úgyde az osztandóban lévő a-k számát jelenti az osztandó hatványjele, az osztóban lévőket pedig az osztó hatványjele; és így a' hanyados hatványjele kijő, ha az osztandó hat-

ványjeléből az osztó hatványjelét leszámítjuk: $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$.

Hogy ez a' szabály akkor is áll, mikor az osztandó és osztó hatványjelei közül vagy egyik, vagy másik, vagy mindenik is törtszám, említeni is alig szükséges. Mert, hogy csak azt az egy esetet vegyük fel, melyre lehet sőt kell visszavinni a' többit is, t. i. mikor mind az osztó mind az osztandó hatványjele egy alsóju törtszámok, látni való

hogy például $\frac{a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{7/5-3/5} = a^{4/5}$ mivel ha ezt: $a^{7/5}$,

úgy nézzük mint az a két különböző hatványainak, melyek közül az egyik $= a^{3/5}$, egymással szorzásából származott tény, 's következésképen ennek hatványjelét, $^{7/5}$, úgy, mint két hatványjelnek összegét, melyek közül az egyik $=^{3/5}$: a' másik hatványjel természetel nem lehet egyéb, mint $^{7/5-3/5} =^{4/5}$, 's következésképen a' másik tényező nem egyéb, mint $a^{4/5}$. Hasonlóképen könnyű általánítani, hogy ez a' szabály áll akkor is, mikor az osztó hatványjele nagyobb lévén mint az osztandóé, a' hanyados' hatványjele ezen szabály szerint czélelles (negativus) szám, és így maga a' hanyados czélelles szorzó lesz, például, hogy $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$; mert ha itt

az osztandót, $a^2 = aa$ olyan két tényezőtől származott ténynek képzeljük, melyeknek egyike, melyet ismerünk, az osztó, $a^5 = aaaaa$, másika pedig, melyet nem ismerünk, és épen keresünk, a' hanyados: úgy ezen utóbbi nem lehet egyéb mint a^{-3} azaz $\frac{1}{aaa}$, mivel

$aaaaa \times \frac{1}{aaa} = \frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^2$, vagy általánosan mondva ki a' szá-

bályt: minthogy az osztandó nem egyéb, mint két tényezőnek, t. i. az osztónak és a' hanyadosnak egymással szorzásából származó tény: tehát látni való, hogy ha egyikben e' két tényező közül, t. i. az osztóban nagyobb számmal vannak az a szorzók, mint magában a' tényben, a' másíknak, t. i. a' hanyadosnak szükségesképen olyan cél-ellenes tényezőnek kell lennie, mely amabból t. i. az osztóból le-
rővjon annyi a-t, a' mennyivel abban, több van mint az osztandóban. 'S mind ezeket összevéve az általános szabály ez lesz: . Ha ugyanazon számnak különböző hatványait kell osztanunk egymással: az osztó hatványjelét levonván az osztandó hatvány jeléből, kijő a' hanyados hatványjele, vagy jegyekkel kitéve $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

c) Ha valamely számnak bizonyos hatalmát ismét más hatalomra kell emelni, például $(a^2)^3$; mivel itt a' rekeszben lévő hatványjel azt jelenti, hányszor kell az a-t mint tényezőt leírni egyegy csoportban, a' rekeszen kívül lévő pedig azt, hány ilyen csoport tényezőt kell írni egymásután e'képen: $aa \times aa \times aa$: tehát látni való, hogy az a tényezők száma az egész tényben, azaz, az a bizonyos hatványa' bizonyos hatalmának hatványjele kijő, ha a' két hatványjelt melyek közül egyik azt jelenti, hanyadik hatványát kell az a-nak, másik pedig hogy hanyadik hatalomra kell azt emelni, egymással szorozzuk e'képen $(a^2)^3 = a^2 \times 3 = a^6$. Hogy ez a' szabály is áll akkor is, mikor akár egyik, akár mindenik hatványjel törtszám, könnyű általlátni. Például $(a^{1/2})^2 = a^2 \times 1/2 = a^1 = a$. Úgy van! mert az a második gyökerének második hatványa, sőt átaljában az a n-dik gyökerének n-dik hatványa épen maga az a; vagy máskép: mert az a-nak mint tényezőnek felét, $(a^{1/2})$, kétszer írni szorzóul az 1 mellé annyi, mint magát az a-t egyszer írni szorzóul ugyanoda. Hasonlóképen $(a^{1/2})^{1/2} = a^{1/2} \times 1/2 = a^{1/4}$. Úgy van! mert ha az a-t elbontjuk két egyenlő tényezőre, 's ezeknek egyikét, $a^{1/2}$, ismét két egyenlő tényezőre, ezen utóbbiak egyike, $(a^{1/2})^{1/2}$, az a-nak mint tényezőnek $1/4$ részét fogja tenni; mivel azt 4-szer kell írni mint tényezőt, hogy annyit tegyen mint ha az a-t egyszer írják. Úgy de az a-nak mint tényezőnek $1/4$ részét így írjuk $a^{1/4}$. Áll tehát minden esetekben a' fentebbi szabály is, melyet általánosan így fejezünk ki: $(a^m)^n = a^{mn}$.

d) Ha valamely számnak bizonyos hatványából például

az a^3 -ból, bizonyos, például 4-dik gyökeret kell vonni: $\sqrt[4]{a^3}$; minthogy az a^3 -nak 4-dik gyökere olyan szám, mely ha 4-szer iratik mint tényező, úgy adja ki az a^3 -t mint tény, vagy — minthogy a' 4-szer írás helyett lehet azt csak 1-szer írni, de hatványjelét 4-el szorozni, — olyan szám, melyben csak egyszer van írva az a, de olyan hatványjellel mely 4-szer véve tesz 3-at, mely is a' 3-nak $\frac{1}{4}$

része $=\frac{3}{4}$, és így $\sqrt[4]{a^3} = a^{3/4}$: tehát világos, hogy ilyenkor a' szabály ez lesz: a' hatványjelt el kell osztani a' gyökérjellel, 's a' hanyados lesz a' gyökér' hatványjele. Ugyanez az igazság már fentebb a' 16-dik §-ban is előfordult, csakhogy más formában, t. i. feleletül ezen kérdésre, mikép' lehet a' gyökereket tört hatványokká átváltóztatni. Hogy az itt kifejtett szabály is általános, és áll akkor is, mikor a' gyökérjegy alatti szám' hatványjele törtszám (mert a' gyökérjegyben álló gyökérjel nem is szokott törtszám lenni), például hogy $\sqrt[3]{a^{1/3}} = a^{1/9}$; mivel $(a^{1/9})^3 = a^{3/9} = a^{1/3}$: ez oly világos az eddig mondottakból, hogy több szót tenni róla szükségtelennek tartjuk, 's csak az általános szabály általános kifejezését teszszük ide e'képen: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. *)

18. §. A' közelebbi §-ban kifejtett négy szabályokból ezt az igen nevezetes következtetést húzhatjuk ki, hogy ha egy olyan könyvünk volna, melyben minden számok, melyek számvetéseinkben előfordúlnak, úgy volnának előterjesztve, mint ugyanazon egy számnak, a, mely ilyenkor alapszámunk nevezetük, különböző hatványai, 's mindegyiknek mellé volna jegyezve, hanyadik hatványa mindegyik az alapszámnak: ezen könyvnek igen szép hasznát vehetnők nagy és nyügös számvetéseink megkönnyébbítésére. Ugyanis:

1. Ha két nagy számot p és q szoroznunk kellene egymással: kikeresnők a' könyvből, hanyadik hatványa mindegyik az alapszámnak, 's megtalálván hogy például p az alapszámnak m-dik, q pedig

*) Az itt kifejtett négy szabályok oly általánosok, hogy állanak olyankor is, mikor a' hatványjelek közül egyik vagy másik, vagy mindenik is czélelleses szám, mint ezt a' czélelleses hatványok fogalmából az eddig mondattak szerint kiki magától is könnyen általláthatja. Hogy mi világosító példákat mindenütt csak olyanokat hoztunk fel, melyekben a' hatvány jelek mind czélirányos számok, ez rövidség okáért, 's egyszersmind azért történt, mivel a' gyakorlatban, hol ezen szabályoknak majd hasznát vesszük, mindig csak ez az eset fordul elő.

n -dik hatványa, a ' két hatványjelt összeadnók, és az összevet $(m+n)$ kikeresvén, megnéznók, micsoda szám van a ' mellé írva mint az alapszámnak $(m+n)$ -dik hatványa, 's ez lenne ama két nagy számnak p és q szorzata; mert ha $p = a^m$, $q = a^n$, úgy $pq = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, azaz, a ' szorzat pq az alapszámnak $(m+n)$ -dik hatványa.

2. Ha két nagy szám közül egyiket, p , osztanunk kellene a ' másikkal, q : kikeresnök a ' könyvből hanyadik hatványa mindegyik az alapszámnak, 's megtalálván hogy például az osztandó, p , az alapszámnak m -dik az osztó, q , pedig ugyanannak n -dik hatványa, az osztandó hatványjeléből leszámítanók az osztó' hatványjelét, és a ' maradékot $(m-n)$ kikeresvén, megnéznók micsoda szám van a ' mellé írva, mint az alapszámnak $(m-n)$ -dik hatványa, 's ez lenne a ' p -nek q általi elosztásából kijövő hanyados: mert ha $p = a^m$, $q = a^n$, úgy $\frac{p}{q} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, azaz, a ' hanyados $\frac{p}{q}$ az alapszámnak $(m-n)$ -dik hatványa.

3. Ha valamely számot, p , n -dik hatalomra kellene emelni, p^n : kikeresnök, hogy a ' kiadott szám, p , hanyadik hatványa az alapszámnak, 's megtalálván hogy az ennek például m -dik hatványa, e ' hatványjelt szoroznók az n -nel, a ' hanyadik hatalomra t. i. akarjuk emelni a ' p -t, és a ' szorzatot, $m n$, kikeresvén, megnéznók micsoda szám van a ' mellé írva, mint az alapszámnak $m n$ -dik hatványa, 's ez lenne a ' p -nek n -ik hatalma p^n ; mert ha $p = a^m$, úgy $p^n = (a^m)^n = a^{m n}$, azaz a ' keresett hatalom p^n az alapszámnak $(m n)$ -dik hatványa.

4. Ha valamely számból, p , az n -dik gyökeret kellene kivonni, $\sqrt[n]{p}$; kikeresnök, hanyadik hatványa a ' kiadott szám, p , az alapszámnak, 's megtalálván hogy az ennek például m -dik hatványa, e ' hatványjelt elosztanók az n -nel, a ' hanyadik gyökeret akarunk t. i. vonni a ' p -ből, és a ' hanyados $\frac{m}{n}$ kikeresvén megnéznók, micsoda szám van a ' mellé írva, mint az alapszámnak $\frac{m}{n}$ -dik hatványa, 's ez lenne a ' p -nek n -dik gyökere $\sqrt[n]{p}$; mert ha $p = a^m$, úgy $\sqrt[n]{p} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; azaz a ' keresett gyökér $\sqrt[n]{p}$ az alapszámnak $\left(\frac{m}{n}\right)$ -dik hatványa.

Egyszóval, látjuk, hogy egy olyan könyv segédelmével, melyben minden számok, melyek számvetéseinkben előfordúlnak úgy volnának előterjesztve, mint ugyanazon egy alapszámnak különböző hatványai, a' nagy számok' sokszorozását öszveadássá, elosztását kivonássá, a' többször ismételt szorzások által történő hatalomra emeléseket egyszerű szorzássá, 's végre a' nyugós, és minél nagyobb annál nyugösebb gyökér kivonásokat egyszerű elosztássá lehetne változtatni, 's így végetlenül megkönnyebbiteni.

19. §. De hogy ezt annál világosabban általlássuk, emeljük fel például a' 2-t minden egymásután következő czélirányos egész hatalmakra a' 0-tól csak a' 30-ig, mint az itt oldalt lévő számtábl-

1=2⁰ lácskában, 's lássuk ennek hasznavételét az ezen egynehány számokkali számvetésekben, melyek itt úgy terjesztetnek elő mint ugyanazon egy alapszámnak, t. i. a' 2-nek különböző hatványai.

32=2⁵ 1. Ha feladatunk ez: kiszámítani mennyi

64=2⁶ 16384×32768: kikeressük, hanyadik hatványa

128=2⁷ mindegyik e' két tényező közül az alapszámnak,

256=2⁸ 's megtalálván, hogy az első 14-dik, a' másod-

512=2⁹ dik 15-dik hatványa annak, e' két hatványjelt

1024=2¹⁰ öszveadjuk, és az öszveg 14+15=29 megmu-

2048=2¹¹ tatja, hogy e' kiadott két szám szorzata az alap-

4096=2¹² számnak 29-dik hatványa, 's ezt kikeresvén

8192=2¹³ számtáblácskánkban, kijö hogy:

16384=2¹⁴ 16384×32768=536870912.

32768=2¹⁵ 2. Ha feladatunk ez: kiszámítani mennyi

65536=2¹⁶ 1073741824

131072=2¹⁷ $\frac{1073741824}{8192}$: kikeresvén és megtalálván, hogy

262144=2¹⁸ az osztandó az alapszámnak 30-k az osztó pedig

524288=2¹⁹ ugyanannak 13-dik hatványa, e' hatványjelt a-

1048576=2²⁰ mabból levonjuk, 's a' maradék 30—13=17

2097152=2²¹ megmutatja, hogy a' hanyados az alapszámnak

4194304=2²² 17-ik hatványa, 's ezt kikeresvén megtaláltuk,

8388608=2²³ hogy a' hanyados $\frac{1073741824}{8192}=131072$.

16777216=2²⁴

33554432=2²⁵ 3. Ha feladatunk ez: kiszámítani mennyi

67108864=2²⁶ 16-nak a' 7-dik hatalma, (16)⁷: kikeressük ha-

134217728=2²⁷ nyadik hatványa az alapszámnak a' 16, melyet

$268435456=2^{28}$ 7-k hatalomra akarunk emelni, 's megtalálván, $536870912=2^{29}$ hogy 4-k hatványa, ezen hatványjelt 4 szorozzuk a' 7-el, a' hanyadik hatalomra t. i. akarjuk emelni a' 16-ot és a' szorzat $4 \times 7 = 28$ megmutatja hogy a' 16-nak kivánt 7-dik hatalma az alapszámnak 28-dik hatványa, melyet kikeresvén, látjuk hogy $(16)^7 = 268435456$.

4. Ha feladatunk ez: kiszámítani, mennyi 134217728-nak a' 3-dik gyökere, vagy mennyi $\sqrt[3]{134217728}$. Kikeresvén, hogy a' a' gyökérjegy alatti szám az alapszámnak 27-ik hatványa, ezen hatványjelt 27 elosztjuk a' keresett gyökérnek gyökérjelével a' 3-mal, és a' hanyados $\frac{27}{3} = 9$ megmutatja, hogy a' keresett gyökér az alapszámnak 9-dik hatványa, melyet is kikeresvén kijö, hogy

$\sqrt[3]{134217728} = 512$. E' kérdés megfejtése a' rendes úton tudjuk mily szövevényes és nyögös, így pedig mily könnyü! A' mi több, a' rendes úton minél magasabb rangú gyökeret kell kivonni, annál szövevényesebb lesz a' számvetés: így pedig hatványjelek segítségével akárhanyadik gyökeret kelljen kivonni, mind egyenlő könnyü-

sggel történik. Például ha ez a' kérdés: mennyi $\sqrt[6]{1073741824}$ itt is csak szintúgy kikeressük hanyadik hatványa az alapszámnak a' gyökérjegy alatti szám, 's megtalálván hogy ez annak 30-dik hatványa, e' hatványjelt elosztjuk a' kivánt gyökérnek jelével, és a' hanyados $\frac{30}{6} = 5$ megmutatja, hogy a' keresett gyökér az alapszám-

nak 5-dik hatványa; és így hogy $\sqrt[6]{1073741824} = 32$.

Ha már e' helyett: Az a' szám mely megjelenti, hanyadik hatványa az alapszámnak ez vagy amaz szám, például a' p, röviden csak ezt mondjuk: Hatványjele a' p-nek; e' helyett pedig még rövidebben ezt írjuk: Hatj. p: a' közelebbi feladatok' kidolgozását rövideden így írhatjuk le:

1. Hatj. $16384 = 14$.

+ Hatj. $32768 = 15$; innen

Hatj. $(16384 \times 32768) = 14 + 15 = 29$; és így a' szorzat $16384 \times 32768 = 536870912$.

2. Hatj. $1073741824=30$.

Hatj. $\frac{1073741824}{8192}=13$; innen

Hatj. $\left(\frac{1073741824}{8192}\right)=30-13=17$; és így a' hanyados

$$\frac{1073741824}{8192} = 131072.$$

3. Hatj. $16=4$, innen

Hatj. $(16)^7=7 \times 4=28$; és így a' keresett hatalom

$$(16)^7=268435456.$$

4. Hatj. $134217728=27$; innen

Hatj. $\sqrt[3]{134217728}=\frac{27}{3}=9$; és így a' keresett gyökér

$$\sqrt[3]{13417728}=512.$$

Gyakorlás végett dolgozzunk ki még itt egy példát, melyben a' hatványjelekkeli számvetésnek mind a' négy szabályai sokszorosán előfordulnak nevezetesen keressük ki az x értékét ezen egyenletből:

$$x = \frac{\sqrt[4]{(256)^5} \times \sqrt[3]{(512)^4}}{\sqrt{1024}}$$

Itt az x hanyados lévén, hogy annak hatvány jelét, 's annál fogva aztán magát az x-et megtalálhassuk, az osztandó hatványjelenből le kell vonni az osztó' hatványjelét; az osztandó pedig két tényezőtől származó tény lévén, annak hatványjele ezek' hatványjeleinek összege. A' munka rendi tehát ez lesz: Előbb kikeressük az osztandó első tényezőjének, utána a' másodiknak hatványjelét 's a' kettőt összeadjuk, és az összeg lesz az osztandó hatványjele. Azután kikeressük az osztó hatványjelét, 's azt kivonjuk az osztandóból és a' maradék lesz a' hanyadosnak az x-nek hatványjele, melynél fogva azt megtaláljuk e'képen:

1. Hatj. $2 \cdot 6=8$, innen

Hatj. $(256)^5=5 \times 8=40$; és így

Hatj. $\sqrt[4]{(256)^5}=\frac{40}{4}=10$, az osztandó első tényezője' hatvj. jelle.

2. Hatj. $512=9$ innen

Hatj. $(512)^4=4 \times 9=36$, és így

Hatj. $\sqrt[3]{(512)^4}=\frac{36}{3}=12$, az osztandó 2-k tényezőjének hatvj.

3. Hatj. $\left[\sqrt[4]{(256)^5} \cdot \sqrt[3]{(512)^4} \right] = 10 + 12 = 22$; az egész osztandó' hj.

4. Hatj. $1024 = 10$, és így

Hatj. $\sqrt{1024} = \frac{10}{2} = 5$; az osztó hatványjelle.

5. Hatj. $\left[\frac{\sqrt[4]{(257)^5} \cdot \sqrt[3]{(512)^4}}{\sqrt{1024}} \right]$ azaz Hatj. $x = 22 - 5 = 17$, és így

$$x = 131072.$$

$$1 = 3^0$$

$$3 = 3^1$$

$$9 = 3^2$$

$$27 = 3^3$$

$$81 = 3^4$$

$$243 = 3^5$$

$$729 = 3^6$$

$$2187 = 3^7$$

$$6561 = 3^8$$

$$19683 = 3^9$$

$$59049 = 3^{10}$$

$$177147 = 3^{11}$$

$$531441 = 3^{12}$$

$$1594323 = 3^{13}$$

$$4782969 = 3^{14}$$

$$14348907 = 3^{15}$$

1. Kérdés: mennyi 2187×6561 ?

Felelet: Hatj. $2187 = 7$.

Hatj. $6561 = 8$. innen

Hatj. $(2187 \times 6561) = 7 + 8 = 15$, és így

$$2187 \times 6561 = 14348907.$$

2. Kérdés: mennyi $\frac{14348907}{729}$?

Felelet: Hatj. $14348907 = 15$

Hatj. $729 = 6$, innen

Hatj. $\left(\frac{14348907}{729} \right) = 15 - 6 = 9$, és így

$$\frac{14348907}{729} = 19683.$$

3. Kérdés; mennyi 9^7 ?

Felelet: Hatj. $9 = 2$, innen

Hatj. $9^7 = 7 \times 2 = 14$, és így

$9^7 = 4782969$.

4. Kérdés: mennyi $\sqrt[4]{531441}$?

Felelet: Hatj. $531441 = 12$, innen

Hatj. $\sqrt[4]{531441} = \frac{12}{4} = 3$, és így

$\sqrt[4]{431441} = 27$.

21. §. De akarmely számot vegyünk is fel alapul, látni való, hogy arra magára a' számvetésben semmi szükségünk nincsen, hanem csak azon hatványjeleket használjuk, melyek megmutatják, melyik szám hanyadik hatványa az alapszámnak, akarmely szám vétessek is fel alapul. A' honnan az olyan forma számtáblácskákból, milyenek a' fentebbiek, magát az alapszámot rövidség' okáért ki is

Számok	Hatj.
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10
2048	11
4096	12
8192	13
16384	14
32768	15
65536	16
131072	17
262144	18
stb.	

hagyhatjuk, 's elég ha a' számok közül, melyek ott úgy fordulnak elő, mint az alapszámnak különböző hatványai, és az első rovatba írtnak, mindegyiknek azt írjuk utána a' második rovatba, melyik hanyadik hatványa az alapszámnak, akarmi legyen is az alapszám. Mely rövidítéssel a' fentebbi első számtáblácska úgy esnék mint itt oldalt láthatni; és ez így is épen azt a' szolgálatot teszi, a' mit amúgy; mert amúgy sem azt néztük, mi az alapszám, hanem csak azt, hanyadik hatványa valamely szám az alapszámnak, ezt pedig táblácskánk így is megmutatja. Például, ha ez a' kérdés: mennyi 8^5 : látjuk táblácskánkából hogy hatj. $8 = 3$, a' honnan következik hogy hatj. $8^5 = 5 \times 3 = 15$, 's azt ismét megmutatja táblácskánk hogy 15-dik hatványa az alapszámnak $= 32768$, 's következésképen hogy $8^5 = 32768$.

22. §. De ezen táblácskának, akarmeddig folytatnók is ezt az elkezdett módon, mindig az a' nagy fogyatkozása lenne, hogy igen

sok számok nem lennének benne úgy terjesztve elő, mint a' felvett alapszámnak a' 2-nek hatványai; mert például a' 2 és 4 közt hiányzik a' 3; a' 4 és 8 közt hiányzanak az 5, 6, 7; a' 8 és 16 közt a' 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, és így tovább, minden következő pár szám között több több, 's ennél fogva az ilyen hijános számtábláknak a' hatványjelekkeli számvetésre igen kevés hasznát vehetnők. Hogy tehát az ilyen számvetés jótéteményeivel minden elő forduló esetekben élhessünk, olyan számtáblákra van szükségünk, hol az első rovatban minden egész számok az 1-től kezdve felfelé, renddel egymás után, a' legnagyobb számig, mely számvetéseinkben elő szokott fordulni, mind úgy legyenek előterjesztve, mint ugyanazon egy alapszámnak — már akármelyiknek — hatványai, mindegyiknek utána íratván a' 2-dik rovatban a' hatványjel, mely megmutatja, hanyadik hatványa mindegyik az alapszámnak.

I. SZAKASZ.

A' szorszámokról általánosan.

23. §. Ha a' természetes számok az 1-től fel bizonyos nagy számig, melynél nagyobb nem igen szokott előfordulni számvetéseinkben, mind úgy terjesztetnek elő, mint ugyanazon egy alapszámnak hatványai, nevezetesen két rovatot vonván, az elsőbe íratnak a' természetes számok 1, 2, 3, 4, 5 stb. renddel egymás alá, a' másodikba pedig mindegyiknek utána íratik a' hatványjel, mely megmutatja, melyik hanyadik hatványa az alapszámnak: ebben az esetben a' második rovatbeli hatványjelek neveztetnek az első rovatbeli számok szorszámjainak, vagy logaritmusaiknak, t. i. mindegyik azon szám logaritmusaának, mely neki az első rovatban megfelel. Magokat a' rovatokat pedig, melyek a' természetes számokat, és azoknak szorszámait, vagy logaritmusaikat e'kép' előterjesztik, hívják szorszám tábláknak (tabulae logarithmicae); végre egy bizonyos alapszámra épített szorszám táblákat neveznek öszvesen egy szorszám-alkotmányoknak (systema logarithmicum). A' honnan világos, hogy a' szorszámok, vagy logaritmuskok nem

egyebek hatványjeleknél, úgy mindazáltal, hogy a' hatványjelek nem mindenkor, és általjában, hanem csak az itt előadott esetben neveztetnek szorszámoknak, vagy logaritmusoknak. Világos továbbá az is, miért neveztük mi a' hatványjeleket ezen esetben szorszámoknak. Azért t. i. mivel mindegyik szorszám azt számlálja, hányszor hat az alapszám mint tényező az 1-re mint anyagszámra, hogy ebből az első rovatban a' szorszám előtt álló 's neki megfelelő szám mint hatvány kerekedjék. A' latin-görög logaritmus is épen ezt teszi: szorszám, vagy szer-szám *), öszve lévén téve e' két görög szóból: $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ = ratio = szer, és $\alpha\rho\theta\mu\omicron\varsigma$ = numerus = szám, 's szokott magyarázatja is ezen szónak a' mértani (mathematicus) könyvekben in ultima analysi egyre megy ki a' miénkkel, csak hogy a' miénknek az az elsőbbsége van a' régi felett, hogy ez a' logaritmusok fogalmának kifejtésébe semmi idegen fogalmakat, — milyenek egy 0-on kezdődő, 's tagonként egyel egyel nevedő különbségi sorzat (arithmetica progressio), és egy 1-en kezdődő, 's bármily következő tagú szeri sorzat (geometrica progressio), 's ezeknek tagonkénti öszve hasonlítása egymással, vagy egy alapszer (Grundverhältniss), és ennek különböző hatványai, 's ezeknek hatványjelei — bele nem zavar **), és a' logaritmusok' egyszerű fogalmát ezek által be nem bonyolítja; hanem

*) A' logaritmust mondhatnók magyarul szerszámoknak is, ha ez a' szó nyelvünkben el nem volna már foglalva más jelentésre; ámbár az is igaz, hogy ez talám még tulajdonabb jelentése lenne ezen szónak mint a' mostani; melynek magyarázatát lásd Értekezés és Kitérések című munkám 448-ik lapján.

**) Hogy Olvasóim, ha más könyveket olvasnak a' logaritmusokról, magókat tájékozni tudják, nem árt, úgy fartom, itt röviden megemlítenünk, miképp volt szokás eleitől fogva meghatározni mi a' logaritmus, és miképp egyezik az a' mi határozatunkkal.

Azt mondják tehát, hogy ha felveszünk egy alapszer t (Grundverhältniss, ratio fundamentalis), például ezt: a: b (olv, a a' b-bez) és ezt szorozzuk magával nehányszor e' képen: $a^2: b^2$, $a^3: b^3$, $a^4: b^4$, stb.: így az ilyen egy alapszernek többszöri magával szorzásából származott szerek közül mindegyiknek logaritmusa (*των λογων αυτης αριθμος*), azaz, szereinek száma, vagy szer-számja, szorszámja az a' szám, mely megmutatja, hogy az alapszer hány-szor van mindegyikben magával szorozva. Például ezen szernek $a^2: b^2$, logaritmusa a' 2, ennek $a^3: b^3$ logaritmusa a' 3, és így tovább. Jó! De hiszen a' a' szer két szám között nem egyéb mint a' hanyados, mely megmutatja, hány-szer te nagyobb vagy kisebb egyik a' másiknál. Peld. e' két szám között 2, és 6 a' szer: 2: 6 vagy ezt teszi: $\frac{6}{2} = 3$, vagy pedig ezt: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, melyek közül a-mannak értelme ez, hogy a' 6, 3-szorta nagyobb, mint a' 2, ennek pedig az, hogy

minthogy a' logaritmusok nem egyebek hatványjeleknél, a' hatványjelek határozatát (definitio) meghagyja logaritmusok határozatának is, csakhogy a' hatványjeleknek (exponentes potentiae) abban az esetben, mikor azok külön névvel logaritmusoknak neveztetnek, magyarul is külön nevet ad, nevezvén azokat szorszá-
moknak; oly név, mely midőn egyrésről azoknak lényegét kifejezi, más részről ugyanazoknak görög-latin nevével is öszvevág. Végezetre, világos a' fentebb mondattakból az is, hogy mielőtt tudtuk volna, mik a' szorszá-
mok vagy logaritmusok, az azokali számvetés szabályait már megtanúltuk, mert nem kell egyéb, mint a' hatványjelekkel számvetés' fentebb kifejtett négy szabályai-
ban e' helyett: hatványjel, mindenütt ezt tenni: szorszá-
m, vagy logaritmus, 's rövidítve e' helyett: hatj. ezt írni a' számok

a' 2 a' 6-nak $\frac{1}{3}$ -része, és így 3-szorta kisebb a' 6-nál; csakhogy ezen alapszerben a: b, határozatlan marad, melyik a' két szám közül az osztó, melyik az osztandó. Úgyde ezt a' szert a: b, vagy ezt a' hanyadost: $\frac{a}{b}$ szabad egy betűvel is kifejeznünk e'képen: $\frac{a}{b} = c$, 's így e' helyett hogy az $\frac{a}{b}$ -t vesszük fel alapszernek, mondhatjuk ezt: a' c-t vesszük fel alapszámmak, 's ha mind a' kettőt felemeljük n-re e'képen: $\frac{a^n}{b^n} = c^n$, vagy $\left(\frac{a}{b}\right)^n = c^n$: úgy e' helyett, hogy az alapszer n-dik hatványának, az $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ -nek logaritmusza az n, mondhatjuk hogy az alapszám n-dik hatványának a' c^n -nek logaritmusza az n. Peldául, ha alapszernek, — mint Brigg cselekedett, — mert ő is alapszerről, és nem alapszámról beszélt, — ezt vesszük fel 1: 10, azaz, $\frac{10}{1}$, a' mikor aztán az alapszám ezen alapszernek értéke azaz = 10 lesz:

úgy az alapszer n-dik peldául 3-dik hatványa fog lenni: $\frac{10^3}{1^3} = \left(\frac{10}{1}\right)^3$, az alapszámé pedig 10^3 , 's mindeniknek logaritmusza a' 3. Mind a' kettő egyre megy ki, látni való; de amaz cifrább, ez egyszerűbb. Ha a' 10-et akarjuk alapul felvenni, mi szükség azt úgy képzelnünk mint szert, mint olyan számot, mely abból származik, hogy a' 10-t elosztjuk 1-el? Ennek haszna nincs semmi, kára pedig az, hogy az egyszerű és világos fogalmot bebonyolítja, és elhomályosítja.

Máskép szokták még a' logaritmusokat meghatározni úgy is, hogy leírnak egy különbségi sorzatot, mely 0-on kezdődik, 's tagról tagra egyel egyel nevededik; és ennek aláírnak egy szeri sorzatot, melynek kezdő tagja = 1, a' következő pedig akarmely más szám, peldául = 2, mi által a' sorzat minden tagjai adva vannak e'képen:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	sth.
1:	2:	4:	8:	16:	32:	64:	128:	256.	sth:

elibe: szorsz. *) vagy log. *) 's készek a' szorszámokkali számvetés szabályai, 's kész a' forma, mely szerint efféle számvetéseinket intéznünk kell; mi okon itt ezeket ismételni sem tartjuk szükségesnek.

24. §. Ezek szerint úgy látszik, a' végre hogy a' logaritmusoknak nehezebb számvetéseinkben hasznátvehessük, már nincs egyéb hátra, mint az, hogy valamely szorszámalkotmánnyal, melyet vas szorgalmú Mathematicusok köz haszonvételre kiszámítottak, és egész könyvekben előadtak, megismerkedjünk, és abban a' járását megtanuljuk, hogy így ott akármely szám' logaritmusát, és megfordítva akármely logaritmushoz a' neki megfelelő számot könnyen fel tudjuk találni, 's így mielőtt a' szorszám táblák kiszámítása módját, mely nehezebb feladat, alább a' második részben megtanulnók is, azokat használhassuk.

és azt mondják hogy itt a' szeri sorzat' mindegyik tagjának logaritmus a' különbségi sorzatban neki megfelelő tag; például az 1-nek logaritmus a' 0, a' 2-nek az 1, a' 4-nek a' 2, a' 8-nak a' 3, a' 16-nak a' 4, és így tovább. — Ez is igaz; mert így itt a' felső sorzatnak mindegyik tagja azt jelenti, látnivaló, hogy az alsó sorzatban neki megfelelő szám hanyadik hatványa ezen alapszerrek $1: 2 = \frac{2}{1}$, vagyis ezen alapszámnak: 2. De mi szükség nekünk azt, a' mi magában egyszerű és világos, így behonyolítani és elhomályosítani?

Távol légyen azonban, hogy mi azon derék Mathematicusokat, kik a' logaritmusok fogalmának ily meszsziről kerültek neki, és azt így behonyolították, vádoljuk. Mert jól látjuk, mikép az emberi elmének mindnyájunkkal közös sorsa az, hogy még a' mathesisi igazságokhoz is nem mindig a' legegyszerűsebb, 's legrövidebb, sőt sokszor igen tekervényes úton juthat, 's jutott is el valósággal, és hogy sokszor csak egy fogalomnak tisztába hozására is századok kívántattak 's kívántatnak.

*) Én részemről mind itt, mind ezután munkáimban megrövidítve nem a' magyar- hanem a' görög-latin név első betűivel fogok élni, nem csak azért, mivel szorsz, a' két kettős betű miatt (ezektől csak nem tudánk megszabadulni!) rövidítésnek hosszú, csak eddig írni pedig ki: szor. néha zavart is okozhatna, mint például ha 3 log. a helyett ezt írnök: 3 szor. a: hanem főképp azért, mert hogy a' mathesisben azon közönségesen bevett jegyeket, melyekkel a' tudós Európának, sőt az egész tudós világnak minden Mathematicusai nemzet és nyelv különbség nélkül élnek, mi Magyarok nem tudom micsoda viszketegegségből megváltoztassuk, nem tartom tanácsosnak, több mint egy tekintetben. De miért formáltam hát a' logaritmus kitételére e' magyar nevet szorszám, ha aztán nem élek vele, ezt kérde talám valaki? Azért, mert azt hiszem, hogy ez a' magyar név tesz valamit a' hozzá kapcsolt fogalomnak magyar Hallgatók és Olvasók elméjébeni lekötésére. Azonban nem is mondom én hogy ezen szóval szorszám nem fogok élni; hanem csak azt mondom, hogy ezt megrövidítve fogalom jegyével nem fogom használni a' számvetésben e' helyett: log.

Mindazáltal mielőtt ezt tennők, illő megvi'sgálnunk, mennyire bizhatunk az efféle könyvekben találtató logaritmussokkali számvetésünk eredményeinek tökéletességéhez? — Hogy a' logaritmussokkali számvetés eredménye tökéletes úgy, ha a' logaritmussok tökéletesek, ez foly magából a' logaritmussok fogalmából, 's világos minden fentebbi példákából. De, az épen a' kérdés, lehet-è a' természetes számok közül: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. stb. renddel mindegyiknek tökéletes logaritmussát találni? vagyis lehet-è valamely alapúl felvett számhoz, a, oly hatványjeleket találni, hogy ha az, az ezek által jelentett hatalmakra renddel felemeltetik, a' hatalmak renddel egymás után tökéletesen a' természetes számok: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. stb. legyenek? Ez az, a' mit itt még meg kell vizsgálnunk, hogy logaritmussokkali számvetéseink tökéletességének fokozatáról ítéletet tehesünk.

25. §. Ha 1-nél nagyobb czélirányos egész számot veszünk fel alapúl, mint szokás, és mint mi is fentebbi kis szorszámablácskáinkban cselekedtünk: úgy világos, hogy minél nagyobb valamely szám, annál nagyobb annak logaritmusa is, és megfordítva. És így, ha azon szorszámalkotmányban, melynek alapja a' 2, például a' 3 logaritmussát akarjuk kikeresni; mivel itt $\log. 2 = 1$, és $\log. 4 = 2$: látnivaló, hogy valamint maga a' 3, 2-nél nagyobb 4-nél kisebb; úgy logaritmussának is a' 2-énél nagyobb, a' 4-énél pedig kisebbnek, azaz, 1-nél nagyobb, 2-nél kisebbnek kell lennie. Úgy látszik tehát, hogy az egy olyan áltörtszám (spuria fractio) lesz, mely áll 1-ből, és még azon felül egy igazi, azaz, 1-nél kisebb törtszámból. De kísértjük meg, ha vajon úgy van-è valósággal. Legyen tehát az az 1-nél nagyobb 2-nél kisebb áltörtszám,

mely itt 3-nak logaritmusa akar lenni $= \frac{m}{n}$: így fog lenni: $2^{\frac{m}{n}} = 3$,

vagy $(\sqrt[n]{2})^m = 3$, vagy $\sqrt[n]{2^m} = 3$; mivel ezek, mint már (16. §.)

láttuk, mind egyre mennek ki. Hogy tehát a' 3-at úgy terjeszthesük elő, mint a' 2-tő hatványát, két munkát kell véghez vinnünk, t. i. először ki kell vonnunk a' 2-nek n-dik gyökerét, 's az után ezt fel kell emelnünk az m-dik hatalomra; vagy megfordítva, elébb fel kell emelnünk a' 2-t az m-dik hatalomra, 's azután ebből kivonnunk az n-dik gyökeret. E' két munka, t. i. a' gyökér kivonás és hatalomra emelés közül csak az egyiket t. i. a' gyökér kivonást lehetesen tökéletesen végre hajtani, már az akár elébb akár utóbb történ-

jék, a' másikkban, t. i. a' hatalomra emelésben semmi akadály sem lehet; mert szorozni magával akarmely számot is, akarhányszor egymás után mindég lehetséges, és ha az helyesen vitetett véghez, az eredmény mindig tökéletes. Csak az hát a' kérdés, mi lesz a' 2-nek n-dik gyökere, mely aztán m-szer járúlván az 1-hez mint szorzó, a' szorzat = 3 lesz? Minthogy pedig itt az m-nek és az n-nek olyan számokat kell jelenteniek, mi szerint $\frac{m}{n}$ -ed rész 1-nél nagyobb de 2-nél kisebb törtszámot tegyen, ilyen törtszámnak alsója pedig ezer meg ezer lehet, mint például $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{14}{10}$, stb. stb. látni való, hogy itt a' 2-nek n-edik gyökerét keresni, igen egyre megy ki ezzel: a' 2-nek akarhanyadik gyökerét keresni. Szabad választásunk lévén tehát, mit jelentsen itt az n, legyen most először $n=2$. Így a' feltett kérdés ide módosul: mi lesz a' 2-nek 2-ik gyökere, vagy mi lesz $\sqrt{2}$? — Ezen kérdésre én igen röviden felelhetnék, ha feltehetném, hogy az a' fogalom, melynek ezen feleletbe szükségesképen bele kell jönie, minden Hallgatóim és Olvasóim elméjükben tisztán kifejtve áll. De mivel ezt annál kevesbé tehetem fel, minél inkább tapasztalom Hallgatóimon az ellenkezőt, 's minél inkább tapasztalom azt is, hogy ezen fogalmat még legjobb mértani könyveinkben is homály környékezi: kénytelen vagyok itt egy kitérést tenni, ezen itt szükséges fogalomnak tisztába hozására, erre szánván a' következő §-t.

26. §. A' kérdés tehát ez: mi lesz $\sqrt{2}$? Felelet: ennek olyan számnak kellett lennie, mely 2-szer iratván mint szorzó, a' szorzat = 2 legyen, látnivaló, hogy 1-nél nagyobb, de 2-nél kisebb fog lenni; mivel $1 \times 1 = 1$, még kisebb, $2 \times 2 = 4$ pedig már nagyobb mint 2. Úgy látszik tehát, hogy $\sqrt{2}$ nem lehet egyéb, mint 1, és még ahoz egy igazi, azaz, 1-nél kisebb törtszám, vagyis egy olyan áltörtszám, mely 1-nél nagyobb, 2-nél pedig kisebb. De hogy $\sqrt{2}$ ilyen áltörtszám sem lehet, megmutatjuk következőképen:

a) Minden olyan áltörtszámnak mely tökéletesen valahány egészet teszen, a' milyen példánl $\frac{60}{15}$, lehet a' felsőjét úgy bontani szélyel két tényezőre, hogy ezeknek egyike olyan nagy legyen mint a' törtszám alsója, például $\frac{60}{15} = \frac{4 \cdot 15}{15}$; mert a' törtszám épen akkor tesz tökéletesen valahány egészet, mikor a' felsője tökéletesen valahány egészszer annyi mint az alsója. Ha továbbá az ilyen törtszámnak mint $\frac{4 \times 15}{15}$, mind alsóját mind felsőjét szétbontjuk a' maga leggyyszerűbb tényezőire, melyek mind úgy nevezett első szá-

mok *), e'képen $\frac{3 \cdot 2 \times 3 \cdot 5}{8 \cdot 5}$; mivel a' felső számnak azon tényezője, mely az alsó számmal egyenlő (15) épen azon egyszerű tényezőkre (3. 5) bontathatik szélyel, melyekre az alsó szám: tehát látnivaló, hogy az ilyen tökéletesen valahány egészet tevő törtszámban az alsó számnak minden egyszerű tényezői feltalálhatnak a' felső számban is. Ellenben az olyan törtszámnak, mely nem tökéletesen valahány egészet, hanem valahány egészet (peldául 0, 1, 2, 3, 4, stb. egészet — mert mikor nincs egész, akkor is van egész, mivel ott van a' 0 egész —) és még azon felül egy igazi, azaz 1-nél kisebb törtszámot teszen, soha sem lehet mind alsóját, mind felsőjét úgy bontani szét a' maga egyszerű tényezőire, hogy az alsónak minden tényezői megtalálhassanak a' felsőnek tényezői között. Mert ha ez lehetséges volna, úgy az alsónak minden tényezőit kitörölvén mind az alsóból mind a' felsőből, az ilyen szám, mely valahány egészből, 's még azon felül egy igazi törtszámból áll, csupa egész szám lenne minden igazi törtszám hozzájárulása nélkül; a' mi képtelenség. Minden ilyen törtszámnak tehát, mely valahány egészet, és még azon felül egy igazi törtszámot foglal magába, miután az alul felül a' maga egyszerű tényezőire szélyelbontatott, kell lenni szükségesképen az alsójában egy vagy több olyan tényezőnek, mely a' felsőjében meg nincsen. Peldául $3 + \frac{39}{42} = \frac{165}{42} = \frac{3 \times 55}{6 \times 7} = \frac{3 \times 5 \cdot 11}{2 \cdot 3 \times 7}$, hol az alsóban két egyszerű tényező van, t. i. 2 és 7, melyek a' felsőnek egyszerű tényezői között nem találhatnak. Hasonlóképen 0 egész $+\frac{84}{110} = \frac{2 \times 42}{2 \times 55} = \frac{2 \times 2 \cdot 21}{2 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 11}$, hol az alsónak ismét két egyszerű tényezője van t. i. 5 és 11, melyek a' felsőnek tényezői között nem találhatnak. És

*) Első számoknak (numeri primi) nevezetnek azok, melyeket két egész számra, mint tényezőkre, szétbontani nem lehet, hanemha úgy, hogy az egyik maga legyen a' szám, a' másik pedig az 1, és így a' melyek közül mind-egyiket csak magával, és az 1-el lehet maradék nélkül osztani, milyenek peldául 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, stb. Akármely számot is, mely nem első szám, szélyel lehet bontani először is két egész számra mint tényezőkre, azután e' két tényező közül sokszor egyiket vagy másikat, vagy mindenkiket is ismét két tényezőre, és így tovább; péld. $18 = 2 \times 9 = 2 \times 3 \cdot 3$; $16 = 4 \times 4 = 2 \cdot 2 \times 2 \cdot 2$, $210 = 10 \times 21 = 2 \cdot 5 \times 3 \cdot 7$; $2310 = 10 \times 231 = 2 \cdot 5 \times 11 \cdot 21 = 2 \cdot 5 \times 11 \times 3 \cdot 7$; vagy $2310 = 11 \cdot 14 \cdot 15 = 11 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5$. stb. úgy hogy utoljára minden nem első számot csupa első számokból álló tényezőkre lehet szétbontani; melyek is épen azért nevezettek első számoknak, mivel úgy képzelték, mintha ezek lettek volna meg először, 's a' többi számok mind, ezeknek egymással szorzásából származtak volna.

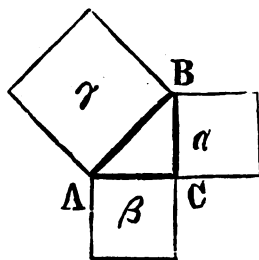
ha ilyenkor a ' törtszám' alsójának vannak olyan egyszerű tényezői is, melyek a' felsőnek tényezői között is előfordúlnak: ezeket mind az alsóból, mind a' felsőből kitörülvé, utóljára az ilyen valahány egészből (ide értvén a' 0 egészet is) és egy igazi törtszámából álló törtszámot mindig úgy lehet előállítani mint olyat, melynek alsója egészen más egyszerű tényezőkből áll, mint felsője; a' milyenek lesznek a' közelebbi két példák közül az elsőből, — ha mind alul mind felül a' 3-at kitöröljük — $\frac{5 \cdot 11}{2 \cdot 7}$; a' másodikból pedig — ha ott alúlról a' 2-t felülről is az egyik 2-t — mert a' másíknak megfelelő tényező nincs az alsóban — kitöröljük, $\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{5 \cdot 11}$. És bizonyosok lehetünk benne, hogy akármely keresetlen törtszámot írjunk is le, a' mi pennánkra jő oly móddal, hogy annak alsója egészen más egyszerű tényezőkből álljon, mint felsője, annak értéke soha tökéletesen valahány egész nem lehet, hanem mindig valahány egész, és még azon felül valamely igazi törtszám például $\frac{2 \cdot 5 \cdot 7}{8 \cdot 11} = \frac{70}{88} = 2 + \frac{4}{88}$; $\frac{7 \cdot 19}{3 \cdot 13} = \frac{133}{39} = 3 + \frac{16}{39}$. stb. Az ilyen törtszámokat már, melyeknek alsójok egészen más egyszerű tényezőkből áll, mint felsőjök, és a' melyeket, ha p, q, r, s, t, u, stb. mind egyszerű tényezőket vagy első számokat jelentenek, általánosan így fejezhetünk ki: $\frac{p \cdot q \cdot r \cdot \dots}{s \cdot t \cdot u \cdot \dots}$, ha 2-dik, 3-dik, vagy akarhanyadik célirányos egész hatalomra emeljük is e'képen: $\left(\frac{p \cdot q \cdot r \cdot \dots}{s \cdot t \cdot u \cdot \dots}\right)^2$; $\left(\frac{p \cdot q \cdot r \cdot \dots}{s \cdot t \cdot u \cdot \dots}\right)^3$; $\left(\frac{p \cdot q \cdot r \cdot \dots}{s \cdot t \cdot u \cdot \dots}\right)^n$, akkor is mind más egyszerű tényezők lesznek alul, mások ismét felül, szintűgy, mint az első hatalomban, és épen azok, csakhogy kettőztetve hármaztatva stb. És így bizonyosok lehetünk benne, hogy olyan törtszámunk, mely valahány egészből, 's azon felül még egy igazi törtszámából áll, — a' milyenek lehetne gondolni a' 2 második gyökerét is, minthogy ennek kétségen kívül 1-nél nagyobb, 2-nél pedig kisebbnek kell lennie — a' 2-dik, 3-dik, 's más akarmely célirányos egész hatalma is épen ilyen törtszám lesz, és csupa egész szám soha nem lehet. Ugyanez áll az ilyen számnak célirányos tört hatalmairól is. Mert ha a, m, n, egész számok lévén, $a = \left(\frac{p \cdot q \cdot r}{s \cdot t \cdot u}\right)^{\frac{m}{n}}$ volna: úgy $a^n = \left(\frac{p \cdot q \cdot r}{s \cdot t \cdot u}\right)^m$ fogna lenni; a' mi pedig lehetetlen; mivel ha mind a mind n egész számok, természetl a^n is egészszám, $\left(\frac{p \cdot q \cdot r}{s \cdot t \cdot u}\right)^m$ pedig, mint már megmutattuk, soha egész szám nem le-

het. Hasonlóképp meg lehet mutatni azt is, hogy az ilyen két egész közé eső áltört számnak czelelles hatványai sem lehetnek soha egész számok. Ugyanis, ha $\frac{pqr}{stu}$ áltört szám, melynek felsője nagyobb alsójánál: úgy $\left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{pqr}{stu}} = \frac{stu}{pqr}$, olyan tört száma

lesz, melynek felsője kisebb mint alsója, azaz 1-nél kisebb igazi tört száma: és így egész szám nem lehet, 's hogy ilyen esetben $\left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-2}$, $\left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-3}$, stb. melyek még kisebb kisebb tört száma, egészek még kevésbe lehetnek, kézzel fogható. Sőt ha $\frac{pqr}{stu}$ igazi tört száma volna is, melynek felsője kisebb alsójánál, és így a' mely 0 egész és 1 egész közé esik, úgy sem lehetnének annak czelelles egész hatványai egész számok, hanem mindig az 1-nél nagyobb áltört száma fognának lenni, látnivaló. A' mi végezetre az ilyen tört száma czelelles tört hatványait illeti: ha a, m, és n egész száma lévén $a = \left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-\frac{m}{n}}$ volna, úgy $a^n = \left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-m}$ fogna lenni; a' ni lehetetlen. Mert így a^n egész száma lenne; hogy pedig $\left(\frac{pqr}{stu}\right)^{-m}$, — akár egynél kisebb, akár egynél nagyobb tört száma legyen is $\frac{pqr}{stu}$, — semmi esetre egész száma nem lehet, épen most mutattuk meg.

És így meg van mutatva, hogy olyan tört száma, mely nem épen valahány egészet, hanem valahány egészet és még azon felül egy igazi, azaz, 1-nél kisebb tört számat tesz, soha semmiféle hatalma egész száma nem lehet. A' honnan következik megfordítva, hogy egész száma sem lehet soha semmiféle gyökere ilyen valahány egészből 's azon felül egy igazi tört számból álló száma, és így hogy a' 2-nek, mint egész száma, 2-dik gyökerét is, $\sqrt{2}$, melynek hogy 1-nél nagyobbna 2-nél kisebbnek kell lennie, világos, semmi olyan áltört száma, mely 1-nél nagyobb 2-nél kisebb, ki nem fejezhetjük; 's ez az épen, a' mit meg akartunk mutatni.

b) De itt talán azt mondja valaki, hogy lám a' tértan (geometria) mégis láthatólag, és szinte kézzel foghatólag előnkbe állítja a' 2-nek 2-ik gyökerét. Ugyanis ha az ABC egyenes szögletű három szögben az AC és BC függő nyöl: (cathetusok) egyenlők, és mindegyik = 1 (egy láb): úgy a' Pythagoras theoremája szerint a' két függőny négyszöge együtt $(\alpha + \beta)$



annyit tévén, mint a' húr (hypotenusa) négyyszöge, γ , magában; itt pedig egyik egyik függöny négyyszöge egyegy négyyszögláb, és így a' kettő együtt 2 négyyszögláb lévén, a' húr négyyszöge is, azaz $\gamma = 2$ négyyszögláb, 's következésképen a' γ négyyszögnek egyik egyik oldala, milyen az AB húr is, $= \sqrt{2}$, 's e' szerint itt a' geometria az ABC egyenes szögletű háromszögben az AC és BC függönyöket egynek egynek vévén a' 2-nek 2-dik gyökerét, $\sqrt{2}$, az AB húr által láthatólag előterjeszti. Úgy van! de, hogy itt a' húr, mely természetel nagyobb a' függönynél, és így itt hol a' függöny $= 1$, nagyobb 1-nél, de 2-nél meg kisebb, mert 2 láb-nak a' négyyszöge nem két-, hanem négy quadrát láb lenne, ki lehet-é számokkal, nevezetesen ki lehet-é a' függönnyel, mely itt $= 1$, és ennek részeivel fejezni, úgy hogy ezt mondhassuk: a' húr annyi mint a' függöny, és annak ennyi 's ennyi ennyid része $= 1 + \frac{b}{c}$, vagy ezt lehessen mondani, hogy ha a' függönnyt, azaz, az 1-et elosztjuk ennyi 's ennyi egyenlő részre, $\frac{1}{c}$, és egy ilyen részt veszünk ennyiszor 's ennyiszor, $n \left(\frac{1}{c}\right)$, ezek együtt véve éppen annyit tesznek, mint a' húr: erről a' tértan nem szól, 's nem is szólhat semmit; ez nem ő reá tartozik, hanem a' számtanra, mely ezen kérdésre meg is felelt. Mert midőn azt megmutatta, hogy a' 2-nek második gyökerét, $\sqrt{2}$, sem egész, sem tört számokkal kifejezni nem lehet: ugyan akkor megmutatta azt is, hogy az itt felhozott tértani példában a' húr a' függönnyel és ennek részeivel kifejezni lehetetlen, úgy hogy akárhány egyenlő részre próbáljuk is a' függönnyt mint 1-et felosztani, ezt úgy tenni, hogy ezen részekből ennyi 's ennyi a' húr tökéletesen kiüsse, soha sem lehet; hanem ha egyet azokból n -szer veszünk, még kisebb, ha pedig $(n+1)$ -szer veszünk, már nagyobb lesz a' húrnál.

Az ilyen csudálatos számot, melyet az 1-gyel, és az 1-nek részeivel kifejezni lehetetlen irrationális számnak nevezik, mit első tekintettel talán hajlandó volna az ember így magyarázni: esztelen, oktalan, okossággal ellenkező szám. Mert ha azt, mi a' szám, így határozzuk meg, — a' mint hogy ha jól akarjuk, máskép nem is lehet: — szám az 1, és mind azok a' fogalmak, melyek az 1-ből szerkesztetnek —: egy olyan szám, melyet az 1-ből szerkeszteni lehetetlen, nagy esztelenségnek látszik, mivel úgy tetszik, hogy ez olyan számot tenne, mely nem szám! Mindazáltal, mivel az ilyen irrationális számok is, — bárha ezeket az 1-

gyel és ennek részeivel nem lehet is kifejezni — csakugyan az 1-ből veszik eredetüket, például ez: $\sqrt{2}$, így: az 1-hez adatik 1, 's így lesz $1 + 1 = 2$; azután ezen szám: 2, szétbontatik 2 egyenlő tényezőre, 's ezeknek egyike az, mely a' 2tő 2dik gyökerének nevezetlik és így íratik $\sqrt{2}$ vagy $2^{1/2}$; mivel továbbá az ilyen kifejezések, mint az 1-ből származott fogalmak, és így számok, mindezekben a' számok szabályai alá esnek, például $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2^{1/2} \times 2^{1/2} = 2^{1/2+1/2} = 2^{2/2} = 2^1 = 2$; vagy $2^{2/2} = \sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$. stb: tehát az irracionális szám nevezetét nem a' fentebbi értelemben kell, 's nem is abban szokás venni; hanem irracionálisnak nevezetlik az ilyen szám azért, mivel nincs ratió azaz szer az 1 és az ilyen szám között, azaz nem lehet olyan két számot találni, melyeknek egymáshoz szerök az ilyen számnak az 1-hezi szerét kifejezné; például: nem lehet mondani, hogy $\sqrt{2} : 1 = a : b$. Mert ha ilyen két számot lehetne találni, úgy az ilyen számokat mint $\sqrt{2}$, ki lehetne fejezni az 1-gyel tökéletesen; mivel akkor $b\sqrt{2} = a$, 's innen $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ lenne. Az ilyen irracionális számokat tehát, melyek az 1-hez semmi szerben nincsenek, magyarul leghelyesebben nevezhetjük szertelen számoknak.

d) A' közelebbi tértani példából világos, hogy a' szertelen szám, mint mennyiség, nem lehetetlen, nem képtelen, 's nem olyan mint $\sqrt{-4}$; és hogy a' lehetetlenség itt csak abban áll, hogy az ilyen mennyiséget az 1-gyel, és az 1-nek részeivel tökéletesen meghatározni, vagyis megmondani, hogy az hány 1-ből, 's az 1-nek hány ennyi 's ennyid részéből áll, nem lehet. Annyit mindazáltal meg lehet mondani akármely szertelen számról is, hol van annak helye a' számok között, vagyis mindenkor lehet kimutatni két egymás után következő egész, vagy egy alsójú törtszámot, melyek közül az egyik még kisebb, de a' másik már nagyobb a' kérdéses szertelen számnál. Például ezen szertelen számnak: $\sqrt{2}$, a' határai, melyek között esik, e' következők:

1. Egész számokkal: 1. és 2; mert $1 \times 1 = 1$ még < 2 .

de $2 \times 2 = 4$ már > 2 .

2. Tized részekkel: $\frac{14}{10}$ és $\frac{15}{10}$; mert $(\frac{14}{10})^2$ vagy $(1,4)^2 = 1,96$ még < 2 .

de $(\frac{15}{10})^2$ vagy $(1,5)^2 = 2,25$ már > 2 .

3. Század részekkel: $\frac{141}{100}$ és $\frac{142}{100}$; mert $(1,41)^2 = 1,9881$ még < 2
de $(1,42)^2 = 2,0164$ már > 2 .
4. Ezred részekkel: $\frac{1414}{1000}$ és $\frac{1415}{1000}$; mert $(1,414)^2 = 1,999396$ még < 2
de $(1,415)^2 = 2,002225$ már > 2
5. Tíz ezr. részek. $\frac{14142}{10000}$ és $\frac{14143}{10000}$; mert $(1,4142)^2 = 1,99996164$ még < 2
de $(1,4143)^2 = 2,00024449$ már > 2
6. Száz ezr. rész. $\frac{141421}{100000}$ és $\frac{141422}{100000}$ mert $(1,41421)^2 = 1,9999899241 < 2$
de $(1,41422)^2 = 2,0000182084 > 2$
7. Miliód rész. $\frac{1414213}{1000000}$ és $\frac{1414214}{1000000}$; mert $(1,414213)^2 = 1,999998409369 < 2$
de $(1,414214)^2 = 2,000001237796 > 2$
8. Tíz mil. r. $\frac{14142135}{10000000}$ és $\frac{14142136}{10000000}$; mert $(1,4142135)^2 = 1,99999982358225 < 2$
de $(1,4142136)^2 = 2,00000010642496 > 2$.
- és így tovább végnélkül.

e) Már mikor ez szerint valamely szertelen számot keresvén, azt oly szoros határok közé szorítottuk, hogy a' határszámok, melyek között az esik, egymástól is, annyival inkább a' közöttök eső szertelen számtól oly csekélységben különböznek, hogy azon különbséget a' gyakorlatra nézve olybá lehet venni, mint semmit: megállapodunk, és a' két határszám közül azt, mely a' szertelen számhoz közelebb esik, vesszük maga a' szertelen szám helyett. Peldául a' $\sqrt{2}$ keresésében megállapodunk a' tíz millió részeknél, és mivel a' két határszám közül, mint négyszögeik mutatják, a' nagyobbik esik közelebb a' $\sqrt{2}$ -höz, azt mondjuk, hogy $\sqrt{2} = 1,4142136$. Tudjuk ugyan, hogy ez szorosan véve nem igaz, de azt is tudjuk, hogy a' két határszám között, melyek közé utóljára a' $\sqrt{2}$ -t szorítottuk, csak 1 tízmiliódrész lévén a' különbség; azonban, a' mint a' két határszám négyszögeiből a' 2-vel egybe hasonlítva megtetszik, a' nagyobbik határszámhoz közelebb esvén a' $\sqrt{2}$, mint a' kisebbikhez, a' különbség a' $\sqrt{2}$ és a' nagyobbik határszám között, melyet $\sqrt{2}$ gyanánt veszünk, kisebb 1 tízmiliódrésznek fel-léné; oly csekély hiba, melyet a' gyakorlatra nézve olybá lehet venni, mint semmit. Mert vegyük bár ezt a' hibát nagyobbacsának, mint a' milyen valósággal, nevezetesen vegyük azt egy fél tízmil-liódrésznek, vagyis $\frac{5}{100000000}$ résznek: még így is, az 1 lábat vévén a' hosszúság mérésére mérték egységének, a' $\sqrt{2}$ -t, azaz, az 1,4142136 lábat az 1 lábnak csak $\frac{5}{100000000} = \frac{50}{1000000000} = 0,000000050$ -

részével vettük nagyobbak kelletnél, mely hiba 1 lábón $0,000\,000\,035$ lábat, 1 mértföldön, vagy kerek számmal 24000 lábón pedig $24000 \times 0,000\,000\,035 = 0,000\,84$ lábat tesz, melyet ha vonalokká (lineákká), azaz, a' láb 144-ed részeivé ezen egyenlet szerint: $\frac{84}{100\,000} = \frac{x}{144}$, át változtatunk, kijő, hogy az x , azaz, a' hiba egy mértföldön vonalakban számítva fenne $\frac{144 \times 84}{100\,000}$ vonalat, azaz, kerek számmal 0,12 vonalat, 's következésképen százszor véve száz mértföldön menne 12 vonalra vagyis 1 hüvelykre. Ilyen hiba pedig a' gyakorlatban annyi mint semmi hiba; mivel nincs mérő eszközünk, mellyel ezt kimutatni lehetne. Egyébiránt

f) A' szertelen számok azért igen érdekesek a' mathesisben, mivel akármely mértéket vegyünk is fel, és ennek ismét akármily kis részével mérjük is a' nála kisebb mennyiséget, az első ilyen kis mértéknek a' végéről a' 2-diknak, onnan ismét a' 3-diknak a' tulsó végire, és így tovább, mindenkor ugrás van, 's e' hézakokat a' szertelen számok töltik be, 's ezek teszik lehetségessé, hogy az arithmetica a' geometriai folytonos mennyiségek' kiszámítására is általánosan és tökéletesen alkalmaztathassuk. Mert hogy fejezhetné ki az arithmetica például a' fentebbi háromszögben a' hűrt tökéletesen, hanemha ezen szertelen számmal $\sqrt{2}$? De most térjünk vissza az útbá, melyet egy kevésse elhagytunk, *) és folytassuk azt tovább.

27. §. Miután a' közelebbi 26-dik §-ban az a) betű alatt el-

*) Mily szükséges volt itt ezen kitérés a' szertelen számok fogalmának kifejtésére, megtetszik csak abból is, hogy legújabb számtani könyveink egyikében, mely különben sokakban kielégítő, de a' szertelen számokról csak röviden tesz említést, ezt olvassuk: „Mi előtt a' gyökérvonás műtételeiről szóllanánk, jegyezzük meg, hogy a' gyökér vagy tökéletes vagy tökéletlen. Tökéletes „gyökér az, mely vagy egész vagy törtszámokkal teljesen kimeríthető, például

„ $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt{0,25} = 0,5$. És az ily mennyiségek, „melyekből tökéletes gyökeret lehet fejteni, nevezetnek arányosoknak (rationales). Tökéletlen gyökér az, melyet sem egész sem törtszámokkal ki nem „lehet meríteni, csak közelítőleg kifejezni például $\sqrt{7} = 2,6457513\dots$, $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt{2}$, „stb. És az ilyen mennyiségek, melyekből tökéletes gyökeret nem lehet fejteni, „nevezetnek aránytalanoknak (irrationales)“ De itt

1-ör. Nincs megmutatva, hogy például $\sqrt{7}$ -t sem egész sem törtszámokkal kimeríteni nem lehet.

2-or. Ha meg volna is mutatva, hogy a' $\sqrt{7}$ -nek egészszel elegendes tizedes törtszámokkali kifejezésében: $\sqrt{7} = 2,6457513: \dots$ akár meddig folytatnók is ezt, soha véget érni nem lehetne, még abból sem következnék, hogy $\sqrt{7}$, —

lene mondhatatlanul megmutattuk, hogy olyan számok, melyek valahány egézből, és meg azon felül egy igazi törtszámból állanak, soha semmiféle egész számnak semmiféle gyökerei (értvén célirányos egész gyökereket, melyeneket eddig egyedül ismert a' számtan) nem lehetnek, következik, hogy akármely egész számnak is, minden olyan gyökerei, melyekről álltallátjuk, hogy azok egészek nem lehetnek, hanem két szomszédos egész szám közé kell esniök, szertelen számok; például hogy mivel álltallátjuk, mikép nem csak $\sqrt{2}$,

hanem $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[5]{2}$ is, és így tovább vég nélkül mind az 1 és 2 közé esnek, minthogy az 1-nek nem csak 2-dik hanem 3-ik, 4-ik, 5-dik sőt akárhanyadik hatalma is vég nélkül csak 1, és így kisebb 2-nél, a' 2-nek pedig már csak 2-dik hatalma is, annyival inkább 3-dik, 4-dik, 5-dik stb. hatalmai nagyobbak 2-nél; tehát a' 2-nek

mind ezen gyökerei, egyszóval $\sqrt[n]{2}$ — bármely célirányos egész szám legyen is n — mind szertelen számok.

És ha már most visszamegyünk a' 25-dik §-ban feltett ezen

kérdésre: lehet-é $2^{\frac{m}{n}}$ vagyis $(\sqrt[n]{2})^m$ olyan egész szám, mely nem a' 2-nek valamely egész hatványa, melyenek például: a' 2 és a' 4 közt 3; a' 4 és 8 közt 5, 6, 7, a' 8 és 16 közt 9, 10, 11, 12 stb; miután már láttuk, hogy ha az ilyen számokat úgy akarnók előter-

a' Szerző szavaival élvén — tökéletlen gyökér, azaz, irrationalis számu; mivel lehet 's van is elég olyan egézből, és közönséges törtszámból álló rationalis szám, melyet ha egészszé és tizedes törtszámokká változtatunk által, soha benne véget nem érhetünk. Ilyen például $2 + \frac{1}{3} = 2,3333333 \dots$ stb. vég nélkül; mégis ezért nem mondhatjuk, hogy ez irrationalis szám.

3-or. Ha ellene mondhatatlanul megmutatjuk is, hogy $\sqrt{7} = 2,6457513 \dots$ stb. irrationalis szám, $\sqrt{7}$ -et tökéletlen gyökérnek nem mondhatjuk; mert $\sqrt{7}$, 2-ik hatalomra emelve, tökéletesen kiadja a' 7-et e'képen $(\sqrt{7})^2 = (7\frac{1}{2})^2 = 7^2\frac{1}{2} = 7^1 = 7$, és így $\sqrt{7}$ tökéletes 2-dik gyökere 7-nek; mert például a- vagy mondhatjuk-é, hogy a' fentebbi tértani példában a' hypotenusa, nem tökéletes, vagy hogy az tökéletlen quadrát gyökere a' maga quadratumának? Épen nem! hanem csak annyit mondhatunk, hogy az ilyen gyökerek irrationalisok, azaz, az 1-gyel, és annak részeivel tökéletesen ki nem fejezhetők; mert

4-er. Nem azok a' számok, melyekből tökéletes, (vagyis inkább az 1-el, 's annak részeivel tökéletesen kifejezhető) gyökereket fejteni nem lehet, — mint a' szerző mondja —, hanem az ilyen gyökerek magok nevezetnek irrationalisoknak, vagy magyarul szerteleneknek; mert úgy vélem, jobb szó lesz ez ide, mint aránytalan.

jeszteni, mint a' 2-nek tört hatványait, $2^{\frac{m}{n}}$, két munkát kellene véghez vinnünk, u. m. először az n-dik gyökeret kivonnunk a' 2-ből, 's azután ezen gyökeret az m-dik hatalomra emelnünk; 's láttuk továbbá azt is, hogy az első e' két munka közül mindig szertelen szá-

ra vezet, $\sqrt[n]{2}$ mindig szertelen szám lévén: nincs egyéb hátra, mint az, hogy általmenvén a' másik munkára, megvizsgáljuk, hát ezen

szertelen számnak: $\sqrt[n]{2}$ az m-dik hatalma, $(\sqrt[n]{2})^m$, vagyis $2^{\frac{m}{n}}$ minemű szám lesz?

a) Hogy mikor m az n-nel maradék nélkül osztható, és így $\frac{m}{n}$ valamely egész szám akkor $2^{\frac{m}{n}}$ is egész szám, nevezetesen a' 2-nek valamely egész hatványa, az látnivaló. Mert ha szinte nem lehet is a' 2-nek n-dik gyökerét az 1-gyel és annak részeivel kifejezni, 's ennél fogva lehetetlen is az ilyen gyökereket egymással tulajdonkép' szorozni: annyi csakugyan világos, hogy ha a' 2-öt n egyenlő szorzókra szétbontva, 's mind ezeket újra egymással szorozva képzeljük, úgy magának a' 2-nek kell szorzatúl kijönie; és ha 2, 3, 4 stb: olyan csoport tényezők következnek egymás után, melyek

közül mindegyikben n-szer van a' $\sqrt[n]{2}$ mint szorzó, — a' mi törté-
nik pedig mindenkor, mikor ebben: $2^{\frac{m}{n}}$ az m épen valahány egész-szer annyi mint az n, — olyba lehet venni, mintha maga a' 2 volna 2-szer, 3-szor, 4-szer, stb. szorzókép' egymás után írva, vagyis mintha a' 2-nek 2-dik, 3-dik, 4-dik stb. hatalma állana ott.

b) De hát mikor $\frac{m}{n}$ nem tökéletesen valahány egészet, hanem valahány egészet egy igazi törttel együtt jelent, akkor milyen szám lesz $2^{\frac{m}{n}}$? Felelet: szerez szám semmikép nem lehet. Mert ha szerez szám volna, vagy csupa egészekből kellene állania, vagy valahány egészet egy igazi törtszámmal együtt tennie. Úgyde először is csupa egészekből nem állhat; mivel ha a egész szám, és $2^{\frac{m}{n}} = a$ volna, úgy a abban az esetben, mely itt kérdésben forog, t. i. mikor m az n-nel maradék nélkül nem osztható, olyan egész szám, mely a' 2-nek valamely egész hatványa, látnivaló, nem lehetvén (mivel ilyenkor m az n-nel mindig maradék nélkül osztható), természetl olyan egész számnak kellene lennie, mely nem a' 2-nek valamely egész

hatványa. De ilyen egész szám sem lehet az; mivel így az egyenlet mind a' két oldalon n -dik hatalomra emeltetvén, fogna lenni: $(2^{\frac{m}{n}})^n = a^n$ azaz $2^m = a^n$; a' miből következnek, hogy $\frac{2^m}{a^n} = 1$. Úgyde, minthogy a' 2^m -nek egyszerű szorzói csupa 2-tőkből állanak, az a pedig a' feltétel szerint nem a' 2-nek valamely egész hatványa lévén, az a^n -nek sem lehet csupa 2-tőkből, mint egyszerű szorzókból, hanem vagy 2-tőkből vegyest más egyszerű szorzókkal, vagy egészen más egyszerű szorzókból kell állania, 's következésképen itt az egyenlet bal oldalán álló törtszám' alsójának nem lehet minden egyszerű szorzóit felsőjének egyszerű szorzói között megtalálni: tehát ezen törtszám' értéke mindig valahány egész (ide értvén a' 0 egészet is), és azon felül még egy igazi törtszám lesz. És így mikor azt állítjuk, hogy $\frac{2^m}{a^n} = 1$, akkor ezt állítjuk, hogy olyan szám, mely áll valahány egészből egy igazi törttel együtt, éppen olyan nagy mint 1 egész; a' mi lehetetlen. Lehetetlen tehát az is, a' miből, ha megengedjük, ilyen lehetetlenség következik, az t. i., hogy ha a olyan egész szám, mely nem a' 2-nek valamely egész hatványa, $2^{\frac{m}{n}} = a$ lehessen. — De, másodszor, nem lehet $2^{\frac{m}{n}}$ olyan áltörtszám sem, mely valahány egészből, 's azon felül még egy igazi törtből áll. Mert ha például $\frac{p}{q}$ ilyen áltörtszámot tenne, és $2^{\frac{m}{n}} = \frac{p}{q}$ volna: úgy mind a' két oldalt n -dik hatalomra emelvén, $2^m = (\frac{p}{q})^n$, azaz, egy olyan áltörtszámnak, mely valahány egészből, 's egy igazi törtből áll, n -dik hatványa a' 2-nek m -dik hatalmával egyenlő, és így egész szám fogna lenni; a' minnek lehetetlenségét pedig már megmutattuk.

c) Így hát már, ha $2^{\frac{m}{n}}$ abban az esetben, mikor m az n -nel maradék nélkül nem osztható, sem egész, sem valahány egészből (ide értve a' 0 egészet is), és egy igazi törtből álló szám, egyszóval semmiféle szerez szám nem lehet: úgy annak szükségesképen szertelen számnak kell lennie. A' miből ismét következik, hogy ha $2^{\frac{m}{n}}$ minden olyan esetben, mikor m az n -nel maradék nélkül nem osztható, szertelen szám: úgy $\frac{m}{n}$ minden ilyen esetben, azaz, minden olyan számok, melyek valahány egészből 's azon felül egy iga-

zi törtszámából állanak, szertelen számoknak logaritmusai, 's következésképen az ilyen számok az alapszámnak, a' 2-nek, egész hatványai közt elmaradó egész számoknak, mint szereseknek, logaritmusai nem lehetnek. A' honnan ismét foly, hogy azon szorszámal-
 kotmányban, melynek alapja a' 2, minden olyan egész számoknak, melyek nem az alapszámnak egész hatványai, logaritmusaik sem csupa egész, sem valahány egészből 's azon felül egy igazi törtből álló számok nem lehetvén, mindazoknak szükségesképen szertelen számoknak kell lenniök, mellyeket tehát csak közelítőleg lehet szeres számokkal, egészekkel és törtekkel kifejeznünk.

d) Valamit eddig abban az esetben, mikor az alapszám = 2, megmutattunk, mind az, látnivaló, áll, akármely más czédirányos egész számot vegyünk is fel egy szorszám alkotmány alapjául. Például, ha a' 10-et vesszük fel alapul, akkor is igaz, hogy ezen

számnak $10^{\frac{m}{n}} = a$, előállítására két munkát kíván, t. i. az n-dik gyökér kivonását a' 10-ből, és ezen gyökérnek az m-dik hatalomra emelését. Akkor is igaz továbbá, és könnyű általlátni, hogy a' 10-nek n-dik gyökerei mind két egész szám, nevezetesen 2-dik gyökere a' 3 és 4, 3-dik a' 2 és 3, 4-dik, 's azon felül a' többi is mind az 1 és 2 közé esnék, és így hogy ezek mind szertelen számok. Akkor is igaz végezetre, hogy a' 10 ezen szertelen gyökereinek

hatványai $(\sqrt[n]{10})^m = 10^{\frac{m}{n}}$, csak akkor szeres számok, nevezetesen egészek, 's a' 10 egész hatványai, mikor m az n-nel maradék nélkül osztható, egyébkor mindig szertelenek, 's következésképen hogy $\frac{m}{n}$, valamikor csak m az n-nel maradék nélkül nem osztható, szertelen szám logaritmusa, és így hogy szeres számoknak, nevezetesen a' 10-nek egész hatványai, például az 1 és a' 10, a' 10 és a' 100, a' 100 és az 1000 között, és így tovább elmaradó minden egész számoknak sem egész, sem két egész közé eső szeres számok nem lehetvén logaritmusai, mind ezek logaritmusainak azon szorszám alkotmányban is, melynek alapja a' 10, szükségesképen szertelen számoknak kell lenniök. Épen így okoskodhatunk minden más hasonló esetekben is.

e) Egyszóval akármely 1-nél nagyobb czédirányos egész számot vegyünk is fel egy szorszámal-
 kotmány alapjául: mindig csak azoknak lesz a' természetes számok közül tökéletes logaritmussok, melyek az alapszámnak egész hatványai; minden egyéb számoknak

pedig a' természetes számok rendiben szertelen (irrationalis) logaritmusaik *) fognak lenni, melyeket szerez számokkal, egészekkel és törtekkel csak közelítőleg lehet kifejezni; de közelíteni annyira lehet hozzájuk, a' mennyire csak tetszik, úgy hogy a' hiány a' gyakorlatban észre sem vehető lesz.

II. SZAKASZ.

A' közönséges vagy Briggsféle szorzásokról.

28. §. Két különböző szorzásalkotmány van kiszámítva, és használtatik a' Mathematicusoktól. Egyik az, melyre a' logaritmusok első feltalálója, Napier (Neper), Merchisoni báró Skótzíában, a' 17-ik század elején, a' háromszegmérési számvetéseket akarván megkönnyebbiteni, a' nélkül, hogy valamely számot vett volna fel alapúl, vagy csak fogalma is lett volna arról, hogy a' logaritmusoknak még alapszámjok is van, háromszegmérési szemlélődések által vezéreltetett, és a' mely szerint ő a' sinusok és tangensek logaritmusait kiszámítván, azokat legelőször kiadta 1614-ben Edinburgban, ilyen cím alatt: *Mirifici logarithmorum canonis de-*

*) Az ilyen logaritmusokról, milyenek minden számok logaritmusai, az alapszám' egész hatványainak logaritmusain kívül, azt mondják némelyek, például Vega (Vorlesungen über die Mathematik I. B. 258. §), hogy ezek sem nem rationalisok, sem nem irrationalisok, hanem transcendentek. De, látnivaló, hogy itt fogalomzavarnak kell lenni; mert ha a' számokat két egymással egészen ellenkező osztályra, úgymint rationalisokra és irrationalisokra osztjuk, ezek között még egy harmadik osztálynak, mely a' kettő közül sem egyikhez, sem másikhoz nem tartoznék, helye nem lehet. Úgy van, és a' Leibnitz által úgynevezett transcendentis számok is irrationalisok, és a' többi irrationalisoktól csak abban különböznek Leibnitz szerint, hogy azoknak kiszámítása a' közönséges arithmetica és algebra erejét felülhaladja (transcendit vires vulgaris arithmeticae et algebrae), és felsőbb analysisit kíván; ámbár ez a' megkülönböztetés nem sokat ér, mivel vagnak irrationalis számok, melyeket mind a' két úton ki lehet közelítőleg számítani. Egyébiránt a' logaritmusok' szertelenségét azért igyekeztem minél világosabbá tenni. mivel az ilyen helyekből, mint az itt felhozott, láttam az e' körül uralkodó homályt.

scriptio*). Mikép számította ki Napier ezen logarithmusokat, ő maga nem közölte a' világgal; hanem a' fija, atyja halála után 1619-ben, az említett munka 2-dik kiadása alkalmával ezt is közzé tette ily cím alatt: *Mirifici canonis constructio*; 's ebből lehet látni, mily elmés, de egyszersmind tekervényes úton jutott Napier ezen logarithmusokhoz. Egyébiránt az ezen alkotmány szerinti logarithmusokat, melyek főkép az általános számvetésben (*arithmetica universalis*) használatnak, és a' melyeknek alapszámjok, mint később kitanulták, ez a' szertelen szám: 2, 718281828459... hajdan *hyperbolicus* logarithmusoknak hívták, minek okát a' kúpszeletek tudományában fogjuk általlátni; már ma pedig ezeket *természetes logarithmusoknak* (*logarithmi naturales*) nevezik, melyekről majd alább a' 2-ik részben fogunk bővebben szólni, itt csak azért tévén rólok rövid említést, mivel ezen alkotmánynak feltalálása, azét, melyről itt mindjárt szó lesz, megelőzte.

Másik szokásban lévő szorszámalkotmány, melyről épen itt akarunk bővebben értekezni, az, melynek alapszámja a' 10. Az erre épített logarithmusokat nevezik *közönséges logarithmusoknak* (*logarithmi vulgares*); mivel tizedes számalkotmányunk (*systema decadicum*) szerinti *közönséges számvetéseinkben* (*arithmetica vulgaris*), mikor ott logarithmusokra van szükségünk, rendszerint ezekkel élünk, minthogy ezek itt, a' mint alább meg fogjuk látni, nagyobb könnyűséget szereznek, mint más akár-mely logarithmusok szerezhetnének. De nevezik ezen logarithmusokat máskép *briggféle logarithmusoknak* (*logarithmi brig-giani*) is; mivel Brigg Henrik, angol Mathematicus, és elébb Londonban, később az oxfordi egyetemen Geometria Professora volt az első, ki egy szorszámalkotmány alapjául a' 10-et vette fel, nem csak, hanem ez szerint ki is számította, 's 1624-ben *Arithmetica logarithmica* cím alatt ki is adta a' természetes számok logarithmusait az 1-től a' 20000-ig, 's ismét a' 90000-től a' 100000-ig, még pedig 14 sifrájú tizedes törtszámokkal, miszerint azok

*) Hat évvel később, 1620-ban jött ki Prágában Jobst Byrg nevű német számtudósnak ilyen című munkája: *Arithmetische und Geometrische Progress Tabulen* stb. Ez sem egyéb logarithmusok tábláinál, noha Byrg ezen nevezettel nem él is, és tagadhatatlan lévén, hogy ő Napierrel egy idő tályban, de egészen más úton jutott a' logarithmusokhoz, őtet is szint-ugy lehetne, mint Napier-t a' logarithmusok feltalálójának nevezni. De mivel a' Napier munkája elébb jött ki 6 évvel, rendszerint csak ennek tulajdonítják a' logarithmusok feltalálásának dicsőségét.

egész a' százbilliód részekig tökéletesek. A' Brigg által hagyott hézakot ezen alkotmányban kipótolta, azaz a' 20000 és 90000 közt eső számok logaritmusait kidolgozta, nem csak, hanem a' természetes számok közönséges logaritmusait az 1-től a' 100000-ig teljesen ki is adta 1628-ban a' maga könyvnyomtató műhelyében Vlacq Adorján, hollandus, goudai tudós könyváros. 'S ezek szerint e' két fáradhatatlan szorgalmú és béketűrészű tudós férjfiúnak vannak a' közönséges logaritmusok körül legnagyobb érdemeik. Később sokan érdemesítették magokat kisebb nagyobb szorzástáblák kiadásával. Az apróbbak között, melyek azonban minden közönséges életben előforduló olyan számvetési kérdések' megfejtésére, hol logaritmusokra van szükség, elégségesek, különös pontossággal készült, 's e' munka' olvasóinak főképp ajánlható e' kettő:

1. „A' természetes számok' logaritmái 1-től 108000-ig. Szerkeszteté Babbage Károly Esq. M. A. Készült Nagy Károly felügyelése alatt. — London, a' m. t. Társaság' költségével, 1834.“ Bolti árra a' fehér papirosra nyomott legolcsóbb példányoknak 3 frt 40 kr conv. pénzben.

2. „Georg's Freyherren von Vega Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. Herausgegeben von Dr. J. A. Hülsse. Leipzig Weidmann'sche Buchhandlung.“ Szinte minden évben újabb újabb kiadása van. Boli árra 1 frt 54 kr conv. pénzben.

Amaz szebb, pompásabb, de ez is csinos, és ez szegényebb sorsú tanuló ifjoknak azért inkább ajánlható, mivel ebben nemcsak a' természetes számok' briggféle logaritmusai az 1-től a' 108000-ig szinte úgy benne vagynak, mint amabban, hanem azokon kívül a' sinusok, cosinusok, tangensek és cotangensek' logaritmusai is, 's mind a' mellett is, hogy szinte két annyi van benne, az árra kévéssel több felénnyinél mint amazé. A' Laland-Renaudféle kis szorzástáblák, melyeket Professor t. Tatai András úr is kiadott, szükségben segítőknék jók ugyan némely esetekben; de csupán azokkal beérni tanulónak, ki iskolai pályáját a' mathesisben és physicában alaposan akarja végezni, már csak azért sem lehet, mivel abban a' trigonometriai logaritmusok nincsenek meg, melyekre pedig mulhatatlanul szükségünk van.

29. §. Azok a' Mathematicusok, kik a' logaritmusok körül fáradoztak, nemcsak ezen minden nagyobb számvetéseket végtelenül megkönnyebbitő módnak feltalálásáért, 's nem is csak azért érdemelnek tőlünk köszönetet, hogy a' logaritmusokat — melyeknek kiszámítá-

sára a' később feltalált könnyebb módok még akkor ismeretesek nem voltak — szinte hitelt felülmúló vasszorgalommal és kitartással kiszámították: hanem azért is, hogy az 1-től a' 10 sőt 100 millióig menő természetes számokat, és ezeknek egész a' 10 milliód részéig tökéletes logaritmusaikat, melyek ha mind teljesen leiratnának, sok ezer íveket töltenének be, és sok vastag kötetekre telnének, igen elmésen, és igen remek gazdálkodással tíz—tizenkét ívre összeszorították. Mi ha nem történik, a' logaritmuskok tábláit roppant terjedelmességök, 's abból következő drága árú miatt csak igen kevesen, 's azok is nagy alkalmatlansággal használhatták volna. Nagy jótétemény tehát az említett számoknak, 's azok logaritmusaiknak ily kevés ívekre való összeszorítása; de éppen azon mesterseges fogások, melyek által ez véghez vitetett, teszik a' logaritmuskok tábláit sokak előtt, kik azoknak okát nem értik, egészen titokteljessé. Lássuk hát, mikben állanak ezek a' rövidítések, annyival inkább, mivel csak így láthatjuk által világosan azon szabályok' okait is, melyek szerint valamely számhoz a' neki megfelelő logaritmuskot, és viszont valamely logaritmuskhoz a' neki megfelelő számot a' rovatokban fel lehet találni.

30. §. A' szorszám táblák szerkezetének, különösen a' Vega kézi könyvében, mely Hallgatóim' kezén forog, magyarázata éppen ezen rövidítések előadásából áll, melyek is, a' belőlök folyó szabályokkal a' számok logaritmusaiknak kikeresésére, e'kép következnek:

1. Első rövidítés, melyet már fentebb is említettünk, ez volt, hogy mivel a' logaritmuskok számvetésben az alapszámra különben sincs semmi szükség, az kihagyott mindenütt, és p. ezek helyett:

$$1 = 10^0.0000000$$

$$2 = 10^0.3010300$$

$$3 = 10^0.4771213$$

és így tovább

íratott csak:

N.	Log.
1.	0,0000000
2.	0,3010300
3.	0,4771213

és így tovább;

a' mi már maga nem kis rövidítés. A' Vega szorszám tábláinak négy első lapján nincs több ezen egy rövidítésnél, különben egészen ki vannak írva mind a' számok, mind azoknak logaritmusaik sorban egymás után. Ezeket hát igen könnyű megtalálni.

2. A' második rövidítés abban áll, hogy a' logaritmuskok mindenkor valahány egészéből (mert null is egész) 's azon felül még a' kisebb szorszám táblákban 7, a' nagyobbakban 10 's több betűjű tizedes törtszámból állván, annak egészét, mely jellemzőnek (cha-

rachteristica) nevezetlik, vagy mindenütt kihagyják, mint Babbage, vagy csak elől egynehány lapon teszik ki, mintegy emlékeztetésül, mint Vega, és csak a' törtszámot, melyet pótléknak (mantissa) hívnak, írják be a' rovatokba. Ez a' rövidítés azonban, csak a' közönséges szorszámalkotmányban lehetséges, hol az alapszám = 10, mivel itt minden szám úgy szollván maga megmondja, mi az ő logaritmusaának jellemzője. Ugyanis mivel

$$\left. \begin{array}{l} 1 = 10^0 \\ 10 = 10^1 \\ 100 = 10^2 \\ 1000 = 10^3 \\ 10000 = 10^4 \end{array} \right\} \text{és így} \quad \begin{array}{l} \log. 1 = 0 \\ \log. 10 = 1 \\ \log. 100 = 2 \\ \log. 1000 = 3 \\ \log. 10000 = 4 \text{ stb.:} \end{array}$$

tehát látnivaló, hogy logaritmusa jellemzője minden számnak az 1-től a' 9-ig és így minden számnak, mely csak 1 betűvel íratik, = 0; minden számnak a' 10-től a' 99-ig; és így minden számnak mely 2 betűvel íratik = 1; minden számnak a' 100-tól a' 999-ig, és így minden számnak, mely 3 betűvel íratik = 2; minden számnak az 1000-tól a' 9999-ig, és így minden számnak, mely 4 betűvel íratik = 3, és így tovább. A' honnan ezt a' szabályt vonhatjuk el: A' közönséges szorszámalkotmányban akármely szám logaritmusaának a' jellemzője áll egygyel kevesebb egységből mint a' hány betűvel íratik a' szám, 's valóban így is találjuk rendszerint ezen szabályt a' logaritmusokról tanító könyvekben. De ez a' szabály ezen formában csak arra az esetre illik, mikor csupa egész szám logaritmusaáról van szó, 's az egészekből és törtekből álló számok logaritmusaának jellemzőire csak módosítással, a' csupa törtszámokéira pedig teljességgel nem is alkalmaztatható; nyilvánosság bizonyosságára annak, hogy e' szabály nem a' dolog lényegéből van merítve. Mi tehát adjunk itt is olyan szabályt, mely a' dolog lényegéből merítettvén, minden esetekre egyformán illjék, következőképen. Minthogy az egyes számok nem egyebek mint a' 10-nek ugyan annyi 0-dik, a' tízesek, mint a' 10-nek ugyan annyi 1-ső, a' százások, mint a' 10-nek ugyanannyi 2-dik, az ezresek, mint a' 10-nek ugyanannyi 3-dik hatványai, és így tovább; például 6547 nem egyéb mint: $6 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0$: tehát mondhatjuk hogy a' közönséges szorszámalkotmányban ha a' szám 1 betűjű, azaz, egyeseken, vagyis a' tíz 0-dik hatványainak osztályán kezdődik, a' logar. jellemzője = 0; ha a' szám 2 betűjű, azaz, tízeseken, vagyis a' tíz 1-ső hatványainak osztályán kezdődik, a' log.

jellemzője $= 1$; ha a' szám 3 betűjű, azaz, százason, vagyis a' tíz' 2-dik hatványainak osztályán kezdődik, a' log. jellemzője $= 2$, és így tovább. A' honnan a' fentebbi szabályt így is módosíthatjuk: A' közönséges szorszámalkotmányban a' logaritmus jellemzője azt jelenti meg, hogy az ahoz tartozó szám az alapszám-nak, a' 10-nek, hanyadik hatványának osztályán kezdődik, például ezen számnak: 52127 a' közönséges logaritmusának jellemzője lesz 4, mivel ez, a' 10' 4-dik hatványának osztályán, azaz, tízeze-reseken kezdődik. A' honnan mikor valamely szám közönséges logaritmusát keresni akarjuk, mielőtt a' szorszámtáblákhoz nyulnánk, a' jellemzőt, mely a' táblákban különben sincs kitéve, már előre leírjuk e'képen: $\log. 52127 = 4$, 's ekkor vesszük aztán a' szorszámtáblákat, hogy ott az illető pótlékot vagy mantissát felkeressük.

3. Az egy, két, legfeljebb három betűvel írt számoknak — 1-től 999-ig — 's ezek logaritmusainak előterjesztésében az eddig előadott kétféle rövidítésnél több nem fordul elő, sőt a' Vega tábláiban ezek közül sem, a' 2-dik. Hanem a' négy betűjű 1000-től 9999-ig menő számok logaritmusainak leírásában már éltek a' szorszámtáblák' szerkesztői egy harmadik, nem ugyan hely, de legalább betűgazdálkodással is, a' mennyiben itt már, több egymásután következő számok logaritmusainak pótlékaiban (mantissaiban) a' három első számbetű változatlanul maradván, ezek nem írtak ki mindenütt, hanem csak ott a' hol rajtok változás esik, egygyel szaporodván. Például a' fentebbi két rövidítésen kívül

teljesen írva volna:

betűgazdálkodással pedig íratik:

Szám	Szorszám		Szám	Szorszám	
1800	255	2725	1800	255	2725
1801	255	5137	1801		5137
1802	255	7548	1802		7548
1803	255	9957	1803		9957
1804	256	2365	1804	256	2365
1805	256	4772	1805		4772
1806	256	7177	1806		7177
1807	256	9582	1807		9582
1808	257	1984	1808	257	1984
1809	257	4386	1809		4386
1810	257	6786	1810		6786
1811	257	9185	1811		9185
1812	258	1582	1812	258	1582

Ezen gazdálkodás a' 4 betűjű számok logaritmusaik leírásában, azon kívül hogy sok ezer számbetű' kopását meggazdálkodja, a' logaritmusok kikeresését is a' rovatokban nagyon könnyíti, a' mennyiben így azoknak három első betűik, melyeknél fogva őket keressük, pusztán állván könnyen szembe tűnnek. De különben is jól esik a' szemnek, valamely csupa számokkal benyomatott lapon mintegy pihenő és tájékozó pusztá helyekre találni, 's épen ilyen tájékozás végett hagyott pusztá helyek azok is a' logaritmusok tábláiban, melyek minden ötödik sor logaritmusa után a' táblán keresztül vonulnak: hogy ezeknél fogva annál inkább ne tévesszük el, melyik sorban keressünk valamely logaritmust. Egyébiránt a' 4 betűjű számok logaritmusaik kikeresésére a' szabály ez lesz látnivaló: Magát a' 4 betűjű számot keresni kell a' táblák első rovatában, hol az ilyen számok renddel egymásután következnek, logaritmusa' pótléka pedig nyomban utána következik mindegyiknek a' 2-dik rovatban, hol ha annak csak négy utolsó betűje áll, ezeknek elejökbe kell gondolni 's mondani a' fentebb hozzájuk legközelebb álló három első betűt.

4. Minden eddig előadott hely- és számbeli gazdálkodásoknál nagyobb az, mellyel éltek a' logaritmusok tábláinak szerkesztői a' 10000-tól 99999-ig menő 5 betűjű számoknak, és ezeknek logaritmusaiknak a' szorzótáblákba való igtatásában. Mit hogy annál világosabban általlássunk, írjunk ide 100 egymás után következő 5 betűjű számot logaritmusaikkal együtt, először csak a' már említett háromféle gazdálkodással, 's lássuk, hogy mindazok mellett is, mely nagy hely vesztegetéssel, és ugyanazon számnak mily sokszori ismétlésével esik ez; azután pedig lássuk, mikép került itt el mind kettőt a' Mathematicusok elméssége.

Szám	Szorzám	Szám	Szorzám	Szám	Szorzám			
34280	535	0408	34291	535	1802	34302	535	3194
34281		0535	34292		1928	34303		3321
34282		0662	34293		2055	34304		3448
34283		0788	34294		2181	34305		3574
34284		0915	34295		2308	34306		3701
34285		1042	34296		2435	34307		3827
34286		1168	34297		2561	34308		3954
34287		1295	34298		2688	34309		4081
34288		1422	34299		2815	34310		4207
34289		1548	34300		2941	34311		4334
34290		1675	34301		3068	34312		4460

Szám	Szorszám	Szám	Szorszám	Szám	Szorszám			
34313	535	4587	34336	535	7497	34359	536	0405
34314		4713	34337		7623	34360		0532
34315		4840	34338		7750	34361		0658
34316		4967	34339		7876	34362		0784
34317		5093	34340		8003	34363		0911
34318		5220	34341		8129	34364		1037
34319		5346	34342		8256	34365		1163
34320		5473	34343		8382	34366		1290
34321		5599	34344		8509	34367		1416
34322		5726	34345		8635	34368		1543
34323		5852	34346		8762	34369		1669
34324		5979	34347		8888	34370		1795
34325		6105	34348		9015	34371		1922
34326		6232	34349		9141	34372		2048
34327		6359	34350		9267	34373		2174
34328		6485	34351		9394	34374		2301
34329		6612	34352		9520	34375		2427
34330		6738	34353		9647	34376		2553
34331		6865	34354		9773	34377		2680
34332		6991	34355		9900	34378		2806
34333		7118	34356	536	0026	34379		2932
34334		7244	34357		0152			
34335		7371	34358		0279			

Ha az itt leírt számokat 's logaritmusaikat figyelemmel megtekintjük: lehetetlen szemünkbe nem tűnni először is, hogy a' három rovat közül mindegyiknek egyegy sorában a' szám 5, a' szorszám pedig 7, és így a' kettő együtt 12 számbetűből állván, ezek közül háromnak, t. i. a' szorszámok három első betűinek helye és így minden rovatnak, 's következésképen az egész szorszám táblának is szinte $\frac{1}{4}$ része pusztán marad, 's hasztalan vész el; mert ennyi már tájékozó pusztaságnak rendkívül sok. Szembetűnő itt továbbá az is, hogy az egymás után következő 4 betűjű számok közül, a' melyenek itt 3428, 3429, 3430 stb. mindegyiket tízszer kellett leírni, 's rakni utána sorba ezen tíz egyes számokat 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; hogy belőlök tíz tíz egymás után következő 5 betűjű számok formáltassanak. Már, ha a' szorszám táblákat az 5 betűjű számokra 's azoknak logaritmusaira nézve úgy lehetne intézni, hogy sem a' logaritmusok 3 első betűje miatt a' helynek szinte $\frac{1}{4}$ része üresen

ne maradna, sem pedig magoknak az 5 betűjű számoknak négy-négy első betűit ne kellene tízszer tízszer leírni, hanem csak egyszer, 's azt is úgy, hogy e' miatt üres hézakok ne maradnának: könnyű kiszámítani, hogy ez által helynek és számbetűknek többet meggazdálkodnánk felénél. És ezen feladatot szerencsésen megfejtették a' szorszámotablák szerkesztői az által, hogy azokat, az 5 betűjű számokra, 's azoknak logaritmusaúra nézve, úgy intézték el, a' mint a' közelebb leirt 100 számot, 's azoknak logaritmusaúit illetoleg az itt következő táblában láthatni.

Szám	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3428	535	0408	0535	0662	0788	0915	1042	1168	1295	1422	1548
3429		1675	1802	1928	2055	2181	2308	2435	2561	2688	2815
3430		2941	3068	3194	3321	3448	3574	3701	3827	3954	4081
3431		4207	4334	4460	4587	4713	4840	4967	5093	5220	5346
3432		5473	5599	5726	5852	5979	6105	6232	6359	6485	6612
3433		6738	6865	6991	7118	7244	7371	7497	7623	7750	7876
3434		8003	8129	8256	8382	8509	8635	8762	8888	9015	9141
3435		9267	9394	9520	9647	9773	9900	*0026	*0152	*0279	*0405
3436	536	0532	0658	0784	0911	1037	1163	1290	1416	1543	1669
3437		1795	1922	2048	2174	2301	2427	2553	2680	2806	2932

Tudniillik: voltak a' 4 betűjű számok és azoknak logaritmusaúai után, — úgy a' mint ezek már a' fentebbi háromféle rövidítésekkel elintézve voltak, — logaritmusaúoknak való rovatot még kilenczet, de csak olyan keskenyeket, melyekben négy-négy számbetűnek, t. i. a' logaritmusaúok négy utolsó betűinek legyen helye; miszerint a' 4 betűjű számok rovata után, mely legelől áll, logaritmusaúoknak való rovat van 10, az első szélesebb 7 számbetűnek, a' többi 9 keskenyebb csak négy-négy számbetűnek való. A' logaritmusaúok ezen 10 rovatai felibe vannak írva a' tíz egyes számok: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, renddel egymás után, úgy hogy a' legelső széles rovatbeli logaritmusaú 4 utolsó betűi felett áll a' 0, a' 9 keskeny rovatok közül pedig az 1-ső felett 1, a' 2-ik felett 2, a' 3-ik felett 3, és így tovább egész a' 9-ig. Ezen logaritmusaúok rovatai felibe irt egyes számokat már a' legelső rovatban álló 4 betűjű számok közül mindegyiknek utána gondoljuk renddel egymásután, 's így csinálunk ki gondolattal mindegyik 4 betűjű számból tíz-tíz 5 betűjű számot, a' nélkül hogy ezeknek 4 első betűit 10-szer kellene leírni. A' mi pedig illeti a' logaritmusaúokat: tíz-tíz 5 betűjű számnak, melyek az első rovatban lévő valamely 4 betűjű számból az által származnak, hogy ennek a' felső sorba irt egyeseket renddel

egymás után utána gondoljuk; a' milyenek lennének például ebből: 3432, ezek: 34320, 34321, 34322, 34323, 34324, stb. tíz-tíz ilyen számnak, mondom, logaritmusaiknak négy-négy utolsó betűik, mind abba a' sorba irattak, melyben áll az ilyen számoknak négy első betűjük az első rovatban, 's mindegyiké abba a' rovatba, mely felett áll mindegyiknek utolsó betűje; mindezeknek a' keskenyebb rovatokban kiirt, négy-négy utolsó logaritmusbetűknek is a' logaritmuskok első széles rovatában kitett három első logaritmusk betű mind addig eleibe értetvén, míg más, egygyel nagyobb három első betű nem következik, miszerint például: $\log. 34324 = 4, 5355979$. Ezek szerint, minden számítás nélkül is a' szemmel látás tanítja, hogy ugyanannyi 5 betűjű számok 's azoknak logaritmusaik így fellénni helyet sem fognak el, mint amúgy, csak a' fentebbi háromféle gazdálkodással elfognának. Azonban itt még egy dolog van, a' mit meg kell jegyeznünk. Gyakran megesik, t. i. hogy azon 5 betűjű számok közül, melyeknek 4 első betűjük ugyanaz, és így a' melyeknek logaritmusaiknak négy utolsó betűik mind egy sorba iratnak, nem mindeniknek logaritmusa ugyanazon három első betűn kezdődik, hanem az utolsóbbak három első betűi egygyel nagyobb lesznek, mint voltak az elsőbbekéi. Például azon 5 betűjű számok közül, melyek ezen 4 betűjű számból 3435 a' 0, 1, 2, 3, 4, 5 stb. egyes számok egyenkénti utána ragasztása által származnak, a' 6 elsőbbek logaritmusaiknak három első betűi még, mint a' fentebbi — nem a' közelebbi, hanem az azelőtt való — táblában láthatni, 535, a' 4 utóbbiakéi pedig már 536. Illyenkor már, minthogy az ilyen számok logaritmusaiknak 4 utolsó betűi a' szám 4 első betűivel mind egy sorba iratnak, azok közül az utolsóbbaknak megváltozott három első betűit pedig a' sor közepén változtatni a' rovat nem engedi, ezek csak a' következő sor elején iratnak ki először; a' logaritmuskok azon négy-négy utolsó betűi pedig, melyek elébe már három első betűnek nem a' fentebbi, hanem a' következő sorban kiirt három első betűt kell oda érteni, vagy egy kis elejökbe tett „-gal” jegyeztetnek meg, mint a' Vég a tábláiban, vagy pedig az által, hogy a' 4 számbetű közül az első kisebbnek íratik vagy nyomatik, mint a' B a b b a g é i b e n. 'S ezek szerint már az 5 betűvel irt számok logaritmusaiknak kikereséséről a' szabály így lesz: Ha valamely 5 betűjű számnak, például ennek: 34296, a' logaritmuskát kell kikeresnünk: előbb keressük a' számnak négy első betűit, 3429, az első rovatban (lásd a' legközelebbi kis táblát), 's azokat megta-

lálván, abban a sorban, melyben azok állanak, megyünk egész azon rovatig, mely felett a kiadott szám ötödik betűje, mely a mostani példában = 6, áll, 's itt megtaláljuk a kérdéses öt betűjű szám logaritmusa pótlékának négy utolsó betűit, most 2435, melyeknek, mivel nem \ast -osok, három első betűkül elejökbe írjuk a fentebb legközelebbi három első betűt: 535, 's így az illető jellemzőt is kiírva, fog lenni: $\log. 34296 = 4,5352435$. Ha pedig a logaritmusnak ezen szabály szerint megtalált négy utolsó betűje \ast -os: úgy az elibe a következő sorba kiirt három első betűt teszszük. Például, ha 34358-nak a logaritmusaát kell keresnünk, mivel abban a sorban, hol ezen számnak négy első betűje: 3435, az első rovatban áll, az 5-ik betű, azaz a 8 rovatában ezt találjuk: $\ast 0279$: tehát ez elibe teszszük a következő sorban kitett három első betűt, 536, 's így lesz $\log. 34358 = 4,5260279$.

5. Ha a 6, 7, és 8 betűjű, azaz, százezresen, egyes millióson, és tízes millióson kezdődő számoknak, és ezeknek logaritmusaiknak a szorzótáblákbai beigtatásában is csak az eddig leirt négyféle rövidítéssel éltek volna ezen táblák szerkesztői, oly móddal, hogy a 6 betűjűben az 5 első, a 7 betűjűben a 6 első, a 8 betűjűben pedig a 7 első betűket irták volna az első rovatba renddel egymás alá, az utolsó betűt pedig mind ezekben helyhez tették volna a logaritmusok rovatai felibe — mint ez a 6 betűjű számok közül az első 8000-ig menő számokkal mind a V é g a, mind a B a b b a g e tábláiban, — mindenikben a 186-dik laptól fogva a 202-ig valósággal történt —: úgy, mivel mindegyik 5 betűjű számból a tízegesek (0, 1, 2, 3, 4, . . . 9) utána írása által, 6 betűjű szám tíz, 's mind egyik 6 betűjűből 7 betűjű ismét tíz, 's végre mindegyik 7 betűjűből 8 betűjű újra tíz telik, 's következősképen 6, 7, és 8 betűjű szám öszveséggel 1110 annyi van, mint 5 betűjű, 's ennél fogva a 6, 7 és 8 betűjű számok és azoknak logaritmusaik — még úgy is ha a 6 betűjűk egyegy, a 7 betűjűk kétkét, a 8 betűjűk pedig háromhárom betűvel többől nem állának mint az 5 betűjűk — 1110 annyi helyet fogtak volna el, mint az 5 betűjű számok és azoknak logaritmusaik; látnivaló, hogy mind azon nyereségek mellett is, melyeket a fentebbi 4 rövidítések adtak, a természetes számok az 1-től a száz millióig, és ezeknek logaritmusaik több mint 1110 annyi helyet foglaltak el, mint a mennyit most az 5 betűjű számok, és ezeknek logaritmusaik elfoglalnak. Lássuk hát utoljára

miben áll az 5-dik és utolsó, 's legérdekesebb rövidítés a' 6, 7 és 8 betűjű számokat, és ezeknek logaritmusaikat illetőleg.

Ez rövideden ide megyen ki, hogy az 5 betűjű számoknál több mint 1110-szerre többre menő 6, 7 és 8 betűjű számokat logaritmusaikkal együtt mind egészen kihagyták a' szorszám táblákból: hanem az 5 betűjű számok szorszám tábláit úgy intézték, hogy azokból a' 6, 7, sőt 8 betűvel irt számok logaritmusaikat is igen könnyen, többnyire minden frás nélkül, csak egy kis észbeli számvetés által is ki lehet számítani. — Mely rendkívüli megrövidítése a' szorszám tábláknak következő észrevételeken alapul, t. i. hogy

a) Minél nagyobbak a' számok, annál kisebb a' különbség két nyomban egymásután következő szám logaritmusaik között. Mert ha a és b két nyomban egymásután következő számokat jelentenek, úgy hogy $(a + 1) = b$, vagy, a' mi ezzel egyre megy ki, $a + \frac{1}{a} = b$, vagyis $a(1 + \frac{1}{a}) = b$: innen következik, hogy $(1 + \frac{1}{a}) = \frac{b}{a}$, innen ismét, hogy $\log(1 + \frac{1}{a}) = \log \frac{b}{a}$, azaz, hogy $\log(1 + \frac{1}{a}) = \log b - \log a$. Úgyde, látnivaló, hogy az egyenlet bal oldalán minél nagyobb az a, annál kisebb $\frac{1}{a}$, 's következésképen annál kisebb $(1 + \frac{1}{a})$ is. Minél kisebb pedig $(1 + \frac{1}{a})$ annál kisebb $\log(1 + \frac{1}{a})$; és így annál kisebb az ezzel egyenlő $\log b - \log a$ is. A' honnan, az okoskodás ezen lánczának első szemjéit az utolsóval egybekötve, világos, hogy minél nagyobb az a, következésképen az a-nál egygyel nagyobb b is, azaz, minél nagyobb két egymásután nyomban következő szám, annál kisebb a' különbség azoknak logaritmusaik között.

b) Ez a' szomszédos számok logaritmusaik között való különbségnek a' számok egygyel-egygyel növekedésök alkalmávali kisebbéde nem mindenütt egyenlő, hanem eleinte a' kisebb számoknál hirtelenebb, sebesebb, azután pedig, minél inkább növekednek a' számok, annál lassubbá-lassubbá lesz; úgy hogy ha három egymásután következő szám közül a, b, c, az elsőnek logaritmusaát levonjuk a' másodikikéből: $\log b - \log a = m$, a' másodikikét pedig a' harmadikéből: $\log c - \log b = n$: ama két elsőbbek közötti különbségnél, az m-nél, e' két utóbbiak közötti különbség, az n, annál parányibb kisebb, vagyis $m - n$ annál parányibb, minél nagyobbak az egymásután következő számok a, b, c; a' mit így mutatunk meg. A' közelebb mondottak szerint:

$$\log. \left(1 + \frac{1}{a}\right) = \log. b - \log. a = m, \text{ és}$$

$$\log. \left(1 + \frac{1}{b}\right) = \log. c - \log. b = n, \text{ a' honnan aztán}$$

$$\log. \left(1 + \frac{1}{a}\right) - \log. \left(1 + \frac{1}{b}\right) = m - n.$$

Úgyde, minél kisebb a' különbség két egymással egészekben egyező, és csak törtekben különböző számok között, annál kisebb a' különbség azoknak logaritmusaik között is. Peldául 10, 1 és 10, 2 között kisebb lévén a' különbség, mint 10, 1 és 10, 3 között, ama' két elsőbeknek logaritmusaik között is kisebb a' különbség, mint e' két utóbbiakéi között, azaz, kisebb $\log. (10, 2) - \log. (10, 1)$, mint $\log. (10, 3) - \log. (10, 1)$, mivel ugyanazon logaritmus amott kisebb számnak kisebb, itt pedig nagyobb számnak nagyobb logaritmusából vonatván le, amott kisebb, itt nagyobb lesz a' maradék, vagyis a' különbség a' két logaritmus között. Épen ilyen egészekben egyező; 's csak törtekben különböző két számok pedig $\left(1 + \frac{1}{a}\right)$ és $\left(1 + \frac{1}{b}\right)$; és így $\log. \left(1 + \frac{1}{a}\right) - \log. \left(1 + \frac{1}{b}\right)$, azaz, $m - n$, vagyis az egymásután következő számok logaritmusai között való különbségnek a' számok egygyel-egygyel növekedésök alkalmávali kisebbedése annál parányibb, minél kisebb $\left(1 + \frac{1}{a}\right) - \left(1 + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{1}{a} - 1 - \frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b}{ab} - \frac{a}{ab} = \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{ab}$. Ez pedig annál kisebb, látnivaló, minél nagyobb itt az osztó: ab ; mely ismét annál nagyobb minél nagyobbak az egymásután nyomban következő számok: a, b, c . És így, az okoskodás' ezen lánczának első szemjét az utolsóval egybekötvén, világos, hogy az egymásután következő számok logaritmusai között való különbségnek a' számok egygyel-egygyel növekedésök alkalmávali kisebbedése annál parányibb, minél nagyobbak magok az egymásután következő számok.

c) Nevezetesen, a' tapasztalás tanítja, hogy már csak az 5 betűjű vagyis tíz ezres számokban is a' nyomban egymásután következő számok logaritmusainak a' számok egygyel-egygyel növekedésére eső kisebbedése oly parányi, hogy a' legkisebb 5 betűjű számok is tízzel húszszal, a' nagyobbak több tízessel, sőt százakkal, a' legnagyobbak pedig ezernél is többel növekednek, míg a' szomszédos 5 betűjű számok logaritmusai között való különbség 1 tíz milliód-részzel kisebbé lesz. Peldául, ha e' két egymásután következő 5 betűjű számok közül 34283, és 34284 a' kisebbiknek logaritmusát kivesszük a' nagyobbikéból, a' két logaritmus közötti különbség lesz $= 127$ tíz milliód-rész. Ugyanis, a' fentebbi táblácska szerint:

$$\begin{array}{l}
 \log. 34284 = 4,5350915 \\
 - \log. 34283 = 4,5350788 \\
 \hline
 \log. \text{különbs.} = 0,0000127
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 's \text{ ha } e' \text{ két szám helyett olyan } 2 \text{ számot} \\
 \text{veszünk is fel, melyek már } 90\text{-nel na-} \\
 \text{gyobbak, melyek is } 34373, \text{ és } 34374: \\
 \text{ezeknek logaritmusaik között is csak} \\
 \text{annyi lesz a' különbség; mert} \\
 \text{A' honnan világos, hogy már itten-} \\
 \text{tályon, a' kisebb } 5 \text{ betűjű számok-} \\
 \text{nál is a' szomszédos számok loga-} \\
 \text{ritmusai között való különbségnek} \\
 \text{kisebbedése lépcsőnkint oly pará-}
 \end{array}
 \right\}$$

nyi, hogy míg magok a' szomszédos számok 90-nel növekednek, az ő logaritmusaik között való különbség csak 1 tíz milliód részszel sem kisebbedik, annak kisebbedése ezen határok között még csak a' tíz milliód részeknél apróbb, például száz milliód-, ezer milliód-, stb. részekre hatván ki; mely kisebbedés csak úgy tűnhetnék szembe, látnivaló, ha a' logaritmusok tábláinkban egész a' száz milliód-, ezer milliód-, stb. részekig pontosan ki volnának számítva.

Ezekből már ilyen következtetést huzhatunk ki, hogy ha a' szomszédos számok logaritmusai között való különbség 34283-tól fel egész 34374-ig csak 1 tíz milliód részszel sem kisebbedik — ezen határok között, valamint legelöl úgy legutól is 0,0000127 lévén az —: úgy ugyanczen határok között akármely szám logaritmusai is az e-lőtte való szám logaritmusából — az egy tíz milliód résznél kisebb részeket számba nem vévén — az által formáltatik, hogy ahoz 0,0000127-t adunk.

$$\begin{array}{l}
 \log. 34283 = 4,5350788 \\
 - \log. 34282 = 4,5350662 \\
 \hline
 \log. \text{különbs.} = 0,0000126
 \end{array}
 \left.
 \begin{array}{l}
 \right\} \text{ és hogy } \left\{
 \begin{array}{l}
 \log. 34373 = 4,5362174 \\
 - \log. 34372 = 4,5362018 \\
 \hline
 \log. \text{különbs.} = 0,0000126
 \end{array}
 \right.$$

Miből ismét azt lehet következtetni, hogy ezen határok között, t. i. 34282-től 34373-ig, mely ama' fentebbivel, t. i. 34283-tól 34374-ig szinte egyre megyen ki, minden egy pár szomszédos szám logaritmusai között a' különbség = 0,0000126. De egész pontossággal sem ez, sem a' fentebbi következtetés nem igaz; hanem a' dolog így áll: A' különbség a' szomszédos számok logaritmusai között az említett határokon belül, sőt azokon kívül is mind lefelé; mind felfelé még egy darabig, sem nem 0,0000126, sem nem 0,0000127 egész pontossággal, hanem amannál nagyobb, ennél pedig kisebb valamivel. De minthogy tábláinkban a' logaritmusok csak a' tíz milliód-

részekig lévén kiteve, a' mely részök 1 tíz milliórészén alul van, az ha kisebb egy fél tíz milliórészénél elhagyatik, ha nagyobb, egy egész tíz milliórésznek tételik, 's ennél fogva egyik egy kicsiny-nyel kisebb, másik egy kicsinnel nagyobb kelletinél: látnivaló, hogy ezen az okon a' szomszédos számok logaríthmusai között való különbségek közül is egyik nagyobb másik kisebb valamivel — de soha sem egy egész tíz milliórészszel — mint szorosán véve volna, 's ittentályon a' felhozott példák körül 126 és 127 tíz milliórész között ingadozik, 's a' szerint esik helyette — két szomszédos szám logaríthmusai közül a' kisebbiknek a' nagyobbikból kivonása által — egyik vagy másik e' két szám közül, a' mint a' két szomszéd logaríthmus közül a' kisebbiknek, vagy a' nagyobbiknak 7-dik és utolsó sifrája volt kisebb, vagy nagyobb, vagy pedig mindenik kisebb, vagy mindenik nagyobb volt kelletinél valamivel. De ha olyan szorzástáblánk volnának, melyekben a' logaríthmusok nem csak 7, hanem több, például 10 betűjű tizedes törtekkel ki volnának dolgozva: azokban a' nevezett határok között, sőt azokon még felül 's alul is egy darabig, a' szomszéd logaríthmusok közötti különbség, csak a' 10 milliórészekig véve, mindenütt 126 tíz milliórész fogna lenni, de a' melyhez tíz milliórészeknél apróbb, nevezetesen száz milliód-, ezer milliód- stb. részecskék eleinte oly számmal járulnának, hogy ezeknek összege közelítene 1 tíz milliórészhez: azután pedig ez a' része a' logaríthmusnak, mely a' tíz milliórészeknél apróbb részecskékből áll, mindig kisebbé-kisebbé fogna lenni mind addig, míg utóljára, mikor mintegy 300-zal számlálnánk felebb, a' kisebbedés a' tíz milliórészekre is felhatna, és azoknak száma 126 helyett lenne 125 tíz milliórész, oly számú apróbb törtekkel, melyeknek összege közelítne az 1 tíz milliórészhez, és így tovább.

d) Ha már az 5 betűjű szomszédos számok logaríthmusai között való különbség is — az 1 tíz milliórészénél apróbb törteket nem számítván — húzamosan ugyanaz marad: kétség kívül még bővebb mértékben igaz ez az 5 betűjű számoknál nagyobb 6, 7 és 8 betűjű számokat illetőleg, úgy hogy itt már nem csak százakig, hanem több ezrekig is elszámíthatunk felfelé, míg a' szomszédos számok logaríthmusai között való különbség 1 tíz milliórészszel kisebb lesz. A' mi más szókkal azt teszi, hogy a' 6, 7 és 8 betűjű számokban nem csak százakig, hanem ezrekig számítva is felfelé a' logaríthmusok növekedései, ha a' tíz milliórészénél apróbb részeket számba nem vesszük, mindenütt egyszerűen vannak a' számok növe-

kedéseivel; úgy hogy a' mennyivel szaporodik valamely 6, 7 vagy 8 betűjű szám' logaritmusa, míg maga a' szám egygyel növekedik, kétannyi lesz a' logaritmus szaporodása, ha maga a' szám kettővel, három annyi ha hárommal, tíz annyi ha tízzel, száz annyi ha százal növekedik, és így tovább; 's megfordítva, az a' szaporúság, melyet nyér valamely 6, 7 vagy 8 betűjű szám logaritmusa, míg maga a' szám n egységgel növekedik, n egyenlő részekre felosztván, minden egygyel-egygyel növekedésére a' számnak esik a' logaritmus növekedésének $\frac{1}{n}$ -d része. És ez már épen az az észrevétel, mely lehetségessé tette, hogy a' 6, 7 és 8 betűjű számok logaritmusaikkal együtt mind kihagyassanak a' szorszám táblákból, 's mégis mind ezeknek logaritmusaikat az 5 betűjű számok logaritmusaiból könnyű móddal ki lehessen számítani.

e) Hogy eshetik ez meg, egy példa meg fogja világosítani, melyből aztán általános szabályt is nem nehéz lesz formálni. Legyen hát feladatunk: ezen 6 betűjű számnak: 342846, logaritmusaát, az 5 betűjű számok logaritmusaiból kiszámítani. E' végett:

Először is a' kiadott 6 betűjű számnak 5 első betűjét, mely most = 34284, úgy vévén mint 5 betűjű számot, 's ennek logaritmusaát a' nyomban-utána következő 5 betűjű számnak, azaz, 34285-nek logaritmusaából levonván, kikeressük e' két szomszédos 5 betűjű szám logaritmusaik között való különbséget, e'képen:

log. 34285 = 4,5351042	}	Továbbá így okoskodunk: a' különbség ugyan ez lesz két olyan hat betűjű számok logaritmusaik között is, melyek ezen két 5 betűjű számokból tízzel való szorozás által származnak, azaz, a' (34285 × 10) és (34284 × 10) vagyis a' 342850, és 342840 logaritmusaik között; mivel ezek tényezőik' logaritmusaiknak summái lévén, látnivaló nem egyebek, mint amaz 5 betűjű számok logaritmusaik, mindenik a' 10' logaritmusaival, azaz, jellemzőjében egygyel-egygyel megszorítva, mi a' közöttök való különbségen semmit sem változtat; úgy hogy e' szerint:
— log. 34284 = 4,5350915		
Különbség = 0,0000127		

log. 342850 = 5,5351042	}	Mint hogy pedig a' fentebbiek szerint a' 6 betűjű szomszédos számok logaritmusaiknak növekedése magoknak a' számoknak növekedésével egyenszerben van: tehát, ha az alatt, míg a' 6 betűjű szám 342840-ból 342850-re, és így tízzel növekedik, a' logaritmus 127 tíz milliódrrészszel szaporodik: úgy minden
— log. 342840 = 5,5350915		
Különbség = 0,0000127		

egygyel-egygyel való növekedésére a' számnak 342840től 342850ig csak a' logaritmusa az alatti szaporúságának, azaz, 127 tíz milliód résznek egy-egy tizedrésze, azaz, 12, 7 tíz milliód rész, = 12 egész tíz milliód rész, és a' 13-ik tíz milliód résznek hét tizedrésze. Következésképen akármely 6 betűjű számnak, mely 342840 és 342850 között esik, a' logaritmusa kijő, ha a' 342840 logaritmusaéhoz annyiszor véve adjuk hozzá a' 12, 7 tíz milliód részt, a' hány egységből áll a' 6 betűjű szám utolsó betűje; miszerint fog lenni:

$$\begin{aligned} \log. 342846 &= 5, 5350915 + 6 \times (12, 7) \text{ tíz milliód rész;} \\ \text{azaz} &+ \quad 0, 0000076, 2 \\ &= 5, 5350991; \text{ az egy fél tíz milliód résznél} \end{aligned}$$

kisebb törtszámot elhagyván.

Ezek szerint a' 6 betűjű számok logaritmusaik az 5 betűjű számok logaritmusaiból kiszámítására az általános szabály így lesz, látnivaló; A' 6 betűjű szám logaritmusaiknak characteristicáját írjuk ki úgy, a' mint kívántatik, t. i. 5 egésznek, 's ennek mantissául írjuk utána a' kérdéses 6 betűjű szám 5 első betűjének, mint 5 betűjű számnak logaritmusa' mantissáját, végre ehez adjuk hozzá ugyanezen 5 betűjű, és a' nyomban utána következő 5 betűjű szám logaritmusaik között való különbségnek annyi tizedrészt, a' hány egységből áll a' kérdéses 6 betűjű szám' utolsó betűje.

f) Ez a' 6 betűjű számok' logaritmusaik az 5 betűjű számok' logaritmusaiból való kiszámítása, így sem sok munkába kerülne ugyan, a' mint látjuk; de a' szorzás táblák' szerkesztői, hogy ezt még könnyebbé tegyék, vontak minden lapon az 5 betűjű számok' logaritmusaik rovatai után még egy rovatot, hosszába két fele szelve oly móddal, hogy első hasábjában egy, másodikban két vagy három számbetűnek legyen helye egymás mellett. Ezen rovat' második hasábjában feljegyezték minden lapon több vagy kevesebb helyen, a' mint kívántatik, hány tíz milliód rész ottantályon a' különbség két egymásután következő 5 betűjű szám logaritmusaik között; nem csak, hanem mindegyik ilyen különbség után a' rovat első hasábjában az egyes számokat 1-től 9-ig sorba egymás alá írván, ezeknek a' rovat második hasábjában utánok jegyezték, mennyi az ott kitett különbségnek 1, 2, 3, 4, stb. tizedrésze. Peldául, ottantályon, a' hol ezen 6 betűjű számnak 342846, öt első betűje: 34284, és ennek logaritmusa előfordul, a' szomszédos 5 betűjű számok logaritmusaik között ez a' két különbség uralkodván egymást váltogatva: 127 és 126 tíz milliód rész, ot-

tan körül ezen különbségek, és ezeknek 1, 2, 3, 4, stb. tizedrészeik vannak az utolsó rovatba feljegyezve, úgy a' mint azokat itt oldalt az alul Diff. (differentia), felül P. P. (partes proportionales) betűkkel jegyzett rovatban láthatni; oly móddal azonban, hogy az egy fél tíz milliód résznél nagyobb tört egy egész tíz milliód résznek vétetik, az annál kisebb pedig elhagyatik. Peldául, ezen szomszédos számok logaritmusai között való különbségnek: 127 tíz milliód rész 1 tized része volna csak 12, 7 tíz milliód rész, de vétetik 13 tíz milliód résznek. Ugyancsak 127 tíz milliód résznek 2 tized része volna $2 \times (12, 7) = 25, 4$ tíz milliód rész, de vétetik csak 25 tíz milliód résznek, stb. Így fel lévén rakva szorszám tábláinkban minden lapon mind a' szomszédos 5. betűjű számok' logaritmusai között ottantályon uralkodó különbségek, mind pedig ezeknek 1, 2, 3, 4, 9 tized részeik, nagyon meg van könnyítve a' 6 betűjű számok logaritmusainak kikeresése. Mert ha peldául 342846-nak a' logaritmusát kell keresnünk: először kikeressük az öt első betűnek, mint öt betűjű számnak logaritmusát; 's ennek utolsó betűjét levonjuk elménkben a' nyomban utána következő logaritmusnak utolsó betűjéből (magában értetődvén, hogy ha ez különben meg nem eshetik, egy tizedest egygyesekké változtatunk), 's a' maradék 7 megmutatja, melyik az utolsó rovatban kitett különbségek közül az ezen szomszédos logaritmusok közötti különbség; t. i. az, mely 7-n végződik, és így 127. Ennek tehát annyi tized részét, a' hány egységből áll a' hatodik helyen lévő számbetű, és így itt 6 tized részét, melyet az utolsó rovatban készen találunk = 76, hozzá adjuk elménkben az 5 első betű logaritmusához, melynek két utolsó betűje, = 15, ezzel együtt 91 lesz; 's így minden legkisebb írásbeli számvetés nélkül egyenesen és egyszerre írhatjuk, hogy $\log. 342846 = 5, 5350991$.

g) Azon egész okoskodást, mely szerint a' 6 betűjű számok' logaritmusát az 5 betűjű számok logaritmusaiból kiszámítottuk, igen könnyű alkalmaztatni a' 7 betűjű számok logaritmusainak ugyancsak az 5 betűjű számok logaritmusaiból való kiszámítására is. Mert itt is igaz az, hogy a' mi különbség van két szomszédos 5 betűjű szám, peldául 34284 és 34285' logaritmusaik között, = 127 tíz milliód rész, ugyanaz a' különbség két olyan 7 betűjű szám logaritmusai között is, melyek ezen 5 betűjükből 100-zal való szo-

P. P.	
	127
1.	13
2.	25
3.	38
4.	51
5.	64
6.	76
7.	89
8.	102
9.	114
	126
1.	13
2.	25
3.	38
4.	50
5.	63
6.	76
7.	88
8.	101
9.	113
	Diff.

rozás által származnak, azaz (34284×100) és (34285×100) , vagyis 3428400, és 3428500 logaríthmusai között, mivel ezek tényezők logaríthmusainak summái lévén, látnivaló, nem egyebek, mint ama két 5 betűjű számok logaríthmusai, mindenik a' 100' logaríthmusával, azaz, mindenik a' jellemzőjében 2-vel megszorítva; mi a' közöttüki különbségen semmit sem változtatván, az itt is $= 127$ tíz milliódész. Továbbá itt is igaz az is, hogy ha a' tíz milliódésznel apróbb törtet számba nem vesszük, a' szomszédos számok logaríthmusai között való különbség húzamosan ugyanaz maradván, a' logaríthmusok növekedése a' számok' növekedésével egyenszerben van. Következésképen, ha mig a' szám 3428400-ból 3428500-ra, azaz 100-zal növekedik, az alatt a' logaríthmus' növekedése $= 127$ tíz milliódész: minden egygyel-egygyel növekedésére a' számnak esik a' logaríthmus növekedéséből a' 127 tíz milliódésznek egy-egy századrésze. És így, ha valamely 7 betűjű számnak, melynek két utolsó betűi nem nullák, hanem valót jelentő számok, például a' 3428465nek logaríthmusát kell keresnünk: először vesszük azt csak úgy, mintha a' két utolsó helyen nullák volnának, azaz, vesszük csak az 5 első betűnek, 34284, a' táblákban megtalálható logaríthmusát jellemzőjében 2-vel megnövelve; azután ehez hozzá adjuk e' kérdéses 7 betűjű szám 5 első betűje $= 34284$, és az ezt nyomban követő 5 betűjű szám, 34285, logaríthmusaik között való különbségnek, — melyet mikép lehet az utolsó rovatban könnyen feltalálni, már megmondottuk — annyi századrészt, a' mennyit jelent a' kérdéses 7 betűjű számnak két utolsó betűje, és így a' jelen példában 65 századrészt, vagyis 6 tizedrészt és 5 századrészt, melyeket az utolsó rovatban mind készen találunk; mert ott a' 127 tíz milliódész különbségnek nem csak 6 tizedrésze $= 76$ áll készen, hanem 5 századrésze is; mivel 5 tizedrészenek, mely 64 tíz milliódész, a' tizedrésze, azaz 6,4 tíz milliódész teszi annak 5 századrészt. Ezeket tehát, u.m. $76 + 6,4$ tíz milliódész, vagy, a' fél tíz milliódésznel kisebb törtet elhagyván, csak $76 + 6 = 82$ tíz milliódész, hozzá adván csak észben a' 3428400' logaríthmusához, vagyis hozzá adván ezt a' kérdéses 7 betűjű szám', 3428465, öt első betűjének, mint öt betűjű számnak, jellemzőjében 2-vel megnövelt, logaríthmusához, egy kis észbeli összeadással ki- jő, hogy $\log. 3428465 = 6,5350997$.

Egyébiránt, a' kinek az észbeli számvetésben elégséges gyakorlottsága nincsen, jól teszi, ha az ilyeneket is írásba teszi, ilyen formán:

Kérdés: mi a' logaritmusa 3428465-nek?

Felelet: az annyi, mint: $\log. 3428400 = 6,5350915$, és még a' 6-dik betü (=6) rovására 6 tizedrészt Diff. 76, 's a' 7-dik betü (=5) rovására 5 századrész Diff. 6, és így összesen: $\log. 3428465 . . = 6,5350997$.

h) Hogy ha a' számnak még nyolczadik betüje is volna, például: 34284659, a' nyolczadik betü rovására még annyi ezerezer részét kellene a' Differentiának a' fentebbiekhez adni, a' hány egységből áll a' 8-dik betü, nevezetesen itt 9 ezerezer részét, azaz, 9 tizedrészenek századrészét, ez, az eddig mondottakból foly; 's következésképen, mivel itt a' Differentiának 9 tizedrésze = 114 tíz milliódész, és így ugyanannak 9 ezerezer része, vagyis 9 tizedrészenek századrésze = 1,14 tíz milliódész, vagy a' fél tíz milliódésznél kisebb törteket elhagyván = csak 1: ezt a' fentebbiekhez adván, 's a' jellemzőt is 1-gyel megnövelvén, fog lenni: $\log. 34284659 = 7,5350998$. A' honnan világos, hogy az 5 betüjü számok logaritmusaiból, az utánok tett rovatnak, — mely a' szomszédos 5 betüjü számok logaritmusai között való különbségeket, és ezeknek 1, 2, 3, 4, stb tizedrészeit terjeszti elő, — segítségével, nemcsak a' 6 és 7, hanem a' 8, sőt, ha kívántatnék, hasonló módon a' 9 betüjü számok logaritmusait is könnyű kiszámítani, ha t.i. azoknak csak a' tíz milliódészéig kell pontosoknak lenniök; mely pontosság pedig minden a' közönséges életben előforduló logaritmuskali számvetéseinkre nézve elégségesek.

i) Ezekből látjuk, mily nagy a' nyereség, mely a' logaritmuskos tábláinak szerkesztésében a' Differentiák utól tett rovata által eléretik. De itt talán azt mondhatná valaki, hogy miért nem üzték a' logaritmuskos tábláinak készítői ezen nyereséget még többre is? Nevezetesen, miért nem úgy alkották ezen táblákat, hogy azokban legfeljebb csak a' 4 betüjü számok, és azoknak logaritmusai iktattattak volna be, 's már az 5 betüjü számok logaritmusai is a' szomszédos 4 betüjü számok logaritmusaiból számítottak volna ki; miszerint a' logaritmuskosokat, úgy látszik, még tiszerte kisebb helyre össze lehetett volna szorítani. Felelet: ha úgy látszik is, de valóssággal nem úgy van. Mert ha megtekintjük a' szorszám táblákat, láthatjuk, hogy a' vége felé, hol az 5 betüjü számok nagyok, és már a' 100000-hez közelednek, oly ritkán változik a' szomszédos számok logaritmusai között való különbség, hogy három négy lapon is egymásután ugyanazon két szám között ingadozik. Azután

ha lejobb-lejobb jövünk kisebb-kisebb 5 betűjű számokra, mindig sűrűbben-sűrűbben változik a' különbség a' szomszédos logaritmuskok között, úgyhogy alul a' 20000-en már ötszörnél többször változik az, egy lapon; 's annál fogva annak tizedrészei már itt egy rendbe egymás alá nem térnek, hanem két rendet kívánnak. Még alább pedig, nevezetesen mindjárt a' 15000-en alul már két rendben sem térnek a' sűrűn változó differentiak, és azoknak tizedrészeik, hanem három, sőt közeledvén a' 10000-hez, négy rendet is szinte egészen betöltenének; mit azonban a' hely szűk volta nem engedvén, ittentályon az 5 betűjű számok elején, 7 vagy 8 lapon nem is irattak ki az utolsó rovatokba minden differentiak; hanem közbe-közbe egy kihagyatott; melynek aztán tized- 's századrészei helyett, ha nagy pontosság nem kívántatik, veszi az ember az 1-gyel kisebb vagy 1-gyel nagyobb differentiának tized- 's századrészeit, melyeket készen talál; a' hol pedig nagyobb pontosság kívántatik, kiszámítja az ember maga az ily ritka esetekben a' ki nem tett differentiának ennyi 's ennyi tized- 's századrészeit. — Ha tehát már az apróbb 5 betűjű szomszédos számok logaritmusainak különbségei is oly sűrűn változnak, hogy azok és azoknak tizedrészei, ha mind kiratnának, szinte 4 egész rovatot betöltenének: látnivaló, hogy a' szomszédos 4 betűjű számok logaritmusainak differentiai lejobb-lejobb mindig sűrűbben változván, mindig többtöbb rovatot kívánnának, és ezek, — annyivalinkább, mivel már itt a' differentiak is nagyobbak, — mindig többtöbb helyet foglalnának el; úgy hogy utóljára mind azt a' helyet, melyet most az 5 betűjű számok logaritmusai töltenek be, a' szomszédos 4 betűjű számok logaritmusai között való azon differentiak foglalnák el, melyekből az 5 betűjű számok logaritmusait ki lehetne számítani. Pedig, ha már csakugyan el kell a' helynek foglaltatnia valami által, jobb azt magok az 5 betűjű számok logaritmusai foglalják el, mint olyan számok, melyeknek segítsége által azokat még előbb számítani kellene ki. — Egyszóval, a' közönséges szorszámok tábláinak szerkezete remek, és oly tökéletes, melyet már tökéletesbitni nem lehet.

31. §. Az eddig előadott 5 rendbeli rövidítések, és az ezekből folyó szabályok szerint már akármely, a' közönséges életbeli számvetéseinkben előfordulható egész szám logaritmusát ki tudjuk keresni. De ha azt akarjuk, hogy a' logaritmuskokali számvetésben semmi esetben fenn ne akadjunk, szükség megfellelnünk még ezen kérdésre is: Hát a' törtszámok' logaritmusait hogy lehet szor-

számtábláinkban feltalálni; holott azokban, — mint eddig láttuk, — csupán egész számok logaritmusa van felrakva? Ezen kérdésre az általános, vagy mindent magában foglaló, 's igen könnyű felelet ez: Akármely törtszám nem egyéb, mint egy olyan hanyados, melynek osztandója a' törtszám felsője, osztója pedig ugyanannak alsója. Következésképen a' törtszám' logaritmusa kijő, ha felsőjének logaritmusból alsójának logaritmusaát levonjuk. Minthogy pedig a' törtszámnak mind alsója, mind felsője magában gondoltatván egész szám, 's mint ilyenek, mindeniknek logaritmusaát ki tudjuk a' fentebbi szabályok szerint keresni: látnivaló, hogy a' törtszámok logaritmusaának kikeresésére újabb szabályokat adni nem szükség. Mivel azonban ezen munkának gyakorlati végbevitelét illetőleg némely megjegyezni valók lesznek, melyek által itt a' munka könnyítettetik: lássunk itt először a' tizedes, azután a' közönséges törték' logaritmusaának kikereséséről.

a) Először is, mikor a' tizedes törtszám mellett egész is van, mint például ebben: 782,39: az ilyet, látnivaló, úgy lehet nézni, mint annyi egészet, a' mennyi lesz az ilyen szám, ha egészt és törtjét mind öszszemondjuk egésznek, elosztva a' 10' annyi-adik hatványával, a' hány betűjü a' tizedes törtszám. Mert $7823,9 = \frac{78239}{10^1} = \frac{78239}{10}$; $782,39 = \frac{78239}{10^2} = \frac{78239}{100}$; $78,239 = \frac{78239}{10^3} = \frac{78239}{1000}$; $7,8239 = \frac{78239}{10^4} = \frac{78239}{10000}$, stb. A' honnan ebben az esetben ez a' különös szabály kerekedik, vagyis inkább az általános szabály, mely szerint a' törtszám logaritmusa kijő, ha felsőjének logaritmusból alsójának logaritmusaát levonjuk, így módosúl: Az egészből és tizedes törtszámából álló szám' logaritmusa kijő, ha az ilyen számot úgy nézvén mint merevül egészet, ennek logaritmusaát kikeressük, 's abból levonunk annyi egészet a' hány betűjü a' tizedes törtszám. A' honnan látnivaló, hogy ugyanazon számbetűkkel 's ugyanazon renddel írt számnak, akárhova tegyük benne az egészeket a' tizedes törtéktől elválasztó kómmát, vagyis akármeny nyit szakaszszunk el belőle elől egésznek utól törtszámunk, logaritmusa' mantissája nem, hanem csak characteristicája változik. Például:

$$\log. 78239 = 4,8934233.$$

$$\log. 7823,9 = 4,8934233 - 1 = 3,8934233.$$

$$\log. 782,39 = 4,8934233 - 2 = 2,8934233.$$

$$\log. 78,239 = 4,8934233 - 3 = 1,8934233.$$

$$\log. 7,8239 = 4,8934233 - 4 = 0,8934233.$$

Ezekből világos, hogy az egészekből és tizedes törtekből álló számok közönséges logaritmusaiban is a' jellemző azt jelenti meg, hogy a' logaritmushoz tartozó szám a' 10 hanyadik hatványának osztályán kezdődik.

b) De lehet itt — mint szintén minden más hasonló esetekben is — a' 10-nek felsőbb-felsőbb egész hatalmaival való osztást tovább is folytatni annál, mikor elől egy betű marad egész számnak, a' többi mind tört; 's lehet a' komrát úgy rakni elébb-elébb, hogy az a' számbetű, mely most az egyes helyen áll, essék először a' tizedes után a' század- után ismét az ezredrészek helyére, és így tovább; önként alatta értetvén, hogy mind annyiszor a' többi számbetűk is egygyel-egygyel hátrább tolnak. Mi ha történik, csupa tizedes törtszámjaink lesznek egész nélkül; 's ezeknek logaritmusaik is az általános szabály szerint úgy jövének ki, ha felsőjük logaritmusaiból alsójük logaritmusa levonatik; azonban alsójük ezeknek is a' tíznek annyiadik hatalma, és így alsójük logaritmusa annyi egész lévén, a' hány betűből áll a' tizedes törtszám: látnivaló, hogy az általános szabálynak fentebbi módosítása áll a' tiszta tizedes törtszámokra nézve is, t. i. hogy logaritmusa az ilyen számnak is úgy jö ki, ha annak, mint egész számnak, logaritmusaiból, annyi egységet, a' hány betűjű az ilyen tizedes törtszám, levonunk; mi szerint, a' fentebbi példát tovább folytatva, fog lenni:

$$\log. 0,78239 = 4,8934233 - 5 = 0,8934233 - 1$$

$$\log. 0,078239 = 4,8934233 - 6 = 0,8934233 - 2$$

$$\log. 0,0078239 = 4,8934233 - 7 = 0,8934233 - 3$$

$$\log. 0,00078239 = 4,8934233 - 8 = 0,8934233 - 4, \text{ stb.}$$

Ezekből már világos először is:

α) hogy az igazi, azaz 1-nél kisebb törtszámok' logaritmusaik mindenkor czélelleses számok; mivel mindegyik azok közül egyegy czélirányos igazi törtszámból, és egy vagy több czélelleses egészből állván, 's amaz ebből annyit, mint maga, lerontván; látnivaló, hogy a' maradék mindenkor czélelleses. Világos továbbá az is,

β) hogy minél kisebb az igazi törtszám, annál nagyobb annak czélelleses logaritmusa; mivel ennek czélirányos része mindig igazi törtszám, czélelleses része pedig annál nagyobb czélelleses egész szám lévén, minél kisebb maga az igazi

törtszám melynek logaritmusa kerestetik: a' maradék is, melyet amaz ebből le nem ront, annál nagyobb czélelleses szám. — Ezen kívül világos még az is, a' mi ebből foly, tudniillik:

2) hogy mikor a' törtszám a' kicsinységnek minden lépcsőin túlhaladván nullá lesz, annak logaritmusa is a' nagyságnak minden fokozatain felüljutván, végetlen nagygyá, 's minthogy czélelleses szám, végetlen nagy czélelleses számmá lesz, és így hogy $\log. 0 = -\infty = \text{infinite magnum negativum}^*) = \text{unendlich Gross negativ}$; és a' Vega szorszámtáblájában ez áll legelől, az egész számok a' 0-on kezdődvn. A' Babbage tábláiból ez, a' mint látom, kihagyatott; talám, hogy a' végetlen itt mindjárt a' küszöbön botránkozást ne okozzon; pedig jöhet elő eset, melyben erre is szükségünk lesz, 's ezt is tudni, logaritmusokróli ismereteinknek teljességére tartozik. — Végezetre világos a' közelebb mondattakból az is:

3) hogy a' logaritmusok egész számja, vagyis az úgynevezett jellemző, valamint mikor czélirányos, úgy mikor czélelleses is, azt jelenti meg, hogy a' szám, melyhez a' logaritmus tartozik, az alapszámnak, 10, hanyadik, és milyen hatványának osztályán kezdődik. Úgy hogy például valamint ezek közül:

$\log. 78,239 = 1,8934233$, és $\left\{ \begin{array}{l} \text{az első logaritmus jellemzője az} \\ \text{log. } 782,39 = 2,8934233 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ azaz, } +1, \text{ és a' másodiké,} \\ \text{a' } 2, \text{ azaz, } +2 \end{array} \right.$ azt jelentik, hogy az elsőnek megfelelő szám ugyan, az alapszámnak, a' 10-nek, 1-ső czélirányos hatványának osztályán, azaz, tízesen, a' másodiknak megfelelő szám pedig, a' 10' 2-dik czélirányos hatványának osztályán, azaz százason kezdődik: úgy ezekben is:

$\log. 0,78239 = 0,8934233 - 1$, és $\left\{ \begin{array}{l} \text{a' jellemzők: } -1, \text{ és } -2 \\ \text{log. } 0,078239 = 0,8934233 - 2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{azt jelentik, hogy az első} \\ \text{logaritmusnak megfelelő szám, az alapszámnak, a' } 10\text{-nek, } 1\text{-ső} \\ \text{czélelleses hatványának osztályán, azaz tizedrészeken, a' má} \\ \text{secondik logaritmusnak megfelelő szám pedig a' } 10'\text{ 2-dik czélel} \\ \text{les hatványának osztályán, azaz, századrészeken kezdődik; és} \\ \text{így tovább a' többiekben is. — A' jellemző nagyságának ama' szo-}$

*) A' mathesisben a' végetlen nagy sokszor előáll vagy akarjuk vagy nem, és ezt kikerülnünk lehetetlen. Azonban ez is azon gordiusi csomók közé tartozik, melyeknek megoldásával sokat küzdöttek a' Mathematicusok. De ennek fejtegetése nagyon messze vinne bennünket; azonban a' logaritmusokat illetőleg elég is róla annyit tudnunk, hogy ha valamely ismeretlen szám logaritmusát keressük, 's úgy jön ki hogy az $= -\infty$, úgy a' keresett szám $= 0$.

kott, de csak egy oldali meghatározása: a' jellemző áll egygyel kevesebb egységből, mint a' hány betűvel iratik a' szám, itt látnivaló, teljességgel nem alkalmaztatható; 's épen ezért gondoltuk ki a' characteristica jelentésének fentebb előadott, 's itt is alkalmaztatott meghatározását. — Berekesztésül ezen következtetéseknek, illő itt megjegyeznünk utóljára még azt is,

ε) hogy valamint a' logaríthmus jellemzőjét a' szorszámablákból mindenütt kihagyni, 's mégis egy tekintettel a' számra, tudni, mi lesz mindegyik szám logaríthmusának jellemzője, csupán azon szorszámalkotmányban lehetséges, melynek alapja ugyanaz, mely tizedes szám rendszerünké, t. i. a' 10: épen úgy azt is, hogy ugyanazon betűkkel, 's ugyanazon renddel irt számnak, akár merevül egész, akár merevül tizedes tört, akár pedig részint egész részint tizedes tört legyen az, logaríthmusa mantissája mindig ugyanaz maradjon, 's csak characteristicája változzék, csupán ezen szorszámalkotmány teszi lehetségessé, és így csak ez szerezheti logaríthmusokkali számvetéseinkben azt a' könnyebbséget, miszerint valahányszor vagy egészezből és törtekből álló vegyes számoknak, vagy csupa törteknak logaríthmusát kell kikeresnünk, — a' mi pedig szint' annyiszor ha nem többször megtörténik mint az, hogy csupa egész számok logaríthmusára van szükségünk — mindannyiszor két logaríthmusnak kikeresése, kiírása, és egymásból formaszertint levonása helyett csupán egy logaríthmus mantissáját kell kikeresnünk és kiírunk, t. i. az osztandóét, az osztó logaríthmusa mindig csak néhány egészezből állván, melyeknek számát a' tizedes törtek betűinek száma megmutálja, 's ezeknek az osztandó logaríthmusábóli levonása, csupa észbeli számvetéssel is megtörténhetvén. Igen helyesen történt tehát, hogy Brigg szorszámalkotmányunk alapjává is tizedes számrendszerünk (decadicum systemánk) alapját a' 10-t tette.

c) A' mi továbbá a' nem tizedes vagy közönséges törtszámok logaríthmusait illeti, ha az ilyen, úgynevezett áltörtszám (spuria fractio), azaz, 1-nél nagyobb, például $\frac{82}{60}$: látnivaló, hogy itt az általános szabálynak semmi módosítására nincs szükség, hanem az alsó logaríthmusát le kell vonni a' felső logaríthmusából, mely ilyen esetben mindig nagyobb, 's a' maradék lesz a' törtszám logaríthmusa; például:

$$\left. \begin{array}{l} \log. 82 = 1,9138139 \\ - \log. 60 = 1,7781513 \\ \hline = \log. \frac{82}{60} = 0,1356626. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Hogy ha olyan szám logaríthmusát} \\ \text{kell keresnünk, mely egészezből és} \\ \text{közönséges törtszámból áll, mint} \end{array}$$

peldául $6 + \frac{5}{12}$, az ilyet elébb áltört számmá kell változtatni $\equiv \frac{77}{12}$, 's így kell keresni logarithmusát, azt említeni is alig szükség. De az 1-nél kisebb nem tizedes, vagy közönséges törtszámokat illetőleg, a' milyen peldául $\frac{3}{4}$, szükség megjegyeznünk, hogy a' törtszámok logarithmusainak kikereséséről általános szabály, — mi szerint az alsó szám logarithmusát a' felsőéből le kell vonni, 's a' maradék lesz a' törtszám logarithmusa — áll ugyan az ilyen törtszámok logarithmusaira nézve is; de itt az alsó szám logarithmusának a' felsőéből levonása kétképen is megeshetik, t. i. vagy az algebrai kivonás szabálya szerint úgy, hogy az alsó szám nagyobb logarithmusának jegyét ellenkezőre, és így, mivel az mindenkor célirányos, czéllenesre változtatjuk, 's így aztán a' felső szám kisebb logarithmusát vonjuk le az alsóéből; vagy pedig úgy, hogy a' felső szám kisebb logarithmusának jellemzőjét megnöveljük annyi egységgel, a' mennyi kívántatik, hogy belőle az alsó szám logarithmusát valósággal le lehessen vonni, 's hogy mégis értéke meg ne változzék, utána írunk czéllenes jeggyel annyi egységet, a' mennyivel jellemzőjét megnöveltük. A' $\frac{3}{4}$ logarithmusa peldául mind a' két mód szerint kiszámítva így lesz:

1-ső mód szerint

$$\begin{aligned} \log. 3 &= 0,4771213 \\ - \log. 4 &= -0,6020600 \\ \hline &= \log. \frac{3}{4} = -0,1249387 \end{aligned}$$

2-dik mód szerint

$$\begin{aligned} \log. 3 &= 1,4771213 - 1 \\ - \log. 4 &= -0,6020600 \\ \hline &= \log. \frac{3}{4} = 0,8750613 - 1 \end{aligned}$$

A' számítás' eredménye mind a' két mód szerint egyre megyen ki, látnivaló; mert a' $\frac{3}{4}$ két formában kijött logarithmusában, a' mantissák summája épen egy egészteszzen, a' mint ezt egy tekintetre meg lehet itélni abból, hogy a' két mantissa egyeseinek summája $7 + 3 = 10$, a' tizedesek, százások, stb. summája pedig mind kilenczkilencz; és így ha a' $\frac{3}{4}$ -nek 2-dik mód szerint kijött logarithmusában a' célirányos mantissa a' czéllenes jellemzőből a' — 1-ből leront annyit mint maga, a' czéllenes maradék lesz épen a' $\frac{3}{4}$ -nek 1-ső mód szerint kijött logarithmusa. Azonban, minthogy az első mód szerint a' logarithmusnak nemcsak jellemzője, hanem mantissája is úgy jó ki, mint czéllenes szám, szorszám tábláinkban pedig minden mantissák célirányos számok: tehát az ilyen igazi vagy egynél kisebb nem tizedes törtszámok logarithmusát szükség mindenkor a' 2-dik mód szerint keresni; 's ha így keressük azt, épen úgy fog kijöni, mintha az ilyen törtszámot elébb tizedes törtté változtattuk, 's úgy kerestük volna logarithmusát a' fentebbi szabály

szertint. Peldául, tizedes törtté változtatva $\frac{3}{4} = 0,75$. Ugyde a' fentebbi szabály szertint: $\log. 0,75 = 1,8750613 - 2 = 0,8750613 - 1$ épen mint közelebb a' 2-dik mód szertint számítva kijött. Eddig a' törtszámok logaritmusainak kikereséséröl. De

32. §. Hogy a' logaritmusoknak számvetéseinkben hasznát vehessük, nem elég, hogy akármely egész vagy törtszám logaritmusát a' táblákból kikeresni, vagy — a' mennyiben ott egészen készen nem találatnának — az ott találató logaritmusokból kiszámítani tudjuk; hanem szükség tudnunk megfordítva azt is, mikép kell akármely logaritmushoz a' neki megfelelő számot kikeresni. Ennek szabályait sem nehéz a' fentebb mondottakból kicsinálni. Ugyanis, minthogy ugyanazon számjegyekkel, 's ugyanazon renddel írt számnak, — akár merevül egészeket, akár merevül tizedes törtteket, akár pedig részint egészeket, részint tizedes törtteket jelentsen az — logaritmusa mantissája mindig ugyanaz, 's csupán characteristicája változik, mely mindig azt jelenti meg, hogy a' 10-nek hanyadik és milyen (+ vagy —) hatványának osztályán kezdődik a' logaritmushoz tartozó szám: tehát, mikor valamely logaritmushoz tartozó számot kell keresnünk, először is a' logaritmushoz tartozó mantissájánál fogva azt határozzuk meg, micsoda számbetűkkel, 's micsoda renddel fog iratni a' szám, melyhez a' kérdéses logaritmushoz tartozik; másodsor, a' characteristicánál fogva azt; merevül egész szám-è az, vagy nem, 's ha nem, meddig egész, 's hova kell tenni benne az egészeket a' tizedes törtszámtól elválasztó kómnát. Még pedig, minthogy a' 4 és 5 betűjü számok között minden egy, két, három betűvel írt számok is, utól több vagy kevesebb nullákkal töldva előfordulnak, peldául ezek: 3; 25; 462; így: 3000 vagy 30000; 2500, vagy 25000; 4620, vagy 46200; 's ezen utóbbiak logaritmusai amaz elsőbbekétöl — mint már fentebb láttuk — csak characteristicájokban különböznek, mantissájokra nézve pedig azokkal tökéletesen egyeznek, 's ennélfogva a' 4 és 5 betűjü számok logaritmusai között az 1, 2, 3, betűjü számok logaritmusainak mantissái is mind feltalálatnak: tehát általános szabálylyá tehetjük, hogy akármely kiadott logaritmushoz kelljen is a' neki megfelelő számot keresni, keressük a' kiadott logaritmushoz mantissáját egyenesen a' 4 's 5 betűjü számok' logaritmusainak mantissái között. Nevezetesen pedig

a) Keressük először is a' kiadott logaritmushoz mantissájának 3 első betűjét a' logaritmushoz első széles rubricájában, hol a' 3 első

betű egygyel-egygyel szaporodva 000-ból 999-ig növekedik, 's mindenütt tisztán, és a' többi számoktól mintegy elszigetelve állván könnyen szembevetűnk; mi a' kikeresést könnyíti.

b) Miután a' kiadott logaríthmus mantissájának 3 első betűjét megtaláltuk, keressük annak 4 utolsó betűjét ugyanazon sorban, melyben 3 első betűje találtatik, 's ha abban nem leljük, az utána következő sorokban addig, mig más három első betű nincs kiírva; mely sorokban a' logaríthmus 4 utolsó betűje természetl, minél nagyobb szám, annál hátrább, 's minél kisebb, annál előbb, és a' 3 első betűhöz annál közelebb esik. Ha pedig a' kiadott logaríthmus 4 utolsó betűje még annál is kisebb szám, mely minden annak 3 első betűje után a' szorszámtáblákban következő négy-négy betűk között legelől áll, 's a' 3 első betű után nyomban következik: akkor a' 4 utolsó betűt nézni kell a' 3 első betű sorát közvetlen megelőző sorban a' *-gal vagy kisebb kezdő betűvel megjegyzettek között.

c) Ha ily móddal a' kiadott logaríthmus mantissájának 4 utolsó betűjét is megtaláltuk, meg van találva az is, micsoda öt szám betűkkel, 's mily renddel kell írni azon 5 betűjű számot, melyhez a' kiadott logaríthmus mantissája tartozik. Mert a' megtalált 4 utolsó betű során kimenvén a' legelső rovatba, ott megtaláljuk a' keresett számnak 4 első betűjét; felmenvén pedig ugyancsak a' megtalált logaríthmus 4 utolsó betűjétől annak rovatán, ebben legfelül megtaláljuk a' keresett számnak 5-dik 's utolsó betűjét; mely szabályok egyenesen következnek azokból, melyek szerint mondtuk fentebb, hogy kell kikeresni az 5 betűjű számok' logaríthmusait, melyek ismét folynak, a' mint láttuk, a' szorszámtáblák' szerkezetéből.

d) Miután e'képen a' logaríthmus mantissájánál fogva meghatároztuk, mely számbetűkkel, 's mily renddel íratik az ahoz tartozó szám, csak az van hátra, hogy már meg a' characteristicánál fogva határozzuk el azt is, hogy a' megtalált 5 betűjű számnak első betűje a' 10' hanyadik és milyen hatványának osztályába esik, 's a' szerint tegyük abban, ha szükséges, az egészeket a' tizedes törttektől elválasztó kommát oda, a' hova kell. Világosítsuk ezeket egy két példával, a' fentebbi táblácskákból vévén ezeket.

Kérdés: Micsoda szám' logaríthmusa ez: 4, 5358256?

Felelet: Megtalálván először is a' logaríthmusok első széles rovatában a' kiadott logaríthmus' mantissájának három első betűjét, 535, azután néhány sorral alább annak 4 utolsó betűjét is, 8256: ezen négy utolsó betű során kimegyünk az első rovatba, 's ott ta-

láljuk a keresett szám 4 első betűit, 8434; azután ugyancsak a négy utolsó betű rovatában felmegyünk annak tetejéig, 's ott találjuk annak fölibe írva a keresett szám 5-dik és utolsó betűjét, 2; és így a keresett 5 betűjü szám lesz = 34342. Minthogy pedig a characteristica, = 4, azaz + 4 azt mutatja, hogy a kiadott logaritmushoz tartozó számnak első betűje a' 10' 4-dik czédirányos hatványának osztályába esik, azaz tizezres: tehát ez szerint most a keresett és megtalált szám merevül egész. De ha a characteristica = 2, azaz + 2 volna: úgy a megtalált 5 betűjü szám első betűjét a' 10' 2-dik czédirányos hatványának osztályába, azaz, a százás helyre kelletvén ejteni, lenne a keresett szám 343,42. Ha pedig a characteristica = - 3 volna, úgy a megtalált 5 betűjü szám első betűjét a' 10' 3-dik czélellesenes hatványának osztályába, azaz, az ezredrészek helyére kelletvén ejteni, lenne a keresett szám = 0,0034342.

Kérdés: Ezen logaritmushoz 2, 5360279, micsoda szám felel meg?

Felelet: Megtalálván a mantissa' három első betűjét, 536, 's midőn annak négy utolsó betűjét, 0279, keresni akarnók, látván, hogy ez a három első betű után a szorzástáblában közvetlen következő négy betűjü számmal, 0532, kisebb, keressük azt, a három első betű sorát megelőző sorban a' a-osok között, és ott megtalálván, attól kimegyünk azon a soron, melyben áll, az első rovatba, és ott találjuk a keresett szám négy első betűjét, 3435; azután ugyancsak a négy utolsó betűtől felmegyünk annak rovatában, 's annak fölibe írva találjuk a keresett szám 5-dik és utolsó betűjét, 8. Következésképen a kiadott logaritmushoz tartozó szám ezen 5 szám betűkkel, 's ily renddel iratik: 34358. És így, mint-hogy a characteristica = + 2 szerint a keresett szám első betűjének a százás helyre kell esnie, lesz az = 343,58. Ha pedig a characteristica - 2 lett volna, e'képen: 0, 5360279 - 2: úgy az ennek megfelelő szám lenne = 0,034358, stb.

Kérdés: Ez a logaritmushoz 2, 5352941, micsoda szám logaritmusa?

Felelet: A mantissának elébb 3 első, azután 4 utolsó betűit kikeresvén, a mondott módon reá találunk, hogy a keresett szám e' következő 5 szám betűkkel 's ily renddel iratik: 34300; a characteristica, + 2, pedig megmutatja, hogy ezen szám első betűjének a százás helyre kell esni. És így a keresett szám lesz 343,00,

azaz csak 343. Hasonlóképen, ha ezen logaritmushoz: 1, 3979400 kell a' neki megfelelő számot keresni: a' mantissánál fogva reá találunk, hogy a' keresett szám következő betűkkel, 's következő renddel íratik: 25000; a' characteristica pedig megmutatja, hogy ezen szám első betűjének a' 10-es helyre kell esnie, és így hogy a' keresett szám = 25,000, azaz csak 25. Mely példából világos, hogy az itt előadott szabályok szerint a' kiadott logaritmushoz tartozó számot nemcsak akkor lehet kikeresni, mikor az 4 vagy 5, hanem akkor is, mikor az kevesebb, például, 3, vagy 2, vagy 1 betűből áll.

e) Eddig azt az esetet vettük fel, mikor a' kiadott logaritmushoz, melyhez a' neki megfelelő számot keresnünk kell, nemcsak a' 3 első, hanem a' 4 utolsó betűit is azon módon meg lehet találni a' szorzástáblákban. De szint' annyiszor, vagy még többször megtörténik az, hogy a' kiadott logaritmus 4 utolsó betűje két nyomban egymásután következő 5 betűjü szám logaritmusaik mantissáinak 4 utolsó betűi közé esik, egyiknél nagyobb, másiknál kisebb. Mint p. o. ha az a' kérdés, hogy ezen logaritmushoz: 4, 5359488, micsoda szám felel meg: miután a' mantissának 3 első betűit, 535, megtalálván, 4 utolsó betűit, 9488, keressük, úgy találjuk, hogy ez nincsen meg a' szorzástáblákban, hanem ezen két egymásután következő 5 betűjü számnak 34351, és 34352 logaritmusaik mantissáinak 4 utolsó betűi, ugymint a' 9394 és 9520 közé esik. — Itt, ha visszaemlékezünk arra, mikép kerestük ki a' 6, 7, 8 betűjü szám' logaritmusaik mantissáját, és hogy az 5 első betűjének, mint 5 betűjü számnak logaritmusaik mantissájából áll, és még ezen felül azon különbségnek, mely van ezen mantissa és a' nyomban utána következő között, annyi tizedrészéből, a' hány egységből áll a' 6-dik, 's annyi századrészéből, a' hány egységből áll a' 7-dik, és annyi ezredrészéből, a' hány egységből áll a' 8-dik szám, stb.: lehetetlen által nem látnunk, hogy azon számnak, mely ilyenkor a' kiadott logaritmushoz megfelel, 5 első betűje fog lenni a' kiadott logaritmus mantissájához a' szorzástáblában legközelebb járó, de nála valamivel kisebb mantissának megfelelő 5 betűjü szám, nevezetesen a' jelen példában 34351, és hogy ehez a' 6-dik, 7-dik, 's talán 8-dik betűt is úgy találjuk meg, ha a' kiadott logaritmus mantissájának 4 utolsó betűiből, mely itt = 9488, levonjuk a' hozzá legközelebb járó, nála kisebb logaritmus mantissájának 4 utolsó betűit, mely itt = 9394,

és megnézzük, hogy az, a' mennyivel amaz ennél nagyobb, mely itt = 94, hány tizedrészét, és még azon felül hány századrészét, 's ha mi még ezen felül is marad fenn, az hány ezredrészét teszi azon két mantissák közötti különbségnek, melyek közé a' kiadott logaritmus mantissája esik, mely is itt 126; és a' hány tizedrészét teszi annak, annyi egységből fog állani a' 6-dik, a' hány századrészét még azon felül, annyi egységből a' 7-dik, 's végre a' hány ezredrészét még ezen is felül, annyi egységből a' 8-dik betűje a' keresett számnak. És így itt, hol a' 94 teszi a' 126-nak 7 tizedrészét = 88; továbbá, a' mi még ezen felül fenmaradt, t. i. = 6, teszi ugyancsak a' 126-nak 4 századrészét = 5, 's végre, a' mi még ezen felül is fenmarad, t. i. = 1, teszi ugyanazon különbségnek 8 ezredrészét (mind ezekben a' fél tíz milliódresznél kisebb törteket számba nem vévén), a' keresett számnak 6-dik, 7-dik és 8-dik betűi lesznek egymásután: 7, 4, 8; melyeket a' kiadott logaritmus mantissájához legközelebb járó kisebb mantissának megfelelő 5 betűjű számnak, 34351, ezen renddel utána írván, a' kiadott logaritmus mantissájához tartozó szám lesz: 34351748; 's minthogy a' kiadott logaritmus jellemzője 4 lévén, e' megtalált szám első betűjének tizezresnek kell lenni, a' keresett szám fog lenni: 34351,748.

Mikor a' különbség a' kiadott, és az ahoz legközelebb járó kisebb logaritmus között oly kicsiny, hogy az 1. tizedrészét sem teszi azon két logaritmusok közötti különbségnek, melyek közé a' kiadott logaritmus esik: akkor magában értetik, hogy a' keresett szám hatodik betűje az a' számjegy lesz, mely ezt teszi: egysem, azaz, fog lenni = 0; 's azután az lesz a' kérdés, természettel, hogy, ha az ennek 1 tizedrészét sem teszi, hány századrészét teszi hát? és így tovább. Ilyen pelda lesz, ha keressük a' számot, mely megfelel ezen logaritmusnak: 4,5359404, 's ki fog jöni, hogy az lesz = 34351,08.

33. §. Ezek szerint már ki tudjuk keresni mind a' számhoz a' logaritmust, mind a' logaritmusához a' számot, akár csupa egész, akár csupa tört, akár pedig részint egész, részint tört legyen is a' szám. Hanem eddig még csak célirányos számok' logaritmusairól volt szó. De hát ha logaritmusokkal számvetéseinkben olyan esetek is jönnek elő — a' mint hogy jönnek is — melyekben célel-

lenes számok logaritmusaiba volna szükségünk: ilyenkor mit tegyünk? Vannak-é a' czélelles számoknak logaritmusaik? 's ha vannak, milyenek azok? ha nincsenek, hogy segíthetünk magunkon az említett esetekben? Ezen kérdésekre szükség megfelelőnk, ha azt akarjuk, hogy logaritmussokkal számvetéseinkben ne adhassa magát elő oly nehézség, melyen fennakadjunk.

A' mi azt illeti, vannak-é a' czélelles számoknak logaritmusaik, vagy nincsenek: ezen kérdés felett a' 17-dik és 18-dik században több ízben megújított hosszas és tüzes vitatkozások folytak Európának akkor leghiresebb Mathematicusai, nevezetesen először Leibnitz, és Bernoulli János, később Euler és D'Alambert között, stb. A' honnan előre is bizonyosnak tarthatjuk, hogy itt fogalomzavarnak kellett lenni; mivel másképp a' mathesisben, ezen tudomány természeténél fogva, vitatkozásnak helye nem lehetne. 'S valóban úgy is van a' dolog, és ki is lehetne mutogatni, miféle fogalomzavarok okozták a' czélelles számok' logaritmusaik felett való vitatkozásokat, 's ezeknek kimutatása nem is érdektelen, sőt igen tanúságos lenne; mert nagy és éles elméjű férfiak' botlásait, és ezeknek okait állítani olyan, a' miből nem lehet nem okulni. De ezeknek fejtegetése itt messzre vinné célunktól; azértis mi itt mellőzvéen minden kritikát, csak röviden igyekezzünk megfelelni a' fentebbi kérdésekre.

Ha az lett volna a' kérdés, lehet-é czélelles számoknak logaritmussok abban az esetben, mikor az alapszám czélelles, például, ha (-2) -től vennők fel alapszámul: természetel azt kellett volna felelni, hogy igenis lehet; mert ez szerint a' páros számok *): 0, 2, 4, 6, 8, stb., a' czélirányos, a' páratlanok pedig: 1, 3, 5, 7, stb., a' czélelles számok logaritmusaik fognának lenni, következőképen:

$$\begin{aligned} (-2)^0 &= +1 & (-2)^1 &= 1 \times (-2) = -2 \\ (-2)^2 &= 1 \times (-2) \times (-2) = +4 & (-2)^3 &= 1 \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -8 \\ (-2)^4 &= 1 \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16 & (-2)^5 &= 1 \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32 \end{aligned}$$

*) Már fentebb láttuk, hogy a' 0 is szám, még pedig egész szám; mihez itt hozzá adjuk még azt is, hogy a' 0 páros szám, 's a' páros számok között legelső; mit könnyű állítani a' 9-dik §-ban mondottakból, miszerint a' 0 mindig kettőzötve értetik a' fogydogáló czélirányos számok + 0-on, a' fogydogáló czélellesek pedig — 0-on végződén, és e' kettő egymással összeesvén. 'S hogy a' 0 a' páros számok közé tartozik, megtetszik onnan is, mivel, mint minden páros szám, két páratlan között esik, például a' 2 az 1 és 3 között; a' 4 a' 3 és 5 között, stb.: épen úgy esik a' 0 is két páratlan szám, t. i. a' +1 és —1, között.

stb. És ezeket folytatván, 's a' hézakokat egyfelől a' + 1-től a' + 4-ig, 's ettől a' + 16-ig, és így tovább; másfelől pedig a' (-2)-től a' (-8)-ig, 's ettől a' (-32)-ig, és így tovább, betöltvén: ilyen alapra lehetne olyan egy pár szorzámalkotmányt építeni, melyek közül egyikben a' célirányos, másikban a' czélelles számok logaritmusai foglaltatnának, és a' melyek közül az utolsónak segítségével élhetnénk olyankor, mikor czélelles számok logaritmusára volna szükségünk. Mert ha, például, azt kellene logaritmusok' segítségével által kiszámítanunk, mennyi $(-8) \times (+4)$: a' logaritmusokkal számvetés' szabályai, 's a' fentebbi kis szorzám tábla szerint lenne:

$$\left. \begin{array}{l} \log. (-8) = +3 \\ + \log. (+4) = +2 \\ \hline = \log. (-8 \times +4) = +5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{a' mi meg fogná mutatni, hogy} \\ (-8) \times (+4) = -32. \text{ Hasonló-} \\ \text{képen, ha azt kellene logaritmus-} \\ \text{sokkal kiszámítanunk, mennyi } (-2)^2: \text{ fogna lenni: } \log. (-2) = 1, \\ \text{'s innen } \log. (-2)^2 = 1 \times 2 = +2, \text{ mely megmutatná, hogy} \\ (-2)^2 = +4. \end{array}$$

De nem ilyen czélelles alapu logaritmusokról volt szó ama' vitatkozásokban, ez senkinek eszébe sem jutott; hanem — ha szinte csak hallgatva és homályosan is — mindenkor az tétetett fel, hogy olyan logaritmusokról van kérdés, melyeknek alapjuk célirányos szám, milyenek például a' briggféle logaritmusok, melyeknek alapjuk a' + 10. Úgyde, ha tiszta fogalmunk van arról, mi a' logaritmus, ilyen alapu logarithmicum systemában czélelles számok logaritmusait keresni csupa képtelenség. Hogy erről meggyőződünk, nincs szükség mesterséges megmutatásokra, melyekkel némelyek éltek; mivel ez foly egyenesen magából a' logaritmus fogalmából, ha t.i. ezt tisztán felfogtuk. Mert akármely szám logaritmusa nem egyéb levén, mint hatványjel, mely megmutatja, hányszor kell az alapszámnak, mint tényezőnek, az 1-hez, még pedig ahoz az 1-hez, mely minden szám mellé, — legyen az célirányos, vagy czélelles — ha ki nincs is írva, mint úgynevezett tacitus coefficientis, mindenkor oda gondoltatik, azaz a' + 1-hez járulnia, hogy abból szorzatúl a' kérdéses szám kerekedjék: látnivaló, hogy célirányos alapu szorzámalkotmányban czélelles számhoz logaritmust keresni nem egyéb, mint olyan számot keresni, mely azt mutassa meg, hányszor kell a' célirányos alapszámnak, például a' + 10-nek, mint tényezőnek a' célirányos 1-hez járulnia, hogy ebből mint szorzat valamely czélelles szám,

peldául (— 100), jön ki; a' mi, látnivaló, merő azon képtelenség, mivel azt teszi fel, hogy csupa czélirányos szorzóknak egymással szorzásából jöhet ki czélelles szorzat.

De ebből, hogy olyan szorszámkalkotmányban, melynek alapja czélirányos szám, czélelles szám logaritmusa keresni képtelenség, épen nem következik, hogy ilyen alkotmányban czélelles számoknak nincs és nem lehet logaritmussok, Mert vannak képtelenséget jelentő számok is; és ha ilyenek a' czélelles számok' logaritmusaik, úgy nem ellenkezik egymással e' kettő: hogy a' czélelles szám' logaritmusa csupa képtelenség, és hogy mégis vannak a' czélelles számoknak logaritmusaik. Azonban, én a' czélelles számok' képtelen logaritmusaikat, — noha azoknak tudománya az általános számvetésnek egy igen szép és érdekes részét teszi is, — nem csak itt, hanem ezen munkámnak második részében, a' felsőbb szorszámtanban is egészen elmellőzöm; mivel azoknak jó móddal megértetésére, 's hasznuk vételének példákali világosítására némely háromszegmérési fogalmakkali ismeretség is oly mértékben megkívántatnék, milyenben én azt, sem hallgatóimban, sem reménylhető olvasóimnak nagy részében fel nem tehetem; érthetetlen lenni pedig nem szeretnék. Ennélfogva a' képtelen logaritmusról értekezést akkorra halasztom, mikor majd a' háromszegmérés tudományát is közre bocsátandom; és vagy ehez fogom adni toldalékul, vagy még később külön tenni közzé. Itt pedig most a' czélelles számok' logaritmusaikról csak annyit mondom, a' mennyit szükséges tudnunk a' végett, hogy ha a' közönséges logaritmussokali számvetéseink közben czélelles számok' logaritmusaik kívántatnának, tudjunk magunkon segíteni. Erre nézve pedig elég lesz e' következőket megjegyeznünk.

1-ör. Ha két szám közül, melyeket egymással szoroznunk kell, vagy az egyik, vagy mindenik is czélelles, azonban szeretnők a' szorzást könnyeség okáért logaritmussok' segítségével ejteni meg; minthogy a' szorzat nagyságára nézve mindegy, akár mind a' két szorzó czélirányos, akár mindenik czélelles, akár pedig egyik czélirányos, másik czélelles legyen, ezen körülménynek csak a' szorzat irányára, nem pedig mennyiségére is lévén befolyása; vegyük mindenik szorzót úgy, mintha mindenik czélirányos volna, és ily móddal keressük ki, 's adjuk össze azoknak logaritmusaikat stb; csak arra vigyázzunk aztán, hogy az e'kép megtalált szorzatnak, ha mind a' két szorzó czélelles volt, czél-

irányos (+), ha pedig csak az egyik, úgy czélelleses (—) jegyet írjunk elibe. Ehez mindenkben hasonló szabályt kell követnünk, mikor az osztó és osztandó közül vagy csak egyik, már akármelyik, vagy mindenik is czélelleses szám; mire alább példát is fogunk látni. Nem különben a' czélelleses számoknak különböző hatalmakra emelését is épen úgy vihetjük véghez logaritmusok által, mint a' czélirányosokét, csakhogy aztán, ha a' hatványjel páros szám volt, +, ha páratlan, — jegyet írjunk az ily módon megtalált hatvány elibe; tudván, hogy a' czélelleses számoknak páros hatalmaik mind czélirányosok, a' páratlanok pedig mind czélellesesek. A' mi végezetre a' czélelleses számokból logaritmusok általi gyökérkiyonást illeti: ez is megeshetik, mikor a' gyökérjel páratlan szám, 's épen úgy esik, mintha ugyanazon, de czélirányos számból vonnók ki ugyanazon páratlan gyökeret; csakhogy aztán a' gyökér elibe czélelleses jegyet kell tennünk; mivel a' czélelleses számoknak, mint gyökereknek, minden páratlan hatványaik czélellesesek lévén, megfordítva a' czélelleses számoknak, mint hatványoknak, minden páratlan gyökereik is czélellesesek. — Egyszóval, ha a' logaritmusok általi szorzásban, osztásban, hatalomra emelésben, 's a' gyökér vonásban is, mikor a' gyökérjel páratlan szám, czélelleses számok logaritmusai kívántatnának, élünk azok helyett mindenütt a' czélirányos számoknak szorszám tábláinkban találtató logaritmusaikkal, csak hogy azon számnak aztán, mely így, mint eredmény, szorzat vagy hanyados, hatvány vagy gyökér kijő, olyan jegyet írunk elibe, melyet a' számoknak, melyek az eredményt szülték, jegyei az algebrai törvények szerint kívánnak. De

2. Ha czélelleses számból páros, például 2-dik, 4-dik, 6-ik, stb. gyökeret kellene vonnunk, és így czélelleses számot úgy kellene néznünk, mint valamely számnak páros hatványát; minthogy akár czélirányos, akár czélelleses számot emeljük hatalmakra, mindenknek minden páros hatalmai czélirányosok lesznek, és czélellesesek soha nem lehetnek, 's ez szerint a' czélelleses páros hatványok képtelen számok: tehát kétségkívül az ilyen képtelen számoknak logaritmusaik sem lehetnek egyebek, mint képtelen számok. Következésképen, ha valamely czélelleses számnak valamely páros gyökerét logaritmusok segítségével által akarják kivonni, már itt képtelen logaritmusokra lenne szükségünk; milyenek a' czélelleses számok logaritmusai is. De ezeket most, a' mint mondán, mellőzni fogjuk, 's csupán azt jegyezzük meg, hogy a' képtelen

számok sokszor vagy akarjuk, vagy nem, bele jönnek számvetésünkbe, és ha tudunk velök bánni, sokszor csupa képtelen számokon keresztül kosul utoljára a' legfenségesebb eredményekhez jutunk, midőn a' képtelenségek végtére egymást lerontván, az eredmény minden képtelenségtől megszabadul; mit egy kis példával e'kép világosíthatunk: Ha $\frac{x}{\sqrt{-4}} = \sqrt{-9}$, így az egyenletnek mind a' két oldala képtelen szám, de ha mind a' két oldalt szorozzuk $\sqrt{-4}$ -vel e'képen: $x = \sqrt{-4} \times \sqrt{-9}$; azután pedig, mivel mind egyre megy ki, akár különkülön vonjuk ki két számból a' 2-ik gyökeret, 's ezeket szorozzuk egymással, akár pedig a' két számot szorozzuk elébb egymással, 's azután a' szorzatból vonjuk ki a' 2-dik gyökeret: tehát itt amaz elsőbb helyett ez utóbbit tévén, fog lenni: $x = \sqrt{(-4) \times (-9)} = \sqrt{+36} = 6$: 's így már minden képtelenség elenyészett az eredményből. De az ilyen eredményhez jutni nem mindig ily könnyű; sőt ha nagy számokkal járó kérdések megfejtése logaritmusok segítségével nélkül még a' nem képtelen számokkai számvetésben is sokszor igen nyűgös: el lehet gondolni, hogy ez nem kevesbé igaz a' képtelen számokkai számvetést illetőleg. A' honnan látnivaló, hogy az általános számvetésnek, ha az tökéletes akar lenni, szükség a' képtelen számok képtelen logaritmusaikat is kifejteni, 's az azokkai számvetés szabályait is megtanítani. Egyébiránt, utoljára jegyezzük meg itt még, hogy

3-or. Ha a' czélirányos számok logaritmusaival való rendes számvetésünk eredményébe valamely czélelleses szám logaritmusa jő bele, de csak egy magában; mint például ha a' keresett szám x így jőne ki: $x = \log. (-a)$. b: látnivaló, hogy itt a' $(-a)$ képtelen logaritmusa kivül, mellyel a' b szorozva van, nem fordulván elő több hasonló képtelen szám, mely amant az eredményből valahogy kienyészethetné — milyen lenne például, ha $x = \frac{\log. (-a) b.}{\log. (-a) c}$ volna; hol a' törtszámnak mind alsója mind felsője ugyanazon képtelen osztóval, $\log. (-a)$, elosztatván, fogna lenni $x = \frac{b}{c}$, minden képtelenségtől megszabadulva — az eredmény képtelen fog.maradni; mi, ha számvetésünkben hiba nem esett, mindenkor azt adja értésünkre, hogy a' feladatban rejlik valami képtelenség, vagyis, hogy annak feltételei egymással ellenkezők; ha talám ezt első tekintettel észre nem vettük is. Erre is fogunk alább egy példát látni.

III. SZAKASZ.

Gyakorlatok a' közönséges szorszámokkal számvetésben.

34. §. Hogy mikor a' háromszeg mérésre 's azután a' természettanra általmegyünk, már némi gyakorlottságunk legyen a' logaritmussal számvetésben, melyre az említett tudományokban szinte minden lépten szükségünk leend: lássunk itt előleges gyakorlatul néhány nevezetes, és mind a' magánosok közötti viszonyokat, mind az állodalmatokat illetőleg fontos kérdések' megfejtését, melyek hazánkra nézve is naprólnapra érdekesebbek kezdenek lenni; értem a' pénzügyi legnevezetesebb kérdéseket.

Minden pénzügyi kérdések megfejtései, bármily különbözők legyenek is azok, egy forrásból veszik eredetüket, t. i. azon egyenletből, mely a' tőke, a' kamatláb, a' tőke gyümölcsözésének ideje, és a' tőkének ezen idő alatti növekedése között az egybefüggést kifejezi. Mindenek előtt szükség tehát értenünk, mik ezek, 's azután a' közöttöki egybefüggés törvényét kifejtanünk.

Tőkének (capitalis) hívják széles értelemben azt a' pénzügyet, melyet valaki kiad a' végett, hogy az neki hasznot hajtson. Például: fekvő jószágot vesz rajta, hogy az jövedelmezzen, portékát vesz rajta, hogy azon nyerjen; anyagokat, 's műszereket vesz rajta, hogy amazokat ezekkel feldolgozván 's így drágábban adván el, haszna legyen rajta, stb. De mind ezekben, 's több hasonló esetekben a' hasznot nem csupán a' tőke hajtja, hanem egyszersmind az azt kiadónak értelmessége, ügyessége és fáradozása is. Keskenyebb 's különösebb értelemben pedig tőkének nevezik a' haszonra kiadott pénzt abban az esetben, mikor valaki maga nem akarván gondoskodni, 's fáradozni a' körül, hogy neki tőkéje hasznot hajtson, kiadja azt másnak használás végett bizonyos meghatározott évenként fizetendő díjért, melyet kamatnak (interessenek, interusurium) neveznek, és a' melynek mennyisége rendszerint a' tőkének századrészeivel fejeztetik ki, vagyis az határoztatik meg, hány századrészt teszi a' tőkének az évenkénti kamat, vagy a' mint szokták mondani, 100-tól hány (hány pro centum, hány

procent), például 100 forinttól hány forint fizetetik évenként kamat fejébe. Azt a törtszámot továbbá, mely kifejezi, hány századrészt teszi a tőkének az évenkénti kamat, péld $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{6}{100}$, vagy a' mint ezt a kereskedők — nem tudom mi okon, de elég mathesis-talanul — írni szokták 4%, 5%, 6%, azaz 4 procent, 5 procent, 6 procent, nevezik kamatlábnak (Zinsfuss). Ez némely országokban törvénnyel van meghatározva, mint például hazánkban is, hol az 1723-diki 120-dik törvény cikkely szerint 6 proc. kamatnál többet venni, nem csak a' kamatok- de maga a' tőke' elvesztésének is büntetése alatt tilalmaztatik: más országokban pedig, hol az az elv uralkodik, hogy minden törvények általi ár- vagy becshatározás (limitatio) igazságtalan; mint minden más dolgok- úgy a' kamatra kiadandó tőkék hasznobérének meghatározása is bizatik csak a' concurrentiára, 's ha sok a' kiadni való tőke, és kevesen keresik azt, akkor alábbszáll, ellenkező esetben pedig feljebbhágy a' kamatláb. Eddig az itt szóban forgó fogalmak kifejtése.

35. §. A' mi már a' tőke, kamatláb, tőke használásának ideje 's a' tőkének az alatti növekedése között való egybefüggést illeti, mielőtt ennek kifejtéséhez fognánk, szükség előre bocsátani, hogy ha valaki a' felvett tőkéből a' kamatokat évenként fizetni elmulasztván, utoljára több esztendei kamatokat egyszerre tartozik lefizetni: ilyen esetben, a' kamatok kiszámítását illetőleg, két különböző nézet uralkodik. Egyik ez, hogy ilyenkor csak a' legelőször kiadott eredeti tőkétől kell kamatot számítani, úgy hogy ha például valaki 1000, azaz ezer forinttól, melyet 6 procentre vett fel, tíz esztendeig semmi kamatot nem fizetett, akkor tartozik fizetni az 1000 forint' egy esztendei 6 procentes kamatját, azaz a' 60 forintot 10-szer véve, vagyis = 600 forintot; másik ez, hogy minden esztendő végével a' kamatot, melyet akkor az adós hitelezőjének befizetni tartozott volna, a' tőkéhez kell tudni, 's attól fogva úgy nézven azt, mint a' hitelező javára gyümölcsöző tőkét, a' következő években annak kamatait is számítani kell; mely kamatozás' módja anatocismusnak neveztetik, 's mely szerint 1000 forintnak tíz esztendei kinnmaradt kamatai nem 600- hanem 790 forint 51 kr-ra mennek, mit az alább elöadandó szabályok szerint logaritmussal kiszámítani, úgy szolván, gyermekjáték. — Hogy e' két nézet közül az utóbbi az, mely az igazsággal egyez, könnyű által látni. Ugyanis, azon naptól fogva, mikorra a' kamat fizetés kötelező volt, beáll a' hitelezőnek ahhoz való tulajdonosi joga, melytől ötlet

az adós meg nem foszthatja az által, hogy a' pénzt, melyet neki általadni tartoznék, magánál igazságtalanul letartóztatja. Úgyde a' kié valamely jószághoz a' tulajdonosi jog, azt illeti annak haszna vétele is, és ha valaki a' más jószágát igazságtalanul bitorolja, nem elég hogy több esztendők mulva azt csak magát bocsássa birtokába az igaz tulajdonosnak, hanem a' több esztendei haszonvételben is el kell neki marasztatnia, mely is itt a' kinn maradt kamatok kamatja. Ámbár azonban ez volna is az igazság, hazánkban a' másik nézet uralkodik, és van gyakorlatban, az szerint ítéltetvén meg a' több esztendőkről kinnmaradt kamatok minden törvényszékeinken.

Hogy ennek okát állalláthassuk, szükség megvizsgálunk, mi csoda vélemények uralkodtak hazánkban eleitől fogva a' kamatokat illetőleg. A' régi időkben, mikor még az a' szokás uralkodott, hogy a' pénzt élire verve ládába elzárták, és úgy rejtegették, véteknek tartatott kamatot venni a' kölcsön kiadott pénztől, 's ha akart is valaki venni, azt törvényszékeink meg nem ítélék, 's helyesen is; mert a' pénz a' ládában sem szaporított volna; 's ez volt hazánkban a' kamatok' első időszaka.

De miután őseinknél ébredezni kezdett az a' gondolat, hogy kár a' pénzt ládában elrejtve hevertetni, 's jobb azt valamibe fordítani, hogy hasznot hajtson: ezzel együtt változott a' kamatokról nézet is, és kezdődött a' kamatok 2-dik időszaka 1647-ben, mely esztendőbeli 144-dik törvényczikkely már megengedi: ut ad justum interesse — 6 per centum computando — tam debitoribus sese obligare, quam creditoribus exigere deinceps liceat. 'S minthogy ug-rás szintűgy nincs az erkölcsi, mint az anyagi természetben, hanem mint ebben úgy amabban is minden kifejlődés lépcsőnkint történik, és reá idő kell: még 1647 körül távolról sem juthatott eszébe senkinek, hogy a' kinnmaradt kamatoktól is kamatot követeljen, 's mind a' Birák mind magok a' hitelezők is igen természetesnek találták a' több esztendőkről kinnmaradt kamatokat csak egyszerűen az arany szabály szerint számítani fel ilyen formán: 1000 forintnak 1 évi kamatja 60, és így 5 évi kamatja $5 \times 60 = 300$ forint. Arra, hogy valaki még a' kamatok kamatairól is gondolkozzék, az ipar és kereskedés' szellemének még nagyobb kifejlése kívántatott. Hanem, mielőtt az bekövetkezhetett volna, a' kinnmaradt kamatoknak amaz egyszerű mód szerinti kiszámítása annyira divatba jött, 's olly törvényes erőre kapott hazánk törvényszékein, hogy később ha szinte

eszrevette is egyik másik hitelező a' kinnmaradt kamatok' kamatainak meg nem ítélésében rejlő igazságtalanságot, és azokat követelte, 's megítéltetni kérte is: a' felelet ez lett, hogy azokat megítélni nem szokás, a' mi hazánkban annyit tesz mint nem törvényes; mivel nálunk a' szokás törvény — *lex consuetudinaria* — 's ezen törvénynyé vált szokás szerint történik máig is, hogy a' kinnmaradt kamatok kamatait törvényszékeink meg nem ítélik; mert világos törvényünk, mely ezt rendelné, nincsen.

Hanem 1647 óta, különösen pedig a' közelebbi hosszszas békeség alatt, annyira kifejlett hazánkban is az ipar' és kereskedés' szelleme, hogy már ma minden Hitelező (pénzt kölcsön adó) kicsinytől fogva nagyig, egyesek és társulatok, mint szintén a' Bírának is jobb része, nagyon érzik azt, a' mit 1647-ben még senki sem érzett, t. i. hogy milyen igazságtalanság rejlik a' kamatok kamatainak nem fizetésében. A' honnan a' természet rendi szerint szükségesképen következik, hogy a' kamatok 3-dik időszakának, melyben a' kamatok' kamatai is számíttatni fognak, már nem sokára be kell állani. Úgy van! az 18³⁹/₄₀-iki országgyűlésen már indítványba hozott, és vitatás alá jött e' tárgy, nem csak, hanem többséget is nyert mind a' két táblán, 's ha sanctiot nem nyerhetett is még akkor, bizonyosan nem fog soká késni az új kamattörvény; mert annak ideje eljött. *)

Mihelyt pedig az új kamattörvény létre jő, multhatatlan szükség lesz tudnunk, mikép kell a' kamatokat anatocismus szerint számítani ki, mi logarithmusok segítségével eshetik meg legkönnyebben. De mielőtt az új kamattörvény megszületnék is, sok fontos pénzügyi kérdések adják elő magokat, melyekre csak úgy felelhetünk meg jó móddal, ha a' kamatoknak oly móddali kiszámítását, miszerint a' kinnmaradt kamatok minden év' végével tőkésítetnek, értjük. E' végre pedig szükség kitanulnunk az egybefüggést, mely létezik a' tőke, kamatláb, kamatozó esztendők száma, és azon summa között, melyre növekedik valamely tőke, ha

*) Én ezen tárgyról bővebben értekeztem, 's ezt mind históriai, mind jogtani, mind kivált erkölcsi oldalról felvilágosítani igyekeztem a' Jelenkor' 1844-diki 80, 81, 82 és 83-dik számaiban. Óhajtom, hogy bárcsak ezen értekezésem ne kerülne el azon Hazafiak figyelmét, kiktől fog majd függeni a' jövő országgyűlésen, hogy a' már diaetnai conclusummá vált új kamattörvénynek szentesítését sürgetessék; mi főkép a' jótékony intézetek pénztárait illetőleg igen óhajtandó.

Bizonyos számú esztendők alatt oly móddal kamatozik, hogy a' kamat minden esztendő végével a' tőkéhez tudatik, 's a' következő esztendőkben az is kamatot hoz. Mely egybefüggés kifejezésére következőkép szerkesztünk egyenletet.

36. §. Azon négy mennyiségeknek, melyek között az egybefüggést ki akarjuk tanulni, kifejezzük először csak hármát, majd később a' negyediket is egyegy betűvel e'képen: Az eredeti tőke summa legyen = E; az utolsó tőke summa, a' mennyire szaporodik utoljára az eredeti tőke, ha az bizonyos kamatláb szerint bizonyos számú esztendőig oly móddal kamatozik, hogy a' kamat minden év végén a' tőkéhez tudatik, legyen = U, még pedig úgy, hogy addig míg itt a' négy mennyiség közötti egybefüggést kifejező egyenletet kifejtjük, nagyobb világosság okáért irassék felibe ezen betűnek az esztendő szám, a' hányadik esztendő végeig akarjuk megtudni mennyire szaporodott az eredeti tőke kamatjaival és kamatainak kamatjaival együtt; mi szerint például $\overset{6}{U}$ teszi azt a' summát, a' mennyire szaporodott az eredeti tőke a' mondott mód szerint a' 6-ik esztendő végéig; továbbá az a' szám, mely jelenti, hány századrésztét teszi egy évi kamat a' tőkének, vagy egyszóval, hány procent a' kamat, legyen = p, 's következőképen a' kamatláb = $\frac{p}{100}$. Ezeket így elnevezvén, először is látnivaló, hogy az 1-ső esztendő végéni summa, mely a' 2-dik esztendőre úgy megyen által mint tőke, azaz, az $\overset{1}{U}$, annyi mint az eredeti tőke = E, és ennek 1 esztendei kamatja = $E \times \frac{p}{100}$ azaz $\overset{1}{U} = E + E \cdot \frac{p}{100}$, vagy jobbfelől a' közös tényezőt különválasztva $\overset{1}{U} = E \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, a' mi világos szókkal kimondva ezt teszi: Ha az eredeti tőkét 1-szer vesszük, 's ugyanazt ismét $\frac{p}{100}$ -szer vesszük, vagyis annak $\frac{p}{100}$ részét, azaz, annyi századrésztét vesszük a' hány procent a' kamat, e' két szorzat, azaz, az eredeti tőke, és annak 1 esztendei kamatja együttvéve, teszik azt a' summát, melyre növekedett az eredeti tőke az 1-ső esztendő végeig, és a' mely a' 2-dik esztendőre úgy megy által, mint kamatozó tőke. Ha továbbá azt akarjuk megtudni, hogy ez a' 2-dik esztendőre általjött tőke: $\overset{1}{U} = E \left(1 + \frac{p}{100}\right)$,

mennyire szaporodik a 2-dik esztendő alatt, és így milyen nagy lesz a 2-dik esztendő végén; mivel ez kétség kívül annyi lesz akkor mint ő maga és az ő egy esztendei kamatja; látnivaló, hogy a 2-dik esztendőre általjött tőkét újra $(1 + \frac{p}{100})$ -szel kell szorozni, hogy kijöjön milyen nagy lesz az a 2-dik év' végén, mikor a harmadikra általmegy; 's ezt újra $(1 + \frac{p}{100})$ -szel, vagy az úgynevezett kamatoztató tényezővel szorozni, hogy kijöjön milyen lesz a tőke nagysága a 3-dik év' végén, mikor a 4-dikre általmegy, és így tovább, következőképen:

$$U^1 = E \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$U^2 = E \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) = E \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

$$U^3 = E \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) \left(1 + \frac{p}{100}\right) = E \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3, \text{ és}$$

így tovább. Mit, ha az évek számát n betűvel teszszük ki, általánosán így fejezhetünk ki: $U^n = E \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, vagy mivel a kamatoztató tényező hatványjele különben is mindenkor megjelenti, hanyadik esztendő végéni U -ról van a kérdés, az U felibe nem írván ki az n -et, csak így: $U = E \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$, mely egyenlet vilá-

gos szókkal kimondva, ezt teszi: Az a summa, melyre valamely tőke bizonyos procentre kiadva, bizonyos számú esztendők alatt növekedik, oly feltétellel, ha a kamatok minden év végén tőkésítetnek, kijő, ha az eredeti tőkét szorozzuk egy olyan tényezőnek, mely áll 1-ből és a kamatlábból, vagy a mint ezt egyszóval nevezük, a kamatoztató tényezőnek annyiadik hatalmával, a hany esztendő tölt el az eredeti tőke kiadásától fogva; és ez az eredeti alapegyenlet, melyből folynak minden más egyenletek, melyeknek segítségével a pénzügyek körül előforduló legnevezetesebb feladatokat meg lehet fejteni. Lássuk ezek közül a' legérdekesebbeket.

37. §. Kérdés: ha valaki 1000 forintot vett fel 100-tól 6-os kamatra, és attól 10 esztendeig semmi kamatot nem fizetett, ekkor micsoda summát tartozik fizetni hitelezőjének, ha a kamatok minden év' végén tőkésítetnek? Felelet: Ezen feladatban $E = 1000$, $p = 6$, $n = 10$ lévén, az egyenlet ezen esetben fog lenni:

$U = 1000 \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10}$, vagy az 1-t is 100-as alsóju törtté változtat-
 ván: $U = 1000 \left(\frac{106}{100}\right)^{10}$, melynek logaritmussokkali kidolgozása így
 lesz. Az U itt szorzata két szorzónak, melyek közül az egyik = 1000, a'
 másik = $\left(\frac{106}{100}\right)^{10}$. E' két szorzónak logaritmussait kell hát ki-
 keresni, és összeadni, 's az öszveg lesz a' szorzatnak az U-nak lo-
 garitmusa, az ezen logaritmussnak megfelelő szám pedig lesz ma-
 ga a' szorzat, az U. Először is tehát, mivel az első szorzó logarit-
 musát, = 3, könyv nélkül is tudjuk, keressük a' 2-dik szorzó', a'
 $\left(\frac{106}{100}\right)^{10}$ logaritmussát úgy, hogy először kiszámítjuk a' 2-dik
 szabály szerint a' $\frac{106}{100}$ logaritmussát, levonván a' 100 logaritm-
 sát a' 106-éből, azután pedig a' maradékot, mely a' $\frac{106}{100}$ logarit-
 musa, szorozzuk 10-el, 's a' szorzat lesz a' $\left(\frac{106}{100}\right)^{10}$ logarit-
 musa, következőképen:

$$\begin{array}{r}
 \log. 106 = 2,0253059 \\
 - \log. 100 = -2,0000000 \\
 \hline
 = \log. \frac{106}{100} = 0,0253059
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \times 10 \\
 \hline
 = \log. \left(\frac{106}{100}\right)^{10} = 0,2530590
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 + \log. 1000 = 3,0000000 \\
 = \log. U = 3,2530590
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{és így } U = 1790,849 \text{ frt} \\
 = 1790 \text{ ft } 51 \text{ kr.}
 \end{array}$$

gyakorlatban sűrűn előforduló számról, már könyv nélkül tudja,
 hogy az = 2,0253059, — a' jellemzőt, 2, levonván, 's helyette
 0-t irván, $\left(\log. \frac{106}{100}\right)$, pótlékának pedig minden sifráját egygyel-
 egygyel elébb tolván, ($\times 10$), ehez adja az 1000 log.-sát, a' 3-
 at, vagy rövidebben ezt írja jellemzőül a' 0 helyett, egyszóval, egy-
 szerre általlátván, hogy $\log. \left(\frac{106}{100}\right)^{10} + \log. 1000$, azaz, $\log. U =$

Ez a' kidolgozás már így is kevés
 munkába kerül, az elemi módon
 való kidolgozáshoz képest; pedig a'
 kinek a' logaritmussokkali számve-
 tésben egy kis gyakorlottsága van,
 ezt még sokkal rövidebben teheti.
 Mert egyszerre általlátván, hogy:

$$\log. \left(\frac{106}{100}\right)^{10} + \log. 1000, \text{ vagyis:}$$

$\log. U$ kijő, ha először is a' 106 lo-
 garitmussából, — melyről, mint a'

3, 2530590, és ezt egy tekintettel a feladatra leírván, ennek egész megfejtése az ezen logaritmushoz tartozó számnak a szorszám táblákban felkereséséből áll, 's míg tétova tekintünk, már kész a felelet, hogy 1000 forint 6 procentre kiadva, ha a kamatok minden év végén a tőkéhez tudatnak, 10 év alatt 1790 forint 51 krra szaporodik. — Így, valahányszor a kamatokat anaticismus szerint kell kiszámítanunk, mindig az egész summát számítjuk előbb ki, melybe tőke, kamat, és kamatok kamatai mind befoglaltatnak; melyből aztán a tőkét, az egyszerű kamatot, és a kamatok kamatait mind külön válogatni, és különkülön terjeszteni elő, igen könnyű. Lássunk erre egy példát. Egy valaki bizonyos jótékony közintézet pénztárából felvett 100-tól 6-os kamatra 10000 forintot, de a kamatokat attól soha életében nem fizette, hanem halála után perrel kellett megvenni örökösain; kik is 20 esztendei kamatokat egyszerre fizettek be, de a szokás szerint csak egyszerűen. Kérdés mennyi kárt tett ez a valaki a jótékony közintézetnek az által, hogy sem a kamatokat pontosan be nem fizette, sem azoknak kamatai meg nem ítéltettek és fizettettek? Felelet: itt $E = 10000$, $p = 6$, $n = 20$ lévén: $U = 10000 \left(\frac{106}{100} \right)^{20}$; melynek logaritmussokkali ki-

dolgozása a fentebbi pelda szerint így megy: Először: $\log. \frac{106}{100} =$

$\log. 106 - \log. 100 = 0,0253059$. Ezt szorozván 20-szal, a szorzat lesz $= \log. \left(\frac{106}{100} \right)^{20} = 0,5061180$; 's ehez adván a másik

szorzó log.sát, $\log. 10000 = 4,0000000$, az öszveg lesz a tény logaritmusá, $\log. U = 4,5061180$. És így az ezen logaritmusnak megfelelő szám lesz a keresett $U = 32071,40$ forint,

azaz 32071 for. 24 kr.

melyből levonván a tőkét = 10000 for. — —

marad kamatokra és ezeknek kamataira . . = 22071 — 24 —

ebből ismét levonván az egyszerű kamatokat = 12000 — — —

marad kamatok kamataira = 10071 — 24 —

És így itt a kinn maradt kamatok kamatainak meg nem ítéltése, 's be nem fizetése miatt vallott kára a jótékony közintézet pénztárának tesz ezen egyetlenegy tőkén 20 esztendő alatt többet 10 ezer forintnál. Az ilyen esetek pedig hazánkban épen nem ritkák.

38. §. Arra is van szükség sokszor, hogy ki tudjuk számítani, milyen nagy az a tőke, mely bizonyos procentre kiadva bizo-

nyos számú esztendő alatt ilyen 's ilyen summára fogna növekedni? Peld. ha valakinek van egy olyan szerződéslevele, mely szerint neki 2000 forint fog birtokába jőni, de nem elébb mint 3 esztendő mulva; neki pedig most mindjárt volna szüksége a' pénzre, 's ennél fogva amaz szerződéslevelet, 's az azon lévő 2000 forinthez való jussát el akarja adni kész pénzéért: kérdés mennyit ér az most? Kétség kívül törvényesen nem ér többet mint azon summát, mely 6 procentre kiadva 3 esztendő alatt kamatjaival és kamatjainak kamatjaival 2000 forintra növekedik. Itt tehát ki vannak adva: $U = 2000$, $p = 6$, $n = 3$; és így ismeretlen szám az E , vagyis az az eredeti tőke, mely 6 procentre kiadva 3 év alatt 2000 forintra növekedik ha a' kamatok minden év végével tőkésítetnek. Ez szerint itt az általános egyenletet úgy kell változtatni, hogy az ismeretlen E maga

maradjon az egyik oldalon e'képen: $E = \frac{U}{\left(\frac{100+p}{100}\right)^n}$, 's ezen álta-

lános egyenletbe az U , p , és n általános jegyek helyett ezeknek e' jelen esetbeli értékeiket tenni, 's így fog lenni:

$$E = \frac{2000}{(1,06)^3}; \text{ mi szerint a' kidolgozás lesz:}$$

log. $1,06 = 0,0253059$, 's ezt háromszor vévén

log. $(1,06)^3 = 0,0759177$, melyet levonván a' két ezer log.sából

log. $2000 = 3,3010300$, a' maradék lesz az E log.musa és így

log. $E = 3,2251123$, következőképen az ennek megfelelő szám $E = 1679,238$ forint = 1679 forint 14 és $\frac{28}{100}$ kr. Mi

szerint a' 3 esztendő mulva fizetendő 2000 forint —

most nem ér többet, mint 1679 — 14 kr.

és így a szerződéslevélben kitett 2000 ftból levonatik 320 — 46 kr.

Az efféle levonást nevezik kereskedői nyelven discountozásnak, az ily móddal levont summát pedig milyen itt a' 320 ft. 46 kr. hívják discountónak; magyar szóval kezdik nevezni a' discountozást leszámítolásnak.

39. §. N. úr kér költsön T. úrtól 2000 pengő forintot 5 esztendőre. T. úr előre látja, hogy N. úr a' kamatokat soha sem fogja fizetni, sőt hogy a' tőkét is perrel kell tőle bevenni 5 év mulva; 's látja azt is, hogy N. úr oly ügyes, mikép a' szóbeli pert is el tudja húzni legalább esztendeig, és így hogy ő 6 év mulva fog jutni tőkéjéhez, és annak egyszerű kamatjához, 's akkor is úgy, hogy kell legalább 20 pengő forint olyan költséget tennie, mely a' perben meg

nem fog ítéltetni. Mégis kénytelen neki adni, mert bizonyos körülmények miatt ki nem térhet előle; hanem magát úgy kármentesíti, hogy a' kötelezvénybe irat 2000 pengő forintot, de N. úrnak ad csak 1903 p. ft. 24 krt. Kérdés uzsoráskodás-è ez? Felelet: Ha N. úr a' kamatokat pontosan befizetné és T. úr azokat mindjárt használhatná, vagy, a' mi ezzel egyre megy ki, ha a' kamatok N. urnál minden esztendő végével tőkésítettének, úgy mennyire szaporodnék az 6 év alatt, kiszámítjuk ezen egyenlet szerint: $U = 2000 (1,06)^6$

következőképen $\log. (1,06) = 0,0253059$
 ezt 6-tal szorozván lesz a' szorzat $\log. (1,06)^6 = 0,1518354$
 ehhez jöven $+ \log. 2000 = 3,3010300$
 fog lenni az U logaritmusa $\log. U = 3,4528654$
 és így $U = 2837,04 \text{ ft.}$

Ugyde a' tőke és az egyszerű kamatok, melyeket

N. úr 6 év mulva per által elmarasztaltatva fizet, lesz 2720,00 ft.

's ezen már a' T. úr kára $= 117,04 \text{ ft.}$

melyhez jö még a' perköltség' meg nem itélendő része = 20,00 ft.

És így a' kár összege, mely ellen magát T. úr kármentesíteni akarta $= 137,04 \text{ ft.}$

Már most hát az a' kérdés, helyesen kármentesítette-è magát? Felelet: ő ezen kármentesítés rovására előre kifogott a' tőkéből 96 ft. 36 krt. vagy 96,60 forintot, és ezt másoknál használta kamatra 6 évig. Lássuk ennyi-è az a' tőke, mely 6 procentre kiadva 6 év alatt a' kamatokat minden év végén tőkésítve 137,04 forintra szaporodik, és így a' kárt egészen eltörli? A' számítás megy ezen egyenlet szerint: $E = \frac{137,04}{(1,06)^6}$, következőkép':

$\log. 137,04 = 2,1368473$
 $- \log. (1,06)^6 = 0,1518354$
 $= \log. E = 1,9850119$, és így $E = 96,60772$. E' szerint T. úr csak egy dénárral sem fogott többet el az N. urnak adott tőkéből, mint a' mennyi ötlet az ő előre látása szerint vallandó kártól menté teszi. Előre látása be is teljesedett pontról pontra. Kérdés: lehet-è itt T. urat azért, hogy nagyobb tőkéről vett kötelezvényt, mint a' mennyit valósággal adott, uzsoráskodónak tekinteni? Ítéljék meg a' méltányos Olvasók.

40. §. Egy kereskedő kezdte kereskedését 15000 forinttal, 's 30 esztendő mulva azon kívül a' mit évenként segédjei fizetésére, 's maga tisztességes háztartására elköltött, van készpénzben és jó-

szágokban 300000, azaz háromszáz ezer forintja: kérdés hány procent volt egyre-másra évenkénti tiszta, 's tőkévé fordítható nyeresége? Kétségtől annyi procent, a' hányra kiadva szaporodnék 15000 forint 30 esztendő alatt, a' kamatot minden év végén a' tőkéhez tudva, 300000 forintra. Itt, látnivaló, ki vannak adva az eredeti tőke $E = 15000$ ft, az esztendők száma, melyek alatt az szaporodott $n = 30$, és a' summa, a' mennyire szaporodott, $U = 300000$; 's kerestetik a' kamat láb $= \frac{P}{100}$, vagy akár a' kamatoz-

tató tényező $= \frac{100 + P}{100} = 1 + \frac{P}{100}$; mert ha ez meg van találva, meg van amaz is, mivel ha ebből 1-et levonunk, a' maradék lesz amaz. És így az ilyen kérdés megfejtésére az egyenletet úgy kell változtatnunk, hogy a' kamatoztató tényező magában maradjon az egyik oldalon e'képen: $1 + \frac{P}{100} = \sqrt[n]{\frac{U}{E}}$; mely egyenletbe, ha az E, n, és U általános jegyek helyett ezeknek a' jelen kérdésben előforduló értékeit teszszük; fog lenni:

$$\left(1 + \frac{P}{100}\right) = \sqrt[30]{\frac{300000}{15000}}, \text{ melynek kidolgozása így esik:}$$

$$\log. 300000 = 5,4771213$$

$$- \log. 15000 = 4,1760913.$$

$$= \log. \left(\frac{300000}{15000}\right) = 1,3010300. \text{ Ezt elosztván } 30\text{-al,} =$$

$$\log. \left(1 + \frac{P}{100}\right) = 0,0433677. \text{ És így az ennek megfelelő szám}$$

$$\left(1 + \frac{P}{100}\right) = 1,1050138, \text{ 's következésképp' } 1\text{-t elhagyván}$$

$$\frac{P}{100} = 0,1050138: \text{ miszerint ezen kereskedőnek}$$

évenkénti tiszta, 's tőkévé fordíthatott nyeresége valamivel többecske volt 10 és $\frac{1}{2}$ procentnél.

41. §. Egy Joltévő hagy egy iskolának 10000, azaz tíz ezer forintot oly feltétellel, hogy az adassék ki a' legbiztosabb helyre vagy helyekre 100-tól 5-ös kamatra, 's a' pontosan bejövendő kamat fordíttassék tőkévé mind addig míg a' 10000 ft. 100000, azaz, száz ezerre nem szaporodik; a' mikor aztán mikre fordíttassék ezen summa, meghatározza végrendeletében. Kérdés: hány esztendő mulva lehet ezen alapítvány használatát elkezdni, ha pontosan

kezeltek? Felelet: itt az esztendőök száma lévén az ismeretlen és keresendő mennyiség, amaz eredeti egyenletet: $E \left(\frac{100+p}{100}\right)^n = U$, úgy kell változtatni, hogy az évek számát jelentő n maga maradjon az egyik oldalon; mi is így esik meg. Először: $\left(\frac{100+p}{100}\right)^n = \frac{U}{E}$; a' honnan: $\log. \left(\frac{100+p}{100}\right)^n = \log. \left(\frac{U}{E}\right)$, 's innen ismét:

$\left[\log. (100+p) - \log. 100\right] \times n = \log. U - \log. E$, 's végre innen

$n = \frac{\log. U - \log. E}{\log. (100+p) - \log. 100}$. Mely általános egyenletbe ha az E , U , és p helyett ezeknek a' közelebbi kérdésben meghatározott értékeit teszszük, fog lenni ezen esetben:

$n = \frac{\log. 100000 - \log. 10000}{\log. 105 - \log. 100} = \frac{1,0000000}{0,0211893}$, vagy az osztandót is, mely $= 1$, tíz millió részékké változtatván, milyen az osztó, 's ekkor osztván az osztandó törtszám felsőjét az osztó felsőjével: $n = \frac{10000000}{211893}$. Mely osztást ha könnyebbség okáért lo-

garithmusokkal akarunk véghezvinni, fog lenni:

$$\begin{array}{r} \log. 1000000 = 7,000000 \\ - \log. 211893 = 5,3261167 \\ \hline \end{array}$$

$\log. n = 1,6738833$; és így

$n = 47,19362$ esztendő, vagy ha a' tizedes törtszámot hónapokká és napokká változtatjuk: $n = 47$ esztendő 2 hónap és 10 nap, néhány óra híján.

42. §. Az eddig kifejtett egyenletek- és módszerint lehet megfejtetni a' politica arithmetica-ban a' nép' szaporúsága körül előforduló kérdéseket is. A' nép' számát ugyanis, valamely országban, bizonyos időponton, például valamely esztendő elején, úgy lehet tekinteni, mint gyümölcsöző tőkét, mely maga magát szaporítja, a' hány procenttel pedig több születik évenként, mint a' mennyi meghal, és így a' hány procenttel szaporodik évenként a' nép száma, azt úgy nézhetjük mint kamatlábat, és a' kamatozás itt is az anaticismus szerint történik mivel a' szaporúság minden esztendőben a' tőkéhez járul. Ha tehát valamely országban vagy városban a' születettek és meghaltak anyakönyveinek sok esztendőkön keresztül folytatott egybehasonlításából kidolgoztatik, hány procent közép szám-

mal a népnek évenkénti szaporodása: látnivaló, mikép a fentebb elöadott mód szerint ki lehet számítani, hogy ha most a nép száma ennyi 's ennyi, ilyen évenkénti szaporúsággal ennyi 's ennyi esztendő alatt mennyire fog szaporodni? Vagy ha a nép valamely országban megszámláltatik, 's bizonyos számu, például 30 esztendő mulva újra megszámláltatik: ebből viszont ki lehet számítani, hogy ha ennyi esztendő alatt ennyiből ennyire szaporodott, hány procentnek kellett lenni egyre másra az évenkénti szaporúságnak. Lássunk erre is legalább egy példát.

A' Pesti Hírlap 1842-ben Januarius 9-n a' 22-k lapon ezt írta: „Az utolsó 40 év alatt Nagy-Britanniának népessége (Anglia, Sko-
tzia, Wales, és a' kis sziget) 10472048-ról 18664761-re hágott.“ Itt ki vannak adva $E = 10472048$; $n = 40$. $U = 18664761$, és így

a' 40-dik § szerint fog lenni: $(1 + \frac{P}{100}) = \sqrt[40]{\frac{18664761}{10472048}}$, melyből az ugyanottani számítás szerint kijő, hogy

$\frac{P}{100} = 0,014553 = \frac{1,4553}{100} = \frac{14553}{1000000}$, azaz, hogy Nagy-Britanniában 1802-től 1842-ig a' nép számának évenkénti szaporúsága tette a' nép számának közel másfél procentjét; vagy, ha nagyobb pontosság kedvéért nem század-, hanem milliódrészekben akarjuk azt meghatározni, tette a' nép számának 14553 milliódrészét, ugy hogy, a' hol a' lelkek' száma esztendő elején 1000000 volt, esztendő végére lett 1014553.

E'kép kitanulván mintegy a' kamatoztató tényezőt = $(1 + \frac{P}{1000000}) = 1,014553$ Nagy-Britannia népesedésére nézve, már most megfejtethjük a' több ide tartozó kérdéseket is. Lássunk például csak egyet. A' lelkek száma, mely a' Nagy-Britanniában 1802-től 1842-ig, és így 40 év alatt 10472048-ról 18664761-re szaporodott, mennyire fog szaporodni 1842-től 1882-ig ismét 40 év alatt? Itt látnivaló, ki vannak adva $E = 18664761$, $n = 40$, és a' közelebb kifejtett kamatoztató tényező, feltéven hogy a' szaporúság a' következő 40 év alatt is ugyanazon szerben lesz a' nép számával, mint volt a' közelebb mult 40 év alatt; a' keresendő szám pedig lesz az U. Az egyenlet tehát így lesz:

$U = 18664761 (1,014553)^{40}$; melyből a' 37-dik § szerint kijő, hogy $U = 33267061$; azaz, hogy ha a' szaporodás úgy megy, mint czen század kezdetétől fogva ment, Nagy-Britanniában a' nép' szá-

ma 1882-ben már fog lenni = 33267072, és így 80 év alatt többre szaporodik három annyinál, mint volt ezen század' elején *).

43. §. Gyakran adják magokat elő olyan esetek, melyekben azt kell kiszámítani, hogy ha bizonyos számú esztendőök alatt minden esztendő elején, vagy minden esztendő végén kamatra adatik bizonyos procenttel bizonyos, és mindig ugyanolyan summa, mennyire szaporodnak mindezek kamatjaikkal és kamatjaiknak kamatjaival együtt a' kitett esztendőök alatt. Peldául: ha valamely fiatal tisztviselő, kinek jövedőre az a' kilátása, hogy nyugdíjt (pensiot) kap-

*) Voltak, kik valamely ország' népének különböző időkben tett megszámlálásából, vagy a' szülöttek és meghaltak számának a' nép' számávali egybevetéséből, 's az ezekre épített számításból látván mily sebes lépésekkel halad előre a' nép' szaporodása, arra a' borzasztó gondolatra vetemedtek, hogy a' dög-halált és a' háborut szükséges gonosznak tartásák e' földön, azt mondván, hogy különben a' föld nem lenne elegendő a' szerfelett megsaporodott emberi nemzet' számára szükséges eledelüket megtermeni. Ez más szókkal azt tenné, hogy Isten, a' legfőbb erkölcsi tökély, 's egyszersmind a' legfőbb bölcsesség a' természet oeconomiáját úgy intézte el, hogy az emberek kénytelenek legyenek — az erkölcsi törvényeknek, melyeket Ő maga oltott szívökbe, ellenére — egymást ölni, vágni, pusztítani, hogy egymástól élhessenek. Képtelen ellenmondás! A' gyenge elméjű embert az ilyen szemlélődések elébb kétkedővé, utóbb vallástalanná, 's is-tentagadóvá is teszik; de ha nem állapodunk meg a' dolog színén, hanem igyekezünk abba mélyebben hatni: mint egyéb effélékben úgy itt is megtaláljuk az igazságot, és állallátjuk:

1-ör, hogy minél inkább szaporodnak az emberek, annál inkább növekedik a' szorgalom és az ipar, 's annál több földet tesznek hasznavehetővé, mely az előtt hasztalan hevert, 's annál inkább elterjednek a' földnek még lakatlan részeire.

2-or, hogy ugyanazon földön is annál többet természetnek, minél többre van szükség.

3-or, hogy mind az állatok, mind a' plánták országában még számtalan dolgok vannak, melyek eddig élelemre nem fordítottak, de arra fordíthatnak, mihelyt a' szükség úgy hozza magával, sőt hogy a' chemia, mely az újabb időkben annyi csudákat tett, utoljára, ha szükség lesz rá, talám még a' köveket is kenyerekké fogja tudni változtatni. De állallátja mindenek felett,

4-er, hogy minden szűk határok közé szorított tapasztalatokból kiszámított törvényei a' természetnek, ha szélesen kiterjesztetnek, rendszerint csalni szoktak. Peldául a' kénésd- és levegő hőmérők a' fagyás pontjától a' forrás pontjáig együtt járnak. De nagyon hiháznánk, ha ebből azt hoznók ki, hogy azok felül a' forrás pontján is mindenütt együtt fognak járni; mert már ott minél nagyobb lesz a' melegség, annál messzebb hagyja maga után a' kénésd-hőmérő a' levegő-hőmérőt. A' honnan azt lehet kihoznunk, hogy amaz a' forrás pontján alul is mindig elébb jár mint ez, de itt még oly csekélységgel, hogy azt észre nem vehetjük. Épen így a' szabadon esésnek Galilei által szűk körű tapasztalatokra épített törvényei is csak itt a' föld közelében, 's csak azért tetszenek igazaknak, majvel itt a' természetnek

hasson, nincsen, minden esztendőben megsugorgat jövedelméből 150 vftot, és ezt minden esztendő elején beadja a' takarékpénztárba 5 procent kamatra, de úgy hogy kamatainak kamatai is folynak, és semmit ki nem vesz egész 30 esztendeig, mikor a' szolgálatra alkalmatlanná lesz: kérdés, mennyi pénze lesz akkor a' takarékpénztárban? Felelet: ha külön-külön kiszámítanók: 1-ör, hogy az első esztendő elején betett 150 forint, mennyire szaporodik 5 procentes kamataival 's kamatai' kamataival 30 esztendő alatt; 2-or, hogy

azoktól eltávozása észrevehetetlen; magasra például a' holdig kiterjesztve már nem igazak, mint Newton megmutatta. Hasonlóképen kell gondolkoznunk a' népszaporodás' törvényéről is. Az a' törvény, melyet valamely országban a' nép' számának néhány, például 40 évi szaporúságából kihoztunk, kétség kívül nem áll, ha azt századokra, 's az egész földre kiterjesztjük. Sőt inkább az okosság előre is hihetővé teszi, a' szélesebben kiterjedt tapasztalás pedig bizonyítja is, hogy minél nagyobb a' népesség, azaz, minél több a' nép a' föld kiterjedéséhez képest, annál kisebb a' szaporúság' procentje. Mert hogy csak egy, de igen nagy példát hozzak fel, ha a' ma 150 millió lakost számláló, 's magát már több mint 2000 esztendővel ez előtt köfállal bekerített Chinában a' nép' szaporodása mindig oly sebes lépésekkel haladt volna előre, mint Nagy-Britanniának két különböző időkből történt népszámlálásából kiszámítánk: eddig az már régen nem tért volna meg a' maga falai között, sőt az egész föld' színén sem. Mert csak lehet gondolni, hogy Chinában ezeltől több mint 2000 esztendővel, mikor ezen birodalom a' maga bekerítésére 300 mértföldnyi hosszúságú, 30 láb magasságú, és 5 láb vastagságn köfalat tudott építeni, a' nép számának már roppantnak kellett lenni. De tegyük fel, hogy az akkor csak 10 millió lett volna is; még így is annak, a' feutebb kiszámított szaporúság szerint az óta már, azaz, 2000 esztendő alatt több mint 35 trillióra, azaz, több mint 35 milliószor milliószor millióra kellett volna szaporodni, holott most csak mintegy 150 millió. Kétség kívül tehát a' szaporúság procentje a' népesség növekedésével fogydogálván, mikor ez legfelsőbb fokát eléri, amaz nullá lesz; azaz, attól fogva csak annyi születik évenként, a' mennyi meghal. 'S ha ez még most nem mindenütt így van; ha még most sok országok vannak, melyek évenként úgy szollván rajokat bocsátanak, oka ez, mert még sok betölteni való pusztaság van e' földön. De majd ha a' népesség az egész földön a' lehető legfelsőbb fokra hág: kétség kívül mindenütt meg fog apródonkint szűnni a' szaporúság. Ez a' természetnek, vagy helyesebben a' Teremtőnek bölcs törvénye a' népek szaporodásában. Nekünk gyalró embereknek van anyi meg gondolásunk, hogy több személyt fel nem veszünk háztartásunkba, mint a' menyinyit táplálhatunk; 's mi e' részben bölcsőbbek volnánk a' Fő bölcseségnél? Távol legyen e' káromlás. Bizonyára, Isten a' természet' törvényeit úgy intézte, hogy minden döghalál és háboru nélkül sem szaporodnak az emberek soha úgy el, hogy egymástól ne élhessenek. A' mely bölcsesség elrendelte, hány fiu szülések, hány leány, 's micsoda élet' nemére hányan adják magokat, legtöbben arra a' mi legszükségesebb: épen az gondoskodott arról is, hogy az emberi nemzet csak annyira szaporodhassék, a' mennyi e' földön éléhet.

a' második esztendő elején betett 150 forint mennyire szaporodik hasonló feltételekkel 29 esztendő alatt; 3-or, hogy a' harmadik esztendő elején betett 150 forint mennyire szaporodik 28 esztendő alatt, és így tovább minden egyegy évvel későbbben betett 150 forint mennyire szaporodik egygyel-egygyel kevesebb esztendő alatt, egész addig míg a' 30-dik esztendő végén, vagy a' 31-ik elején betett 150 forintig érünk, mely még semmit nem kamatozott; ha, mondom, mind ezeket külön-külön kiszámítanók, 's azután mind ezen részletes eredményeket összeadnók, ezeknek összege tenné, látnivaló, a' forintok azon számát, a' mennyire szaporodnak a' kérdéses tisztviselőnek minden betett pénzei 5 procentjével 30 esztendő alatt. Mely összeveget ha egy betűvel S-nek nevezünk, azt, a' minden esztendő elején betett eredeti tőkével = E, és a' kamatoztató szorzó-

val $= \frac{100+p}{100}$, melyet itt rövidségnek okáért egy betűvel f-nek

nevezünk, és az esztendő számmal = n, mely itt 30-at tesz, így fejezhetjük ki: $S = Ef^n + Ef^{n-1} + Ef^{n-2} + Ef^{n-3} + \dots + Ef + E$. De látnivaló, hogy ez az esztendőnkint betett tőkék szaporodásának külön-külön kiszámítása, 's utoljára egybesummázása, mind azon könnyítés mellett is, melyet az évenként betett tőkék szaporóságának egyenkinti kiszámításában a' logaritmussal élés szerez, nem kis munkába kerülne. Hanem ezen munkát szerencsére nagyon meg lehet rövidíteni következőképen: *) A' fentebbi egyenletet szorozzuk f-el, 's ezen szorzatból levonjuk magát a' fentebbi egyenletet így:

$$\begin{aligned} Sf &= Ef^{n+1} + Ef^n + Ef^{n-1} + Ef^{n-2} + \dots + Ef^2 + Ef \\ -S &= -Ef^n - Ef^{n-1} - Ef^{n-2} - \dots - Ef^2 - Ef - E; \end{aligned}$$

mely fogás által a' két egyenlet jobb oldalán minden tagok lerontván egymást kettőn kívül, a' maradék lesz: $Sf - S = Ef^{n+1} - E$. Innen a' közös szorzót elválasztván $S(f-1) = E(f^{n+1} - 1)$, 's innen végre: $S = \frac{E(f^{n+1} - 1)}{f-1}$. Minthogy

pedig f csak rövidség' okáért volt téve e' helyett: $\frac{100+p}{100}$, és így

$$f-1 = \frac{100+p}{100} - 1 = \frac{100+p}{100} - \frac{100}{100} = \frac{p}{100}, \text{ ezzel osz-}$$

*) E' rövidítés nem egyéb egyszeri sorzat (geometrica progressio) summázásánál, 's csak azoknak kedvökért, kik ezt talám nem tudnák, választottam itt e' rövidebb utat.

tani pedig annyi mint megfordítva $\frac{100}{p}$ -val szorozni: tehát utoljára fog lenni $S = \frac{100}{p} \cdot E \cdot \left[\left(\frac{100+p}{100} \right)^{n+1} - 1 \right]$, mely egyenlet világos szókkal kimondva ezt teszi: Azt akarván megtudni, hogy ha minden év elején vagy végén teszünk le bizonyos procent kamatra bizonyos és mindig ugyan olyan nagy tőke summát, mind ezek bizonyos számu esztendőig így folytatva mennyire szaporodnak kamatjaikkal, és kamatjaiknak kamatjaival együtt: nem kell egyebet csinálnunk mint e' 3 szorzót szoroznunk egymással ugymint: a' megfordított kamatlábat, az eredeti tőkét, mely minden esztendő elején vagy végén letéteik, és a' kamatoztató szorzónak $(n+1)$ -dik hatalmát egy híján, 's a' szorzat lesz a' keresett összeg; jól megjegyezvén, hogy akár az esztendők elején, akár az esztendők végén tétessenek le a' tőkék, n mindenkor azon esztendők számát jelenti, a' hány esztendeig kamatoz a' legelőször letett, és így legtöbb esztendőig kamatozó tőke.

44. §. Ezek szerint a' fentebb például felhozott kérdés megfejtése így lesz: Ott $E = 150$ forint, $p = 5$, 's ha a' 150 forint mindig az esztendő elején tétetik be, 's az első betevéstől fogva 30 egész esztendő mulik el, és akkor kérdik mennyire szaporodtak már a' betételek: úgy $n = 30$; és így:

$$S = \frac{100}{5} \cdot 150 \cdot \left[\left(\frac{105}{100} \right)^{31} - 1 \right] = 3000 \left[(1,05)^{31} - 1 \right];$$

mert minden ilyen esetekben a' rekeszen kívül lévő tényezőket, mikor könnyű móddal lehet, előre össze kell olvasztani egy ténynyé, hogy ne kelljen annyi logaritmust keresni. Innen már:

log. $1,05 = 0,0211893$. Ezt 31-el szorozva a' szorzat lesz

log. $(1,05)^{31} = 0,6568683$. És így az ezen log.-nak megfelelő szám

$(1,05)^{31} = 4,53804$; melyből egyet levonván, lesz:

$(1,05)^{31} - 1 = 3,53804$, 's ezt a' másik szorzóval t. i. 3000-rel szorozván, melyet most rendes uton tenni könnyebb mint logaritmusokkal, végre fog lenni: $S = 10614, 12$; azaz, a' kérdéses tisztviselőnek, ki minden esztendő elején 150 forintot teszen be a' takarékpénztárba 5 procent kamatra, 30 esztendő mulva van ezen pénztárban 10614 forint 12 denárja; el nem felejtvén mindazáltal, hogy itt $S = E f^n + E f^{n-1} + E f^{n-2} + \dots + E f + E$ lévén, és így bele lévén számítva az $(n+1)$ -dik, azaz, itt 31-dik esztendő elején letett pusztá tőke E is, mely még semmit nem kamatozott:

csak úgy helyes a' kijött summa, ha a' kérdéses tisztviselő már ezen 31-dik év elején betejendő 150 forint tőkét is betette. Ha pedig még ezt be nem tette, úgy a' kijött summából le kell vonni 150 forintot, 's lenni fog $S = 10464$ for. $07 \frac{2}{10}$ kr. — Azért számítottuk pedig az S értéket oly móddal ki, hogy abba az $(n + 1)$ -dik év elején letejedő puszta vagyis még semmit nem kamatozott E is befoglaltasék, mivel arra gyakran ily formában van szükség; azonban így az egyenlet is legegyszerűbb. Lássunk egy olyan példát, melyben az S értéke éppen úgy jő ki helyesen, ha az $(n + 1)$ -dik év elején letejedő E is beleszámítatik.

45. §. Egy városnak van 540000 pengő forint adóssága, melytől 6 procentjével fizeti a' kamatokat. Egy bankirház illendő bátorságosítás- és a' kamatok' pontos fizetésének feltétele mellett ígér ezen városnak minden 6 procentes adósságai kifizetésére 540000 pengő forintot költsön oly móddal, hogy ezen summától fizesse ugyan a' kamatokat 6 procentjével, még pedig mindig az esztendő elején; de ebből kamatba csak 5 procent fog tudatni, a' 6-dik procent pedig capitalis szállításra fordittatik. Így a' capitalis az 1 procentnek 37 esztendő alatt történő 38-szori befizetésével egészen le lesz szállítva. Kérdés, nem lehetne-e még kedvezőbb feltételt kérni, nevezetesen, hogy a' 6 procent kamatot kevesebb esztendőig, és így kevesebbszer, például csak 35-ször, vagy 36-szor, vagy talán még kevesebbszer kelljen fizetni; mert az 540000 pengő forintnak egy évi 6 procent kamatja 32400 pengő forint lévén, csak egy két évvel kevesebbbről kellene is azt fizetni, nem megvetendő haszon volna.

Ezen kérdésre a' közelebb kifejtett egyenlet segítségével így lehet megfelelni. Kiszámítjuk, hogy ha 38 esztendőben, még pedig az esztendő elején, mindenkor az 540000 forint' 1 procent kamatja, azaz 5400 forint, tétetik le a' capitalis szállítására, mennyire mennek mind ezek 37 esztendő alatt, vagyis a' 38-dik esztendő elejéig, ezt is beleértve, 's a' kamatokat 5 procentjével számítva; azért pedig 5 procentjével, mert a' Bankirház a' városnak is 5 procentre adván tulajdonkép pénzét — mivel a' 6-dik tőke szállításba tudatik, — nem lehet azt neki többé számítani. Ez szerint itt az $E = 5400$, a' $p = 5$, az $n = 37$ és így $n + 1 = 38$ lévén, (mivel a' legelső esztendő elején letejedő 5400 frt 37 esztendőben fog kamatozni), lesz:

$$S = \frac{100}{5} \times 5400 \left[(1,05)^{38} - 1 \right] = 108000 \cdot \left[(1,05)^{38} - 1 \right]$$

Innen: $\log. 1,05 = 0,0211893$. 'S ezt szorozván 38-czal

$\log.(1,05)^{38} = 0,8051934$; a' honnan a' szorszám tábla szerint

$(1,05)^{38} = 6,3854773$, melyből egyet levonván

$(1,05)^{38} - 1 = 5,3854773$, 's végre innen rendes szorzással,

mely itt könnyebb: $S = 108000 \times 5,3854773 = 581631,5484$ frt,

mely öszvegből ha az eltörlesztendő tőkét . . = 540000, . . . frtot

levonjuk, marad fenn . . = 41631 frt 33 kr.

Ennyivel megy tehát többre az eltörlesztendő tőkénél az a' summa, mely a' töke-törlesztés fejébe fizetendő 1 procent kamatnak \div 5400 conv. frtnak 38 egymásután következő évek' elején ugyanannyiszor lejendő befizetéséből, 's mindezeknek kamataiból, és kamatainak kamataiból kerekednék. 'S valóban úgy látszik, hogy ez oly nagy summával, mint 540000 forint, 37 esztendőn keresztüli tőzsérkedésből oly csekély nyereség, hogy az ember csudálkoznék rajta, mikép vállalhatja a' Bankir ily olcsón a' törlesztést, ha nem tudná, hogy a' Bankirok nyeresége az efféle tőzsérkedésen nem annyira abból áll, hogy egy-két esztendővel többről kívánják fizettetni a' törlesztő kamatokat, mint a' mennyiből a' törlesztendő töke kitelnék, hanem inkább abból, hogy ők nagy hitellel bírván, kisebb procentre kapnak pénzt, mint a' mennyire ők kiadnak. Például, tegyük fel, hogy az itt szóba forgó Bankir azt az 540000 conv. frtot, melyet ő az említett városnak — a' töke-törlesztésre fordítandó 1 procentet nem számítván — 5 procentre ad ki, valamely capitalistától 4 procentre vette fel: így neki minden esztendőben fenn marad nyereségül az 540000 frt tőkének egy procent kamata, azaz 5400 forint, mely summák, a' mint láttuk, 5 procentre kiadva, 37 esztendő alatt 581631 frt 33 krra szaporodnak, melyhez adván a' törlesztő-kamatokból fennmaradt 41631 frt 33 krt,

a' Bankir nyeresége ezen tőzsérkedésen . . . 623263 frt 06 krra

üt, látnivaló; mely summát ő egy kr tulajdon capitalisa nélkül csupán hitelével, és ezt csupán ezen egy, még pedig nagyokhoz képest igen csekély tőzsérkedésen nyert. Hány ilyen, sőt ennél tizszerte, sőt százszorta nagyobb tőzsérkedéseket tesz pedig egy Bankir a' mások pénzével! Nem csuda hát, ha az olyan Bankir, ki hitelét mind végig fenn tudja tartani, utoljára sok millióknak ura, 's

ebből tetszik meg, mily nagy capitalis a' hitel, melynek tényezői a' nagy tapasztalás, a' jó combinaló ész, és a' becsületesség.

46. §. Egy országnak van 1845 végén 300 000 000 ÷ háromszáz millió forint adóssága, 's 1846-ra és a' következő esztendőkre úgy akarják az ország'-rendei az ország' jövedelmét részint a' bevételek' növelése, részint a' kiadások' kevesítése által elintézni, hogy a' költségeken felül — beleértvén ezekbe a' háromszáz millió forint adósság kamatainak évenkénti fizetését is — minden esztendőben maradjon fenn a' jövedelemből egy bizonyos, minden évben egyenlő, és olyan nagy summa, hogy az évenként egy külön pénztárba (adósság-törlesztő cassa) tételvén, és 4 procentre a' legbátorságosabb helyekre, honnan a' kamatok pontosan bejőnek, kiadatván, kamatjaival, és kamatainak kamatjaival együtt 1878-nak a' végéig 300 000 000 forintra növekedjék; mely summával akkor az országnak minden adósságait le lehessen fizetni. Kérdés, milyen nagynak kell lenni az adósság-törlesztő pénztárba évenként betejendő summának, hogy a' mondott czél eléérések? Felelet: mint-hogy a' kérdéses summának az 1846-diki országos jövedelemből kell, a' mondottak szerint, először fennmaradni, 's annalfogva 1847 elején adathatik először kamatra, 's következőképen a' legelőször kiadott summa 1847 kezdetétől 1878 végéig, azaz 32 esztendeig kamatozik: tehát itt fog lenni $n = 32$, és így $n + 1 = 33$; továbbá $p = 4$; $S = 300\,000\,000$, E pedig az a' summa, melyet évenként a' törlesztő-cassába kell tenni, és a' melynek mennyiségét éppen ki akarjuk számítani. Azért is a' 43-ik §-ban kifejtett egyenletet úgy kell változtatni, hogy az E maga maradjon az egyenlet egyik oldalán, e' képen:

$$E = \frac{S}{\frac{100}{p} \left[\left(\frac{100+p}{100} \right)^{n+1} - 1 \right]}, \text{ azaz, e' jelen esetben:}$$

$$E = \frac{300\,000\,000}{\frac{100}{4} \left[\left(\frac{104}{100} \right)^{33} - 1 \right]} = \frac{12000000}{(1,04)^{33} - 1}. \text{ melynek kidolgozása így}$$

megy:

$\log. 1,04 = 0,0170333$, 's ezt szorozván csak elemi módon 33-mal, lesz

$\log.(1,04)^{33} = 0,5620989$, és így a' szorszám táblák szerint:

$(1,04)^{33} = 3,648371$, 's következőképen:

$(1,04)^{33} - 1 = 2,648371$, melynek mint osztónak logarithmusát:

$\log. [(1,04)^{33} - 1] = \log. 2,648371 = 0,4229789$ levonván az
 osztandó logaritmusból: $\log. 12000000 = 7,0791812$, a' maradék
 lesz a' hanyados logaritmusa. És így $\log. E = 6,6562023$, a' honnan
 a' tabellák szerint $E = 4531086,3$ frt. Ennyi tehát az a' summa, a'
 mennyit 1847-től fogva 1878-ig minden esztendő elején a' törlesztő
 cassába kell tenni, 's 4 procentre kiadni, hogy a' 300000000 forint
 adósság 1878 végén egészen el legyen törlesztve. — Az adósság-
 nak ily módon törlesztése angol találmány, 's a' jövedelemnek é-
 venként az adósság-törlesztésre félre rakott része angolul nevezte-
 tik *Sinking-Fund* nak, németül *Tilgungs-Fond* nak, fran-
 cziául pedig *Amortissement* nak; mivel az adósság lefizetését
 a' hajókázó Angol az adósság' elűjlesztésének, a' hadakozó
 Francia az adósság' megölésének, a' philosophus Német az adós-
 ság' semmivétételének, elpusztításának képzeli; mi pe-
 dig Magyarok mondjuk ugyanazt ősi számvetésünk módjától vett
 szólással az adósság' lerovásának vagy lefaragásának,
 mostanában pedig kezdjük hívni pénzügyi nyelven adósság' tőr-
 lesztésnek. De most fordítsunk egyet a' fentebbi kérdésem:

47. §. Egy másik országra nézve meg az a' kérdés, hogy ha
 minden esztendő elején 4516462 forintot tesz be a' törlesztő cassá-
 ba, és azt 5 procentre adhatja ki, hány esztendő kívántatik arra,
 hogy ezáltal $80000000 \div$ nyolczvan millió forint adósságát eltör-
 leszsze? Felelet: Itt az esztendők száma, n , lévén az ismeretlen
 mennyiség, melyet keresni kell, a' 43-dik §-ban kifejtett egyenle-
 tet így változtatjuk:

$$\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+1} = \frac{S}{\frac{p}{E}} + 1, \text{ mely egyenletnek jobb oldalát}$$

úgy teszszük a' logaritmusokkal számvetésre alkalmasbá, hogy
 először az első tagban az egyik osztót, $\frac{100}{p}$, megfordítva, $\frac{p}{100}$,
 szorzóvá teszszük fel az S mellé, 's ekkor az E maga maradván
 osztónak az első tagban, a' második tagot is, mely $= 1$, E alsójú
 törtszámmá változtatjuk, 's az első taggal összeadjuk, 's ekkor lesz:

$$\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+1} = \frac{\frac{p}{100} S + E}{E}, \text{ 's innen}$$

$$\log. \left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+1} = \log. \left\{ \frac{\frac{p}{100} S + E}{E} \right\}, \text{ azaz,}$$

$$\left[\log. (10^p + p) - \log. 10^p \right] \cdot (n + 1) = \log. \left(\frac{p}{100} S + E \right) - \log. E$$

's innen végre: $(n + 1) = \frac{\log. \left(\frac{p}{100} S + E \right) - \log. E}{\log. (10^p + p) - \log. 10^p}$, és ez az általános egyenlet minden ilyen kérdések' megfejtésére. Az itt feltett kérdésben tehát, hol $E = 4516462$, $p = 5$, $S = 80000000$, fog lenni:

$$(n + 1) = \frac{\log. \left(\frac{5}{100} \cdot 80000000 + 4516462 \right) - \log. 4516462}{\log. 105 - \log. 100},$$

melynek kidolgozása e'kép' következik. Elő-

szőr is $\frac{5 \times 80000000}{100} = 4000000$,

melyhez hozzá adván 4516462 ,

az osztandó első tagjában a' rekeszbeli szám lesz. . . = 8516462 .

Ez szerint már most: $\log. 8516462 = 6, 9302593$.

$-\log. 4516462 = -6, 6547984$.

marad = 0, 2754609, 's ez az osztandó;

az osztó pedig $= \log. 105 - \log. 100 = 0, 0211893$, és így

$$(n + 1) = \frac{0, 2754609}{0, 0211893}, \text{ vagy mind az osztót, mind az osztandót } 10$$

millióval szorozván, mi által a' hanyados' értéke meg nem változik, lesz:

$$n + 1 = \frac{2754609}{211893}, \text{ mely érték logaritmussal kiszámítva így lesz:}$$

$\log. 2754609 = 6, 4400599$

$-\log. 211893 = 5, 3261166$,

$= \log. (n + 1) = 1, 1139433$; a' honnan a' szorszám tábla szerint

$n + 1 = 13$, 's innen $n = 12$ esztendő.

48. Hátra volna még a' 43-dik §-ban kifejtett egyenletnek az a' változtatása, melyben a' kamatoztató factor, vagy a' mi ezzel mindig együtt jár, a' kamatláb volna ismeretlen. De ez olyan egyenlet fogna lenni, melyben az ismeretlen mennyiség nem csak egy, hanem több különböző hatalmakban fordulna elő, a' milyen egyenleteket az Algebrában keverteknek (impura aequationoknak) neveznek. Minthogy azonban azok között, kikre vagy mint Hallgatóimra, vagy mint Olvasóimra számíthatok, csak kevesen lesznek, kik az ilyen egyenletekből az ismeretlen mennyiséget kikeresni tudnák; ennek itteni kifejtése pedig igen nagy kitérés lenne útközből: mellözöm itt ezen negyedik esetet; annyal inkább, mivel ez gya-

korlati tekintetben is legkevésbé érdekes. Mert mi haszna lenne, ha meg tudnók is fejteni ezen kérdést: hány procentre kellene kiadni a' törlesztő-cassába évenként betejendő ennyi 's ennyi capitalist, E, hogy ennyi 's ennyi adósság, S, ennyi 's ennyi év alatt, n, el legyen törlesztve? Csakugyan nem lehetne azt bátoroságos helyre nagyobb kamatra kiadni, mint a' mennyire kiveszik. Lássunk tehát e' helyett inkább egy olyan esetet, melyben a' 43-dik §-ban kifejtett egyenletnek még hasznát lehet venni.

49. §. A' hol a' kamat, mihelyt annak lefizetésének ideje elmúlik, nem úgy nézetik többé mint kamat, hanem mint gyümölcsöző tőke, 's attól is foly a' kamat: ott az igazságtalanul birt jószágok' haszonvétele (usus fructus) is ugyanezen elv szerint ítéltetik meg. Peldául, ha valaki olyan jószágot, melynek tiszta jövedelme biróilag 2000 ÷ kétezer forintra becsültetett, 15 esztendeig birt igazságtalanul, 's ekkor az, igaz birtokosának visszaitéltetik, még pedig addigi hasznavételével együtt: ez a' hasznavétel nem úgy számítatik, hogy, ha 1 esztendei tiszta jövedelem 2000 forint, úgy 15 esztendei tiszta jövedelem = 15 × 2000 = 30000 forint: hanem, mivel az első esztendei jövedelmet már a' 2-dik és azt követő, a' második esztendei jövedelmet a' 3-dik és azt követő minden esztendőben, és így tovább, haszonra fordíthatta volna az igaz birtokos, ha ötet ezektől a' bitorló meg nem fosztotta volna: tehát mind ezeknek kamatai, és kamatainak kamatai is számítatnak az illető esztendőkről, feltétvén, hogy egy-egy évi jövedelem mindig az esztendő végén jő be; mivel ha szinte marad is kinn abból valami, más esztendőre, némely része még elébb bejő az esztendő végénél, meglehet már annak közepén vagy még elébb is. Ezek szerint a' hasznvételt, a' peldául felhozott esetben, hol $E = 2000$, $n = 14$ (mivel az első esztendő végén, és így legelőször bevett jövedelem, mely legtovább gyümölcsözőtt, 14 esztendeig gyümölcsözhetett csak), ha a' bíróság az évenkénti kamatokat 5 procentre határozta, következő egyenlet szerint számítjuk ki:

$$S = \frac{100}{5} \cdot 2000 \left[\left(\frac{105}{100} \right)^{15} - 1 \right] = 40000 \left[(1,05)^{15} - 1 \right].$$

Innen $\log. 1,05 = 0,0211893$, 's ezt 15-tel szorozva:

$$\log. (1,05)^{15} = 0,3178395, \text{ a' honnan a' szorzástáblák szerint} \\ (1,05)^{15} = 2,0789281, \text{ következésképpen}$$

$$(1,05)^{10} - 1 = 1,0789281, 's \text{ ezt szorozván } 40000\text{-rel}$$

$$\times 40000$$

fog lenni $S = 43157,1240000$; azaz, a' 15 esztendei haszonvétel = 43157 forint 07 $\frac{1}{2}$ kr. Ha pedig az interes 6 procentjével számíttatnék, úgy természetel még többre, nevezetesen 46552 forintra menne ezen 15 esztendei haszonvétel, és így 16552 forinttal többre, mint ha az évenként bevett jövedelmek kamatai nem számíttatnak. 'S már csak ebből a' kis példából is látnivaló, hogy hazánkban, hol az igazságtalanul elfoglalt és bitorlott jószágoknak évenkénti jövedelme, ha a' bitorló a' pert elveszti, csak egyszerűen, minden kamat nélkül ítéltetik meg, az igazságtalan foglalás, és az igazságtalanul elfoglalt jószág iránt indított pernek minél tovább húzása, nem utolsó speculatio. De látnivaló egyszersmind az is, hogy az ilyen erkölcsrontó, és az igaz birtokos kárával az igazságtalan bitorlót jutalmazó törvényes szokást minél előbb eltörölni, és igazságos törvénnyel váltani fel, a' társaságnak nagyon érdekében van.

50. Egy jószágra két vevő alkuszik, egyik ígér érte a' birtokosnak 90000 ÷ kilenczven ezer forintot oly feltétellel, hogy azt most mindjárt lefizeti; a' másik többet ígér 20000 forinttal, azaz ígér 110000 forintot, de oly feltétellel, hogy ezen öszvegnek most csak egy tizedrészét fizeti le 11000 forintban, mához esztendőre ismét $\frac{1}{10}$ részét, mához két esztendőre újra egy tizedrészét, és így tovább mind addig, mig mához 9 esztendőre a' 110000 forint egészen le lesz fizetve. Bátorság ez utóbbinál tökéletes van. Az, a' ki a' jószágot eladja, különben is kamatra akarja kiadni a' pénzt igen bátorságos helyre, 's annál fogva nem több mint 5 procentre, és így csak attól függeszti fel, melyiknek adja jószágát a' két vevő közül, hogy melyik ígért többet, és ezt tőlünk akarja megtudni. Mit felelünk neki? Felelet: hogy a' két ígért summát öszve hasonlíthassuk egymással, szükség volna a' határidőnkint fizetendő egyenlő részek közül mindegyiket discontiroznunk annyi esztendőről, a' hány mulva mindegyik fizettetni fog; vagyis kiszámítunk, mit ér jelenleg mindegyik azok közül, azután mind ezen discontirozott summákat öszveadnunk, 's ezeknek öszvegét hasonlitanunk egybe a' másik vevőtől ígért, 's most mindjárt leteendő summával, hogy megtessék, melyik nagyobb a' másiknál, 's mennyivel. De itt is nyűgös volna ez a' részenkénti discontirozása az évenként fizetendő részeknek, és a' discontirozottoknak öszvesummázása. Szerkeszszünk hát itt is egy olyan egyenletet, mely szerint a' fát, úgy

szólván, egy csapással vágjuk le. Legyen e' végre — hogy egyenletünk a' fentebbiekkel egybefüggjön — az évenként fizetendő egyegy rész (rata), melyet az ilyen feladatban úgy kell néznünk, mint olyan summát, melyre valamely tőke bizonyos számú esztendőök alatt, bizonyos procentre kiadva, kamatjaival, 's kamatjainak kamatjaival növekedett = U; az az eredeti tőke pedig, mely e'képen U-vá növekedett, legyen itt is = E, mint szintén a' kamatoztató tényező is, $\frac{100+p}{100}$, legyen = f, az esztendőök száma pedig, melyek alatt az E U-vá növekedik, = n: így a' discontirozásnak a' 38-dik §-ban kifejtett ezen szabálya szerint: $E = \frac{U}{f^n}$, a' 0, 1, 2, 3, 4,

stb. évekről sorban discontirozott rá tá k, és ezeknek s u m m á j a között, mely utolsót itten különbség kedvéért görög Σ (sigma) betűvel kívánunk kitenni, az egyenletet e'kép fejezhetjük ki:

$$\Sigma = \frac{U}{f^0} + \frac{U}{f^1} + \frac{U}{f^2} + \frac{U}{f^3} + \frac{U}{f^4} + \dots + \frac{U}{f^n}, \text{ hol a'}$$

jobb oldalon az első tagból az osztót, $f^0 = 1$, el is hagyhatjuk, mivel $\frac{U}{1} = U$, 's mivel az U-t null esztendőről discontirozni annyira, mint azt teljességgel nem discontirozni, hanem csak meghagyni úgy a' mint van. 'S így lesz:

$$\Sigma = U + \frac{U}{f^1} + \frac{U}{f^2} + \frac{U}{f^3} + \frac{U}{f^4} + \dots + \frac{U}{f^n}. \text{ Mely egyenletet, ha elébb mind két felől elosztjuk, f-el e'képen:}$$

$$\frac{\Sigma}{f} = \frac{U}{f} + \frac{U}{f^2} + \frac{U}{f^3} + \frac{U}{f^4} + \frac{U}{f^5} + \dots + \frac{U}{f^{n+1}},$$

azután pedig ezen hanyadost $\frac{\Sigma}{f}$, mely kisebb mint $\frac{\Sigma}{1}$, azaz kisebb mint Σ , mivel $f > 1$, levonjuk a' Σ -ből következőképen:

$$\Sigma - \frac{\Sigma}{f} = \left\{ \begin{array}{l} U + \frac{U}{f} + \frac{U}{f^2} + \frac{U}{f^3} + \frac{U}{f^4} + \dots + \frac{U}{f^{n-1}} + \frac{U}{f^n} \\ - \frac{U}{f} - \frac{U}{f^2} - \frac{U}{f^3} - \frac{U}{f^4} - \dots - \frac{U}{f^{n-1}} - \frac{U}{f^n} - \frac{U}{f^{n+1}} \end{array} \right.$$

's így, minthogy az egyenlet jobb oldalán, az első és az utolsó tagon kívül, a' többiek párával mind lerontják egymást, fog lenni:

$$\Sigma - \frac{\Sigma}{f} = U - \frac{U}{f^{n+1}}, \text{ 's innen a' közös szorzót mind kétfelől elválasztván:}$$

$\Sigma \left(1 - \frac{1}{f}\right) = U \left(1 - \frac{1}{f_{n+1}}\right)$; innen pedig végre:

$$\Sigma = \frac{U \left(1 - \frac{1}{f_{n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{f}}; 's \text{ ez szerint nincs egyéb hátra, mint ez.}$$

hogy itt az f helyett mindenütt annak értékét, a' kamatoztató tényezőzt tegyük, 's mindjárt készen lesz egyenletünk. Felül tehát e' helyett: f^{n+1} ezt tévén $\left(\frac{100+p}{100}\right)^{n+1} = \frac{(100+p)^{n+1}}{(100)^{n+1}}$, fog lenni:

$$\frac{1}{f^{n+1}} = \frac{1}{\frac{(100+p)^{n+1}}{(100)^{n+1}}} = \frac{(100)^{n+1}}{(100+p)^{n+1}} = \left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1}; \text{ alul}$$

pedig lesz: $\frac{1}{f} = \frac{1}{\frac{100+p}{100}} = \frac{100}{100+p}$, 's innen:

$$1 - \frac{1}{f} = 1 - \frac{100}{100+p} = \frac{100+p}{100+p} - \frac{100}{100+p} = \frac{p}{100+p};$$

's az $\frac{1}{f_{n+1}}$ és $1 - \frac{1}{f}$ helyett ezen értékeket tévén, fog lenni:

$$\Sigma = \frac{U \left[1 - \left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1}\right]}{\frac{p}{100+p}}, \text{ vagy minthogy törtszámmal osztani}$$

ni annyi, mint ugyanazzal megfordítva szorzani: tehát utoljára lesz:

$$\Sigma = \frac{100+p}{p} \cdot U \left[1 - \left(\frac{100}{100+p}\right)^{n+1}\right]. *)$$

51. §. Ezen általános egyenlet szerint már könnyű megfejteni a' fentebbi kérdést. Ott ugyanis az évenként fizetendő, és 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 esztendőről sorba egymásután discortirozandó ráta

*) Ezen egyenletet, hol a' Σ az E azon $(n+1)$ különböző értékeinek summáját jelenti, melyek kijönek, ha az alapegyenlet' ezen formájában:

$$E = \frac{U}{\left(\frac{100+p}{100}\right)^n}, \text{ az } n\text{-nek ezen értékeket: } 0, 1, 2, 3, 4 \dots n, \text{ adjuk sorban}$$

egymásután, jó lesz összehasonlítani a' 43-dik §-ban kifejtett egyenlettel, hol az S az U' azon $(n+1)$ különböző értékeinek összegét fejezi ki, melyek kijönek, ha az alapegyenlet' ezen formájában: $U = E \left(\frac{100+p}{100}\right)^n$ az n -nek ezen értékeket: 0, 1, 2, 3, 4 ... n, adjuk sorban egymásután, 's jól megjegyezni, és

a' 110000 forintnak egy tizedrésze, azaz $U = 11000$ forint, továbbá $p = 5$, $n = 9$ lévén, az általános egyenlet ezen különös esetben így módosul:

$$\Sigma' = \frac{105}{5} \cdot 11000 \cdot \left[1 - \left(\frac{100}{105} \right)^{10} \right] = 231000 \cdot \left[1 - \left(\frac{100}{105} \right)^{10} \right]. \text{Innen:}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log. 100 = 3,0000000 - 1 \\ - \log. 105 = 2,0211893 \end{array} \right\} \text{'s innen a' maradék} =$$

$$\log. \left(\frac{100}{105} \right) = 0,9788107 - 1, \text{'s ezt } 10\text{-szer véve} =$$

$$\log. \left(\frac{100}{105} \right)^{10} = 9,7881070 - 10 = 0,7881070 - 1; \text{ a' honnan}$$

$$\left(\frac{100}{105} \right)^{10} = 0,6139133, \text{ melyet levonván } 1\text{-ből, fog lenni:}$$

$$1 - \left(\frac{100}{105} \right)^{10} = \left\{ \begin{array}{l} 1,0000000 \\ - 0,6139133 \end{array} \right\} = 0,3860867, \text{'s ez az egyik tényező,}$$

mely szoroztatván a' másikkal, t. i. 231000-rel (mi itt a' rendes úton még könnyebben megeshetik, mint logaritmussokkal), utoljára lesz:

$\Sigma = 89186,0277$ forint; azaz a' fentebb említett módon rátánkint fizetendő 110000 forint jelenleg nem ér több-

bet, mint 89186,0277 forintot,

melyet levonván a' másik vevő által most

mindjárt leteendő 90000,0000 forintból,

marad fenn 813,9723 forint,

azaz 813 forint 58 és $\frac{1}{3}$ kr. 'S így a' feltett kérdésre megfeleltünk,

és nyilván van, hogy ámbár a' rátánkint fizetést ígérő 20000 forinttal látszik is többet ígérni a' másik vevőnél, mégis annál valószínűséggel kevesebbet ígért 813 forint 58 $\frac{1}{3}$ krral.

52 §. A' határidőnkint fizetendő részek' egész summája' jelenlegi valóságos értékének kiszámítása nemcsak az adás-vevésben előforduló, 's a' fentebbihez hasonló kérdések megfejtése körül használható, hanem az ugynevezett vitalitiumok (Leibrenten) körül is. Vannak t. i. sok országban olyan intézetek, melyek magokra vállalják, hogy ha valaki náluk bizonyos summa pénzt, mint kamatozó tőkét letesz, neki attól egész életében fizetnek éven-

benyomni emlékeztünkbe, miben egyeznek meg ezek, 's miben különböznek egymástól. Mi végre ide írjuk mind a' kettőt egymás mellé:

$$S = \frac{100}{p} \cdot E. \left[\left(\frac{100+p}{100} \right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$\Sigma = \frac{100+p}{p} \cdot U. \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^{n+1} \right].$$

kint bizonyos, még pedig nagyobb summát, mint a' mennyi a' letett tőkének egy évi kamatja, de oly feltétellel, hogy az ő halála után a' letett tőke, vagy legalább annak az a' része, melyet az évenként fizetett nagyobb kamatok fel nem emésztettek, az intézeté legyen. Az ilyen évenkénti fizetéseket nevezik barbar-latinul *vitalitiumoknak*, németül *Leibrenten*, magyarul mondhatjuk *évi járandóságoknak*.*) Ilyen módon biztosítanak magoknak minden gond nélküli 's minél kényelmesebb életet főképp az olyan capitalisták, kiknek sem örököseik nincsenek, sem arra, hogy capitalisaikkal halálok után attyokfijait, vagy jó barátaikat boldogítsák, vagy pedig azokat valami jótékony intézetek felállítására hagyják, semmi nemes vonzalmat magokban nem érzene, 's ennél fogva azon igyekeznek, hogy míg élnek, nemcsak kamatait capitalisaiknak, hanem ezeket magokat is ha lehet egészen felemészsék; úgy mindazáltal, hogy jövedelmök a' capitalis fogydogálása miatt egész halálokig soha ne csökkenjen. Ez igen szép találmány, ha istennek tetszik! Azonban mi itt e' dolgot nem erkölcsi, hanem csupán számvetési oldaláról tekintjük. Egy capitalista azt kérdezi, milyen nagy capitalist kellene neki az intézet pénztárába betenni, hogy onnan évijárandóság czim alatt egész haláláig évenként 6000 ÷ hatezer forintot húzhasson? Az első, mit itt az intézetnek meg kell határoznia, ez: hány esztendeig élhet még el a' kérdéses capitalista. Ezt ugyan egész bizonyossággal egy halandó sem határozhatja meg; de azért az efféle nyereszkeséssel foglalkozó urak az emberi életidő különböző szakaszaiban történni szokott kisebb nagyobb halálózásoknak kitapogatott szabályain, és a' kérdéses egyén' életidején, 's ugyanannak test- és véralkatának, 's egészsége állapotjának szoros megvizsgálásán épülő hihetőségi számvetéssel úgy ki tudják számítani ki meddig él, hogy ha tőkéletesen el nem találják is azt külön-külön mindegyik egyénre nézve, de a' sokon együtt a' + és — hibák egymást szinte egészen kiegyenlítik, 's ennél fogva tudják számvetéseiket úgy intézni, hogy ha néha egyen kettőn vesztenek

*) Az olyan intézeteknek, melyek bizonyos, az ő pénztárukba vagy egyszerre, vagy évenként bizonyos meghatározott ideig betejendő capitalisok fejébe, vagy annak, a' ki a' capitalisokat betette, vagy másnak valakinek, például annak özvegyének, vagy gyermekének, vagy bizonyos számú esztendőkre, vagy egész életökre bizonyos évi járandóságot biztosítanak, sok különböző nevei vagynak. Ezeket itt mind előszámolni, célunkon kívül esik, 's elégnek tartjuk, egyet közülök például megemlíteni.

is, de az egész foglalkozáson, bármily kedvezőknek lássanak is a' feltételek a' másik félnek, mindig szép nyereségök van. Tegyük fel hát, hogy az intézet kiszámította, mikép a' járandóságot vevő capitalista, egy 65 éves férjfiú, minden hihetőséget öszvevéve, még élélhet 18 esztendeig. Már most az lesz a' kérdés, hogy, ez szerint az intézet 18 egymásután következő esztendőekben, mindenkor az esztendő elején tartozván a' járandóságvevőnek egy-egy esztendei költségére hat-hat ezer forintot fizetni, ha mindegyik ezen évenként fizetendő járandóságok közül annyi esztendőről, a' hány mulva fizettetni fog, discontiroztatik, 's mind ezek a' discontirozott járandóságok öszvesummáztatnak, mennyire megy mind ezeknek öszvege? Mert a' mennyire ez megy, annyit érnek jelenleg mind ezek a' járandóságok öszvesen, és annyi capitalist kell betenni a' vevőnek. De, látnivaló, hogy ha a' kamat több procenttel számittatik, úgy kisebbnek, és megfordítva, ha a' kamat kevesebb procenttel számittatik, úgy nagyobbnek kell lenni a' capitalisnak, hogy az bizonyos számú esztendők alatt egy bizonyos summára, például 6000 forintra növekedjék, és így hogy az intézetre nézve annál hasznosabb, minél kevesebb procenttel számittatik a' kamat a' discontirozásban; mivel így annál nagyobbra üt ki a' vevő által betejendő capitalis. Ha tehát a' rendes kamatláb, mely szerint a' pénzt bátor-ságos helyre ki lehet adni, teszem, 5 procent, az intézet számítja azt a' discontirozásban, például 4 procentjével. Ezek szerint már a' tudakozódó capitalistának ezen kérdésre: milyen nagy capitalist kell neki betenni, hogy egész életében 6000 forint járandóságot húzhasson évenként az intézet' pénztárából; mivel itt az ismeretlen mennyiség, mely kerestetik, a' fizetendő járandóságok jelenlegi öszves értéke = Σ , továbbá a' vevő határozata szerint $U = 6000$, az intézet határozata szerint pedig $p = 4$, és $n = 17$ (mivel az 1-ső esztendő elején fizetendő járandóságot 0, a' 2-dik elején letejedőt 1, a' 3-dik elején letejedőt 2 esztendőről kellett discontirozni, és így tovább mindeniket egy-egy esztendővel kevesebbről, mint a' hanyadik esztendő elején fizettetik, a' 18-dik és utolsó esztendő elején fizetendő járandóság 17 esztendőről fog discontiroztatni), tehát az egyenlet a' kérdés megfejtésére így lesz:

$$\Sigma = \frac{104}{4} \cdot 6000 \cdot \left[1 - \left(\frac{100}{104} \right)^{18} \right] = 156000 \cdot \left[1 - \left(\frac{100}{104} \right)^{18} \right];$$

melyből, az 51-dik § szerint számítva, kijő, hogy $\Sigma = 78993,89$ forint, azaz 78993 forint 53 $\frac{4}{10}$ kr. Ennyit kell hát letenni a' járan-

dóság' vevőnek, hogy egész életében minden esztendő elején 6000 frtot húzhasson az intézet' cassájából. Hogy az intézetnek az efféle foglalkozásokban általjában véve mindig nyeresége van, azt már említettük. De hát a' járandóság vásárlónak mi haszna van itt? Az, hogy ha ő tőkénének csupán kamataiból akarna élni: úgy mikor az intézet neki a' discountrozásban a' kamatot 4 procentjével számítottta, ő bizonyosan 5 procentnél többre nem adhatván ki tőkétjét bátorságos helyre, a' 78993 frt $53 \frac{4}{10}$ kr tőkétől évenként csak 3949 frt $41 \frac{67}{100}$ krt húzna kamat czim alatt; a' midőn így, a' capitalist is emészelve, évenként 6000 frtot, és így másfél annyinál is többet húz járandóság czim alatt, 's annál kényelmesebben élhet. Egyébiránt

53. §. A' járandóság' vevő nem csak így teheti fel a' kérdést: mennyi capitalist kell neki betenni, hogy egész életében évenként ennyi 's ennyi summát húzhasson az intézet' pénztárából; hanem így is: ha ennyi 's ennyi tőkét beteszen, mennyi járandóságot fog attól kapni évenként. Peldául, a' fentebbi capitalistista megértvén, hogy ha 6000 forint járandóságot akar húzni évenként, úgy 78993 frt $53 \frac{4}{10}$ krt kell betenni, azt feleli, hogy neki kerekszám 90000 forintja van; hát ha azt mind beteszi, mennyi fog neki jární évenként? Itt a' Σ ki van adva = 90000 frt 's a' helyett az U az ismeretlen és keresendő mennyiség; azért is az egyenletet $90000 =$

$\frac{104}{4} U \left[1 - \left(\frac{100}{104} \right)^{18} \right]$, úgy kell változtatni, hogy az U magában legyen az egyenlet egyik oldalán, e'képen: $U = \frac{90000}{\frac{104}{4} \left[1 - \left(\frac{100}{104} \right)^{18} \right]}$,

's a' jobboldalt alul felül 4-gyel szorozva: $U = \frac{360000}{104 \left[1 - \left(\frac{100}{104} \right)^{18} \right]}$,

melyből, a' fentebbiek szerint kidolgozva, kijő, hogy $U = 6835,972$ forint, azaz 6835 frt $58 \frac{32}{100}$ kr. Ennyi lesz hát a' járandóság, melyet a' mi capitalistánk egész életében évenként vonni fog, ha 90000 forint tőkét teszen be az életbiztosító-intézet pénztárába.

54. §. Végezetre, egy másik kisebb capitalistista, kinek nincs több kiadni való tőkéje 10000, azaz tíz ezer forintnál conv. pénzben, melyet, ha kamatra akarna kiadni, biztos, és olyan helyre, honnan a' kamatok' pontos fizetését lehetne reményleni, 5-nél több procentre ki nem adhatná; miszerint neki évenként csak 500 pengő forint jövedelme lenne; de ezt keveselli, hogy belőle eddigi ház-

tartásához 's rangjához képest minden gond nélkül élhessen. Hanem 700 pengő forintot e' végre tisztességesen elégnék tartana. Azt kér-di tehát az intézettől, hogy ha ő 10000 pgő frt tőkéjét betenné, hány esztendeig húzhatna attól minden esztendő elején hét-hét száz pgő forint járandóságot, hogy így, ha látánda, hogy ő annál több éveket magának nem ígérhet, sőt talán annyit sem, úgy tőkéjét betegy-e 's minden gond nélkül éljen. Itt, látnivaló, hogy a' tuda-kozódó capitalista határozata szerint $\Sigma = 10000$, $U = 700$ pgő fo-rint lévén; ha az intézet 4 procenttel discontiroz $= p$, csak az esz-tendők száma n vagy $(n+1)$ lesz az ismeretlen és keresendő meny-nyiség; és így, hogy a' fentebbi általános egyenletet ezen kérdés megfajtására először is úgy kell változtatni, hogy az $n+1$, maga maradjon az egyik oldalon; azután a' Σ , U és p általános jegyek he-lyett kell tenni ezeknek a' jelen kérdésbeni értékelt; 's végre az e'-kép' módosult egyenletben kijelentett számvetési munkálatokat vég-hez kell vinni; így a' kérdés meg lesz fejtve. Először is tehát, hogy ezen egyenletben: $\frac{100+p}{p} \cdot U \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^{n+1} \right] = \Sigma$, az $(n+1)$ maga maradjon az egyik oldalon, im e' változtatásokat teszszük:

$$1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^{n+1} = \frac{\Sigma}{\frac{100+p}{p} U};$$

azután az egyet általtéve,

és a' tagok' jegyeit ellenkezőre változtatva:

$$\left(\frac{100}{100+p} \right)^{n+1} = 1 - \frac{\Sigma}{\frac{100+p}{p} U};$$

a' jobb oldal második tagját

alul felül p -vel szorozva; 's egyszersmind az 1-et is $(100+p) U$ alsóju törtszámmá változtatva:

$$\left(\frac{100}{100+p} \right)^{n+1} = \frac{[(100+p) U - p \Sigma]}{(100+p) U};$$

továbbá, mindkét oldal-nak logaríthmusát véve:

$$\log. \left(\frac{100}{100+p} \right)^{n+1} = \log. \left[\frac{(100+p) U - p \Sigma}{(100+p) U} \right],$$

azaz:

$$(\log. 100 - \log. (100+p)) \cdot (n+1) = \log. ((100+p) U - p \Sigma) - \log. ((100+p) U),$$

's

$$\text{innen végre: } (n+1) = \frac{\log. ((100+p) U - p \Sigma) - \log. ((100+p) U)}{\log. 100 - \log. (100+p)}.$$

Eddig az első munka. Már most ezen egyenletbe a' p, U, és Σ helyett, ezeknek a' fenforgó kérdésbeni értékeiket tévén, fog lenni:

$$n + 1 = \frac{\log. ((104 \times 700) - 4 \times 10000) - \log. (104 \times 700)}{\log. 100 - \log. 104}, \text{ azaz:}$$

$$n + 1 = \frac{\log. (72800 - 40000) - \log. 72800}{\log. 100 - \log. 104} = \frac{\log. 32800 - \log. 72800}{\log. 100 - \log. 104}.$$

Eddig a' második munka. Utoljára az ezen egyenletben kijelentett számítások' végrehajtásai így következnek:

$$\begin{array}{l} \log. 32800 = 4,5158738 \\ - \log. 72800 = -4,8621314 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \log. 32800 \\ - \log. 72800 \end{array}} \right\} = -0,3462576 = \text{osztandó}^*) \\ \log. 100 = 2,0000000 \\ - \log. 104 = -2,0170333 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \log. 100 \\ - \log. 104 \end{array}} \right\} = -0,0170333 = \text{osztó}^*).$$

És így: $(n+1) = \frac{-0,3462576}{-0,0170333}$. Mely osztást ha logaritmussal

akarunk véghezvinni, czélelles szám logaritmusát kellene másik czélelles szám logaritmusából levonni; egy pelda arra, mit a' 33-ik §-ban az 1-ső szám alatt említettünk, hogy t. i. czélelles számok' logaritmusai vegyülnek számvetésünkbe. De mi, az szerint, a' mint a' felhozott helyen is mondtuk, semmit sem aggódván azon, milyenek lehetnek a' czélelles számok' logaritmusai, minthogy a' hanyados tökéletesen ugyanaz, ha osztó és osztandó mindenik czélelles, mintha mindenik czélirányos volna, vesszük mind a' kettőt czélirányosnak, hogy logaritmusaikat szorszámtábláinkban megtaláljuk; még pedig, hogy minél rövidebben irhassuk mind magokat ezen számokat, mind logaritmusaikat, vesszük mind az osztandót, mind az osztót tíz-milliódrészek helyett ugyanannyi egészeknek, miáltal a' hanyados értéke nem változik, 's akkor számvetésünk így megyen:

$$\begin{array}{l} \log. 3462576 = 6,5393994 \\ - \log. 170333 = 5,2312988 \\ \hline \log. (n+1) = 1,3081006, 's innen \\ (n+1) = 20,328275. \end{array}$$

Ez szerint a' mi capitalistánk, ha beteszi ma a' 10000 frtot, 4 procenttel számíttatván a' discontirozás, mától kezdve 20 esztendeig kap minden esztendő elején hét-hét száz forint járandóságot, sőt még a' 21-dik esztendő' elején is kikapja abból az illetőséget kevés

*) *) Itt csak az algebrai kivonás szokott módja szerint vesszük ki az osztó' logaritmusát az osztandóéból; miért? az okát könnyű általlátni.

hiján $\frac{1}{3}$ rész évre, azaz szinte négy hónapra, ha ugyan addig élél; ha tovább él, ő lássa, hogy él.

55. §. A' 4-dik kérdést, hol a' p kerestetnék, itt is fejtetlen hagyjuk, mint fentebb a' 48-dik §-ban cselekedtünk, és éppen azon az okon. Hanem a' helyett fejtsünk meg itt inkább még egy a' legközelebbihez hasonló kérdést, de a' melyben valami különösség fogja magát előadni, mi még eddig logaritmussokkal számvetéseinkben elő nem fordult. — Kérdés tehát, ha valaki az életbiztosító-intézet' — vagy, helyesebben szólván, az embernek egész életére jövedelmet-biztosító-intézet' (mert életét az embernek, mely minél rövidebb lesz, az intézetnek annál jobb, ez éppen nem biztosítja), — ha, mondom, valaki az ilyen intézet' pénztárába betesz 22000 forintot, hány esztendeig húzhat onnan évenként 800 forintot, a' kamatokat a' discontirozásban 4 procentjével számítja? Az egyetlen ezen kérdés' megfejtésére, a' közelebbi § szerint, így lesz:

$$(n+1) = \frac{\log. (104 \times 800) - 4 \times 22000}{\log. 100 - \log. 104} - \log. (104 \times 800), \text{ azaz:}$$

$$(n+1) = \frac{\log. (83200 - 88000) - \log. (83200)}{\log. 100 - \log. 104}, \text{ azaz;}$$

$$(n+1) = \frac{\log. (-4800) - 4,9201233}{-0,0170333}$$

Ez szerint itt a' keresett esztendő szám úgy jő ki, ha a' (—4800)-nak logaritmusból levonunk 4,9201233-t, 's a' maradékot elosztjuk (—0,0170333)-el. Ugyde (—4800)-nak a' logaritmusa képtelenség, következésképen az egész mennyiség is melybe ezen képtelenség úgy van beleszőve, hogy más hasonló képtelenség, mely ezt az algebra törvényei szerint valahogy elenyészethetné, nincsen, azaz, számvetésünk egész eredménye az (n+1) is képtelen szám. A' mi oda mutat, hogy itt a' kérdésben kell valami képtelenségnek lappangani, ha szinte talán azt első tekintettel észre nem vettük is. Ugy van! mert ez a' kérdés: ha valaki 22000 forintot tesz be, hány esztendeig húzhat attól 800 forint járandóságot évenként, a' kamatot 4 procenttel számítván, azt teszi fel, hogy a' 800 forint több mint a' 22000 forintnak évenkénti kamatja, és így hogy évenként több adatván ki mint a' kamat, a' tőke is évről évre fogy, mignem utoljára egészen elfogy, 's az éppen a' kérdés, hány esztendő alatt fog az egészen elfogyni. Ugyde 22000 forintnak évenkénti kamatja 4 procentjével 880 forint lévén, a' 800 forint járandóságra nemhogy a' tőkéből is menne fel évenként valami, de még

a' kamatból is megmarad, és a' tőkéhez járul évenként 80 forint; és így a' tőke nem hogy fogyyna, hanem inkább szaporodik. Azt kérdeni tehát, hogy ily kezelés mellett hány esztendő alatt fogy el a' tőke, képtelenség, mit a' számvetés azzal ad tudtunkra, hogy az esztendők számát, melyet keresünk, képtelen számmal fejezi ki; 's ímé itt egy pelda a' 33-dik § végén a' 3-dik szám alatt említett esetre, melyben czélelles szám logaritmusa elegyedik számvetésünkbe.

56. §. Hogy az efféle számvetések körül semmiben fenn ne akadjunk, szükség itt utoljára még egyet megjegyeznünk. Tudjuk,

hogy e' két egyenlet: $S = \frac{100}{p} E \left[\left(\frac{100+p}{100} \right)^{n+1} - 1 \right]$, és

$$\Sigma = \frac{100+p}{p} U \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^{n+1} \right], \text{ a' 43-}$$

dik és 50-dik §-ok szerint e' két hosszabb egyenletből vonattak össze:

$S = E f^n + E f^{n-1} + E f^{n-2} + E f^{n-3} + \dots + E f + E$, és

$$\Sigma = U + \frac{U}{f} + \frac{U}{f^2} + \frac{U}{f^3} + \frac{U}{f^4} + \dots + \frac{U}{f^n}.$$

Az elsőre nézve e' két egyenlet közül mindegy, akár ma tétessék le a' legelső az évenként fizetendő ráták közül = E, 's azután a' többi is mindig az esztendő elején; akár pedig az első mához esztendőre, 's azután a' többi is mindenkor az esztendő végén. Az n mind a' két esetben egyformán az esztendők azon számát jelenti, a' hányig gyümölcsozik a' legelőször letett ráta, 's az utolsó esztendő végén letett ráta mind a' két esetben egyformán pusztla, vagy gyümölcstelen; és így az összesummázandó rend mind a' két esetben ezen kezdődik: $E f^n$, 's az n lépcsőnkint egygyel-egygyel fogyván, ezen végződik: $E f^0$ azaz csak E. Másképp van a' dolog a' második egyenletre nézve. Itt ha az első ráta, például a' terminusonkinti fizetésben, nem ma, az első esztendő' elején, hanem mához esztendőre, az első esztendő' végén, 's azután a' többi is mindig az esztendő' végén fizettetik; úgy a' discontirozott ráták összevét kifejező rendből elől elmarad az U, 's e' helyett utól járul ahoz a' következő tag, melyben t. i. az U egygyel több esztendőről van discontirozva, mint volt az utolsó ráta akkor, midőn minden ráták az esztendők' elején fizettek; most ezt az egygyel több esztendő' számát nevezvén n-nek; mivel az utolsó ráta ennyiről discontiroztatik. Misze-

rint ha itt a' discontrozott ráták' egész summáját zsidó ψ (sin) betűvel nevezzük el, egyenletünk ez fog lenni:

$$\psi = \frac{U}{f} + \frac{U}{f^2} + \frac{U}{f^3} + \dots + \frac{U}{f^{n-1}} + \frac{U}{f^n}, \text{ hol, látnivaló, } (n-1)$$

annyit tesz, mint a' Σ -át kifejező rendben az n , az n pedig annyit, mint ugyanazon rendben az $(n+1)$. — Már ha ezen egyenletet mind két felől szorozzuk f -el, lesz:

$$f\psi = U + \frac{U}{f} + \frac{U}{f^2} + \dots + \frac{U}{f^{n-2}} + \frac{U}{f^{n-1}}; \text{ azután pedig ha az } f\psi\text{-ből, mely nagyobb mint } \psi, \text{ mivel } f > 1, \text{ levonjuk a' } \psi\text{-t, fog lenni:}$$

$$f\psi - \psi = \begin{cases} U + \frac{U}{f} + \frac{U}{f^2} + \frac{U}{f^3} + \dots + \frac{U}{f^{n-1}} \\ - \frac{U}{f} - \frac{U}{f^2} - \frac{U}{f^3} - \dots - \frac{U}{f^{n-1}} - \frac{U}{f^n}; \end{cases}$$

mely egyenlet jobb oldalán az első és utolsó tagon kívül a' többiek párjával mind lerontván egymást, fog lenni:

$$f\psi - \psi = U - \frac{U}{f^n}. \text{ Innen a' közös tényezőt mind kétfelől el-}$$

$$\text{választván, } \psi [f - 1] = U \left[1 - \frac{1}{f^n} \right], \text{ innen ismét: } \psi = \frac{U \left[1 - \frac{1}{f^n} \right]}{f - 1},$$

melyből végre, ha az f helyett ennek értékét, $\frac{100+p}{100}$, teszszük,

$$\text{lesz: } \psi = \frac{100}{p} \cdot U \cdot \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^n \right]. \text{ Mely egyenletet ha ama' má-}$$

$$\text{sikkal: } \Sigma = \frac{100+p}{p} \cdot U \cdot \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^{n+1} \right] \text{ összehasonlitunk, mi-}$$

vel, a' mint láttuk, a' ψ értékében az n épen annyit tesz, mint a' Σ értékében $(n+1)$: látnivaló, hogy a' két utolsó tényező mindkettőben egyenlő, az első pedig amabban kisebb lévén, mint ebben, $\left(\frac{100}{p} < \frac{100+p}{p} \right)$, az egész tény is kisebb amaz mint ez. ($\psi < \Sigma$.)

Ugy van! mert amabban minden ráta egy-egy esztendővel többről discontroztatik, mint ebben, és így mindeniknek nagyobb hujja esvén, az esztendők' végén fizetendő discontrozott rátáknak egész summájok is kisebb, mint azoké, melyek az esztendők' elején fizetnek. Lássunk erre egy példát. Tegyük fel, hogy az a' tőkepénzes, kinek az 52ik § szerint, hogy évenként 6000 forintot oly mód-

dal húzhasson, miszerint az első járandóságot mindjárt a' betételkor, 's azután a' többi is mindenkor az esztendő' elején kapja, 78993 frtot 89 denárt kellene betenni, azt mondaná, hogy ő magát egy esztendei költséggel már ellátta, 's annálfogva a' betejendő summát oly móddal kívánja meghatároztatni, miszerint az első járandóság 6000 forintban a' betétel után esztendővel, 's azután a' többi is mindig az esztendő' végén fizetessék; kérdés: milyen nagy lesz akkor a' betejendő summa? Felelet: akkor a' közelebb kifejtett egyenlet szerint fog lenni:

$$\varpi = \frac{100}{4} \cdot 6000 \left[1 - \left(\frac{100}{104} \right)^{18} \right] = 150000 \cdot \left[1 - \left(\frac{100}{104} \right)^{18} \right].$$

A' honnan kijő, hogy $\varpi = 75955,67$ ft.

Egyébiránt ez kijő ugyis, ha a' Σ értékéből (52§) $= 78993,89$ fiből kivesszük a' Σ értékét alkotó sorzatnak 0-ik tagját $= 6000$.

és a' maradékhoz, mely $= 72993,89$ ft
amaz, elől elvett 0-ik tag helyett adjuk utól az

$$(n+1)\text{-dik tagot, mely} = \frac{6000}{\left(\frac{104}{100} \right)^{18}} \cdot \cdot \cdot = 2961,774;$$

miszerint fog lenni $\varpi = 75955,664$;

Ugy hogy a' ϖ -nek két különböző úton kiszámított értékei között, a' mint látjuk, csak 1 denár különbség sincsen. —

Hogy ezen egyenletből:

$$\varpi = \frac{100}{p} U \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^n \right], \text{ következnek,}$$

$$U = \frac{\varpi}{\frac{100}{p} \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^n \right]} = \frac{p \varpi}{100 \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^n \right]}, \text{ és}$$

$$n = \frac{\log. (100 U - p \varpi) - \log. (100 \cdot U)}{\log. 100 - \log. (100 + p)}, \text{ könnyű általlátni; 's mi-}$$

kép' keressük ezen egyenletek szerint az ismeretlen U-t és n-et abban az esetben, mikor az évenkinti fizetés mindig az esztendő' végén történik, a' fentebbiekből oly világos, hogy ezt itt példával világosítani felesleges volna.

57. §. Eddig vannak a' legnevezetesebb pénzügyi kérdések, és azoknak megfejtéseik. Lehetne itt még kiebb is terjeszkedni. De célom itt nem az lévén, hogy e' tárgyról kimerítő munkát irjak, hanem csak hogy Hallgatóimnak 's Olvasóimnak, mielőtt a' háromszegmérésre és a' természettanra általmennénk is, alkalmat szolgál-

tassak, magoknak a' logaritmusokkali számvetésben, valamely érdekes tárgy körül, mely azoknak is, kik e' számvetést élő tanító vezérlése nélkül akarják könyvemből megtanulni, figyelmöket megérdemelje, illő gyakorlatot szerezni: erre az eddig mondottakat elégségesnek tartom. Egyébiránt a' ki ezeket jól felfogta — figyelmeztvén a' feladat' feltételeire — más, itt elő nem fordult pénzügyi kérdések' megfejtésére magától is főg tudni egyenleteket szerkeszteni az eddigiek' nyomán, melyeknek táblás előterjesztését berekesztésül ide teszem, csupán azt jegyezvén még meg, hogy ha a' kamatfizetés félévenkint vagy negyedévenkint volt kötelezve, ugy a' kamatok minden félév' vagy negyedév' elmultával tőkésítettvén, az n fogja jelenteni ezen egyenletekben természetl a' félévek vagy negyedévek' számát, t. i. hogy hány félévig, vagy hány negyedévig kamatozott a' tőke; csakhogy ilyenkor aztán — mint magában értetik — ha félévenkint fizettetik a' kamat, felénnyire, ha negyedévenkint, negyedrésznnyire kell tenni a' procentet; mint lenne, ha esztendőnkint fizettetnék. P. o. a' 37-ik §-beli pelda' kidolgozása, ha a' kamatfizetés félévenkint történik, így fog változni:

$$U = 1000 \left(\frac{103}{100} \right)^{20}; \text{ a' honnan kijő: } U = 1806,1075 \text{ forint. Ha pe-}$$

dig a' kamat negyedévenkint fizettetik, fog lenni:

$$U = 1000 \left(\frac{101,5}{100} \right)^{40} = 1000 \left(\frac{1015}{1000} \right)^{40}; \text{ a' honnan kijő:}$$

$$U = 1814,0112 \text{ forint.}$$

Táblás előterjesztése

a' legérdekesebb pénzügyi kérdések' megfejtésére szükséges egyenleteknek, melyekben

E = Eredeti tőke' mennyisége, vagyis milyen nagy a' tőke, mikor először kiadatik.

p = Procent, ÷ szám, mely jelenti, hogy a' tőkének hány század része fizettetik egy évi kamat' fejébe.

n = Numerus (annorum), ÷ szám, mely megjelenti, hány év-ig kamatozott az eredeti tőke.

U = Utolsó tőke' mennyisége, ÷ szám, mely megjelenti, milyen nagyra nőtt az eredeti tőke utoljára, miután a' kamatok bizonyos számú évekig minden év' végével a' tőke' nevelésére fordítottak.

I. A' tőkésített kamatok' fogalmából folyó első alapegyenlet, és ennek algebrai munkálatok által készült minden lehetséges változatai

$$1. U = E \left(\frac{100+p}{100} \right)^n = E \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n. \text{ Anatocismus' kiszámítása.}$$

$$2. E = \frac{U}{\left(\frac{100+p}{100} \right)^n}. \text{ Discontirozás.}$$

$$3. 1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{E}{U}}$$

$$4. n = \frac{\log. U - \log. E}{\log. (100+p) - \log. 100.}$$

II. Egyenlet az anatocismus' kiszámítására abban az esetben, mikor az eredeti tőke E, nemcsak egyszer mindenkorra tétetik le, hanem ahhoz minden esztendőben, akár mindig az esztendő' elején, akár mindig az esztendő' végén, ugyanannyi tőke járul; 's az a' kérdés: hogy mindezek a' tőkék p. procent kamatjaikkal és kamatjaik' kamatjaival együtt milyen nagy summára = S növekednek n. év alatt; és ezen egyenlet' algebrai változatai.

$$5. S = \frac{100}{p} \cdot E \cdot \left[\left(\frac{100+p}{100} \right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$6. E = \frac{S}{\frac{100}{p} \left[\left(\frac{100+p}{100} \right)^{n+1} - 1 \right]} = \frac{pS}{100 \left[\left(\frac{100+p}{100} \right)^{n+1} - 1 \right]}$$

$$7. (n+1) = \frac{\log. \left(\frac{p}{100} S + E \right) - \log. E}{\log. (100+p) - \log. 100}$$

III. Egyenlet a' discontirozásra abban az esetben, mikor ugyanazon pénzösszeg, U, n. esztendőben egymás után mindig az esztendő' elein fizettetik le, mint p. o. a' terminusonkinti fizetésekben, és az a' kérdés, hogy mindezek a' ráták, melyek különböző időkben fognak fizettetni, a' kamatokat p. procenttel számítva, jelenleg mennyit érnek összesen = Σ , és ezen egyenlet' algebrai változatai

$$8. \Sigma = \frac{100+p}{p} U \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^{n+1} \right]$$

$$9. U = \frac{\Sigma}{\frac{100+p}{p} \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^{n+1} \right]} = \frac{p \Sigma}{(100+p) \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^{n+1} \right]}$$

$$10. (n+1) = \frac{\log. [(100+p)U - p\Sigma] - \log. [(100+p)U]}{\log. 100 - \log. (100+p)}$$

IV. A' III-ik szám alatti egyenlet abban az esetben, ha a' discontirozandó összeg, U, mindig az esztendő' végén tétetik le; és ezen egyenlet' algebrai változatai; a' különböző évekről discontirozott U-k jelenlegi összes értékek itt ψ - nek neveztetvén.

$$11. \psi = \frac{100}{p} U \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^n \right]$$

$$12. U = \frac{\psi}{\frac{100}{p} U \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^n \right]} = \frac{p \psi}{100 U \left[1 - \left(\frac{100}{100+p} \right)^n \right]}$$

$$13. n = \frac{\log. (100 U - p \psi) - \log. (100 U)}{\log. 100 - \log. (100+p)}$$

MÁSODIK RÉSZ,
FELSŐBB SZORSZÁMTAN.

I. SZAKASZ.

A' természetes szorzámokra vezető törvényekről.

58. §. Miután a' közönséges számvetést nagyon megkönnyebíltő közönséges logaritmussal már megismerkedtünk, nem csak, hanem azoknak használásában már némi gyakorlottságot is szerzettünk magunknak: következnek, úgy látszik, hogy általmenjünk a' természetes logaritmussokra, melyek a' Felsőbb analysisbeli számvetések' könnyítésére valók, 's melyeknek tudományát épen ezért Felsőbb szorzámoknak neveztük. De mielőtt ehez foghatnánk, szükség az általános számvetésnek egy pár igen érdekes és szép törvényét kifejtenünk, hogy azok bennünket a' természetes szorzámokra vezessenek.

Első ezek között, és a' másikkak is alapja az ugynevezett kéttagi törvény (lex binomia), mely szerint akármely kéttagu mennyiségnek (quantitas binomia) akármely hatalmát, melyet általánosan így fejezhetünk ki: $(a+b)^n$, magokkal a' kéttagu mennyiség egyes tagjaival, az a-val és a' b-vel, és a' kívánt hatalom' jellel, az n-nel ki lehet fejezni. Hogy ezen törvényt ne csak induction építsük, hanem alaposan fejthessük ki: szükség előrebocsátanunk némely igazságokat. Először is tehát

59. §. Tudjuk az algebra elemeiből, sőt ha valaki soha algebrát nem tanult volna is, csak a' mindennapi házi józan okosság által magától is általláthatja, hogy ha több tagokból álló szorzandót, milyen $(4+5)$, több tagokból álló szorzóval, milyen $(2+3)$, kell szorozni: ennek egyenkint mindegyik tagjával szükség amannak egyenkint mindegyik tagját egyszer, de nem is többször, szorozni, 's azután ezen részenkinti szorzatokat összeadni, és ezeknek összevege lesz az egész szorzat. Mert szinte kézzelfogható, hogy $(2+3)$ -szor venni $(4+5)$ -öt annyi mint 5-ször venni 9-et, mi is $= 45$. Ugyde látnivaló az is, hogy mind egyre megy ki, akár magát a' 9-t vegyük 5-ször, akár pedig a' 9-nek kiegészítő részeit, a' 4-et és

az 5-öt vegyük mindegyiket 5-ször; vagy a' helyett hogy mindegyiket 5-ször vennők, vegyük mindegyiket előbb 2-szer, azután ismét mindegyiket 3-szor, mivel így maga a' 9 lesz véve 5-ször, következőképen:

$(4+5) \times (2+3) = (4.2) + (5.2) + (4.3) + (5.3) = 8 + 10 + 12 + 15 = 45$, melyet így mondunk ki: 4 meg 5 szorozva 2-vel meg 3-mal annyi mint 4 szorozva 2-vel meg 5 szorozva 2-vel, meg 4 szorozva 3-al, meg 5 szorozva 3-mal, sat.

Azt pedig, hogy a' szorzandónak mindegyik tagja szoroztasék a' szorzónak mindegyik tagjával egyszer, de nem is többször, úgy hogy se el ne maradjon egy ilyen részenkénti szorzás is, se egyszerűen többször egyik is ne történjék, legkönnyebben véghezvihatjuk az által, ha a' szorzásban bizonyos állandó rendet követünk, például azt, melyet a' közelebbi példában követünk, t. i. a' szorzandó tagjainak, kezdván az elsőn, renddel egymásután mindegyiknek utána írjuk szorzóul előbb a' szorzó első tagját, azután hasonlóképen mindegyiknek utána írjuk a' szorzó második tagját, és így tovább; mi szerint látnivaló, hogy sem el nem maradhat a' szorzandó egy részének is a' szorzó egy részével való szorzása is, mi az egész szorzatot kelletlenül kisebbé, sem egyszerűen többször elő nem fordulhat egyik is, mi az egész szorzatot kelletlenül nagyobbá tenné. Ezek szerint fog lenni például:

$(a+b+c).(d+f+g) = ad + bd + cd + af + bf + cf + ag + bg + cg$; miszerint az a is a' b is a' c is vétetvén d-szer is f-szer is g-szer is, látnivaló, hogy az egész $(a+b+c)$ szorozva van $(d+f+g)$ -vel.

60. §. Ha már valamely két tagu mennyiséget, például ezt: $(a+b)$ az első czélirányos egész hatalmakra, u. m. a' 2-dik, 3-dik, 4-dik, 5-dikre stb. akarjuk sorban egymásután emelni; minthogy ezt tenni nem egyéb, mint $(a+b)$ -t szorozni $(a+b)$ -vel, a' mi ebből kijő, azt ismét szorozni $(a+b)$ -vel, ennek eredményét újra szorozni $(a+b)$ -vel és így tovább: tehát fog lenni, a' közelebbi szabály szerint $(a+b)^2$, azaz $(a+b)(a+b) = aa + ba + ab + bb$ *)

*) Hogy e' négy részenkénti szorzatok közül az első, és az utolsó így írjuk: a^2, b^2 , a' két középsőt pedig, melyek egymással egyenlők, egy tagba összevonva így: $2ab$, — miszerint aztán $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — ez mind csak leírásbeli rövidítés. De most, midőn éppen azt akarjuk kitanulni, mikép származnak az $(a+b)$ különböző hatalmai magából az $(a+b)$ -ből, szükség hogy mind itt, mind a' következőkben mindenütt az $(a+b)$ mindegyik hatalmának mindegyik tagja először úgy maradjon, minden rövidítés nélkül, a' mint származott, hogy miből és mikép lett származása mindegyiknek kitessek.

vagy hogy mindenütt nyilvánvaló legyen, melyik betűje hanyadik $(a+b)$ tényezőtől vétegett mindegyik részenkinti szorzatnak, az első $(a+b)$ -nek 1-gyel, a' 2-diknak 2-vel jegyezvén meg alul mindenik betűjét, $(a+b)^2 = (a+b)_1 (a+b)_2 = a_1 a_2 + b_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 b_2$.

Már ha ezen részenkinti szorzatokat (facta particularia), melyek együtt véve teszik az $(a+b)$ 2-dik hatalmat, figyelemmel megnézzük, úgy találjuk: 1) hogy ezek közül mindegyik két-két betűből, és így annyi betűből áll, a' hanyadik hatalomra emeltük az $(a+b)$ -t; 2) hogy mindegyikben van véve az első betű az első tényezőtől, $(a+b)_1$, a' második a' másodikból, $(a+b)_2$; 3) hogy mindegyikben más-másféleképen van véve az első betű az első tényezőtől a' második a' másodikból, és annyiféleképen, a' hányféleképen csak lehet; mert első betűnek van véve az első $(a+b)_1$ -ből egyszer az a_1 , másszor $a'_1 b_1$, és mindegyikhez ezek közül második betűnek van véve a' második $(a+b)_2$ -ből egyszer az a_2 , másszor $a'_2 b_2$; többféleképen nem eshetik meg, látnivaló, hogy az első betű az első tényezőtől legyen véve, a' második a' másodikból; de nem is maradt el a' lehetséges esetek közül egy is.

Ez szerint látnivaló, hogy $(a+b)$ -t 2-dik hatalomra emelni, vagy ezen egy pár tényezőtől $(a+b)_1$ és $(a+b)_2$ annyi különböző két betűjű tényeket formálni, a' hányat csak lehet oly feltétellel, hogy az első betű az első $(a+b)_1$ -ből legyen véve, a' 2-dik a' 2-dik $(a+b)_2$ -ből, de mindig más-másféleképen, 's mindezeket a' két betűjű tényeket, — melyeknek száma látnivaló, $= 2 \times 2 = 4$ — összeadni: e' kettő egyre megyen ki.

Ha továbbá az $(a+b)^2 = (a+b)_1 (a+b)_2$ értékét, $= a_1 a_2 + b_1 a_2 + a_1 b_2 + b_1 b_2$ szorozzuk ismét a' fentebb megállapított rend szerint a' 3-dik $(a+b)_3$ -vel, azaz, mindegyiknek ama két betűjű szorzandók közül utána írjuk az $(a+b)_3$ két tagú szorzónak az első tagját is, a_3 , a' második tagját is, b_3 , egyszer-egyszer, és az e'kép származó 3 betűjű tényeket; — melyeknek számuk, látnivaló, $= (2.2).2$

$= 4 \cdot 2 = 8$ — mind összeadjuk, azoknak összege lesz az $(a+b)$ 3-dik hatalma e'képen:

$$(a+b)^3 = \underset{1\ 2\ 3}{aaa} + \underset{1\ 2\ 3}{baa} + \underset{1\ 2\ 3}{aba} + \underset{1\ 2\ 3}{bba} + \underset{1\ 2\ 3}{aab} + \underset{1\ 2\ 3}{bab} + \underset{1\ 2\ 3}{abb} + \underset{1\ 2\ 3}{bbb}.$$

Ugyde ha az $(a+b)^2$ értéke magába foglalja mind azokat a két betűjű tényeket, melyeket e' két tényezőből $(\underset{1}{a} + \underset{1}{b})(\underset{2}{a} + \underset{2}{b})$ oly móddal formálhatunk, hogy az első betű az első tényezőből legyen véve, a' 2-dik a' másodikból, de mindig más-másféleképen; és ezekből az $(a+b)^3$ értékét úgy formáltuk, hogy mindegyiknek ezen két betűjű tények közül 3-dik betűül utána irtuk a' 3-dik $(\underset{3}{a} + \underset{3}{b})$ tényezőnek egyszer az első tagját, $\underset{3}{a}$, egyszer ismét a' másodikat, $\underset{3}{b}$: tehát látnivaló, hogy így az $(a+b)^3$ értéke magába foglalja mind azokat a' 3 betűjű tényeket, melyek e' 3 tényezőből: $(\underset{1}{a} + \underset{1}{b})(\underset{2}{a} + \underset{2}{b})(\underset{3}{a} + \underset{3}{b})$ oly móddal formáltathatnak, hogy az első betű legyen véve az első tényezőből, a' 2-dik a' 2-dikből, a' 3-dik a' 3-dikből, de mindig más-másféleképen.

Épen így, ha a' fentebbi 3 betűjű tények közül, melyek együtt véve annyit tesznek mint $(a+b)^3$, mindegyiknek utána irjuk 4-dik betűül a' 4-dik $(\underset{4}{a} + \underset{4}{b})$ tényezőnek egyszer az első tagját, $\underset{4}{a}$, egyszer ismét a' 2-dikát, $\underset{4}{b}$: kijönek mind azok a' 4 betűjű tények, melyeket e' 4 tényezőből $(\underset{1}{a} + \underset{1}{b})(\underset{2}{a} + \underset{2}{b})(\underset{3}{a} + \underset{3}{b})(\underset{4}{a} + \underset{4}{b})$ oly feltétellel lehet formálni, hogy első betűjök legyen véve az első tényezőből, 2-dik a' 2-dikből, 3-dik a' 3-dikből, 4-dik a' 4-dikből, de mindig más-másféleképen, és ezen 4 betűjű tények összege, mint-hogy az $(a+b)^3$ -nak még egyszer a' gyökérrel, $(a+b)$ -vel való szorzásából származott, fog lenni $(a+b)^4$.

Ezt így lehet folytatni végnélkül, látnivaló, úgy hogy átaljában lehet mondani, mikép $(a+b)^n$ annyi, mint mind azoknak az n betűjű tényeknek összege, melyek az n-szer egymásután irt $(a+b)$ tényezőkből oly feltétellel formáltathatnak, hogy első betűjök legyen véve az első tényezőből, második a' másodikból, harmadik a' harmadikból, és így tovább, 's végre az n-dik az n-dikből, de mindig más-más- és annyiféleképen a' hányféleképen csak lehet.

61. §. E' szerint tehát az $(a+b)$ -nek akármely felsőbb célirányos egész hatalmát, $(a+b)^n$, egyenesen, azaz, az alsóbb

hatalmak kikeresése nélkül is lehet formálni úgy, ha tudunk találni olyan módot, mely szerint az alsóbb hatalmak kiszámítása nélkül is mind azokat az n betűjű tényeket fel tudjuk keresni, melyeket az n -szer egymásután irt $(a+b)$ tényezőkből oly feltétellel lehet alkotni, hogy mind egyik ténynek első betűje legyen véve az első $(a+b)$ tényezőtől, második a' másodikból, harmadik a' harmadikból, és így tovább, de mindig más-más- és annyiféleképen, a' hányféleképen csak lehet. Mert ha mindezeket felkeressük, és összeadjuk, ezeknek összege lesz $= (a+b)^n$.

Csak az tehát már a' kérdés, mikép' lehet ezeket az n betűjű tényeket a' legkönnyebb és legbiztosabb módon felkeresni a' nélkül, hogy az $(a+b)$ -nek minden czélirányos egész hatalmait a' 2-diktól fogva az n -dikig egyiket a' másikból $(a+b)$ -veli ismételt szorzás által kiszámítsuk, 's így mennénk fel lépcsőnkint az n -dik hatalomig? Felelet: hogy itt arra nézve, hanyadik $(a+b)$ tényezőtől mikor melyik betűt vegyük, bizonyos rendet kell tartani, az látnivaló; különben könnyen megeshetnék, hogy vagy elmaradna valamely n betűjű tény, mely a' már sokszor mondott feltétellel lehetséges, vagy pedig egyszerűen többször is vétethetnék valamelyik, mely hibák közül az első miatt kelletlenül kisebbre, a' második miatt kelletlenül nagyobbra ütne ki az $(a+b)^n$ értéke. A' legtermészetibb rend pedig, melyet itt az n betűjű tényeknek többször mondott feltétel szerinti formálásában követhetünk, imez:

Először fölveszszük renddel azon fő eseteket, melyek itt előfordulhatnak, ha csak arra tekintünk, hány $(a+b)$ tényezőtől vétetik a' formálandó n betűjű tényekhez az a , hányból a' b betű. Ilyen fő eset pedig van az $(a+b)$ n -dik hatalmában mindenkor $(n+1)$. Ugyanis az n tényezők közül, melyeknek egymással szorzásából az $(a+b)^n$ áll, hogy azokból n betűjű tényeket formáljunk, vehetjük:

- 1) Mindegyikből az a betűt;
- 2) egy híján a' többiből az a , egyből pedig a' b betűt;
- 3) kettő híján a' többiből az a , kettőtől pedig a' b betűt,
- 4) három híján a' többiből az a , háromból pedig a' b betűt, és így tovább mindig egygyel-egygyel kevesebb tényezőtől az a , egygyel-egygyel többől a' b betűt, mignem így az a , melynek száma n volt, egyenkint elfogyván, utóljára $(n+1)$ -dikszer mindegyikből az n tényezők közül vesszük a' b betűt.

Másodszor sort veszünk ezen $(n+1)$ fő eseteken, és meg-

vizsgáljuk, hányféleképen változhatik mindegyik ezek közül oly módon, hogy az első betű az első tényezőből legyen véve, a' második a' másodikból, és így tovább, de mindig más-másképen, és annyi-féleképen, a' hányféleképen csak lehet.

E' két teendő közül az első [igen könnyű. Mert ha például $n=10$, úgy az $(a+b)^{10}$ értékét tevő 10 betűjű tényezőket fel akarván keresni, vesszük

- 1) Mind a' 10 $(a+b)$ tényezőből az a betűt: aaaaaaaaaa
- 2) 9 tényezőből az a, 1-ből a' b betűt: . . aaaaaaaaaab
- 3) 8 tényezőből az a, 2-ből a' b betűt: . . aaaaaaaaaabb
- 4) 7 tényezőből az a, 3-ból a' b betűt: . . aaaaaaabbb
- 5) 6 tényezőből az a, 4-ből a' b betűt: . . aaaaaabbbb

és így tovább. De ha már az a' kérdés, hányszor lehet venni ezen fő esetek közül mindegyiket oly móddal, hogy az első betű az első tényezőből legyen véve, a' 2-ik a' 2-ikből, és így tovább: erre általános feleletet adni nem oly könnyű,

62. §. Hogy ezen kérdésre az általános feleletet megtalálhassuk, vegyünk fel először egy különös, még pedig nem igen bonyolodott esetet. Fentebb a' 60-ik §-ban már kijött, hogy ha $(a+b)$ -t

$(a+b)$ -vel, 's e' szorzatot ismét $(a+b)$ -vel szorozzuk, lesz:

$$(a+b)^3 = \underset{1\ 2\ 3}{aaa} + \underset{1\ 2\ 3}{baa} + \underset{1\ 2\ 3}{aba} + \underset{1\ 2\ 3}{bba} + \underset{1\ 2\ 3}{aab} + \underset{1\ 2\ 3}{bab} + \underset{1\ 2\ 3}{abb} + \underset{1\ 2\ 3}{bbb}, 's$$

ha ezen az úton tovább menvén, ezt ismét szorozzuk $(a+b)$ -vel,

kijő, hogy

$$(a+b)^4 = \left\{ \begin{array}{l} \underset{1\ 2\ 3\ 4}{aaaa} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{baaa} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{abaa} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{bbaa} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{aaba} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{baba} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{abba} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{bbba} \\ \underset{1\ 2\ 3\ 4}{aaab} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{baab} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{abab} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{bbab} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{aabb} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{babb} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{abbb} + \underset{1\ 2\ 3\ 4}{bbbb} \end{array} \right.$$

Most már lássuk, mikép' lehet ugyanezen 16 négy betűjű tény, melyek együttvéve teszik az $(a+b)$ két tagú gyökér' negyedik hatványát $= (a+b)^4$, a' közelebb kijelölt úton megtalálni a' nélkül, hogy elébb az $(a+b)$ -nek a' 4-diknél alsóbb rangú 2-dik és 3-dik hatalmait is kikeressük.

Mindeneknek előtte itt lesz az első szabály szerint öt főeset, u.m.

- 1) mind a' 4 tényezőből vesszük az a betűt . . aaaa
- 2) három tényezőből vesszük az a, egyből a' b betűt: aaab
- 3) két tényezőből vesszük az a, kettőből a' b betűt: aabb
- 4) egy tényezőből vesszük az a, háromból a' b betűt: abbb
- 5) mind a' 4 tényezőből vesszük a' b betűt: . . bbbb

A' mi pedig másodszer azt illeti, hány különbözőképen változhatnak mindegyik ezen öt fő esetek közül azzal a feltétellel, hogy az első betű legyen véve az első $(a + b)$ tényezőből, a' 2-ik a' 2-ikből, a' 3-ik a' 3-ikből, 's végre a' 4-ik a' 4-ikből, de mindig más-másféleképen; először is látnivaló, hogy az első és utolsó fő eset csak egyféleképp' lehetséges; mert mind a' négy $(a + b)$ tényezőből az a betűt venni, és ezeket úgy írni egymás után, hogy mindegyik a' annyiadik helyre essék, a' hanyadik tényezőből vétetett, csupán csak így lehet: $a a a a$. Épen így van a' dolog akkor is, mikor mind a' négy $(a + b)$ tényezőből a' b betű vétetik, 's a' mondott feltétel szerint iratik egymás után e'képen: $b b b b$. De könnyű általlátni továbbá

azt is, hogy a' 2-ik és 4-ik fő esetek közül, melyek közül amabban 3 tényezőből a, 1-ből b, ebben pedig 3 tényezőből b, 1-ből a vétetik, mindenik 4-féleképen változhatnak oly módon, hogy mindegyik betű annyiadik $(a + b)$ tényezőből legyen véve, a' hanyadik helyen áll a' négy betűjű tényben. Ugyanis amabban az egy b, ebben az egy a betű mindegyik tényezőből vétethetik, és így mindegyik helyre irathatik egyszer-egyszer, a' többi tényezőkből a' többi helyekre renddel rakatván mellé amott az a, itt pedig a' b betűk következőképen:

$a a a b$, $a a b a$, $a b a a$, $b a a a$
 $a b b b$, $b a b b$, $b b a b$, $b b b a$

's ezzel ki vannak merítve minden a' négy $(a + b)$ tényezőből a' 2-ik és 4-ik fő esetben a' mondott feltétellel lehetséges 4 betűjű tények; mert sem a' 2-ik fő esetben a' b, 's a' 4-ikben az a betűt több helyről venni, 's több helyre tenni 4-nél, sem ezen négy-négy esetek közül egyikben is amott a' három a-t, itt a' három b-t más renddel rakni el, mint most van, a' nélkül, hogy a' többször említett feltétel megrontassék, nem lehet. Például ha a' 2-ik fő esetnek, hol 3 tényezőből vétetik a, 1-ből b, abban az alesetében, hol a' b legutól a' 4-ik helyen áll, a' 3 a-t nem azzal a' renddel írónak a' b elébe, mint fentebb, hanem így: $a a a b$, vagy így: $a a a b$ 'stb.; látni-

való, hogy minden ilyen elrendelések ezen itt szükségesképen való feltétel ellen hibáznának: minden betűje a' ténynek annyiadik $(a + b)$ tényezőből legyen véve, a' hanyadik helyen áll ő maga a' tényben.

A' mi végrezetre a' közepső, vagy 3-ik fő esetet illeti, hol

két tényezőtől a, kettőtől b vétetik: erre nézve elég azt határozni meg, hányfélekép' lehet a' 4 tényező közül mindig más-más kettőtől venni egy-egy a betűt; mert a' két üresen maradt helyet aztán tudnivaló, hogy mindenkor a' másik két tényezőtől kell betölteni b betűvel, azzal a' renddel irván. mindig a' négy betűt egymás után, a' mint a' tényezők, melyekből mindegyik vétetett, egymás után következnek, 's épen ezért a' két a közül is, melyeket a' négy tényezőnek mindig más-más kettejéből veszünk, a' tényben elébb álló a-nak mindig elébb álló tényezőtől, utóbb állónak utóbb állóból kell vétetnie. Ily feltétellel pedig 4 tényező közül mindig más-más kettőtől venni két-két a-t hatféleképen lehet, ugymint:

1) az elébb álló a vétetik az 1-ső, az utóbbi a' 2ik tényezőtől: a a b b,

2) 1-ső . . . 3-ik . . . , a b a b,

3) 1-ső . . . 4-ik . . . a b b a,

4) 2-ik . . . 3-ik . . . b a a b,

5) 2-ik . . . 4-ik . . . b a b a,

6) 3-ik . . . 4-ik . . . b b a a,

több lehetséges eset itt elő nem fordulhat, látnivaló.

Ha már mind ezeket a' 4 betűjű tényeket, melyeket négy $(a + b)$ tényezőtől oly feltétellel formáltunk, hogy mindegyikben az első betű az első $(a + b)$ -ből legyen véve, a' második a' másodiktól, és így tovább, azzal a' renddel, a' mint a' fentebbi 5 fő esetek egymás után következnek, egymás után írjuk és összeadjuk, minthogy ezeknek összege, mint fentebb láttuk, $= (a + b)^4$; tehát lesz:

$$(a + b)^4 = \begin{cases} a a a a + \\ a a a b + a a b a + a b a a + b a a a + \\ a a b b + a b a b + a b b a + b a a b + b a b a + b b a a + \\ a b b b + b a b b + b b a b + b b b a + \\ b b b b, \end{cases}$$

és ha az $(a + b)^4$ -nak ezen értékét, melyet itt egyenesen, azaz a' 4-nél alsóbb rangú hatalmak' kiszámítása nélkül csináltunk ki, ugyanannak ezen §. elején kijött értékével, melyet úgy számítottunk ki, hogy lépcsőnkint hágtunk mintegy az első hatalomról a' másodikra, erről a' harmadikra, erről végre a' negyedikre, összevetjük, ugy

találjuk, hogy ez is épen azon 16 négy betűjű tényekből áll, melyekből amaz.

De minthogy itt az egy-egy fősét változtatásából formált, 's egy-egy sorban irt tagok, mint ugyanazon tényezőknél más-más renddel való szorzásából származó tények, egymással mind egyenlők: tehát mindegyik tag helyett az egész sorban írhatjuk 'a' sornak első tagját, és így az egész sor helyett az első tagot annyiszor véve, 'a' hány tag van 'a' sorban, e'képen:

$(a+b)^4 = aaaa + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + bbbb$, vagy pedig hatványjelekkel még rövidebben, így:

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

63. §. Ezen példából már, és azokból, 'a' miket fentebb mondtunk, világos nemcsak az, hogy akármely két tagú mennyiségnek, $(a+b)$, akármely czélirányos egész hatalmát egyenesen; azaz, az alsóbb hatalmak kikeresése nélkül is ki lehet számítani, hanem nagy részt az is, mimódon esik meg annak kiszámítása. Nevezetesen:

Először is világos, hogy ha az $(a+b)$ akármely czélirányos egész hatalmának tagjai illő rendbe szedetnek, és az algebraiban szokott rövidítésekkel íratnak, fog lenni mindenkor: 'a' legelől álló tagban, mely nulladiknak neveztetik, maga az 'a' emelve azon hatalomra, melyre az egész $(a+b)$ emelve van; azután az első tagban az 'a'-nak egygyel kisebb hatalma 'b'-vel; 'a' második tagban az 'a'-nak kettővel kisebb hatalma 'b'²-vel; 'a' harmadik tagban az 'a'-nak hárommal kisebb hatalma 'b'³-vel; és így tovább minden következő tagban az 'a'-nak egygyel-egygyel kisebb hatalma, 'a' 'b'-nek egygyel-egygyel nagyobb hatalmával szorozva, míg nem utoljára az 'a' hatalomjele nullá' lévén; 'a' sort berekeszti 'a' 'b' maga, emelve azon hatalomra, melyre az $(a+b)$ emeltetett.

Másodsor, világos az is, hogy mindegyiknek ezen tagok közül ösztényzője lesz egy olyan szám, mely azt mutatja meg, hányszor lehet azon tagnak tényezőit, ha t. i. ezek egészen kiíratnak (azaz nem hatványjellel, például így: a^2b^2 , hanem így $aa bb$), más-másféleképen rakni el, de azzal 'a' feltétellel, hogy az első $(a+b)$ -ből vett betű az első-, 'a' másodikból vett 'a' második-, 'a' harmadikból vett 'a' harmadik helyre essék, és így tovább. De, látjuk 'a' felvett példából egyszersmind azt is, hogy annak kitalálására, melyik tagnak tényezőit hányféleképen lehet elrakni 'a' mondott feltétellel, és így melyik tagnak mi lesz az ösztényzője, más-más

tagot illetőleg más-más okoskodás kívántatott, és hogy ez már csak ezen csekély példában, az $(a+b)$ negyedik hatalmában is éppen nem olyan volt, a' mit egyszerre és könnyen által lehetett volna látni, hát még nagyobbakban! hát ha például az $(a+b)$ 20-dik hatalma' 8-dik tagjában az $a^{12}b^8$ ösztényzőjét, vagyis azt kellene kiszámítani, hányszor lehet 20 egymásután irt $(a+b)$ tényezőből 12 a-t és 8 b-t mindig más-másképen venni oly móddal, hogy az ezekből alkotott 20 betűjü tények közül mindegyikben mindegyik a és mindegyik b annyiadik helyen álljon, a' hanyadik $(a+b)$ tényezőből vétetett? Ezzel már megakadna az ember, mig olyan formán kiokoskodná, mint az $(a+b)^4$ öt tagjainak ösztényzőit fentebb kiokoskodtuk. Az ösztényzők kiszámítására tehát szükség itt egy olyan általános szabályt találunk, mely szerint akármely két tagú mennyiség akármely célirányos egész hatalmában akár hanyadik tagnak ösztényzőjét egyformán, és pedig könnyü móddal ki lehessen számítani.

64. §. Az ösztényzők kiszámítása itt, látnivaló, oda megyen ki, hogy ki tudjuk számítani, hányfélekép lehet bizonyos számú betűket más-máskép rendelni el úgy, ha nem szabad mindegyiket minden lehető helyre tenni, hanem az elrendezés bizonyos feltételhez van kötve, és csak bizonyos megszorítással engedtetik meg. Erre nézve pedig szükség először azt tanulunk ki, hány különböző renddel lehet bizonyos számú, már akárhány különböző dolgokat, például betűket, vagy akármit elrendelni, vagy egymásután rakni, ha az elrendelés minden megszorítás nélkül megengedetik, azaz, mindegyiket azok közül akármelyik helyre a' rendben lehet tenni minden kivétel nélkül. Mert, ha ezt kitanulhatjuk, előre lehet látni, hogy ebből, és magának a' feltételnek, mely bizonyos változtatásokat az elrendelésben meg nem enged, természetéből könnyü lesz kiszámítani azt is, hány különbözőfélekép' eshetik meg az elrendelés ez vagy amaz feltétellel.

65. §. A' mi tehát azt illeti, hányfélekép' lehet bizonyos számú dolgokat más-más renddel rakni el, ha mindegyiket azok közül mindegyik lehetséges helyre a' rendben tenni megengedetik: kezdjük az elrendelgetni való dolgok számát legalól az egyen, és úgy menjünk egygyel-egygyel fölebb-fölebb. Ha csak egy dolgot veszünk fel, például egy betűt, a, ezt csak egyfélekép' rendelhetjük el, ha szabad így szólnunk; mert ezt akárhová letecszszük, első is lesz, utolsó is egyszersmind. De ha még egyet veszünk hozzá: úgy

mindjárt kétfélekép' csinálhatjuk közöttök a' rendet, az újonnan felvett betüt az elébbeninek vagy utána irván, vagy elibe, így: ab, ba. Ha pedig harmadik betüt is veszünk fel, c, és ezt mindenikben azon két különböző rendek közül, melyeket két betüből formáltunk, minden lehetséges helyre teszszük egyszer-egyszer: úgy, látnivaló; minden különböző rendeket, melyeket 3 betüből formálni lehet, megtaláltunk. Ugyde mindenikben azon két különböző rendek közül, melyeket két betüből formáltunk, melyek is ab és ba, a' 3-ik betüt, c, 3 különböző helyekre tehetjük, úgymint elül, közbül, és hátul; e'képen:

$$\left. \begin{array}{l} cab, acb, abc \\ cba, bca, bac \end{array} \right\} \text{A' honnan, látnivaló, hogy 3 betüt 3 annyi-}$$

$$\text{féleképen lehet más-más renddel rakni el}$$
 mint két betüt. Ha továbbá 4-dik betüt is veszünk fel, d, és ezt mindegyikben azon 6 különböző rendek közül, melyeket 3 betüből formálhattunk, mindegyik lehetséges helyre teszszük egyszer-egyszer: úgy bizonyos, hogy minden különböző rendeket, melyeket 4 betüből formálni lehet, megtalálunk. Ugyde, mindegyikben azon 6 különböző rendek közül, melyeket 3 betüből formáltunk, a' 4-ik betüt négy-négy helyre tehetjük, úgymint elül' egy, közbül két, utól ismét egy helyre, következőképen:

$\left. \begin{array}{l} dcab, cdab, cadb, cabd \\ dacb, adcb, acdb, acbd \\ dabc, aabc, abdc, abcd \\ deba, cdba, cbda, cbad \\ dbca, bdca, bcda, bcad \\ dbac, bdac, badc, bacd \end{array} \right\}$	És így, látnivaló hogy 4 betüt 4 annykép lehet mindig más-más renddel elrakni, mint 3 betüt. Ez így megy tovább is, és minthogy 2 betü közt egy köz (intervallum), három
---	--

között 2, 4 között 3, vagy általánosan n betü között (n-1) köz esik, a' hova az újonnan hozzá járulandó (n+1)-dik betüt tenni lehet, 's ezen kívül még elül is, hátul is van egy-egy hely, a' hova ugyanazt tehetjük, és így mindegyikben azon különböző rendek közül, melyeket n betüből formáltunk, az (n+1)-dik betüt (n-1) + 2 = (n+1) helyre lehet tenni: tehát világos, hogy (n+1) betüt (n+1) szerte többféleképen lehet más-más renddel elrakni, mint n betüt. Ez szerint, minthogy 1 betüt csak 1 félekép' lehet, mint már fentebb is említettük, letenni: tehát látnivaló, hogy 2 betüből 2 annyi különböző rend formáltathatik mint egyből, és így 2. 1; továbbá 3 betüből 3 annyi mint kettőből, és így 3. 2. 1.; ismét 4 betüből 4 annyi mint 3-ból, azaz 4. 3. 2. 1., stb. Egyszóval: ha az a'

kérdés, hány különböző módon lehet elrendelni bizonyos számú dolgokat, ha mindegyik azok közül minden lehetséges helyre tétethetik: nem kell egyéb, mint hogy a' természetes számokat az 1-től kezdve, fel egész az elrendelni való dolgok számjáig egymással szorozzuk, 's a' szorzat lesz az a' szám, mely megjelenti, hányféleképp lehet a' kérdésben forgó dolgokat elrendelni. Peldául, ezt a' tiz betűt: a b c d e f g h i k, ha mindegyik közülök minden lehetséges helyre tétethetik a' rendben, el lehet rendelni 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10 féle-, azaz 3628800-féleképen. Ezt a' más-más renddel való elrakogatását bizonyos számú dolgoknak nevezik latinul permutatio-nak, magyarul mondhatjuk helycserélgetésnek, vagy csak hely-cserének, 's mondhatjuk, hogy helycsereszámja (numerus per-mutationis) az 1-nek = 1; a' 2-nek = 1. 2; a' 3-nak = 1. 2. 3; a' 4-nek = 1. 2. 3. 4; az 5-nek = 1. 2. 3. 4. 5. stb.

66. §. Ezt így értvén, már most csak azt kell megvizsgálunk, hogy a' mi feladatunknak azon feltétele, mely szerint az $(a+b)^n$ értéket tevő minden rész tényekben (facta particularia) az első betűt az első $(a+b)$ tényezőtől kell venni, a' 2-dikat a' 2-dikből, és így tovább, mennyiben szorítja az ilyen rész tények betűinek minden lehetséges rendekkel való elrakogatását határok közé? vagy hány olyan elrendelést nem enged meg, mely különben lehetséges volna. Vizsgáljuk meg hát ezt, 's nagyobb világosság okáért vegyünk fel először is egy különös esetet. Vegyük fel például az $(a+b)^7$ értékéből a' 3-dik tagot, mely a' fentebb mondottak szerint olyan rész tényekből fog állani, melyek közül mindegyikben az a' 4-szer, a' b pedig 3-szor fordul elő mint tényező, még pedig annyi ilyen rész tényekből, a' hányféleképp lehet ezen 7 tényezőt más-más renddel rakni el azzal a' feltétellel, hogy mindegyik ezek közül annyiadik legyen mindenütt a' rendben, a' hanyadik $(a+b)$ -ből van véve; a' milyen rész tények például:

a a a a b b b; a a a b a b b; a a b a a b b; a b a a a b b; b a a a a b b, stb,
1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7 1 2 3 4 5 6 7

's próbáljunk megfelelni ezen kérdésre: hány ilyen rész tény itt lehetséges? vagyis hány különbözőképen lehet itt a' mondott 7 tényezőt az említett feltétellel elrendelni?

Hogy mindegyik tényező annyiadik helyen álljon a' rész tényben, a' hanyadik $(a+b)$ -ből van véve, ez más szókkal oda megyen ki, hogy itt kiindulván ezen legelső rendből: a a a a b b b, minden
1 2 3 4 5 6 7
 változtatásokat ezen betűk rendin csak az által tehetünk, hogy vala-

mely helyre az a helyett ugyanazon $(a+b)$ -ből $b-t$, egy másik helyre pedig $a' b$ helyett itt is ugyanazon $(a+b)$ -ből $a-t$ teszünk, azaz csak az a és b betűket cserélgetjük fel a' rendben egymással; de az a betűket egymással, mint szintén $a' b$ betűket is egymással telyeséggel nem; mert ez a' feltétel ellen lenne. Például, ha ebben:

$a a a a b b b$; ilyen forma helycseréket tennénk: $a a a a b b b$, vagy

$a a a a b b b$, stb, ez nem fogna egyezni a' feltétellel; mert itt nem

mindenik a és b annyadik helyen állana a' rendben, a' hanyadik $(a+b)$ -ből van véve, hanem az egyik példában az első $(a+b)$ -ből vett a a' 2-dik, a' 2-dikből vett a pedig az 1-ső helyen, a' másik példában hasonlóképp az 5-dik $(a+b)$ -ből vett b a' 6-dik, a' 6-ikből vett b pedig az 5-dik helyen fogna állani.

Ezt így értvén már, a' feltett kérdésre így felelünk. Hányféleképp lehet a' kérdéses 7 tényezőt a' mondott módon elrendelgetni, annak kiszámítása imigy esik. Ha teszszük, hogy a' tudva lévő feltétellel itten formáltatható rendek száma $= x$: ugy bizonyos, hogy ha ezen x rendek közül mindegyikben szabad volna az a tényezőket, melyeknek száma $= 4$, minden lehető módon felcserélgetni egymással, ugy mindegyikből lenne 1. 2. 3. 4 olyan rend, melyben már a' különböző $(a+b)$ tényezőkből vett a betűk helyei is fel volnának egymással cserélgetve, 's következésképen azon x rendekből, melyekben a' feltétel szerint csak az a és b tényezők helyei vannak felcserélgetve egymással, olyan rend, melyben már a' különböző a tényezők helyei is minden lehető módon fel volnának cserélgetve, de $a' b$ tényezőkéi egymással még nem, lenne $x \times 1. 2. 3. 4$. Továbbá, ha ezekben ismét szabad volna a' különböző b tényezőket is, melyeknek száma $= 3$, minden lehető módon felcserélgetni egymással, mindegyikből lenne 1. 2. 3, és így mindnyájából: $x (1. 2. 3. 4) (1. 2. 3)$ olyan rend, melyekben már nemcsak az a és b tényezők helyei egymással, hanem a' különböző a tényezők helyei is egymással, mint szintén a' különböző b tényezők helyei is egymással mind fel volnának cserélgetve. Ugyde ezen 7 betűből: $a a a a b b b$, először minden különböző rendeket, melyek oly móddal lehetségesek, ha csak az a betűk helyeit cserélgetjük fel $a' b$ betűk helyeivel, kicsinálni; azután mindegyikben ezen különböző rendek közül a' négy a betűk helyeit annyiféleképen

cserélgetni fel egymással, a' hányféleképen csak lehet; végezetre, az ez által származó különböző rendek közül ismét mindegyikben minden lehető módon felcserélgetni a' három b betűk helyeit: ez, látnivaló, más szókkal annyit tesz, mint ezen 7 betűkből annyi különböző rendet formálni, a' mennyit csak lehet úgy, ha mindegyiket ezek közül minden lehetséges helyre tehetjük a' rendben minden megszorítás nélkül. Így pedig 7 betűből telik, a' mint már tudjuk, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 különböző rend, és így: $x (1. 2. 3. 4) (1. 2. 3)$

$$= 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7; \text{következésképen: } x = \frac{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7}{(1. 2. 3. 4) (1. 2. 3)},$$

azaz, ezt a' 7 tényezőt: a a a a b b b, ennyi különbözőképen lehet más-más renddel elrakni úgy, ha sem az a betűk helyeit egymással, sem a' b betűkét egymással nem szabad, hanem csak az a betűk helyeit lehet a' b betűk helyeivel minden lehető módon felcserélgetni; vagy, a' mi épen ezt teszi, ha minden betűnek mindenkor annyiadiknak kell lenni a' rendben, a' hanyadik (a+b) tényezőből vétetett. És így ez a' szám: $\frac{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7}{(1. 2. 3. 4) (1. 2. 3)}$ az, mely meg-

jelenti, hogy az $(a+b)^7$ értékében hány olyan részteny van, melyek közül mindegyikben az a 4-szer, a' b pedig 3-szor fordul elő mint tényező, de mindig más-más renddel. Vagy pedig, minthogy a' tény' nagyságára nézve mindegy, akár micsoda renddel következnek egymásután a' tényezők, 's annálfogva azon különböző résztenyek közül, melyeknek mindegyikében az a 4-szer, a' b 3-szor jő elő mint tényező, de mindig más-más renddel, mindegyik helyett tehetjük ezt a a a a b b b $= a^4 b^3$; mondhatjuk ezt is: az $(a+b)^7$ értékében ez a' részteny: $a^4 b^3$ előfordul $\frac{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7}{(1. 2. 3. 4) (1. 2. 3)}$ -szor.

Vagy, végezetre, minthogy az $(a+b)^7$ értékében $a^4 b^3$ a' tagok szokott elrendelése szerint a' 3-dik tagban jő elő: tehát mondhatjuk ezt is: hogy az $(a+b)^7$ értékében a' 3-dik tag ösztényzője (coëfficiense) $= \frac{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7}{(1. 2. 3. 4) (1. 2. 3)}$, és így a' 3-dik tag

$$= \frac{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7}{(1. 2. 3. 4) (1. 2. 3)} a^4 b^3. \text{ Ez az ösztényző pedig, látnivaló,}$$

nem egyéb, mint az ezen tagbeli két hatványjel öszvegének $4+3=7$ helycsereszámja, elosztva külön-külön a' két hatványjel 4, és 3. helycsereszámjainak szorzatával. Ugy van! mert a' miatt, hogy a' négy a tényezők helyeit egymással felcserélgetni nem szabad,

(1. 2. 3. 4)-szerte, a' miatt ismét, hogy a' három b tényezőket helyeit sem szabad egymással felcserélgetni, újra (1. 2. 3)-szorta, és így mindössze (1. 2. 3. 4) \cdot (1. 2. 3)-szorta kevesebb különböző rendeket lehet itt ezen két megszorítás miatt formálni, mint a' megnyit lehetne 7 betüből ezen megszorító feltételek nélkül, melynek is száma lenne $= 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.$ Ugyde (1. 2. 3. 4. 5. 6. 7)-nél (1. 2. 3. 4) (1. 2. 3)-szorta kevesebb lesz a' hanyados, mely kijő, ha amaz első számot ezen utóbbival elosztjuk $= \frac{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7}{(1. 2. 3. 4)(1. 2. 3)}$,

mely is, ha az egyenlő tényezőket mind az osztóból, mind az osztandóból kitöröljük, erre olvad össze: $5 \cdot 7 = 35$; 's ez szerint az $(a+b)^7$ értékében a' 3-dik tag' ösztényzője lesz $= 35$, maga a' 3-dik tag pedig $35 a^4 b^3$.

67. §. Minthogy pedig ez az egész okoskodás, mely szerint az $(a+b)^7$ értékében a' 3-ik tag' ösztényzőjét kikeresők, minden más hasonló esetekre azon módon alkalmaztatható: tehát látnivaló, hogy az $(a+b)$ -nek akármely czélirányos egész hatalmában akármely tagnak ösztényzője kijő, ha az a és b tényezők azon tagban előforduló hatványjelei summájának helycsere' számját elosztjuk a' külön-külön vett két hatványjel' helycsere számjaival. Miszerint például az $(a+b)^8$ értékében a' 3-ik tagnak $(a^5 b^3)$ ösztényzője lesz:

$\frac{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8}{(1. 2. 3. 4. 5)(1. 2. 3)}$. Hogy ugyancsak az $(a+b)^8$ értékében az

5-ik tagnak is $(a^3 b^5)$ ugyanaz lesz az ösztényzője, mely a' 3-dik tagé $(a^5 b^3)$, ezt említeni is alig szükség. Mert akármelyik legyen is az a és b tényezők közül 5-ször irva egymás után, a' másik pedig amannak elibe vagy utána 3-szor, arra nézve, hányfélekép' lehet ezen 8 betűt a' tudva levő feltétellel más-más rendbe venni, mind egy, látnivaló. Sőt látnivaló általában is, hogy az $(a+b)$ akarhanyadik czélirányos egész hatalmában két olyan tagnak, melyekben ugyanaz a' két hatványjel fordul elő, csakhogy a' mely szám egyikben az a hatványjele, az a' másikban a' b -é, és megfordítva, mindekor ugyanazon ösztényzőjük van.

68. §. De az ilyen ösztényzőket, a' milyen például az $(a+b)^8$ értékében a' 3-ik tag' ösztényzője $= \frac{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8}{(1. 2. 3. 4. 5)(1. 2. 3)}$ lehet, látnivaló, a' nélkül hogy értékjük megváltoznék, sokkal rövidebben is írni, úgy t. i. hogy azokat a' tényezőket, melyek mind az osztóban, mind az osztandóban előfordulnak, mind a' kettőből

kihagyjuk; a' mi, látnivaló, mindenkor az által eshetik meg, ha az osztóból elhagyjuk a' nagyobbik helycsereszámot; az osztandónak ugyanannyi és ugyanolyan nagy első tényezővel együtt. A' mikor aztán maradni fog az osztóban a' kisebbik helycsereszám, az osztandóban pedig az utolsóbb tényezők annyi számmal, a' hány tényezőből áll a' kisebbik helycsereszám, vagy, a' mi mindegy, a' hány egységből áll a' kisebbik hatványjel következőképen: $\frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Vagy

pedig, hogy még csak azon se kelljen gondolkozni, melyik számon kezdje az ember az osztandót, hanem annak utolsó tényezőiből egészen mechanice írasson le annyit, a' hány egységből áll azon tagban, melynek ösztényzőjét formálni kell, a' kisebbik hatványjel, az osztandó tényezőit lehet kezdeni legfelül is, azon a' számon, mely hatalomra van emelve az $(a+b)$, 's visszafordított renddel írni; miszerint az $(a+b)^8$ értékének 3-ik és 5-ik tagjaiban az $a^5 b^3$, és $a^3 b^5$ ösztényzője lesz $= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, 's alul felül osztva 6-tal $= 8 \cdot 7$

$$= 56. \text{ Hasonlóképen az } (a+b)^{10} \text{ hatodik tagjában az } a^{10} b^6 \text{-nak és tizedik tagjában az } a^6 b^{10} \text{-nek ösztényzője lesz:}$$

$$= \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

69. §. Ezek szerint már tudván, mikép' formáltatnak az $(a+b)$ akármely czélirányos egész hatalmának minden tagjaiban mind az a és b különböző hatványainak szorzásából származó résztények, mind pedig ezeknek ösztényzői, semmi sinez könnyebb, mint az $(a+b)$ -nek akármely czélirányos egész hatalmát egyszerre leírni. Peldául annak 6-ik és 7-ik hatalmait így írjuk le:

$$(a+b)^6 = a^6 + \frac{6}{1} a^5 b + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} a^4 b^2 + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^3 + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} a^2 b^4 + \frac{6}{1} a b^5 + b^6$$

$$(a+b)^7 = a^7 + \frac{7}{1} a^6 b + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} a^5 b^2 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^4 b^3 + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^4 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} a^2 b^5 + \frac{7}{1} a b^6 + b^7$$

Általános jegyekkel pedig, az $(a+b)$ hatványjelét n betűvel írván, így fejezik ki az itt uralkodó törvényt, mely két tagi törvénynek neveztetik:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots$$

hol az utolsó + jegy után rakott pontok azt jelentik, hogy itt a' többi tagok' formálását is az elkezdett, 's az első tagokból kivethető törvény szerint kell folytatni mind végig.

70. §. A' két tagi törvénynek ezen általános kifejezése ellen, ha ezt az $(a+b)$ -nek bizonyos meghatározott, peldául 6-ik, 7-ik

hatalmát kifejező egyenletekkel, melyeknek helyes voltáról má' meggyőződünk, egybehasonlítjuk, két nehézség mutatkozik; de a' melyeket nem nehéz elhárítani.

Egyik nehézségnek nevezetesen az látszik, hogy az általános kifejezés szerint akármeddig folytassuk is a' tagok' formálását, minden következő tagban kell az ösztényzőbe mind alul, mind felül egy-egy új, még pedig alul egygyel nagyobb, felül egygyel kisebb új tényezőnek járulni, mint volt az az előtteni utolsó tényező: az $(a + b)$ -nek meghatározott, például 6-ik vagy 7-ik hatalmaiban pedig az ösztényzőknek alsó és felső tényezői csak a' középső tagig szaporodnak minden lépésen egy-egy új tényezővel; azontúl pedig minden lépésen elmarad belőlök alul felül egy-egy tényező, hátulról visszafelé menvén. De ez valóban csak tetsző nehézség; mert az általános kifejezés szerint éppen azok az új tényezők, melyek a' középső tagon túl is minden lépésen alul felül az ösztényzőhöz járulnak, róvznak le minden lépésen egyet-egyet az az előtteni tényezők-ből hátulról visszafelé menve. Mi hogy annál világosabb legyen, tekintsük meg az $(a + b)$ czélirányos egész hatalmai közül külön a' párosokat, külön a' páratlanokat. Először is azért a' mi a' párosokat illeti, a' milyen például $(a + b)^6$: miután az ilyenekben azt a' tagot elértük, melynek ösztényzője az 1-től az $(a + b)$ hatalom' jé- léig, mely itt $\equiv 6$, renddel egymás után következő természetes számokból: 1, 2, 3, 4, 5, 6, úgy van formálva, hogy ezeknek első fele természetes renddel: 1, 2, 3, az osztónak, utolsó fele pedig megfordított renddel: 6, 5, 4 az osztandónak tényezőit teszik

e'képen: $\frac{6. 5. 4}{1. 2. 3}$: látnivaló, hogy ha tovább is tagról tagra úgy folytatjuk a' tényezők' szaporítását, mint eddig folytattuk, ezenítul az osztóban azok a' tényezők jönnek elő megfordított renddel, melyek eddig az osztani valóban előfordultak, nevezetesen az itt felhozott példában: 4, 5, 6; az osztani valóban pedig azok fognak következni egymás után hasonlóképen megfordított renddel, melyek eddig az osztóban előjöttek, nevezetesen a' jelen példában: 3, 2, 1; és így, hogy mindegyik új új tényező, mely ezután az osztóhoz jö, leront egy-egy tényezőt az osztandóhoz jö, leront egy-egy tényezőt az osztóból, még pedig hátulról visszafelé menve, e'képen:

$$\frac{6. 5. 4. 3.}{1. 2. 3. 4.} = \frac{6. 5}{1. 2.}; \quad \frac{6. 5. 4. 3. 2.}{1. 2. 3. 4. 5.} = \frac{6}{1.}; \quad \frac{6. 5. 4. 3. 2. 1.}{1. 2. 3. 4. 5. 6.} = 1,$$

és hogy ez akármelyik páros hatalmában is az $(a + b)$ -nek így lesz, világos. A' mi pedig az $(a + b)$ -nek páratlan hatalmait illeti, a' milyen $(a + b)$? miután az ilyenekben azt a' tagot elértük, melynek ösztényzője az 1-től az $(a + b)$ hatalom jeléig, a' jelen példában a' 7-ig, egymás után következő természetes számokból: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, úgy van formálva, hogy a' melyek ezek közül a' középső számnak, mely itt a' 4, előtte esnek, azok természetes renddel 1. 2. 3. az osztónak, a' melyek pedig a' középső számnak utána esnek, azok megfordított renddel: 7. 6. 5. az osztandónak tényezőit teszik e'képen: $\frac{7. 6. 5}{1. 2. 3}$: látnivaló, hogy ha tovább is úgy folytatjuk a' tényezőik'

szaporítását alul felül, mint eddig, a' következő tagban alul felül ugyanazon egy, még pedig az 1. és az $(a + b)$ hatalomjele közt épen közbül eső szám, nevezetesen a' jelen példában 4 fog tényezőül következni e'képen: $\frac{7. 6. 5. 4}{1. 2. 3. 4} = \frac{7. 6. 5}{1. 2. 3}$, 's következéské-

pen az $(a + b)$ ' páratlan hatalmaiban két tagnak lesz közbül egymás mellett egyenlő ösztényzőjük. Ha pedig még azután is, mikor az ösztényzőben az 1, és az $(a + b)$ ' hatalomjele között közbülső számot, mint utolsó tényezőt, alul felül elértük, épen úgy szaporítjuk tagról tagra mindkét helyütt a' tényezőket, mint eddig szaporítottuk: nyilván van, hogy ezentul itt is az osztóban azok a' tényezők fognak előjönni megfordított renddel, melyek az osztandóban a' középső tényezőt megelőzték; az osztandóban pedig hasonlóképp megfordított renddel azok, melyek eddig az osztóban előzték meg a' középső tényezőt, 's következésképen itt is igaz lesz, hogy a' két középső tagon túl a' következő tagok' ösztényzőihez alul felül járul újabb újabb tényezők minden lépten lerontanak visszafelé menve alul felül egyet-egyet az az előtteni tényezők közül, következésképen:

$$\frac{7. 6. 5. 4. 3}{1. 2. 3. 4. 5} = \frac{7. 6}{1. 2}; \frac{7. 6. 5. 4. 3. 2}{1. 2. 3. 4. 5. 6} = \frac{7}{1}; \frac{7. 6. 5. 4. 3. 2. 1}{1. 2. 3. 4. 5. 6. 7} = 1.$$

És így látnivaló, hogy akár páros, akár páratlan legyen az $(a + b)$ hatalma, az által, hogy az ösztényzőnek tényezőit a' középső tagon túl is minden lépten egy-egy tényezővel, mely következik, alul felül szaporítjuk, épen azt visszük véghez, hogy túl a' középső tagon minden lépten elmaradjon a' tényezőkből hátulról alul felül egy-egy.

Másik nehézség, mely a' kéttagi törvény' általános kifejezését illetőleg magát előadni látszik, ez, hogy az szerint az $(a + b)$ ' célirányos egész hatalmai közül akármelyiket is kifejező tagok' formálását,

ugy látszik, akármeddig lehet folytatni vég nélkül, holott pedig az ilyen hatalmak, mint a' fentebbi példából látjuk, mindenkor meghatározott számu, nevezetesen az $(a + b)$ hatalomjelenél egygyel több tagból állanak, például az $(a + b)$ 2-ik hatalma áll 3, a' 3-ik 4, a' 4-ik 5 tagból, és így tovább; egy szóval $(a + b)^n$ áll $n + 1$ tagból. De ez a' nehézség is könnyen elhárítható. Ugyanis, az ösztényzők itt, az első tagon kezdve, im e' törvény szerint formáltatván: $\frac{n}{1}$; $\frac{n(n-1)}{1.2}$; $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$; $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$

'stb., mihelyt itt az osztandó' utolsó tényezőjében a' szám, melyet az n-ből ki kell vonni, olyan nagygyá lesz, mint maga az n, ez a' tényező nulla ($n - n = 0$) lévén, az egész tagot, melyhez tartozik, sőt a' következő tagokban is mindenütt megmaradván, azokat is mind nullá teszi. Minthogy pedig az a' szám, melyet az ösztényző' osztandójának utolsó tényezőjében az n-ből ki kell vonni, az 1-ső tagban még null, a' 2-ikban 1, a' 3-ikban 2, a' 4-ikben 3, és így tovább mindenik tagban egygyel kevesebb, mint a' tag' száma: tehát látnivaló, hogy az az $(n + 1)$ -dik tagban lesz n-né, 's következőképen az ösztényző' osztandójának utolsó tényezője az $(n + 1)$ -dik tagban lesz nulla; és így az $(n + 1)$ -dik tag, 's minden azt követő tagok nulla lévén, az $(a + b)$ n-dik czélirányos egész hatalmának értéke az n-dik tagon végződik, 's tagjainak száma a' nuladik taggal együtt = $n + 1$. Például $(a + b)$ -nek a' 4-dik hatalma az általános kifejezés szerint lesz:

$$(a + b)^4 = a^4 + \frac{4}{1}a^3b + \frac{4.3}{1.2}a^2b^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}a^1b^3 + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4}a^0b^4 + \\ + \frac{4.3.2.1.0}{1.2.3.4.5}a^{-1}b^5 + \frac{4.3.2.1.0.(-1)}{1.2.3.4.5.6}a^{-2}b^6 + \dots$$

hol az 5-dik tag, melynek ösztényzője' osztandójában az utolsó szorzó nullá lett, minden következő tagokkal együtt, hol ez a' null szorzó mindenütt megmarad, nullá lévén, csak a' négy első tag marad meg a' nulladikkal együtt, melyek is, az ösztényzők kiszámítatván, fognak lenni: $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Igy az ellenvetések is el lévén háritva, bátran állithatjuk, hogy mikor a' kéttagu mennyiség' hatványjele czélirányos egész szám a' kéttagi törvény' általános kifejezése igen helyesen esik e'képen:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^{n-3}b^3 + \dots^*$$

*) Ámbár itt nekem a' sorzatokról tanítani nem czéлом: ennyit mindaz-

71. §. Ezen legérdekesebb törvényét az általános számvetésnek, mely a' többieknek is alapja, ki és mikor kezdte először feltalálni, — kezdte, mondom, mert ennek feltalálása csak apródonként ment tökéletességre, = nem bizonyos. Annyi igaz, hogy Stiefel nevű német Mathematicus, különben Pap, 1544-ben kijött Arithmetica integra című munkájában már mutatott egy módot, mi-kép' lehet a' kéttagu mennyiség czélirányos egész hatalmaiban a' tagok ösztényzöbit kiszámítani. De az ő módja szerint nem lehet akárhanyadik hatalomban akárhanyadik tag ösztényzöjét egyenesen megtalálni; hanem csak az egygyel alsóbb hatalom ösztényzöiből lehet az egygyel felsőbb hatalom ösztényzöbit egyszerű öszveadás által kiszámítani oly móddal, hogy az ember az egygyel alsóbb hatalom n-dik, és $(n + 1)$ -dik tagjai ösztényzöbit összeadja, 's az öszveg lesz mindenkor az egygyel felsőbb hatalom $(n + 1)$ -dik tagjának ösztényzöje, Mely szabály szerint (tudván e' mellett azt is, hogy az $(a + b)$ első hatalmában mind a' két tagnak hallgatva oda értett ösztényzöje = 1, mint szintén, hogy a' többi hatalmokban is a' kezdő vagy nulladik tag' ösztényzöje hasonlóképen mindenütt = 1) ha legalul

által a' következőképen nézve szükségesnek látok ez alkalommal jegyzéskép' megenlíteni:

1) Hogy az olyan számrendet, melynek egymásután következő \pm — jegekkel összekötött tagjai bizonyos állandó törvény szerint formáltatnak, egyszerű sorzatnak (series) nevezik. Ilyet az elemi számtan csak kettőt ismér, ugyanint az ugynevezett arithmetikai és geometriai, vagy helyesebben különbségi és szeri sorzatokat; de az analysisben számtalan sokféle sorzatok jönnek elő, melyek közül egy az is mely az $(a + b)^n$ értékét kifejezi.

2) Ha a' sorzatban uralkodó törvény olyan, mely szerint a' következő tag mindig kisebb lesz az előtte valónál, akkor a' sorzat öszszetartónak hívják (series convergens), ellenkező esetben pedig szélyeltartónak (series divergens). Továbbá, ha a' sorzat' törvénye olyan, mely szerint abban soha véget érni nem lehet, akkor az végetlenek (series infinita), ellenkező esetben végesnek (finita) mondatik.

3) Az analysisben a' nevezetesebb törvényeket kifejező sorzatoknak szokás tulajdon neveket adni. Így például a' kéttagu mennyiség' valamely hatványát kifejező sorzatot kéttagi sorzatnak (series binomialis), az ösztényzöket pedig ezen sorzatban, mikor a' hatványjel czélirányos egész szám, kéttagi ösztényzönek (coefficientes binomiales) hívják. Minthogy pedig ezen ösztényzök igen nevezetes számok és gyakran előfordulnak, szokás ezeket rövidítve írni, még pedig nem csak egyféleképen. Leghelyesebb, ha egy írásbeli nagy B betűt írván, mely ezt teszi: binomialis coefficientes, ennek apróbb számmal alul elíbe jegyezzük, hanyadik hatalomban, felibe pedig, hanyadik tagnak binomialis coefficientensét kell érteni. Például 10^5 annyit tesz mint valamely kéttagu mennyi-

kezdjük, 's lépcsőnkint megyünk felfele, minden egymásután követ-

	0	1	2	3	4	5	6	7
I	1	1	0	0	0	0	0	0
II	1	2	1	0	0	0	0	0
III	1	3	3	1	0	0	0	0
IV	1	4	6	4	1	0	0	0
V	1	5	10	10	5	1	0	0
VI	1	6	15	20	15	6	1	0
VII	1	7	21	35	35	21	7	1

kező hatalmak' ösztényezőit kiszámít-
hatjuk egymásból, mint ezt az itt ol-
dalt lévő táblácskából általlátni kön-
nyű: hol a' római számok az $(a + b)$
különböző hatványait, az ezek köz-
zül mindegyik után egyegy sorba irt
számok az $(a + b)$ ' azon hatalmábani
ösztényezőket, az ezen ösztényzők ro-
vatai felett álló számok pedig a' tagok

számjait jelentik. Világos ugyanis, hogy az I-ső hatalom 0-dik és 1-ső tagjainak ösztényzői $1 + 1$, teszik a' II-dik hatalom 1-ső ösz-
tényzőjét $= 2$; amannak 1-ső és 2-ik tagjainak ösztényzői, $1 + 0$,
teszik ennek 2-dik tagjának ösztényzőjét $= 1$. Továbbá, a' II-dik
hatalom 0-dik és 1-ső tagjainak ösztényzői, $1 + 2$, teszik a' III-dik
hatalom 1-ső tagjának ösztényzőjét, $= 3$; amannak 1-ső és 2-dik
tagjainak ösztényzői, $2 + 1$, teszik ennek 2-dik tagjának ösztény-
zőjét, $= 3$, és így tovább végnélkül. De hogy a' kéttagi ösztény-

ség 10-dik hatalmában az 5-dik tag ösztényzője; úgy hogy egészen kírva lesz:

$10\text{B} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$. Általánoson pedig $n\text{B}$ annyi mint a' kéttagu mennyiség n-
dik hatalmában az r-dik tag' ösztényzője, ha tudnillik a' hatványjel ezéllrá-
nyos egész szám.

4) Akármint jelentsenek is ezen kéttagi hatványban: $(a + b)^n$, az a és b,
ha az n célirányos egész szám, az ösztényzők egész összege akármely hatalom-
ban is mindenkor annyi, mint 2^n . Például az ösztényzők' összege az $(a + b)^2$ -ban
 $= 2^2$, $= 4$; az $(a + b)^3$ -ban $= 2^3 = 8$; az $(a + b)^4$ -ban $= 2^4 = 16$ stb. Ez már
foly azokból, miket fentebb a' 60-dik §-ban mondtunk; de máskép is könnyű
ezt megmutatni. Ugyanis az ösztényzők itt függetlenek lévén a' kéttagu mennyi-
ség, $(a + b)$, tagjainak az a-nak és a' b-nek nagyságától, 's ugyanazok maradván,
akármint változzanak is az a' és b' jelentésél, ha mind egyiket ezek közül 1-nek
veszszük; úgy a' kéttagi általános törvényben az egyetlen bal oldalán fog lenni
 $(1 + 1)^n$, azaz, 2^n ; a' jobb oldalán pedig, mivel így mind az a-nak, mind a' b-
nek minden hatványa $= 1$, az 1-ek pedig, mint szorzók, minden tagokból kima-
radhatnak, lesznek csak az $(a + b)^n$ minden tagjainak ösztényzői, és így az egész

egyenlet fog lenni: $2^n = n\text{B} + n\text{B} + n\text{B} + n\text{B} + \dots + n\text{B}$; vagy mivel a' nulla-
dik, és az n-dik tagban, a' hallgatva oda értett ösztényző mindig $= 1$; $2^n =$

$1 + n\text{B} + n\text{B} + n\text{B} + \dots + n\text{B} + 1$. Például $2^5 = 1 + \frac{5}{1} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{5}{1} + 1 =$
 $1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$; mely igazságnak majd alább hasznát fogjuk
venni.

zöket miért kell így számítani ki, Stiefel okát nem adta, 's ha okát adta volna is, látnivaló, mily tökéletlen a' kiszámítás ezen módja ahoz képest, melyszerint itt akármely hatalom' akármely tagjának ösztényzőjét egyszerre le tudjuk írni, 's melynek feltalálója a' közönséges logaritmusok kiszámításáról előttünk már ismeretes ángol Mathematicus Brigg.

Miután e'kép a' kéttagi törvény, abban az esetben, mikor az n czélirányos egész szám, már fel volt találva, Newton volt az első ki megmutatni igyekezett, hogy ez a' törvény minden más esetekben is általánosan igaz, akár czélirányos akár czélelles, akár egész akár törtszám legyen a' hatalomjel, az n . Mely igazság fel-födözése egy a' legnevezetesebbek közül, melyeket a' tudományok ezen találmányokkal gazdag nagy férjfiúnak köszönhetnek; miért is ez, az ő sirkövére is felmetszetett, mint hajdan az Archimedesére a' henger és a' gömb. Newton azonban ezen igazsághoz nem egyenes okoskodás által, hanem igen tekervényes uton jutott, és ezt csak induction építette. De későbbi Mathematicusok látván hogy ez nem elég, 's nem akarván, hogy a' mathesisnek ezen igen fontos igazsága, melyre annyi más igazságok építettek, 's mely a' felsőbb analysisnek is egyik talpköve, ily gyenge, és mathesishez nem illő alapon álljon: szinte vételkedtek egymással azon, hogy a' kéttagi törvény' általánosságának mathesishez illő szoros megmutatását találjanak, úgy hogy ez azóta mintegy szüntelen fennálló feladat volt a' mathesisben, melynek megfejtését sok nagy elméjű Mathematicusok próbálgatták időről időre. Készítettek is ennek újabb meg újabb megfejtéseit sokan, például Kästner, Euler, L'Huilier, Lagrange, Robertson, és hogy többeket ne említsek, hazánkban is Mitterpacher, (lásd Pasquich Unterricht in der mathematischen Analyse Leipzig 1790 I. B. S. 184 — 200); mely különböző megfejtések mind igen elmések, de mind megszűnően kerítettek. Némelyek a' felsőbb analysis-t vették segítségül a' kéttagi törvény általánosságának megmutatására; holott a' felsőbb analysisnek is, ha azt jó fundamentomra akarjuk építeni, egyik talpköve a' kéttagi törvény. Mások, ha ezen hibába nem estek is, megmutatásaikat többnyire igen hosszadalmas, és szövevényes calculosokra építették, melyekre kivált gyengébb számvetőknek csak nézni is borzadalom. Mi kísértsük meg itt minden cifra calculus nélkül, csupa egyszerű okoskodás által magoknak a' számoknak, 's különösen a' számok különböző hatványainak természetéből mutatni meg azt, hogy ha

akkor áll a' kéttagi törvény, mikor a' hatványjel, n, czélirányos egész szám, állani kell ugyanannak minden más esetekben is, akár czélirányos, akár czélelles, akár egész, akár törtszám legyen is az n.

72. §. Vegyük fel először is azt az esetet, mikor a' kéttagu mennyiség' hatványjele czélirányos ugyan, de nem egész, hanem törtszám, például $(a+b)^{\frac{2}{3}}$. Kérdés, lehet-e az ilyen hatalmat is a' fentebbi törvény szerint formálni e'képen:

$$(a+b)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} + \frac{\frac{2}{3}}{1} a^{\frac{2}{3}-1} b + \frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)}{1 \cdot 2} a^{\frac{2}{3}-2} b^2 + \frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{\frac{2}{3}-3} b^3 + \dots ?$$

Hogy ezt megítélhessük, elébb egy másik könnyebb kérdésre kell megfelelnünk, erre t. i., hogy ha az $(a+b)$ -nek olyan tört hatványai közül, melyeknek hatványjeleikben a' törtszám nevezője mindegyik ugyanaz, például = 3, melyeket általánosan így fejezhetünk ki: $(a+b)^{\frac{n}{3}}$, hol az n helyett a' természetes számokat, 1, 2, 3, 4, stb kell raknunk renddel egymásután; ha, mondom, az $(a+b)$ -nek ilyen tört hatványai közül valamelyikre, már akármelyikre nézve tudnánk olyan törvényt találni, mely szerint azt egy a' maga gyökérbetűből, 's a' maga hatványjeléből szerkesztetett sorzattal ki tudnánk fejezni: ki lehetne-e ugyanazon törvény szerint a' többit is mindegyiket fejezni ugyancsak a' gyökérbetűből, 's a' maga hatványjeléből szerkesztetett sorzattal? Ezen kérdésre kétségkívül igenel kell felelnünk; mivel a' hatványjel nevezője mindegyikben egyformán azt jelentvén, hány egyenlő tényezőkre kell a' gyökérbetű' összevét, $(a+b)$, szétbontani, számlálója pedig mindegyikben egyformán azt, hány ilyen egyenlő tényezőknél kell szorozni az 1-hez járulniok, hogy azokból mint szorzat a' kívánt hatalom kerekedjék; és így mindegyikben egyformán határozatván meg a' hatalom a' gyökérbetű, és a' maga hatványjele által: kétségkívül mindegyikben egyformán, vagyis ugyanazon törvényszerint kell a' kifejtett hatalomnak is a' gyökérbetűből, és a' maga hatványjeléből szerkesztve lennie. Ugyde az $(a+b)$ -nek azon hatványai között, melyeket általánosan így fejeztünk ki: $(a+b)^{\frac{n}{3}}$, számtalanokat találunk, melyeket a' gyökérbetűvel és a' magok hatványjeleikkel ki tudunk fejezni. Ilyenek nevezetesen mindazok, melyekben az n-et a' 3-mal maradék nélkül el lehet osztani; világos lévén, hogy az ilyenekben ugyanaz lesz a' törvény, melyet találtunk, mikor a' hatványjel czélirányos egész szám volt, például, hogy:

$$(a+b)^{9/3} = a^{9/3} + \frac{9/3}{1} a^{9/3-1} b + \frac{9/3(9/3-1)}{1 \cdot 2} a^{9/3-2} b^2 + \frac{9/3(9/3-1)(9/3-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{9/3-3} b^3 + \dots;$$

mivel ez csak olyan, mintha ezt írnök:

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3}{1} a^2 b + \frac{3(3-1)}{1 \cdot 2} a^1 b^2 + \frac{3(3-1)(3-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^0 b^3. \text{ És így nyilván}$$

van, hogy a' többiek is mind ugyanezen törvényszerint fognak formáltatni. 'S minthogy ezen okoskodást, mellyel itt éltünk, minden tört hatványjelekre épen úgy lehet alkalmaztatni, mint azokra, melyeknek nevezőjük = 3: látnivaló, hogy a' kéltagi törvény, melyet abban az esetben találtunk, mikor a' hatványjel czélirányos egész szám, áll olyankor is mindig, mikor az czélirányos törtszám.

Ne mondja pedig senki, hogy én itt, midőn az $(a+b)$ hatványjeléül olyan törtszámot választottam, mely épen valahány egész tesz, és abból, hogy ilyenkor a' fentebb egész hatványjelekkel kifejtett törvény áll, azt következtetem, hogy annak állania kell olyankor is, mikor a' hatványjel nem ilyen valahány egészet tevő, hanem más akármely törtszám, vagy csalni akarok, vagy magam csalatkozom. Sőt inkább, a' ki ezt mondaná, az maga fogna csalatkozni. Mert avvagy tanultuk-é valaha, hogy a' mely törtszámok épen valahány egészet tesznek, azok más természetűek mint a' többiek, és azokkal más szabályok szerint kell bännünk számvetési munkálatainkban, mint a' többiekkel, vagy megfordítva, a' többiekkel más szabályok szerint mint az ilyenekkel? Tefjességgel nem! Az, hogy valamely törtszámból épen valahány egész telik-é vagy nem, neki, mint törtszámnak, természetére semmi befolyással sincsen. Ő azért, mint törtszám nem egész, hanem törtszám. Négyfél alma nem két egész alma, hanem négyfél alma. A' mennyiség ugyanaz, de a' fogalom más. Épen így $(a+b)^3$ nem egy fogalmat fejez ki ezzel:

$(a+b)^{9/3}$. Amaz elsőbb, tesz egy olyan tényt, mely származik, ha az $(a+b)$ 3-szor járul az 1-hez mint szorzó, ez utóbbi pedig azt teszi, hogy az $(a+b)$ 3 egyenlő tényezőkre szétbontatván, egy ezek közül, 9-szer járul mint szorzó az 1-hez, 's épen így $(a+b)^{9/3}$ is azt teszi, hogy az $(a+b)$ 3 egyenlő tényezőkre szétbontatván, ezeknek egyike 2-szer járul mint szorzó az 1-hez. Ezek így lévén, bátran mondhatjuk, hogy a' mint szerkesztelik az $(a+b)^{9/3}$ értéke az a és b gyökérbetűkből és a' maga hatványjeléből, $9/3$, melynek nevezője azt jelenti, hány egyenlő tényezőkre van szétbontva az $(a+b)$, számlálója pedig azt, hány ilyen tényező járul szorzóul az 1-hez:

épen úgy szerkesztetik az $(a+b)^{2/3}$ értéke is ugyancsak az a és b gyökérbetűkből és a ' maga hatványjeléből, $2/3$, melynek nevezője hasonlóképen azt jelenti, hány egyenlő tényezőre van szétbontva az $(a+b)$, számlálója pedig azt, hány ilyen tényező járul mint szorzó az 1-hez. Lehet ezen okoskodásnak más fordulást is adni e'képen: Valamint mikor a ' két tagu mennyiség hatványjele czélirányos egész szám, egyetlenegy általános törvény fejezi ki, mikép kell a ' hatványt a ' gyökérbetűkből, és a ' hatványjelből szerkeszteni: épen úgy egyetlenegy általános törvénynek kell lenni — már az akár a ' fentebbi legyen, akár más — arra nézve is, mikép alakul a ' hatalom a ' gyökérbetűkből és a ' hatványjelből, mikor a ' hatványjel czélirányos törtszám. Ezt a ' dolog természete hozza magával; különben törvény sem volna. Ugyde az olyan czélirányos tört-hatványjeleket illetőleg, melyekből éppen valahány egész telik, nem lehet más a ' kéttagi törvény mint az, melyet találtunk, mikor a ' hatványjel czélirányos egész szám; különben ugyanazon egy hatalomnak máskép' kellene kijöni, ha hatványjelét egész, máskép' ha törtszám formában írják; a ' mi képtelenség. Következésképen minden más esetekben is, mikor a ' hatványjel czélirányos törtszám, ugyanennek kell lenni a ' kéttagi törvénynek. Ez mindenik oly okoskodás, mely felér egy-egy algebrai megmutatással. És bár gyakrabban éltek volna, 's élének a ' Mathematicusok az efféle dolog természetéből merített okoskodásokkal, és ne támaszkodtak volna mindig csak az algebra-ra, úgy sokszor rövidebb úton jutottak volna az igazsághoz, és sok haszontalan vitatkozásokat elkerültek volna. Egyébiránt

73. §. Miután megmutattuk, hogy a ' kéttagi törvény áll akkor is, mikor a ' hatványjel czélirányos törtszám, jegyezzük meg itt a ' kéttagú mennyiségek ilyen tört-hatványairól e' következőket:

a) Hogy a ' sorzat, mely ezeknek értékét kifejezi, 's melyet általánosan így terjeszthetünk elő:

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{1} a^{\frac{m}{n}-1} b^1 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^{\frac{m}{n}-2} b^2 + \dots$$

kor csak az m az n -nel maradék nélkül nem osztható, mindenkor végtelen (series infinita); mivel itt s'oha sem jöhet elő az az eset, hogy az ösztényző osztandójában valamely szorzó nullá legyen; minthogy ha az $\frac{m}{n}$ -ből, mely valahány egyet, és egy igazi törtet foglal magába, annyi egyet elszedünk egymásután, a ' mennyit csak lehet, mikor oda jutunk, hogy a ' maradék már igazi törtszám, ha

még egygyel alább szállunk, már túl mentünk a' nullon a' czélelles oldalra, 's ha még tovább is folytatjuk az egygyel-egygyel alább szállást, az ösztényző osztandójának későbbi szorzói mindig nagyobb-nagyobb czélelles számok lesznek. Például, ha $\frac{n}{n} = \frac{13}{3}$: úgy az ösztényző osztandójának szorzói egygyel-egygyel alább szállva, fognak lenni:

$$\frac{13}{3}, \frac{10}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{11}{3}, -\frac{14}{3}, \text{ stb.}$$

b) Mivel minden gyökeret lehet úgy terjeszteni elő, mint tört hatványt, és minden mennyiséget lehet két tagban állítani elő: tehát látnivaló, hogy a' kéttagi törvényt lehet gyökérkivonásra is használni. Mire nézve azonban szükség megjegyeznünk, hogy a' számot, melyből e'kép' akarunk gyökeret vonni, szükség oly móddal formálnunk két tagból, miszerint a' kifejtendő végetlen szorzat nemcsak összetartó, hanem minél hirtelenebb összetartó is legyen, hogy így ha a' sorzatnak csak néhány elsőbb tagjait számítjuk is ki, a' gyökérkivonás elég pontos legyen. Például ha a' 2-nek 2-ik gyökerét akarnók kivonni, nem lenne alkalmas a' kettőt így formálni: $(1+1)$. Mert ez szerint, ámbár mind az a-nak, mind a' b-nek, mint 1-nek, hatványa is mindenütt = 1 lévén, 's ezek mint szorzók mindenütt elmaradván, a' sorzat csak az ösztényzőkből áll, és következőképen:

$$(1+1)^{1/3} = 1^{1/3} + \frac{1}{2} + \frac{1/2(1/2-1)}{1 \cdot 2} + \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1/2(1/2-1)(1/2-2)(1/2-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

's ámbár ezen sorzatot még sokkal egyszerűbbé is lehet tenni, ha először is a' rekeszbeli két-két tagból álló szorzókat egy taggá olvasztjuk e'képen:

$$(1+1)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1/2(-1/2)}{1 \cdot 2} + \frac{1/2(-1/2)(-3/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1/2(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

azután pedig a' nulladik és első tagot kivéve, a' többinek minden tényezőjét alul felül szorozzuk 2-vel, mi által fog lenni:

$$(1+1)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1(-1)}{2 \cdot 4} + \frac{1(-1)(-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1(-1)(-3)(-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots$$

's végezetre a' 2-ik tagon kezdve az osztandó' első tényezőjét, mely különben sem szaporít semmit, mindenütt elhagyjuk, a' czélelles tényezőket pedig mind czélirányosokká változtatjuk, hanem aztán minden tag elébe az szerint írunk + vagy - jegyet, a' mint abban a' czélelles szorzók száma páros vagy páratlan, következőképen:

$$(1+1)^{1/2} \text{ azaz } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} - \dots$$

mindazáltal ezen sorzat szerint még így is nagyon hosszadalmas lenne a' $\sqrt{2}$ -nek csak valamennyire pontos kiszámítása is ; mivel itt a' sorzat' összetartása igen csekély lévén , igen sok tagokat kellene kiszámítani.

Ilyen helyt már tágas mező nyílik a' Mathematicus' elmességének , mikép' formálja a' számot , melyből gyökeret akar vonni , úgy hogy a' sorzat minél összetartóbb legyen. Itt például , hol a' $\sqrt{2}$ -t akarjuk kivonni , élhetünk következő mesterséges fogásokkal: Először a' 2-t sokszorozzuk egy olyan számmal , mely maga is 2-ik hatvány , 's a' szorzat is , melyet a' 2-vel ad , keveset különbözik egy másik 2-ik hatványtól , például így: $2 \times 25 = 50 = 49 + 1$, miszerint $\sqrt{2 \times 25} = \sqrt{49 + 1}$. 'S ha itt az egyenlet' jobb oldalán a' gyökérjegy alatti mennyiséget , $49 + 1$. elosztjuk 49-czel , és a' hanyadost , $(1 + \frac{1}{49})$ szorozzuk az osztóval , 's a' szorzatot , $49(1 + \frac{1}{49})$, mely természetlennel annyi , mint az osztandó . $49 + 1$, tesszük e' helyett , fog lenni : $\sqrt{25 \times 2} = \sqrt{49(1 + \frac{1}{49})}$, 's innen $\sqrt{25} \times \sqrt{2} = \sqrt{49} \times \sqrt{1 + \frac{1}{49}}$, vagy a' gyökeret lört hatvány formában irván , $5 \sqrt{2} = 7 [1 + \frac{1}{49}]^{1/2}$ Így már , ha itt a' jobb oldali 2-ik szorzót a' két tagi törvény szerint egy végtelen sorzattá kifejtjük , ez oly hirtelen összetartó lesz , hogy ha a' kezdő , vagy nulladik tagon kívül , mely látnivaló itt is = 1 , csak 5 tagot számítottunk is ki , a' $[1 + \frac{1}{49}]^{1/2}$ vagyis a' $\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$ oly pontosan fog kijöni , hogy a' mi azon túl elmarad , mindössze sem tesz egy ezermilliódrészt. Ha pedig ezt : $\sqrt{1 + \frac{1}{49}}$ ily pontosan kiszámítottuk , szorozzuk ezt 7-tel , 's a' szorzat lesz = $5 \sqrt{2}$, 's ezt elosztván 5-tel , a' hanyados lesz = $\sqrt{2}$, a' mit épen kerestünk. Ez pedig igen könnyen megesis ; mert itt a' gyökér' első tagjának , az 1-nek , hatványai mint szorzók , mindenütt kimaradván , a' már fentebb kijött ösztényzőket az 1-ső tagon kezdve szorozzuk 2dik gyökértagnak $\frac{1}{49}$ egymás után következő célirányos egész hatványaival e'képen :

$(1 + \frac{1}{49})^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{49} - \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{(49)^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{(49)^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{(49)^4} +$
 $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{1}{(49)^5}$, 's ezen tagokat egyenkint kiszámítván, és mindegyiket tizedes törtté változtatván, a' + és - tagok e'képen fognak kijöni:

$$0\text{-ik tag} = + 1,000\,000\,000\,000 \quad 2\text{-ik tag} = - 0,000\,052\,061\,640$$

$$1\text{-ső tag} = + 0,010\,204\,081\,632 \quad 4\text{-ik tag} = - 0,000\,000\,006\,776$$

$$3\text{-ik tag} = + 0,000\,000\,531\,241 \quad \text{Öszveg} = - 0,000\,052\,068\,416$$

$$5\text{-ik tag} = + 0,000\,000\,000\,091$$

$$\text{Öszveg} = 1,010\,204\,612\,969$$

Már most ha a' + tagok öszvegéből . . . = 1,010204612969,

levonjuk a' - tagok' öszvegét . . . = 0 000052068416.

a' maradék lesz $\left[1 + \frac{1}{49}\right]^{1/2} = \sqrt{1 + \frac{1}{49}} \approx 1,010152544553$,

mely 7-szer véve = $7\sqrt{1 + \frac{1}{49}} = 5\sqrt{2} \approx 7,071067811871$;

's ez 5-tel clostva = $\sqrt{2} \approx 1,414213562374$,

mely egész a' százezer-milliódrészekig tökéletes.

Hasonló módon lehet a' 2-nek 3-ik gyökerét is kivonni, ha szorozzuk azt egy olyan számmal, mely maga is harmadik hatvány, 's 2-veli szorzata is keveset különbözik egy másik 3-ik hatványtól;

peldául így: $2 \times 64 = 128 = 125 + 3$; miszerint $\sqrt[3]{2} \times 64 =$

$$\sqrt[3]{125 + 3} = \sqrt[3]{125 \left(1 + \frac{3}{125}\right)}, \text{ 's innen } 4\sqrt[3]{2} = 5\sqrt[3]{1 + \frac{3}{125}} =$$

$5\sqrt[3]{1 + 0,024} = 5(1 + 0,024)^{1/3}$; melynek kidolgozása a' közelebbi pelda' nyomán, szolgáljon gyakorlatul az efféle munkákat kedvelőknek, 's egyszer'smind alkalmul annak kitalálására, mi az általános törvény, mely szerint az ily móddali gyökér kivonások' alkalmazásával a' sorzat' öszlényzői formálatnak. — Az eredmény lesz:

$$\sqrt[3]{2} = 1,259921049893.$$

74. §. Már most következnek, hogy megvizsgáljuk, ha vajon a' kéttagi törvény, melyet, mikor a' hatványjel célirányos akár egész akár tört szám, igaznak találtunk, áll-e akkor is, mikor a' hatványjel célelleses? — Ha a' Mathematicusok azon mennyiségekről, melyeket a' Logicából a' Mathesisbe átalhozott, de itt igen szerencsétlenül alkalmaztatott műszavakkal positiva és negativa

mennyiségeknek neveznek, világos fogalmakat szereztek volna magoknak: úgy soha még csak kérdésbe sem tételhetett volna az, ha vajon a' mely számtani törvény pozitívus számokkal igaz, ugyanaz igaz-è negatívus számokkal is? Mert ezt kérdeni annyi, mintha valaki azt kérdené: vajon a' mely szabályok szerint bánunk számvetési munkálatainkban a' napkelet felé tett lépéseket jelentő számokkal, lehet-è ugyanazok szerint bánunk a' napnyugot felé tett lépéseket jelentő számokkal is, vagy megfordítva? Ugy van, mert a' Mathesisben a' negatívum nem a' pozitívumnak pusztá tagadása, mint a' Logicában, hanem az ellenkezőnek állítása. Ennek például: kelet felé tett lépések, a' Mathesisben nem ez nevezetik negatívumának: nem kelet felé tett lépések, melyek még dél- észak 'stb. felé tartókat is tehetnének — hanem ez: nyugot felé tett lépések. A' mathesisbeli positiva és negativa mennyiségek tehát egymással egészen ellenkezők, vagyis még világosabban szólván, egymással egészen ellenkező célokra törekedő erőknél szüleményei, melyek közül az egyik csak úgy, és csak annyit mehet előre a' maga célja felé, ha, és a' mennyit a' másik a' maga céljától vissza felé hátrál. Mint például ha egy tekét, mely most az asztal közepén nyugszik, két ellenkező erő igyekeznék egyik kelet, másik nyugot felé hajtani, akármelyik is csak úgy és csak annyit haladhatna a' tekével a' maga célja felé, ha és a' mennyit a' másik hátrálna vissza a' maga céljától. De kérdés melyik erőnek az eredménye lenne itt az ugynevezett positiva, melyké a' negatíva mennyiség? Felelet mindenikre nézve a' maga előre haladása lenne a' positiva, a' maga hátrálása ellenben a' negatíva mennyiség, és így minden mozdulása a' tekének akár kelet- akár nyugotfelé positiva és negatíva is lenne egy-szersmind; positiva t. i. arra az erőre nézve, mely az által célja felé haladt, negatíva pedig arra nézve, mely az által céljától vissza felé hátrált. Épen így ha két ember leül kártyázni, és mindenkinek az a' célja, hogy nyerjen: minden játék eredménye arra nézve a' ki nyert pozitívum, vagy helyesebben célirányos, arra nézve pedig a' ki veszített negatívum, vagy helyesebben célelles. Ellenben, ha egy gazdag ifju szegény barátjával, kinek örömet ajándékozna szükségei pótlására bizonyos summát, de attól tart, hogy az el nem fogadja, oly czállal ül le kártyázni, hogy annak hagyjon magától nyerni: ennek a' veszítés lesz célirányos, a' nyereség célelles. De hát ha két játszónak, kik közül mindenkinek célja az, hogy nyerjen, játékát egy harmadik nézi, erre nézve, melyik lesz a' célirányos.

melyik a' czélelles mennyiség? Felelet: ha ő a' játékban nem érdekeltetik, ugy neki mind egy; de ha érdekeltetik, például ha a' két játszó közül Pált kedvelli, Péterre neheztel, és így azt szeretné, hogy Pál nyerjen; ugy a' Pál nyeresége — mely egyszersmind Péternek vesztesége — neki czélirányos; ellenben a' Pál vesztesége — mely egyszersmind Péternek nyeresége — neki czélelles mennyiség lesz. Egészen megfordítva van a' dolog egy olyan nézőt illetőleg, ki Péternek barátja, Pálnak nem. Ez a' Péter nyereségét — mely egyszersmind Pálnak vesztesége — veszi czélirányosnak, czélellesnek ellenben a' Péter veszteségét, — mely egyszersmind Pálnak nyeresége. Ugyanazon mennyiségek tehát, vagyis ugyanazon mennyiségeket kifejező számok, egyik szempontból tekintve, czélirányosok, másiktól czélellesnek lévén, ugyan mi értelme lehet ezen kérdésnek: ha vajon azon számvetési szabályok, melyek a' czélirányos számokkal számvetésben érvényesek, érvényesek-é a' czélelles számokkal való számvetésben is? hanemha ez: vajon a' számvetési szabályok érvényesek-é ugyanazon számokkal számvetésekben, a' melyekkel számvetésekben érvényesek? Valóban több galibát a' Mathesisben aligha okozott valami, mint a' positiva és negativa mennyiségek' természetének nem értése, miszerint azt mondták, hogy positiva mennyiség az, mely több, negativa pedig az, mely kevesebb a' semminél, 's ezt például: $4 - 7 = -3$ így mondták ki: 4-ből 7-et ha kiveszünk, marad ott a' semminél 3-mal kevesebb. De micsoda beszéd ez? A' hol csak 4 van, hogy lehet onnan 7-et venni el? 's mi lehetne már a' semminél is kevesebb? Bizony nem csuda, ha sok ifjak, kik más tudományokat kedvvel tanulnak, a' Mathesistől az effélék miatt irtódnak; sőt nem csuda, hogy az ilyen ferde fogalmak némely kérdések' megfejtése körül még a' legnagyobb Mathematicusokat is zavarba hozták. Például a' Leibnitz' idejében nagy vitatkozás volt egyszer azon, ha vajon a' $+1$ ugy van-é a' -1 -hez, mint a' -1 a' $+1$ -hez. Egyik azt állította, hogy ugy van, mert ha e' két szerből (ratio) $(+1):(-1)$, és $(-1):(+1)$, egyenletet formálunk e'képen: $+1:-1 = -1:+1$, a' két szélső tag' szorzata egyenlő lesz a' két középső' szorzatával: $(+1) \times (+1) = (-1) \times (-1)$. t. i. mindenik $= +1$; ez pedig nem lehetne, ha a' két szer, melyeket egymással egyenlőknek tettünk, nem egyenlők volnának, vagyis ha $+1$ nem épen ugy volna -1 -hez, mint -1 $+1$ -hez. Másik ellenben így okoskodott: -1 kisebb lévén a' semminél (nihilus minus), annyival inkább kisebb

$a' + 1$ -nél. És így $+ 1$ úgy van $- 1$ -hez, mint nagyobb szám kisebbhez, $- 1$ ellenben úgy van $+ 1$ -hez, mint kisebb szám nagyobbhoz. Ugyde lehetetlen, hogy nagyobb a' kisebbhez épen úgy legyen, mint kisebb a' nagyobbhoz. Ez még nem elég, hanem előáll egy harmadik és ezt mondja: A' szer (ratio) nem egyéb, mint a' hanyados, mely kijő, ha valamely számot egy másikkal elosztunk. Ugyde ha $a' + 1$ -et számmal osztjuk el, úgy a' hanyados a' végetlen nagy lesz; mert $\frac{1}{0} = \infty$. Ha pedig itt az osztandóhoz nem nyulván az osztót még kisebbé teszszük: úgy a' hanyados még nagyobbá lesz. Ugyde $- 1$ kisebb mint 0 , és így $\frac{+1}{-1}$ nagyobb a' végetlen nagynál. Erre ismét feleli a' negyedik: Nem igaz, hogy $\frac{+1}{-1}$ a' végetlen nagynál is nagyobb volna, sőt inkább még a' semminél is kisebb. Mert tagadhatatlan, hogy egyet egyben megtalálunk egyszer, és így itt a' hanyados lesz $=$ egy; a' mi pedig jegyét illeti, az, mivel osztó és osztandó különböző jegyűek, $-$ (minus, negatív) fog lenni. És így fog lenni $\frac{+1}{-1} = - 1$; ez pedig nemhogy a' végetlen nagynál is nagyobb volna, hanem még a' semminél is kisebb. Utoljára bele szól ezen perbe maga Leibnitz is, hogy ezt eligazítsa, de még jobban összezavarja. Ő ugyanis megengedi mind azt, hogy $a' + 1$ -nek $a' - 1$ -hez való szere $= 1$, mind azt, hogy $a' - 1$ kisebb a' semminél, hanem ezt teszi hozzá, hogy az olyan szer, melyben vagy az első, vagy a' 2-ik szám negatívus, a' milyen például $- 1: + 1$, vagy $+ 1: - 1$, soha sem igaz vagy valóságos, hanem csak képzetes szer (ratio non vera, non realis, sed tantum imaginaria); *) mely állításnak megmutatására az ő okoskodása rövideden ide megyen ki: A' mely szernek (ratio) a' logarithmusa nem igaz, hanem csak képzetes szám, az maga sem igaz, vagy valóságos, hanem csak képzetes szer. Ugyde annak a' szernek, melyben van $a' - 1$ $a' + 1$ -hez, mely is a' mint láttuk $= - 1$ a' logarithmusa nem valóságos, hanem csak képzetes szám. Mert ha valóságos szám volna, úgy vagy pozitívus számnak kellene lennie, vagy negatívusnak. Ugyde pozitívus szám nem lehet; mert pozitívus logarithmusai csak az 1 -nél nagyobb pozitívus számoknak vannak: negatívus szám sem lehet; mert a' negatívus számok meg az 1 -nél

(* Lásd G. G. Leibnitii Opera omnia Genevae 1768. Tom. III. pag. 439.

kisebb pozitívus törtszámoknak logarithmusai. És így $a' - 1$ -nek $a' + 1$ -hez való szere, mely $= - 1$, maga sem igaz vagy valóságos, hanem csak képzelt szer. De ezen okoskodás nem csak egyszeresen hibás. Ugyanis első állítása Leibnitznak, ez t. i. hogy a' mely szernek a' logarithmusa képzetes szám, az maga is képzetes szer, vagy, minthogy a' szer is mindenkor számmal fejeztetik ki, az maga is képzetes szám, azt teszi fel, hogy a' milyen természetű valamely szám' logarithmusa olyan természetű maga a' szám is. Ez pedig nem igaz; mert ha igaz volna, úgy igaznak kellene lenni ennek is; a' mely számnak a' logarithmusa negatívus szám, az maga is negatívus szám; a' mi pedig hogy nem igaz jól tudjuk; mivel negatívus logarithmusai az 1 -nél kisebb pozitívus törtszámoknak vannak. A' mi több, azt is meg lehet mutatni, hogy képzetes logarithmusai nem csak a' képzetes, hanem a' valóságos számoknak is vannak még pedig nem csak a' negatívus, hanem a' pozitívus számoknak is. Továbbá, mikor ezt mondja Leibnitz, hogy ha $a' - 1'$ logarithmusa nem képzetes, hanem valóságos szám volna, úgy annak vagy pozitívus, vagy negatívus számnak kellene lennie: ezzel felteszi, hogy a' negatívus szám, 's következőképen ez is: $- 1$ valóságos szám, 's ezt feltévén, ebből mutatja meg hogy $- 1$ nem valóságos, hanem csak képzetes szám; oly csudálatos hiba az okoskodásban, milyenről én nem emlékezem, hogy valaha tanultam volna a' logyikában. — Már, ha az ugynevezett positiva és negativa mennyiségekről világos fogalmat szereztünk magunknak, ezen egész pert oly könnyű eligazítanunk, hogy szinte ide lehet alkalmaztatni a' Poétának ama szavait a' méhek háborújáról:

et haec certamina tanta

Pulveris exigui jactu compressa quiescent.

Mert $+ 1$ úgy van $a' - 1$ -hez, mint nagyságára nézve vele egyenlőhöz, de céljára nézve egészen ellenkezőhöz; és hogy megfordítva $- 1$ is épen így van $a' + 1$ -hez, világos mint a' napfény. És így világos az is, hogy e' két szer egyenlő egymással, és mindenik $= - 1$, mely szer, vagyis hanyados épen azt teszi, hogy a' két szám, melyet szerbe tettünk egymással, vagyis az osztó és osztandó nagyságukra nézve egyenlők, mert csak ilyenkor lehet a' szer $=$ egy, mikor az osztó az osztandóban épen egyszer van meg; $a' -$ jegy pedig a' hanyados előtt azt jelenti, hogy az osztó az osztandóval céljára nézve ellenkező, és így hogy az osztó nem mint olyan, hanem annak épen az ellenkezője van meg

az osztandóban egyszer. Így nincs az egész dologban semmi mysterium.

De talán azt mondja valaki, hogy a 'célirányosság' és cél-ellenesség' fogalmát nem lehet mindenkor a' positiva és negativa mennyiségekre alkalmaztatni. Mert kinek mi céljával egyez, vagy ellenkezik például a' hőmérőben levő kénesőnek felemelkedése, vagy alábbszállása? mégis amazt positiv, ezt negativ fokozatoknak hívjuk. Ezen ellenvetésre könnyű a' felelet. A' hőmérő' csőjében két egymással ellenkező erőt képzelünk egymással küzdeni, melyek közül egyik kiterjeszteni 's fölfelé emelni, másik összébbhuzni 's alábbszállítani igyekezik a' kénesőt; 's képzeljük, hogy ez a' küz-
dés' kezdetében a' 0 ponton áll. Már most csak az a' kérdés: melyik erő' működésének eredményét nevezzük célirányosnak, melyiket célellesnek? és miért? Felelet: célirányosnak (positiv) nevezzük, mint tudva van, a' kéneső' terjedelmét nevelő, 's azt fölfelé emelő erő' eredményét, célellesnek (negativ) pedig az ellenkezőét. De miért? kétségkívül azért, mivel magunkra nézve célirányos a' növekedés és fölfelé menetel birtokban, tudományban, rangban, becsületben 'stb. a' kisebbedés pedig és alábbszállás célelles; és mi észre sem véve, 's mintegy ösztönileg személyesítvén a' mozgó kénesőt, úgy gondoljuk, hogy neki is a' növekedés célirányos, az alábbszállás célelles. De hát mikor csupa elvont (abstract) számokról van szó, akkor lehet-é — kérdi talán valaki — a' positiv és negativ mennyiségekre a' célirányosság és célelles-
ség' fogalmát alkalmaztatni? Lehet igenis! mert — csak lessük rá magunkat — mikor valamit, például pénzt, tessez ezüst pénzt huszasokban, számlálunk: mindig balról jobbra menve rakjuk azokat egymás után; csak azért-é, mivel az olvasásban és írásban már így szoktuk meg a' betűket egymás után következtetni? vagy talán természettel, mivel jobb kézből rakván le a' mit számítunk, így esik jobban kezünkre? azt én itt nem vitatom; elég, hogy ez szerint a' számlálás' eredeti iránya, mikor testi, vagy megtestesült dolgokat számlálunk, balról jobbra tart, és minthogy mikor az ilyen dolgokat, például a' forintokat, balról jobbra egymás után rakjuk, azoknak száma szaporodik, növekedik; mi pedig a' növekedést, mint a' közelebbi példában is láttuk, mindenütt célirányosnak szoktuk tekinteni: tehát a' számlálásban a' balról jobbra menő lesz a' positiv irány, és az erő, melyel ezen irányban a' forintokat egymás után rakjuk, lesz a' positiv erő. Ha pedig, mikor ezen irányban már

peldául 10 forintot leraktunk egymás után, akkor megfordulunk, és egészen ellenkező irányba, t. i. jobbról balra menve, a' lerakott forintokat egymás után elszedjük, az a' lerakott forintok' számát kevesítő erő, mellyel ezt tesszük, lesz a' negatív erő. Itt is tehát a' forintoknak, vagy akármi más dolgoknak balról jobbra menve egymásután rakása és szaporítása, azután pedig ugyanazoknak ellenkező irányban jobbról balra menve elszedése és fogyasztása, két egymással egészen ellenkező erők' szüleményei. — Már, ha a' számlálásnak ezen módját általvisszük az elvont számokra, és képzelünk magunk előtt egy pontot, a' kiindulás' pontját, 's onnan számlálunk jobbfelé: phantasiánknak azon számalkotó ereje, mely ezen irányban rakja egymásután az elvont egységeket, lesz itt is a' pozitív erő; az ezzel egészen ellenkező számalkotó ereje pedig phantasiánknak, mely ugyancsak a' 0 pontból kiindulva balfelé igyekezik az elvont egységeket egymás után lerakni, lesz a' negatív erő; mely két erő' küzdésének eredményét mindenkor a' balról jobbra számláló erőre nézve nevezzük el $+$ -nak, t. i. ha ez az által a' kiindulás' pontjától jobbra előrehaladt, $-$ nak, ha ez az által ugyanonnan balra hátrább esett. Peldául, ha a' jobbfelé számláló erő az ellenkező erőt visszatolván, lerak a' 0 ponttól jobbfelé tíz egységet, ez az eredmény a' jobbfelé számláló erőre nézve $= + 10$, 's ha ekkor phantasiánk' balra számláló ereje neki jö, 's számlál balfelé 6-ot, a' mi csak úgy eshetik meg, ha a' jobbfelé számláló erő hátrál ugyanannyival; ekkor az elébbeni eredmény kevesedvén 6-tal, az eredmény lesz $+ 4$. De ha ekkor a' balfelé számláló erő még tovább is folytatván munkáját, számlál balfelé ismét 6-ot; a' mi ismét csak úgy eshetik meg, ha a' jobbfelé számláló erő újra hátrál visszafelé 6-ot: már így a' jobbfelé számláló erő, melyre nézve nevezzük el mindig a' küzdés' eredményét, az indulás' pontján túl hátrált balfelé 2-vel, és így az eredmény ő reá nézve $= - 2$, és így tovább. Így nem kell azt mondanunk, hogy a' $+$ és $-$ jegyeknek kétféle jelentésök van a' számtanban, t. i. hogy ezek először csak összeadást és kivonást, és így csak számvetési műveletet; másodszer pedig a' számok' minőségét, positivitását és negativitását jelentő jegyek; mert így a' kettő egyre megyen ki, az összeadás és kivonás is nem egyéb lévén előrefelé és visszafelé számításnál. — Egy szóval látnivaló, hogy minden ugynevezett positiva és negativa mennyiségeket, még ha elvont számok is azok, úgy lehet, sőt, ha okoson akarjuk, úgy kell néznünk, mint két egymással homlokegyenest ellenkező

erők' egymással küzdésének eredményeit, az általunk mintegy pártfogolt erőre nézve elnevezve. Nem kell attól tartanunk, hogy így idegen elemeket, erőt, küzdést, mozgást 'stb. hozván be a' számtanba, azt ez által megzavarjuk. Mert lám hiszen a' t é r t a n b a n (geometria) eleitől fogva csaknem minden mennyiségeket, például egyenes és görbe vonalokat, területeket és testeket mozgás által képzeltek származni, sőt némelyeknek, p. o. az Archimedes' k u n k o r j á n a k (spiralis), és a' görgönynek (cyclois) származtatására még a' mozgás' sebességét is segítségül vették a' Mathematicusok: és mégis nemhogy zavarba jött volna a' geometria, sőt inkább épen ez által lett az párja nélkül tisztává és világossá, úgy hogy csak ott maradt benne valami homály, hol a' mennyiséget mozgás által származni nem képzeltek, például a' szeglet' fogalma körül. 'S ez valóban nem is csuda; mert minden mennyiségek csak úgy állanak minden tulajdonságaikkal tisztán előttünk, ha azoknak származását képzeljük; a' mi pedig mozgató erő és mozgás nélkül meg nem eshetik. A' számtannak ellenben azért van annyi homály mind alsóbb, mind kivált felsőbb részeiben, mivel itt a' mennyiségek' mozgás általi származtatását még nem hoztuk be, legalább nyilván nem; mert észre sem véve természettel belopakodik az ide is. Például ha azt mondjuk, hogy a' számvetési munkálatoknak két fő neme van; egyik, mely által a' szám n ö v e k e d i k, másik, mely által az k i s e b b e d i k; nemde nem rejlik-é már mindjárt ebben is a' mozgás' fogalma? Kétségkívül igen! mert nem növekedhetik semmi mennyiség, hanem ha járul vagy tétetik hozzá, 's nem kisebbedhetik, hanemha vétetik el belőle valami; ez pedig mozgás nélkül, 's ez ismét erő nélkül nem történhetik. Csak az hát a' kérdés, behozzuk és elismerjük-é a' mozgató erőt, mozgást, sebességet 'stb. nyilván és világosan a' számtanba is, vagy pedig ezek itt csak homályban lebegjenek ezután is előttünk, mint eddig? Én azt hiszem, sokat nyerünk általa, ha ezeket itt is nyilván behozzuk, és mind a' tér-, mind a' számtanban a' tudománynak abcjéjétől fogva legfölegyobb részéig mindenütt következetesen alkalmaztatjuk. Meg fogjuk látni, mily tiszta, világos, mindenütt egyenlő, 's úgy szólván egy formába öntött, szép, könnyű, és magát kedveltető tudomány lesz akkor a' Mathesis. De most menjünk tovább!

A' miket fentebb a' positiva és negativa mennyiségekről általánosan mondtunk, azokat könnyű alkalmaztatni a' positiva és negativa hatványokra is. Itt a' két ellenkező erő a' szorzó és az osztó, melyek egymás hatását rontják, 's mikor egyenlők, egészen is le-

rontják. Mert ha valamely számhoz két egyenlő szám járul, egyik mint szorzó, másik mint osztó, például: $\frac{12 \cdot 3}{3}$, olyan, mintha egyik sem járulna hozzá, minthogy egymás hatását tökéletesen lerontják épen úgy, mintha valamely számhoz két egyenlő szám közül egyik +, másik — jeggyel járul e'képen: $12 + 3 - 3$. A' mi pedig azt illeti, melyik legyen a' szorzó és osztó közül a' czélirányos, melyik a' czélelleses erő, és így melyiknek az 1-hez járulási által származzanak a' czélirányos, melyikéi által a' czélelleses hatalmak: A' Mathematicusok hallgatva megegyeztek abban, hogy a' szorzó legyen a' czélirányos, az osztó pedig a' czélelleses erő; 's ez szerint valamely számnak mint szorzónak az 1-hez járulási által származott hatványokat nevezték czélirányosoknak, azokat ellenben, melyek ugyanannak mint osztónak az 1-hez járulási által származnak, czélelleseseknek; kétségkívül — ha talán ezt ők magok észre nem vették is — azért, mivel azoknak, kik a' hatványok illetén megkülönböztetését először szokásba hozták, 1-nél nagyobb szorzók és osztók forgottak elméjükben, melyek közül amazok minél többször járulnak az 1-hez, például 1. 2; 1. 2. 2; 1. 2. 2. 2; stb, azaz, 2, 4, 8 stb annál nagyobb, ezek ellenben minél többször járulnak az 1-hez, például $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2 \cdot 2}$; $\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}$, stb, azaz, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, stb annál kisebb hatványokat alkotnak. Mert ha 1-nél kisebb szorzókat, és osztókat forgattak volna elméjükben, a' milyen például $\frac{1}{2}$: úgy kétségkívül egészen ellenkezőképen, a' szorzókat czélelleses, az osztókat pedig czélirányos erőnek, 's következésképen az osztónak az 1-hez járulási által származó nagyobb-nagyobb hatványokat, a' milyenek például: $\frac{1}{\frac{1}{2}}$; $\frac{1}{(\frac{1}{2})^2}$; $\frac{1}{(\frac{1}{2})^3}$, stb., azaz, 2, 4, 8, stb czélirányos, a' szorzónak az 1-hez járulási által származó kisebb-kisebb hatványokat pedig, a' milyenek 1. $\frac{1}{2}$; 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$; 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2}$; stb, azaz, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, stb, czélelleses hatványoknak fogták volna nevezni. 'S ha ez így történt-, és ez az 1-nél kisebb szorzókra és osztókra való tekintetből származott elnevezése a' czélirányos és czélelleses hatványoknak azután az 1-nél nagyobb szorzók és osztók által származott hatványokra is általvitetett volna, mint most az ellenkező történt, és ezekben is az osz-

tás által származott hatványok neveztek volna czélirányosoknak, a' szorzás által származottak pedig czélelleseknek: úgy a' mi most például 2^{-2} , az fogott volna lenni: 2^2 , és megfordítva, a' mi most 2^2 , az fogott volna lenni: 2^{-2} . Ennyire szabad tetszésünkől függvén tehát, melyiket nevezük czélirányos, melyiket czélelles hatványoknak, az osztás és szorzás által származott hatványok közül látnivaló, hogy ez a' kérdés: a' mely törvényről meg van mutatva, hogy czélirányos hatványokról igaz, ugyanaz áll-é czélelles hatványokról is, csak a' dolog nem értéséből származhatott. A' mely számvetési szabályokat czélirányos számokkal igazaknak találunk, igazak azok mindig czélellesekkel is, csak arra kell vigyáznunk, mikor lesz az eredmény czélirányos, mikor czélelles ama canon szerint: signa eadem dant plus, diversa minus. Ez az általános szabály. De különösen a' jelen esetben lehet még így is okoskodni. Ezen rendben:

... $(a+b)^3, (a+b)^2, (a+b)^1, (a+b)^0, (a+b)^{-1}, (a+b)^{-2}, (a+b)^{-3}$...

a' következő hatvány az előtte valóból mindenütt $(a+b)$ -vel való elosztás, és amannak hatványjele ennek hatványjeléből mindenütt egygyel alább szállítás által származván, és a' származásnak ezen törvénye a' czélirányos hatalmakról a' 0-on keresztül a' czélelles hatalmakra is szakadatlanul általmenvén, — mert valamint

$\frac{(a+b)^4}{(a+b)^1} = (a+b)^3; \frac{(a+b)^3}{(a+b)^1} = (a+b)^2; \frac{(a+b)^2}{(a+b)^1} = (a+b)^1$: épen

úgy $\frac{(a+b)^1}{(a+b)^1} = (a+b)^0 = 1$, 's innen: $\frac{1}{(a+b)^1} = (a+b)^{-1}$, és így

tovább, — kétségkívül szinte úgy szakadatlanul által kell menni a' czélirányos hatalmakról a' 0-on keresztül a' czélelles hatalmakra azon törvénynek is, mely szerint itt a' czélirányos egész hatalmak közül mindegyik a' gyökérbetűkből, és a' maga hatványjeléből formáltatik, 's hogy az valósággal által is megyen, egyenesen is meg lehet mutatni. Ugyanis a' $+0$ szinte úgy czélirányos egész szám lévén, mint a' $+1, +2, +3, +4$, stb; 's hasonlóképen a' -0 is szinte úgy czélelles egész szám lévén mint a' $-1, -2, -3, -4$, stb: az $(a+b)^{+0}$ -nak, és az $(a+b)^{-0}$ -nak úgy kell a' gyökérbetűkből, 's a' hatványjelből formáltatniok, amannak ugyan mint az $(a+b)$ -nek minden egyéb czélirányos egész-, ennek pedig mint ugyancsak az $(a+b)$ -nek minden egyéb czélelles egész hatványai formáltatnak. Ugyde az $(a+b)$ egész hatványainak sorában:

... $(a+b)^4, (a+b)^3, (a+b)^2, (a+b)^1, (a+b)^{\pm 0}, (a+b)^{-1}, (a+b)^{-2}, (a+b)^{-3}$... az $(a+b)^{-0}$ az $(a+b)^{\pm 0}$ -val tökéletesen öszveesvén, és e' kettő ugyanazon egy lévén, $(a+b)^{\pm 0} = +1$, ezeknek nem lehet nem ugyanazon egy törvény szerint formáltatniok; és így az $(a+b)^{-0}$ -nak, 's következésképen az $(a+b)$ minden egyéb czélelles egész hatványainak is az szerint kell a' gyökérbetükből, és a' hatványjelből formáltatniok, mint az $(a+b)^{\pm 0}$, 's ezzel együtt az $(a+b)$ -nek minden egyéb czélirányos egész hatványai ugyanazokból formáltatnak, e'képen:

$$(a+b)^{-n} = a^{-n} + \frac{-n}{1} a^{-n-1} b + \frac{-n(-n-1)}{1 \cdot 2} a^{-n-2} b^2 + \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{-n-3} b^3 + \dots$$

és így tovább végnélkül.

75. §. Végezetre abból, hogy a' kéttagi törvény áll akkor is, mikor a' hatványjel czélelles egész szám, mit épen megmutatánk, és azokból, miket fentebb (72. §) a' tört-hatványokról mondottunk, önkényt foly, hogy a' kéttagi törvénynek állania kell akkor is, mikor a' hatványjel czélelles törtszám, azért is erről itt több szót tenni felesleges lenne. Inkább világosítsuk egy példával, mikép jő ki valamely két tagu mennyiségnek czélelles egész hatalma a' kéttagi törvény szerint. Legyen e' végre $a = 1, b = -\frac{1}{2}, -n = -3$.

Igy fog lenni: $(1 - \frac{1}{2})^{-3} = (\frac{1}{2})^{-3} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$; mely a' kéttagi törvény szerint így fejlik ki:

$$(1 - \frac{1}{2})^{-3} = 1^{-3} + \frac{-3}{1} (-\frac{1}{2})^1 + \frac{-3 \cdot -4}{1 \cdot 2} (-\frac{1}{2})^2 + \frac{-3 \cdot -4 \cdot -5}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-\frac{1}{2})^3 + \frac{-3 \cdot -4 \cdot -5 \cdot -6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (-\frac{1}{2})^4 + \dots$$

hol ha a' kijelentett számvetési munkálatokat végrehajtjuk, kijő:

$$(1 - \frac{1}{2})^{-3} = \frac{1}{1} + \frac{3}{2} + \frac{6}{4} + \frac{10}{8} + \frac{15}{16} + \frac{21}{32} + \frac{28}{64} + \dots$$

vég nélkül; hol az osztók egy olyan szeri sorzatot képeznek, mely 1-en kezdődik, 's minden tagja az előttevalóból 2-vel szorzás által származik; az osztandók pedig egy olyan különbségi sorzatot formálnak, mely hasonlóképen 1-en kezdődik, 's a' különbség az 1-ső és 2-dik tag közt = 2, a' 2-dik és 3-dik közt már = 3, a' 3-dik és 4-dik között pedig = 4, és így tovább minden következő pár között egygyel-egygyel növekedik, vagyis formálják az ugyneve-

zett háromszegű számok sorzatát. És, valóban, ha itt az egyenlet jobb oldalát tovább is folytatjuk, és tagjait tizedes törtekké változtatván összeadjuk, minél több tagokat adunk össze, annál közelebb jár az összeg a' 8-hoz, de ezt csak a' végtelenségig folytatva érhetné el, következőképen:

Az első tag magában	=	1, 000 000 000 0
A' két első tag összege	=	2, 500 000 000 0
A' három első tag összege	=	4, 000 000 000 0
A' négy első tagé . .	=	5, 250 000 000 0
Az öt első tagé . . .	=	6, 187 500 000 0
A' hat első tagé . . .	=	6, 812 500 000 0
A' hét első tagé . . .	=	7, 250 000 000 0
A' nyolcz első tagé . .	=	7, 531 250 000 0
A' kilencz első tagé . .	=	7, 707 031 250 0
A' tiz első tagé . . .	=	7, 814 453 125 0
A' tizenegy elsőé . . .	=	7, 878 906 250 0
A' tizenkét elsőé . . .	=	7, 916 992 187 5
A' tizenhárom elsőé . .	=	7, 939 208 986 8
A' tizennégy elsőé . .	=	7, 952 031 252 4 stb.

Melyet akármeddig folytatnánk, a' 7 egész után következő törtszám mindig fogna ugyan növekedni apródonkint, de egy egészszé, mely a' 7-et 8-ra tökéletesen kipótolja, csak a' végtelenségig folytatva lehetne. Ez értelme minden olyan egyenleteknek, melyekben bizonyos meghatározott mennyiség végtelen sorzat által fejeztetik ki. Az ilyen egyenletekben tehát mindig az a' fictio, hogy a' végtelenségig folytattatnak; 's csak ezen feltétellel áll szorosán véve az egyenlőség egy meghatározott véges mennyiség és egy végtelen sorzat között.

76. §. De jegyezzük meg itt még azt is, hogy az ilyen meghatározott véges mennyiséget kifejező végtelen sorzatnak természetlileg mindig öszvetartónak kell lennie; mert csak így eshetik az meg, hogy az a' mit még hozzá kellene adni a' tagokhoz, vagy azokból még el kellene venni, mindig kisebbé-kisebbé lévén, utoljára, mikor a' fictio szerint a' végtelenségig jutunk, egészen nullá lesz, 's így minden hiány és felesleg elenyészvén, a' végtelen sorzat értéke a' meghatározott véges mennyiséggel tökéletesen egyenlővé lesz. Ha ellenben a' sorzat szélyeltartó, 's tagjai minden lépten nagyobbakká-nagyobbakká lesznek: úgy, látnivaló, hogy abból, ha a' végtelenségig folytatva képzeljük is azt, soha meghatározott vé-

ges mennyiség nem lesz, 's nem lehet, sőt inkább a' végtelenségben végetlen nagygyá fog lenni.

Valamikor tehát véges mennyiséget végetlen sorzattal általánosságban egyenlőnek téve látunk, szükségesképen alatta kell értenünk, hogy az az egyenlőség egyes esetekben csak azzal a' feltétellel igaz, ha a' sorzat, a' belejövő meghatározott számoknál fogva, öszvetartóvá lesz. Például, a' kéttagi törvény is, melyet, ha mind az a, mind a' b, mind az n akármely czélirányos, vagy czél-ellenes egész- vagy törtszámot jelenthetnek; egész általánosságban így fejezhetünk ki:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3 + \dots$$

mikor az, az a, b és n mennyiségeknek egymáshozí viszonyaiknál fogva végetlen sorzatba fejlík ki, csak úgy igaz, ha ugyancsak az a, b és n viszonyaiknál fogva, a' végetlen sorzat öszsetartó lesz, mint volt a' közelebbi példában, hol a' végetlen sorzat mindjárt a' 3-ik tagnál öszsetartóvá lévén, attól fogva mind végíg öszsetartó.

De ha ott e' helyett: $(1 - \frac{1}{2})^{-3}$, ezt tennők: $(-\frac{1}{2} + 1)^{-3}$, hogy

így $a = (-\frac{1}{2})$, $b = 1$ lenne, 's ezt fejtenők ki a' kéttagi törvény

szerint végetlen sorzattá: úgy az egyenlőség a' véges mennyiség, t. i. a' 8, és a' végetlen sorzat közt nem állana, és nem lehetne mondani, hogy:

$$(-\frac{1}{2} + 1)^{-3} = (-\frac{1}{2})^{-3} + \frac{-3}{1} \cdot (-\frac{1}{2})^{-4} + \frac{-3 \cdot -4}{1 \cdot 2} \cdot (-\frac{1}{2})^{-5} + \frac{-3 \cdot -4 \cdot -5}{1 \cdot 2 \cdot 3} (-\frac{1}{2})^{-6} + \dots$$

mivel így a' sorzat szélyel tartó, nevezetesen kidolgozva lesz:

$$= + 1 \cdot 8 - 3 \cdot 16 - 6 \cdot 32 - 10 \cdot 64 - 15 \cdot 128 - 21 \cdot 256 - \dots$$

melyből, látnivaló, soha + 8, a' mennyit $(-\frac{1}{2} + 1)^{-3}$ teszen, nem fog lenni.

77. §. A' kéttagi törvényben, melyet először abban az esetben, mikor a' hatványjel czélirányos egész szám; kifejtettünk, azután pedig érvényességét minden más esetekben is, a' csak most említett megszorítással, megmutattuk, igen alkalmatlan, hogy az azt kifejező sorzatnak tagjai, két különböző gyökérbetűnek, az a-nak és a' b-nek hatványai, még pedig az egyiknek alább-alább szálló, a' másíknak fölebb-fölebb hágó hatványai szerint vannak rendezve. De ezen könnyű segíteni az által, ha a' hatalomra emelendő mennyiséget úgy szerkesztjük két tagból, hogy az egyik tagja mindig = 1 legyen, a' mi mindenkor megeshetik, még akkor is, mikor

a' felemelendő mennyiség 1-nél kisebb. Például $\frac{2}{3} = (1 - \frac{1}{3})$. Így az 1-nek mindegyik hatványa = 1 lévén, ez pedig minden tagokból, hol csupa szorzó, kimaradhatván, a' sorzat' tagjai vagy a' gyökér' első betűjének alább-alább szálló, vagy a' másodiknak fölebb-fölebb hágó hatványai szerint lesznek csak rendezve következőképen:

$$(x+1)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \dots \text{ vagy}$$

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots$$

Az olyan mennyiséget, melynek aláb-alább szálló, vagy fölebb-fölebb hágó hatványai szerint vannak rendezve valamely sorzat' tagjai, milyen a' közelebbi példákban az x, nevezik az általános számvetésben fő mennyiségnek, és az illet ott mindig az abéce' ezen utolsó betűi közül: x, y, z, valamelyikkel szokás kifejezni, 's ez az oka, hogy én is a' kéttagi sorzat' két utóbbi formájában, hol a' sorzat' tagjai egy-egy fő mennyiség' hatványai szerint vannak rendezve, a' fő mennyiséget mindenütt x betűvel fejeztem ki. A' fő mennyiség az általános számvetésben (arithmetica universalis), épen az, a' mi a' tizedes rendszer (decadicum systema) szerinti számvetésben a' 10, melynek hatványai szerint rendezzük itt számvetéseink' minden eredményeit. Mert ha valamely számvetési munkálatból például ez jő ki eredményül: 5974, ez olyan, mintha a' 10-et megtévén x-nek, az eredményt így írónk: $5x^3 + 9x^2 + 7x^1 + 4x^0$, hol minden tagok a' 10-nek, mint a' tizedes rendszerben fő mennyiségnek felül kezdődő, 's egygyel-egygyel alább szálló hatványai szerint vannak rendezve. Azonban az általános számvetés (arithmetica universalis) és a' tizedes számvetés (arithmetica decadica) között két lényeges különbség van. Egyik ez, hogy az utóbbiban a' fő mennyiség meghatározott szám, és mindenkor 10, amaz elsöben pedig határozatlan = x, mely akármely kisebb nagyobb, egész vagy tört, célirányos vagy céllelles számot jelenthet, és az ő hatványai szerint kifejtendő és rendezendő mennyiségből többféleképen vétethetik: a' másik pedig abban áll, hogy a' tizedes számvetésben tudva lévén, hogy a' fő mennyiség = 10, és így hogy annak egygyel alsóbb hatványából tizből telik egygyel felsőbb hatványa egy, az alsóbb hatványokból telt felsőbb hatványok összeolvasztatnak az eredet szerinti felsőbb hatványokkal; az általános számvetésben pedig határozatlan lévén a' fő mennyiség, 's annál fogva nem lehetvén

tudni, hány egygyel alsóbb hatványból telik egygyel felsőbb hatvány egy, mindegyik hatványa a' fő mennyiségnek marad ugy és annyinak, a' mint és a' mennyinek eredet szerint kijő, 's ugyanott a' fő mennyiség' különböző hatványai előtt álló ösztényzők is azokkal a' számokkal és ugy fejeztetnek ki, a' melyekkel, és a' mint eredet szerint kijöttek; 's ez épen az oka, hogy itt oly szép általános törvények fejlenek ki, a' milyen p. o. a' kéttagi törvény' ezen formája:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots,$$

Midőn tehát ezen törvényt ezen legegyszerűbb formájában kifejtettük, az általános számvetésnek egy igen nevezetes kérdését fejtettük meg, nevezetesen ezt: hogy kell akármely számnak, melyet ugy szerkesztünk két tagból, hogy első tagja = 1, a' második akármely más szám = x legyen, n-dik, azaz akár hanyadik hatványát a' gyökér' második tagjának mint főmennyiségnek 0-on kezdődő, 's fölebb-fölebb emelkedő hatványaival kifejezni. Ez a' törvény legfontosabb az általános számvetésnek minden törvényei között, mind magáért; mivel nem lévén szám a' világon, melyet a' mondott módon nem lehetne két tagból szerkeszteni, azonban a' hatványok alatt a' gyökök is befoglaltatván, ez az egyetlenegy törvény, valamint minden számnak minden lehetséges hatalmakra emelésének, ugy minden számkból minden lehetséges gyökök' kivonásának szabályait is magában foglalja: mind pedig azon nevezetes törvényekért, melyek ebből fejlenek ki, és a' melyek ezzel együtt az általános számvetésnek mintegy a' lelkét teszik, és a' fellengős mértannak mint megannyi talpkövei; 's a' következő §-kat ezen nevezetes törvények' kifejtésére fogjuk szánni *), részint, hogy ezeknek segítsége által először is a' természetes, azután más akármely logaritmusok' kiszámítására könnyű utat módot találjunk: részint pedig hogy ezek a' fellengős mértanra, melyet a' magam elvei szerint minden homályból és képtelenségből, melybe eddig burkolva van, kifejtve, nem sokára közzé tenni szándékozom, előkészületül szolgáljanak.

78. §. Arra, hogy az ilyen kéttagi mennyiségnek, mint $(1+x)$, akármely hatalmát $(1+x)^n$, magából az ilyen kéttagi mennyiségből és annak hatványjeléből alkotott sorzattal fejezzük ki, nemcsak a' gyökér' második tagját, hanem a' hatványjelt is lehet főmennyiségül felvenni, csakhogy ilyenkor a' szokás szerint hatványjelül az n helyett x-et, mint főmennyiséget jegyző betűt, a' gyökér-

*) Vagyis inkább számni. Lásd „Értekezés és Kitércek“ 415—422. lap.

be pedig az x helyett bizonyos, alább általlátható okon, egy kis a betűt írunk e'képen: $(1 + a)^x$. Az ilyen kéttagú mennyiséget, melynek hatványainak kifejtésére a ' hatványjellet vesszük fel fő mennyiségül, nevezik hatványjeli kéttagu mennyiségnek (quantitas binomialis exponentialis), vagy rövidség' okáért csak hatványjeli mennyiségnek (quantitas exponentialis); a ' sorzatot pedig, mely az ilyen mennyiségnek valamely hatalmát, $(1 + a)^x$, a ' hatványjelnek mint fő mennyiségnek hatalmai szerint rendezve fejezi ki, hívják hatványjeli kéttagi sorzatnak (series binomialis exponentialis) vagy rövidebben csak hatványjeli sorzatnak (series exponentialis). A' törvény, melyet ezen sorzat kifejez, vagyis a ' hatványjeli kéttagi törvény (lex binomialis exponentialis), vagy rövidebben csak hatványjeli törvény (lex exponentialis), ismét egy az általános számvetésnek legszebb és egyszersmind legérdekesebb törvényei közül; 's ez az, a ' mit itt ki akarunk fejteni.

Ezen munkára kétségkívül a ' kéttagi törvényből:

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

indulunk ki, úgy hogy ebben valamint bal, úgy jobb oldalán is az egyenletnek az x helyett mindenütt a -t, az n helyett pedig mindenütt x -et teszünk következőképen:

$$(1 + a)^x = 1 + \frac{x}{1}a + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}a^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^3 + \dots$$

De ez így még nem hatványjeli sorzat, mivel nem a ' hatványjelnek az x -nek, mint főmennyiségnek, hanem a ' gyökér' második tagjának az a -nak hatványai szerint van rendezve; az x pedig, mely a ' maga hatalmaival a ' sorzatot vezetni tartoznék, szélyel van szórva az ösztényzőkben. Hanem ezen lehet segíteni; mert látnivaló, hogy ha itt az ösztényzőkben csak kijelentve lévő szorzásokat valósággal véghezvisszük, azokból az x -nek különböző hatványai fognak származni, melyeknek ösztényzői az a -nak különböző hatványaiból, 's más itt előforduló számokból fognak valahogy szerkesztve lenni; például a ' 4 első tagban így:

$$1\text{-ső tag, } \frac{x}{1}a = \frac{a}{1}x, \text{ hol csak utól kelle tenni az } x\text{-et, mint fő-}$$

mennyiséget, 's az ösztényző önként lett: $\frac{a}{1}$

$$2\text{-ik tag, } \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}a^2 = \left(\frac{x^2-x}{2}\right)a^2 = \frac{a^2}{2}x^2 - \frac{a^2}{2}x; \text{ mely e-}$$

gyenletet ha balfelől $\left(\frac{x-2}{3}\right)a$ -val, jobbfelől pedig ugyanazzal, de ezen formában:

$\frac{a}{3}x - \frac{2a}{3}$ szorozunk, lesz belőle a' szükséges összehúzás után:

$$3\text{-ik tag: } \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 = \frac{a^3}{6}x^3 - \frac{a^3}{2}x^2 + \frac{a^3}{3}x; \text{ melyből}$$

ismét, ha a' baloldalon $\left(\frac{x-3}{4}\right)a$ -val, a'

jobbbon pedig ugyanazzal, de ezen formában:

$\frac{a}{4}x - \frac{3a}{4}$ szoroztatik, kijő a' szükséges összébb húzások után:

$$4\text{-ik tag: } \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 = \frac{a^4}{24}x^4 - \frac{a^4}{4}x^3 + \frac{11a^4}{24}x^2 - \frac{a^4}{4}x.$$

Ezen példából látjuk, hogy itt a' szorzások végrehajtása által mindegyik tagból származnak szükségesképen az x -nek minden hatványai az 1-sőtől egész a' tag' számjáig, például a' 2-dik tagból az x -nek 1-ső és 2-ik; a' 3-ikből 1-ső, 2-ik és 3-ik, a' 4-ikből 1-ső, 2-ik, 3-ik és 4-ik hatványai, és így tovább. Ha már itt az x különböző hatványainak kidolgozását tovább is folytatnók tagról tagra, a' meddig elégségesnek tartanók, azután pedig összeszednők minden tagokból az x -nek 1-ső hatalmait, és mind ezeknek ösztényzőit összeadván, azoknak özsvégét nagy A betűvel fejeznők ki: ugy a' hatványjeli sorzatban az első tag lenne: Ax , és ha az x -nek minden tagokból összeszedett 2-ik, 3-ik, 4-ik, stb. hatványaival is hasonlóképen cselekedvén, ezeknek összesummázott ösztényzőiket renddel egymásután $B, C, D, E,$ stb. betűkkel írnök: ugy a' kéttagi sorzatnak hatványjeli sorzattá átformálása, (mert így nevezik az ilyen munkát) végre lenne hajtva, 's hatványjeli sorzatunk kész lenne így: $(1+a)^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \dots$

79. §. Ezen hatványjeli sorzatban az x különböző hatalmainak ösztényzői közül, melyek természettel mind a' kis a különböző hatványaiból, és más a' kéttagi sorzatban előforduló számokból vannak szerkesztve, vegyük fel először is az x első hatványának ösztényzőjét, a' nagy A -t, 's próbáljuk kitanulni, mikép szerkesztetik ez a' mondott mennyiségekből. A' kéttagi sorzat' négy első tagjából kifejtett első hatványai az x -nek ezek valának: $\frac{a}{1}x - \frac{a^2}{2}x + \frac{a^3}{3}x + \frac{a^4}{4}x,$

melyeknek ösztényzőit ha összeadjuk, és az összevetet A-nak nevez-
zük, fog lenni; $A = \frac{a^1}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4}$; mely sorzatnak tagjai
láttnivaló nem egyebek, mint a' gyökér 2-ik tagjának, a' kis a-nak
az első kezdődő és sorban egymásután következő czélirányos egész
hatványai, mindegyik a' maga hatványjelivel elosztva, és a' párat-
lanok +, a' párosok — jeggyel ellátva. De ha innen azt akarnók
kihozni, hogy ezen törvénynek, melyet itt, a' nagy A értékét kife-
jező sorzatnak 4 első tagjaiban, uralkodni látunk, ugyan annak kö-
vetkező tagjaiban is mindenütt állania kell: ez az egynehányról min-
denre való okoskodás, mely inductionnak neveztetik, mathesisben
nem lenne megengedhető.

Tegyük fel hát a' kérdést, hogy reá általános feleletet nyer-
jünk, ilyen általános formában: ha vajon ezen kéttagi sorzatnak:

$$(1+a)^x = 1 + \frac{x}{1}a^1 + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}a^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^3 + \dots$$

n-dik, azaz, akár hanyadik tagjából, ha abban a' szorzás végre-
hajtatik, telik-é első hatalma az x-nek, 's ha igen, hány telik? egy-
szóval, hány első hatalma telik az x-nek ebből:

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3) \dots [x-(n-1)]a^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (n-1) \cdot n} ?$$

Itt először is azt kell megvizsgálnunk, ha vajon az osztandóban
lévő minden szorzóknak egymással szorzásából származhatik-é a'
többek közt olyan rész tény (particulare factum) is, melyben az x-
nek csak első hatalma forduljon elő? 's ha igen, melyik lesz az?
Mert ha származhatik ilyen, 's kitanulhatjuk, melyik lesz az: ma-
gában értetik, hogy az, az ezen szorzásból kikerülő minden rész té-
nyeknek, azaz, az egész osztandónak közös osztójával, (1. 2. 3. ... n),
elosztva, fogja tenni a' kéttagi sorzat n-dik tagjából kikerülő azon
résztényt, melyben az x első hatalomra emelve fordul elő. Azt pe-
dig, hogy itt az osztandó szorzóinak egymással szorzásából szár-
mazhatik-é olyan rész tény, melyben az x-nek csak első hatalma
jőjön elő, 's ha igen melyik lesz az, legkönnyebben állathatjuk,
ha az osztandónak első és utolsó szorzóját egymással szorozva, a' x,
a' többtől különválasztjuk, és azt teszszük kérdésbe, hogy a' többi
szorzóknak: (x-1)(x-2)(x-3) ... [x-(n-1)] egy-
mással szorzásából származhatik-é olyan rész tény, melyben az x
teljességgel nem fog előfordulni? Mert minden, ezeknek egymással
szorzásából származó rész tényeket szorozni kellett még egyen-

kint a' különválasztott ($a^n x$) szorzóval, látnivaló, hogy ennek, és egy a' többiekből származott részvények egymással szorzásából olyan tény, melyben x csak az első hatalomban forduljon elő, csak úgy származhatik, ha a' részvényben ezen szorzás előtt semmi x nem volt. Ugyde, ha ezen $(n-1)$ kéttagu szorzókat: $(x-1)(x-2)(x-3) \dots [x-(n-1)]$ egymással oly móddal szorozzuk, mint fentebb az $(a+b)$ különböző hatalmakra emelése alkalmával az $(a+b)(a+b)(a+b) \dots (a+b)$ kéttagu szorzókat egymással szoroztuk: — mi szerint itt mindegyik részvény $(n-1)$ tényezőt fog állani, 's mindegyikben azok közül mindegyik tényező az $(n-1)$ kéttagu szorzók közül annyiadikból vétetni, a' hanyadik ő maga a' rendben —: úgy itt olyan részvény, melyben semmi x ne legyen, látnivaló, nem származhatik több egynél; az t. i. melyben a' kéttagu szorzóknak utolsó tagjaik: $(-1)(-2)(-3)(-4) \dots \dots [- (n-1)]$ szoroztatnak egymással. Ha tehát ezt még a' különválasztott ($a^n x$) szorzóval szorozzuk, és a' közös osztóval: $1. 2. 3. \dots n$, elosztjuk: úgy az x első hatalmainak keresett számát megtaláljuk e'képen:

$$\frac{-1. -2. -3. -4. \dots - (n-1) a^n}{1. 2. 3. 4. \dots (n-1) n} x. \text{ Mely kitévelt}$$

még sokkal egyszerűbbé tehetünk az által, ha először az osztandónak minden czélelles tényezőit egyegy épen olyan nagy czélirányos számnak (-1) -gyeli szorzásából képzeljük származni e'képen:

$$\frac{(-1). 1 \times (-1). 2 \times (-1). 3 \dots (-1) (n-1). a^n}{1. 2. 3. 4 \dots (n-1) n} x; \text{ azután}$$

pedig az osztandóban a' helyett hogy a' (-1) -et $(n-1)$ -szer írnök mint szorzót, annak $(n-1)$ -dik hatványát legelőljük, e'képen:

$$\frac{(-1)^{n-1} \times [1. 2. 3. 4 \dots (n-1)] a^n}{1. 3. 3. 4 \dots (n-1) n} x, \text{ 's végre a'}$$

közös szorzókat mind az osztóból, mind az osztandóból kihagyjuk,

$$\text{e'képen: } \frac{(-1)^{n-1} \cdot a^n}{n} x, \text{ vagy } (-1)^{n-1} \times \frac{a^n}{n} x. \text{ Ez szerint a' fel-}$$

tett kérdésre megtaláltuk a' feleletet, hogy t. i. ezen kéttagi sorozatnak:

$$(1+a)^x = 1 + \frac{x}{1} a + \frac{x(x-1)}{1. 2} a^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1. 2. 3} a^3 + \dots n\text{-dik}$$

és így mindegyik tagjából származhatik, 's származik is olyan részvény, melyben az x-nek csak első hatványa fordul elő, és hogy ez

mindenkor $= (-1)^{n-1} \cdot \frac{a^n}{n} x$; mi által tökéletesen meg van mutatva, hogy a' törvény, melyet fentebb a' 4 első tagra nézve tetteg igaznak találtunk, általánosan igaz. Ugyanis -1 -nek mindegyik páros hatalma, ide értvén a' 0-dik hatalmat is, $+1$, mindegyik páratlan hatalma pedig -1 lévén; azonban $n-1$ páros lévén mikor n páratlan, és megfordítva, $n-1$ páratlan lévén mikor n páros: az első tényező $(-1)^{n-1}$ itt a' tény mennyiségén semmit sem változtat, hanem csak ezt mondja meg algebrai nyelven, hogy az utána következő $\frac{a^n}{n} x$ -et mikor n páratlan $+1$ -gyel, mikor pedig n páros -1 -gyel kell szorozni, a' mi más szókkal ismét csak azt teszi, hogy az $\frac{a^n}{n} x$ elébe mikor n páratlan, $+$, mikor pedig n páros, $-$ jegy jő. Minthogy pedig itt n a' kéttagi sorzat azon tagjának számját jelenti, melyről épen kérdezik, hogy az x -nek hány 1-ső hatványa kerül ki belőle: tehát fog kikerülni:

$$\text{az 1-ső tagból: } + \frac{a^1}{1} x$$

$$a' \text{ 2-dikből: } - \frac{a^2}{2} x$$

$$a' \text{ 3-dikből: } + \frac{a^3}{3} x$$

$$a' \text{ 4-dikből: } - \frac{a^4}{4} x$$

$$\text{az 5-dikből: } + \frac{a^5}{5} x$$

$$a' \text{ 6-dikből: } - \frac{a^6}{6} x, \text{ és így tovább végnélkül. 'S}$$

következésképen a' hatványjeli sorzatban fog lenni az 1ső ösztényző

$$A = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^6}{6} + \dots$$

mely ismét egy az általános számvetésnek legegyszerűbb, legszebb, és egyszermind legérdekesebb törvényei közül, melyről alább még bővebben fogunk szólni.

80. §. A' mi továbbá a' hatványjeli sorzatban a' többi ösztényzőket: B, C, D, E stb, illeti, ezek közül is mindegyiket meg lehetne találni sorban egymásután ahoz hasonló okoskodás által, mely szerint az A -t megtaláltuk. Sőt, lehetne itt az x^n ösztényzőjének ki-

fejlesztésére általános egyenletet is találni; de a munka mindig szövevényesebb, 's az eredmény bonyolodottabb lenne. Legkönnyebb itt a többi ösztényzőket az elsőből, az A-ból, származtatni, mellyel azok mind igen szép egyszerű viszonyban állanak. Ezen származtatás módja pedig rövideden abban áll, hogy a hatványjeli egyenletet: $(1+a)^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \dots$ melyben az ösztényzők közül még csak az első, nagy A, tudjuk a gyöker második tagjával, kis a, kifejezni, felemeljük 2-dik hatalomra legalább a 4dik vagy 5dik tagig kétféleképen, és ezen két egy jelentésű, de különböző formájú 2dik hatalomnak öszve hasonlításából hozzuk ki, mikép származnak itt az első ösztényzőből, A, a többiek, B, C, D, E. A 2dik hatalomra emelést pedig először úgy teszszük, hogy mivel $(1+a)^x \cdot (1+a)^x = (1+a)^{x+x} = (1+a)^{2x}$: tehát a baloldalra ezen 2-dik hatalmat írjuk az első helyett, 's a jobb oldalon is már most mindenütt 2x-et teszünk az x helyett, mivel már most a hatványjel x helyett 2x, e képen:

$$(1+a)^{2x} = 1 + A \cdot 2x + B \cdot (2x)^2 + C \cdot (2x)^3 + D \cdot (2x)^4 + E \cdot (2x)^5 + \dots \text{ azaz:}$$

$$(1+a)^{2x} = 1 + A \cdot 2x + B \cdot 4x^2 + C \cdot 8x^3 + D \cdot 16x^4 + E \cdot 32x^5 + \dots \text{ vagy:}$$

$$(1+a)^{2x} = 1 + 2Ax + 4Bx^2 + 8Cx^3 + 16Dx^4 + 32Ex^5 + \dots$$

Másodszor pedig úgy emeljük 2-dik hatalomra a hatványjeli egyenletet, hogy leírjuk azt kétszer egymás alá, és a baloldalón ugyan, itt is csak a hatványjeleket adjuk öszve, de a jobb oldalon a felső sornak minden tagjait renddel egymásután szorozzuk az alsó sornak egyenkint minden tagjaival balról jobbfelé menve, míg mindegyik szorzásban az x^5 -t elérjük, 's az x ugyanazon hatványait egymás alá írva, következőképen:

$$(1+a)^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \dots$$

$$(1+a)^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \dots$$

$$(1+a)^{2x} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \dots$$

$Ax + A^2x^2 + ABx^3 + ACx^4 + ADx^5 + \dots$ $Bx^2 + ABx^3 + B^2x^4 + BCx^5 + \dots$ $Cx^3 + ACx^4 + BCx^5 + \dots$ $Dx^4 + ADx^5 + \dots$ $Ex^5 + \dots$	}	melyeknek öszvege lesz:
--	---	----------------------------

$$(1+a)^{2x} = 1 + 2Ax + (2B + A^2)x^2 + (2C + 2AB)x^3 + (2D + 2AC + B^2)x^4 + (2E + 2AD + 2BC)x^5 + \dots$$

Ezek szerint már két olyan végetlen sorzatunk lévén, melyek közül mindenik ugyanazon főmenyiség hatványai szerint van ren-

deзве, és mindenik $= (1+a)^{2x}$, e' két sorzatnak egymással is egyenlőknek kell lenniök. Két ilyen sorozat pedig, itt az általános számvetésben, hol a' főmennyiség határozatlan lévén, annak alsóbb hatványából felsőbbek nem formáltatnak 's nem is formáltathatnak, hanem mindenik hatvány annyinak marad a' mennyinek eredet szerint kijő, máskép egymással egyenlők nem lehetnek, hanemha a' főmennyiség mindegyik hatványának ösztényzője is tagról tagra épen olyan nagy egyikben mint a' másikban *). És így a' mi két sorzatunkban is, hol az x' nulladik és első hatványainak ösztényzőik: 1, és 2 A, kézzelfoghatóképen egyenlők, egyenlőknek kell lenniök a' többieknek is tagról-tagra; melyeknek egyenlőségéből aztán a' B, C, D, E értékeit következőkép számítjuk ki.

$$1) 4B = 2B + A^2; \text{ innen } 2B = A^2; \text{ 's végre } B = \frac{A^2}{2}.$$

$$2) 6C = 2C + 2AB; \text{ innen } 6C = 2AB, = 2A \cdot \frac{A^2}{2} = A^3, \text{ 's innen végre } C = \frac{A^3}{6}.$$

*) Ezt az igazságot rendszeren így szokták megmutatni: Ha $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$; ugy $A = a$, $B = b$, $C = c$, $D = d$, $E = e$. Mert ha $x = 0$, ugy a' kezdő tagokon kívül a' többiek mind nullá lévén, marad $A = a$. Ha továbbá az eredeti egyenletnek egyik oldaláról az A-t, másíkról az a-t, melyek egymással egyenlők, elhagyjuk, marad: $Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$. Mely egyenletet ha mindkét felől elosztunk x-el, fog lenni: $B + Cx + Dx^2 + Ex^3 = b + cx + dx^2 + ex^3$; 's ha itt ismét megteszszük hogy legyen $x = 0$, ujra nullá lesznek a' többi tagok mind, 's marad csak $B = b$. És így mutatják meg tovább azt is, hogy $C = c$, $D = d$, stb. De, ugy tartom, hogy az én megmutatásom, mely magából a' dolog természetéből van véve, ennél az algebrai megmutatásnál nem kevésbé világos; sőt még világosabb, mert az, okát adja annak is, miért kell itt az ösztényzőknek tagról-tagra egyenlőknek lenniök, miről az algebrai megmutatás hallgat. Ezzel azonban az algebrai megmutatások becseből levonni semmit sem akarok. Mihelyt a' mennyiségek közötti viszonyok oly bonyolodottakká lesznek, hogy azokat egyenesen általlátnunk vagy igen nehéz, vagy lehetetlen ís, rászorulunk az algebrai okoskodásokra, vagy akarjuk vagy nem, és azok ilyen helyt egyedüli eszközeink az igazsághoz juthatásra, mire mindjárt a' következőekben is nevezetes példát fogunk látni; hanem csak azt akarom mondani, hogy a' hol valamely mértani igazság magából a' dolog természetéből átlátható, nem kell az abból való okoskodást megvetni, 's ilyen helyt is csak az algebrai formákra támaszkodni; és hogy eddig ezt tették a' Mathematicusok, valóban hiba.

$$3) \quad {}_{16}D = 2D + 2AC + B^2; \text{ innen } {}_{14}D = 2AC + B^2 = 2A \cdot \frac{A^3}{6} + \frac{A^4}{4} = \frac{A^4}{3} + \frac{A^4}{4} = \frac{4A^4}{12} + \frac{3A^4}{12} = \frac{7A^4}{12}, \text{ azaz, } {}_{14}D = \frac{7A^4}{12}, \text{ 's innen } D = \frac{7A^4}{12 \cdot 14} = \frac{A^4}{12 \cdot 2}, \text{ 's végre } D = \frac{A^4}{24}.$$

$$4) \quad {}_{32}E = 2E + 2AD + 2BC. \text{ Innen } {}_{30}E = 2AD + 2BC, \text{ azaz, } {}_{30}E = 2A \cdot \frac{A^4}{24} + A^2 \cdot \frac{A^3}{6} = \frac{A^5}{12} + \frac{A^5}{6} = \frac{6A^5}{72} + \frac{12A^5}{72} = \frac{18A^5}{72} \text{ végre: } E = \frac{18A^5}{72 \cdot 30} = \frac{2A^5}{8 \cdot 30} = \frac{A^5}{4 \cdot 30}, \text{ 's innen } E = \frac{A^5}{120}. \text{ Így tehát:}$$

$$B = \frac{A^2}{2}; C = \frac{A^3}{6}; D = \frac{A^4}{24}; E = \frac{A^5}{120}, \text{ vagy mivel itt az osztók, 2, 6, 24, 120, nem egyebek, mint a' 2, 3, 4, 5-nek helycsere számjai, t. i. } 2=1 \cdot 2; 6=1 \cdot 2 \cdot 3; 24=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4; 120=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5: \text{ tehát } B = \frac{A^2}{1 \cdot 2}; C = \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}; D = \frac{A^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}; E = \frac{A^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}: \text{ mely értékeket tévén a' B, C, D, E helyett, a' hatványjeli egyenlet e'kép' fog lenni:}$$

$$(1+a)^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{A^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 + \frac{A^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 + \dots$$

81. §. Ezen sorzat öt első tagjából azt lehetne inductio által következtetni, hogy a' főmennyiség' vagyis az x' különböző hatványainak ösztényzője a' hatványjeli sorzat' mindegyik tagjában az első tag' ösztényzője, az A, fog lenni, felemelve mindenkor ugyanazon hatalomra, melyre az x azon tagban fel van emelve, mely egyszersmind a' tagnak is száma, és elosztva a' hatványjel' helycsere számjával. De fentebb már említettük, hogy az ilyen következtetés nem mathesishez illő. Azért is szükség, hogy a' hatványjeli sorzat' 5 első tagjainak kifejtésében tetteleg mutatkozó törvény' általánosságát mathesishez illő módon mutassuk meg. E' végre élni fogunk itt a' mathesisi okoskodásnak egy az újabb időkben feltalált nemével, miszerint azt mutatjuk meg, hogy ha a' kérdéses törvény a' sorzatnak n első tagjaiban igaz, úgy igaznak kell a'nnak lenni az (n+1)-dik tagban is; mit ha megmutatunk, meg lesz mutatva, hogy a' kérdéses törvény általánosan igaz. Mert hogy az, a' sorzat 5 első tagjában áll, már tetteleg meg van mutatva, és ha megmutatjuk, mikép ebből következik, hogy annak állania kell az (5+1)-dik tagban is: meg lesz mutatva, hogy az áll a' 6 első tagban; miből ismét lehet

következtetni, hogy annak állania kell a' (6+1)-dik, azaz a' 7-dik tagban is; ebből ismét, hogy az a' 7-dik tagban is, és így már a' 7 első tagban áll, következik, hogy annak állania kell a' (7+1)dik azaz a' 8-dik tagban is, és így tovább vég nélkül.

Az út, melyet ezen megmutatásban követni fogunk, ugyanaz lesz, melyet közelebb a' hatványjeli sorzat 5 első tényezőinek kifejtésében követtünk, hogy t. i. itt is az $(1+a)^x$ -t kétképen emeljük 2-dik hatalomra, 's a' két egyenlő értékű, de különböző formájú 2-dik hatalom közül mindenikből az $(n+1)$ -dik tagbeli ösztényzöt vévén, ezeket teszszük egymással egyenletbe, 's ezen egyenlethől hozzuk ki, hogy a' mely törvény szerint formáltattak a' hatványjeli sorzatban az n első tagok ösztényzöi, ugyanaz szerint formáltatik ugyanott az $(n+1)$ -dik tag ösztényzöje is. Itt azonban az ösztényzök kifejezésére az A, B, C, D, E, stb. helyett mindenütt csak az egy A betüvel élünk, oly móddal, hogy mindegyik tagban az ösztényzöt jelentse egy olyan A betü, melynek a' tag' száma felebe (de nem oldalt, mint hatványjel, hanem egyenest a' tetejébe) van írva; miszerint az 1-ső tag ösztényzöje A helyett $\overset{1}{A}$, a' 2-diké B helyett $\overset{2}{A}$, a' 3-diké C helyett $\overset{3}{A}$ fog lenni, és így tovább, az n-dik tagé $\overset{n}{A}$, az $(n+1)$ -diké $\overset{n+1}{A}$; mely kifejezése módja az ösztényzöknek, ugyanezek származásának világos felvételét nagyon könnyíteni fogja. Ezek szerint már az $(1+a)^x$ 2-dik hatalomra emelése kétféleképen így lesz:

Először:

$$(1+a)^{2x} = 1 + \overset{1}{A} 2x + \overset{2}{A} (2x)^2 + \overset{3}{A} (2x)^3 + \dots + \overset{n+1}{A} (2x)^{n+1} \text{ azaz}$$

$$(1+a)^{2x} = 1 + \overset{1}{A} 2^1 x^1 + \overset{2}{A} 2^2 x^2 + \overset{3}{A} 2^3 x^3 + \dots + \overset{n+1}{A} 2^{n+1} x^{n+1}$$

Másodszor:

arra vigyázzván, hogy mikor a' tagok' ösztényzöi szoroztatnak egymással, mindig a' felső sorbeli tag' vagyis a' szorzandó' ösztényzö-je irassék elől; az 1-et azonban mint szorzót mindenütt kihagyván:

'stb. tehát a jobb oldalon lévő minden tényezőket helyett azoknak ezen értékeiket tévén, fog lenni:

$$\begin{aligned}
 A^{n+1} [2^{n+1} - 2] &= \frac{A^{n+1}}{1.2 \dots n \times 1} + \frac{A^{n+1}}{1.2 \dots (n-1) \times 1.2} + \frac{A^{n+1}}{1.2 \dots (n-2) \times 1.2.3} \\
 &+ \dots + \frac{A^{n+1}}{1.2 \times 1.2 \dots (n-1)} + \frac{A^{n+1}}{1 \times 1.2 \dots n}
 \end{aligned}$$

Ha továbbá ezen egyenlet' jobb oldalán a' közös tényezőt elválasztjuk, fog lenni:

$$\begin{aligned}
 A^{n+1} [2^{n+1} - 2] &= A^{n+1} \left[\frac{1}{1.2 \dots n \times 1} + \frac{1}{1.2 \dots (n-1) \times 1.2} + \frac{1}{1.2 \dots (n-2) \times 1.2.3} \right. \\
 &+ \dots + \left. \frac{1}{1.2 \times 1.2 \dots (n-1)} + \frac{1}{1 \times 1.2 \dots n} \right].
 \end{aligned}$$

Ha végezetre ugyancsak a' jobb oldalon az első tényezőt elosztjuk ezzel: 1.2... (n-1) (n) (n+1), a' másodikat pedig szorozzuk ezzel: (n+1) (n) (n-1) ... 2. 1, mely szorzó amaz osztóval egyenlő lévén, 's e' két munka egymást lerontván, a' jobb oldalon semmi változás nem esik, fog lenni:

$$\begin{aligned}
 A^{n+1} [2^{n+1} - 2] &= \frac{A^{n+1}}{1.2 \dots (n-1) n. (n+1)} \left[\frac{(n+1) n. (n-1) \dots 2. 1}{1.2.3 \dots (n-1) n \times 1} + \right. \\
 &\frac{(n+1) n (n-1) \dots 2.1}{1.2.3 \dots (n-1). 1.2} + \frac{(n+1) n. (n-1) (n-2) \dots 2.1}{1.2 \dots (n-2) \times 1.2.3} + \\
 &\left. + \dots + \frac{(n+1) n (n-1) \dots 2.1}{1.2 \times 1.2 \dots (n-1)} + \frac{(n+1) n. (n-1) \dots 2.1}{1 \times 1.2.3 \dots (n-1) n} \right]
 \end{aligned}$$

hol ha a' jobb oldalon a' berekesztett tényezőnek mindegyik tagjából az egyenlő szorzókat alul felül kihagyjuk, lesz

$$\begin{aligned}
 A^{n+1} [2^{n+1} - 2] &= \frac{A^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \left[\frac{(n+1)}{1} + \frac{(n+1)n}{1.2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} \right. \\
 &+ \dots + \left. \frac{(n+1)n}{1.2} + \frac{(n+1)}{1} \right]
 \end{aligned}$$

mely berekesztett tényezőnek tagjai a' jobb oldalon, látnivaló, nem egyebek, mint kéttagi ösztényzők az (n+1)-dik hatalomban az 1-ső tagtól fogva az n-dikig; ugy hogy ez szerint az egész egyenletet írhatjuk így is:

$$A^{n+1} [2^{n+1} - 2] \frac{A^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} \left[{}_{n+1}B + {}_{n+1}B + {}_{n+1}B + \dots + {}_nB \right].$$

Ugyde a' mint már fentebb (a' 70. § végére tett jegyzésben) láttuk:

$1 + {}^1_{n+1}B + {}^2_{n+1}B + {}^3_{n+1}B + \dots + {}^n_{n+1}B + 1 = 2^{n+1}$, 's mind a két oldalán az egyenletnek levonván 2-öt, ${}^1_{n+1}B + {}^2_{n+1}B + {}^3_{n+1}B + \dots + {}^n_{n+1}B = 2^{n+1} - 2$, 's ezen értéket tévén ama' helyett, a' fentebbi

egyenletben fog lenni: $\frac{A^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} (2^{n+1} - 2)$,

végre mindkétoldalón osztván $(2^{n+1} - 2)$ -vel; $\frac{A^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)}$;

's ez az épen, a' mit meg akartunk mutatni, hogy t. i. ha a' hatványjeli sorzatban az n első tagok' osztényzői, a' mint itt föltettük, mind az első tag' osztényzőjéből formáltatnak oly móddal, hogy az először fölemeltetik annyiadik hatalomra, a' hanyadik a' tag, 's azután elosztatik a' maga hatványjelének helycsereszámjával: ugy az (n+1)-dik tag' osztényzőjének is ugyanezen törvény szerint kell származnia. Ugyde azt fentebb tétleg megmutattuk, hogy itt az 5 első tag' osztényzői a' mondott törvény szerint származnak, és így az szerint kell származnia az (5+1)-dik, azaz a' 6-dik tag' osztényzőjének is; és ha a' 6 első tagé az szerint származik, az szerint kell származni (6+1)-dik, azaz a' 7-dik tagénak is, és így tovább végnélkül. Így tehát már a' hatványjeli törvényt is bátran ugy irhatjuk le, mint a' melynek általánossága meg van mutatva e'képen:

$$(1+a)^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{A^n}{1 \cdot 2 \dots n} x^n,$$

$$\text{mely egyenletben } A = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{a^n}{n}.$$

II. SZAKASZ.

A' természetes szorszámokról és azoknak kiszámításáról.

82. §. A' hatványjeli sorzatban az első tagbéli osztényző az A, melytől származnak a' többi osztényzők is, legkisebbé sem függvén a' hatványjeltől, az x-től, hanem függvén egyedül a' gyökér-

től vagy az alapszámtól $(1+a)$, ugymint a' melynek második tagja, t. i. a' kis a által van meghatározva $(A = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \dots)$: látnivaló, hogy akármely hatalomra emeltessek is az alapszám $(1+a)$, valameddig az maga nem változik, az A sem fog változni. Ha tehát az $(1+a)$ valamely szorzámalkotmány' készítésére alapszámul vétetik fel, minthogy ennek értéke az egész szorzámalkotmányban változatlanul marad: következik, hogy ugyanazon szorzámalkotmányban a' nagy A értékének is változatlanul kell maradnia, más-más szorzámalkotmányban pedig valamint az alapszám' $(1+a)$ értéke más-más, úgy a' nagy A értékének is másnak-másnak kell lennie, de mindegyikben állandónak, és ez a' nagy A neveztetik a' szorzámalkotmány' modulusának, magyarul mérczéjének; mely elnevezés' okát alább majd meg fogjuk látni.

De valamint, ha tetszésünk szerint veszünk fel valamely számot, $(1+a)$, egy szorzámalkotmány' alapjául; az által egyszer'sen mind ezen szorzámalkotmánynak mérczéje az A is meghatároztatik: épen ugyanigaz megfordítva is, hogy ha tetszésünk szerint veszünk fel valamely számot, A , egy szorzámalkotmány' mérczéjéül, ez által is viszont meghatároztatik ezen szorzámalkotmány' alapszámja az $(1+a)$ is; mivel e' kettő egymástól függ, 's egymással határozott viszonyban áll. A' honnan, ha mérczéjét meghatározzuk valamely szorzámalkotmánynak, ezt egészen kiszámíthatjuk 's használhatjuk is számvetéseinkben a' nélkül, hogy tudók, mi annak alapszámja. Hiszen az alapszámnak, logaritmussokkal számvetéseinkben úgy sem vesszük semmi hasznát, ha szinte ismerjük is azt; azért is mindegy, ha nem ismerjük is.

Ha tehát a' hatványjeli sorzat' segedelmével úgy akarunk egy szorzámalkotmányt kidolgozni, hogy nem aggódván semmit azon, mi lesz az alapszám, a' mérczét határozzuk meg; minthogy szabadságunkban áll, mit vegyünk fel mérczéül: kétségkívül olyan számot fogunk e' végre választani, mely által a' hatványjeli sorzat minél egyszerűbbé tétessék. Ez pedig az 1; mivel ha az A helyett mindegyütt 1-et teszünk, ennek minden hatványa = 1 lévén, a' hatványjeli sorzat ezen esetben ily egyszerűvé módosul:

$$(1+a)^x = 1 + x + \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3 + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n}x^n, \text{ vagy}$$

$$(1+a)^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots \text{ vagy pe}$$

dig, minthogy ebben az esetben, mikor a' mércze $A=1$, az alapszámot, $(1+a)$, már akármennyit jelentsen is ez, egy kis e betűvel szokás kitenni:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{1.2} x^2 + \frac{1}{1.2.3} x^3 + \dots + \frac{1}{1.2.3.\dots.n} x^n$$

Ámbár azonban annak végbevételére, hogy ezen hatványjeli sorzat' segedelmével, melyben a' mérczét, A, 1-nek vettük, egy egész szorzásalkotmányt kiszámítsunk, épen nem szükség tudnunk, mi lesz ennek alapszámja az e: mindazáltal ha valaki ezt csakugyan tudni szeretné, igen könnyű ezt a' közelebbi egyenletből kiszámítani; mivel ha abban az x-et 1-nek tesszük, lesz:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots + \frac{1}{1.2.\dots.n}$$

mely értéket egész a' billiód részekig kidolgozni legkönnyebb úgy, hogy az ember az első törtszámot, $\frac{1}{2}$, leírván tizedes törtszám formában 15 betűvel; azután ezt elosztja 3-mal, és az $\frac{1}{3}$ -részét aláírja a' félnek; továbbá a' $\frac{1}{2}$ -nek $\frac{1}{3}$ részét elosztja négygyel, és annak $\frac{1}{4}$ részét ismét aláírja, és így megy mindaddig, míg a' tizedes törtek' 15-dik helyére is már 0 fogna esni; ekkor mindezeket összeadja, és az összegnek elébe írja egész számul a' 2-öt e'képen:

3:	0, 500 000 000 000 000
4:	0, 166 666 666 666 666
5:	0, 041 666 666 666 666
6:	0, 008 333 333 333 333
7:	0, 001 388 888 888 888
8:	0, 000 198 412 698 412
9:	0, 000 024 801 587 301
10:	0, 000 002 755 731 922
11:	0, 000 000 275 573 192
12:	0, 000 000 025 052 108
13:	0, 000 000 002 087 675
14:	0, 000 000 000 160 590
15:	0, 000 000 000 011 470
16:	0, 000 000 000 000 764
17:	0, 000 000 000 000 047
	0, 000 000 000 000 002
	e = 2, 718 281 828 459 036

83. §. Olyan szorzások, melyeknek mérczéjük $A=1$, 's következésképen alapszámjuk $(1+a) = e = 2,718281828459$ valósággal

vannak kidolgozva; mivel az ezekeli élés a' felsőbb analysisbeli számvetésekben nagy könnyebbséget szerez. A' mi több, Bátor Napier, a' logaritmusok' első feltalálója is háromszegmérési szemléldések által ezen logaritmusokra vezéreltetett, a' nélkül, hogy ezeknek alapszámját ismerte, vagy csak fogalma is lett volna arról, hogy a' logaritmusoknak még alapszámjoknak is kellene lenni; 's az ilyen szorszámokat nevezik természetes szorszámoknak (logarithmi naturales), minden más szorszámokat pedig, melyeknek mérczéjük nem $= 1$, 's következésképen alapszámjok is nem e , hanem más akármely szám, hívják mesterséges szorszámoknak (logarithmi artificiales), melynek például a' briggféle vagy közönséges szorszámok is (logarithmi brigiani, seu vulgares). Ezen elnevezések nem a' legszerencsésebbek ugyan, mert hova kellene már mesterségesebb logaritmusok, mint az ugynevezett természetesek? De hiában! már ezeket így nevezik a' Mathematicusok világszerte, 's így kell nekünk is megtanulnunk, hogy az ő munkáikat megérthessük. Természeteseknek nevezik pedig az ilyen logaritmusokat, melyeknek mérczéjük az $A = 1$, azért, mivel, a' mint mindjárt meg fogjuk látni, az olyan hatványjeli sorzat' segedelmével, melyben $A = 1$, lehet olyan egyenletet találni, mely szerint akármely számnak is illetén logaritmusát magából a' számból lehet egyszerre formálni és minden gondolkodás nélkül leírni, olyan formán, mint a' kéttagú mennyiségnek akármely hatványát magokból ezen mennyiség' tagjaiból és a' hatványjelből szerkesztve egyszerre le tudjuk írni; 's ez épen az oka, hogy a' felsőbb analysisben egyedül ezen, magából a' mennyiségből, melynek logaritmusa kívántatik, könnyen formáltatható logaritmusokkal szokás élni.

84. §. De most lássuk, mikép' lehet a' közelebb kifejtett törvények' segítségével egy egyenletet fejteni ki a' természetes logaritmusok' könnyű kiszámítására. Legyen $(1 + a) = e^{\alpha}$, a' mi megengedhető, mivel akármely számot jelentsen is $(1 + a)$, lehet azt úgy képzelnünk, mint a' természetes szorszámok' alapjának az e -nek valamely hatalmát, miszerint $\alpha = \text{Log}^*(1 + a)$. Továbbá

*) Mikor mind a' kétféle logaritmus szóban forog, t. i. mind a' közönséges, mind a' természetes, és a' logaritmus' nevezete alatt hol egyiket, hol másikat kell érteni a' kettő közül, mint itt a' következőekben: szükség ezeket, a' zavar' eltávoztatása végett, a' számvetésben is különböző jegyek által megkülönböztetni egymástól. Én, mellőzvé az itt szokásban lévő vagy próbálgatott jegyek' bírálgatását, legjobbnak látom, hogy log. kis kezdő betűvel le-

ezen egymással egyenlő mennyiségeknek $(1+a) = e^a$, x -dik hatmaik is egyenlők egymással, és így: $(1+a)^x = e^{ax}$. Végezet-re ezen egyenletnek mind a ' két oldalát ki tudjuk fejteni egy-egy végetlen sorzatban; nevezetesen a ' jobb oldalt a ' közelebbi § szerint az x helyett mindenütt ax -et tévén, így:

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{1}{1.2} a^2 x^2 + \frac{1}{1.2.3} a^3 x^3 + \frac{1}{1.2.3.4} a^4 x^4 + \dots \text{ vagy}$$

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2}{1.2} x^2 + \frac{a^3}{1.2.3} x^3 + \frac{a^4}{1.2.3.4} x^4 + \dots;$$

a ' bal oldalt pedig a ' fentebbi 81-dik § vége szerint így:

$$(1+a)^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{1.2} x^2 + \frac{A^3}{1.2.3} x^3 + \frac{A^4}{1.2.3.4} x^4 + \dots$$

Minthogy pedig a ' két mennyiség, melyeket itt végetlen sorzatokban fejeztünk ki, egymással egyenlők, 's annál fogva a ' két sorzataak is egyenlőknek kell lenniök tagról-tagra, ez pedig csak úgy eshetik meg, ha $a = A$: ebből szükségesképen következik, hogy $a = A$. Ugyde azon egyenlet szerint, melyből kiindultunk, hogy t. i.

$(1+a) = e^a$, fog lenni: $a = \text{Log.}(1+a)$, a ' 79-dik § vége szerint pedig: $A = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \dots$. És így ezen e-

gyenletben: $a = A$, az a és A helyett ezen mennyiségeknek értékei-

ket tévén, lesz: $\text{Log.}(1+a) = a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \frac{a^5}{5} - \dots$

Vagy, minthogy az általános számvetésben a ' főmennyiséget, melynek hatalmai szerint vannak a ' sorzat' tagjai rendezve, mindig az ábéce utolsó betűi közül valamelyikkel szokás elnevezni, itt az a

helyett y -t tévén, lesz: $\text{Log.}(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$

azaz, valamely számnak, mely áll 1 -ből és egy másik számból, y ,

gyen a ' közönséges logaritmus' jegye, mint volt fentebb is mindenütt; Log. pedig nagy kezdő betűvel jelentse a ' természetes logaritmusokat. Sőt ha általában logaritmusról lesz szó, mindegy lévén akármiféle logaritmust értünk alatta, ennek jegyétül felveszem nagyobb világosság' okáért a ' görög $\lambda\omicron\gamma\alpha\rho\theta\mu\omicron\varsigma$ első szótagját: $\lambda\omicron\gamma$. Így kell ezen jegyeket érteni mindenütt a ' következődőkben, 's szóval is így kell kimondani. Nevezetesen ezt log. így: logaritmus vulgaris; ezt Log. így: logaritmus naturalis; 's végre ezt: $\lambda\omicron\gamma$. csak így: logaritmus.

a' természetes logaritmusa nem egyéb, mint az ilyen szám 2-dik tagjának az y -nak első kezdődő és sorban egymásután következő egész hatalmai, még pedig a' páratlan hatalmak $+$, a' párosok $-$ jeggyel, vagy még helyesebben fejezván ki, az y , már akár $(+y)$, akár $(-y)$ páratlan hatalmai a' maguk tulajdon jegyével, (mert mindeniknek a' maga jegye a' célirányos), a' párosok pedig ellenkező jeggyel mint a' maguk jegye, és így mind a' $(+y)$, mind a' $(-y)$ páros hatalmai, $-$ jeggyel, 's mindegyik elosztva a' maga hatványjelével; és ezen sorzatot, mely az $(1+y)$ -nak természetes logaritmusa az y hatványaival fejezi ki, hívják s z o r s z á m i s o r o z a t n a k (series logarithmica).

Ez szerint már, mivel nincs szám, melyet $(1+y)$ -nal ki nem lehetne fejezni, még ha 1-nél kisebb is, mint $\frac{1}{4} = 1 + (-\frac{3}{4}) = (1 - \frac{3}{4})$: tehát úgy látszik első tekintettel, hogy akármely szám' természetes logaritmusa is könnyű az itt kifejtett egyenlet szerint kidolgozni. De ha ezen egyenletet egy kis figyelemmel tekintjük meg, lehetetlen mindjárt által nem látnunk, hogy itt a' végtelen sorzat csak úgy lesz öszvetartó, azaz, csak úgy lesz abban minden következő tag kisebb az előttevalónál, ha y kisebb, vagy legalább nem nagyobb 1-nél, például:

$$\text{Log.}\left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1^2}{10^2 \times 2} + \frac{1^3}{10^3 \times 3} - \frac{1^4}{10^4 \times 4} + \frac{1^5}{10^5 \times 5} - \frac{1^6}{10^6 \times 6} + \text{azaz:}$$

$$\text{Log.}\left(1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{200} + \frac{1}{3000} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{500000} - \frac{1}{6000000} + ,$$

és csak így lehetséges az, hogy az első tagok közül többet vagy kevesebbet, a' szerint a' mint az y nagyobb vagy kisebb értékű törtszám, 's annál fogva a' sorzat kevésbé, vagy inkább öszvetartó, öszvesummázván, a' többieket, mint már csekélyégeket, észrevehető hiba nélkül elhagyhatjuk. Ellenben, ha y 1-nél nagyobb, például, ha csak 2 is, úgy ez a' sorzat:

$$\text{Log.}(1+2) = 2 - \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} - \frac{2^4}{4} + \frac{2^5}{5} - \dots, \text{ azaz:}$$

$$\text{Log.}(1+2) = 2 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3} - \frac{16}{4} + \frac{32}{5} - \dots, \text{ széllyel-}$$

tartó lesz, látnivaló, és nemhogy közelednék az $(1+2)$ -nek, azaz a' 3-nak természetes logaritmusaéhoz, mely a' mint alább ki fogjuk számítani $= 1,09861229$, hanem ettől még meszszebb-meszszebb távozik minden lépten. Ugyanis az első tag magában, azaz 2, ennél nagyobb; a' két első tag öszvege $2 - \frac{4}{2} = 0$, kisebb; a' 3 első

tag összege $2 - \frac{4}{2} + \frac{8}{8} = 2 + \frac{2}{3}$ ismét nagyobb, még pedig ez már többel nagyobb, mint volt az első tag magában; a' 4 első tag összege: $2 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3} - \frac{4}{16} = 2 + \frac{2}{3} - 4 = -\left(1 + \frac{1}{3}\right)$, ismét kisebb, még pedig ez már többel kisebb, vagyis messzebb távozik lefelé a' 3' természetes logaritmusról, mint a' két első tag összege, mely = 0 volt, és így tovább.

Ez igen szomorú dolog; mert így, ha ezen egyenlettel csak akkor boldogulhatunk a' természetes szorzások kiszámítására, mikor az y kisebb, vagy legalább nem nagyobb 1-nél: úgy, ha szinte egyszer célirányosnak, másszor célellesnek vesszük is az y -t, e'képen: $(1+y)$, $(1-y)$, és mind a' két esetben mindenféle kisebb nagyobb törtszám jelentéseket adunk is annak, fel egész az 1-ig: mégis a' két határ, melyek között ezen egyenletnek a' természetes logaritmusról kiszámítására hasznát vehetjük, lesz csak $(1-1)$ és $(1+1)$, azaz: 0 és 2.

De azon kívül, hogy ezen egyenletnek a' természetes logaritmusról kiszámítása körüli hasznávétele ily keskeny határok közé van szorítva, van ennek még más baja is, az t. i., hogy ez szerint számítani ki a' természetes logaritmusról a' mondott határok között is csak akkor könnyű, mikor az y kis törtszámot jelent. Például, ha $y = \frac{1}{10}$, akkor — mint a' fentebbi kifejtésből megítélhetni, — elég a' sorzatnak csak 6 első tagját summázni össze, mivel az azután következők már oly kicsinyek, hogy mindössze sem tesznek 1 tízmillió részt. Ellenben, mikor az y nagy törtszám, 's közel jár az 1-hez, vagy éppen 1, akkor a' sorzat összevetartása igen lassu, és sok tagokat kellene kiszámítani tizedes törtekben, és összevsummázni, ha azt akarnók, hogy a' mit elhagyunk, észre sem vehető csekélység legyen. Például, ha a' 2' természetes logaritmusról akarnók kiszámítani, ez szerint:

$$\text{Log. } (1+1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots, \text{ és}$$

ha azt akarnók, hogy a' miket utoljára elhagyunk, észre sem vehető csekélység legyen, a' sorzatnak több mint 10 millió első tagjait kellene tizedes törtekké változtatnunk, 's azután ezeket összevsummázni; a' miben megöszülne az ember.

De szerencsére lehet itt — mint szintén minden más hasonló esetekben is — mind a' két bajon segíteni, és az ilyen, csak szoros

határok között használható, 's igen lassudad öszvetartó sorzatokból más határtalanul használható, és hirtelen öszvetartó sorzatokat, még pedig különb-különbféleképen formálni; de miképen, erről általános szabályokat adni nem lehet. Ehez az elmének egy kis élesége, és egy kis gyakorlottság is kívántatik, mint az algebrában az egyenletnek a' feltételekből való szerkesztésére. E' jelen esetben p. o. következő fogásokkal élünk:

Először is a' sorzatnak páros tagjait, melyek czélellesesek, mind kiküszöböljük; miáltal azt nyerjük: a) hogy sorzatunk nem lesz tarkabarka, egyik tagja $+$, a' másik $-$, hanem minden tagja fog lenni egyenlően $+$; b) hogy sorzatunk összébbtartóvá lesz; és végezetre c) hogy sorzatunk egyszersmind alkalmatossá lesz a' 2-nél nagyobb számok' természetes logaritmusainak kiszámítására is. A' páros tagok' kiküszöbölése pedig így esik: az $y-t$ igazi, azaz $1-nél$ kisebb törtszámnak képzelvén, leírjuk a' fentebbi egyenlet szerint elébb az $(1+y)$ -nak, azaz egy olyan áltörtszámnak természetes logaritmusát, mely $1-nél$ nagyobb, $2-nél$ kisebb; azután ennek aláírjuk ugyanazon egyenlet szerint az $(1-y)$ -nak, azaz egy olyan igazi törtszámnak, mely $1-nél$ annyival kisebb, a' mennyivel a' másik nagyobb, természetes logaritmusát, mely utóbbinak, mint igazi törtszám' logaritmusának, czélelleses számnak kelletvén lennie, előre is lehet látni, hogy itt a' sorzat páratlan tagjainak is mind czélellesesekké kell változniok, és így hogy az egész sorzat minden tagjai czélellesesek lesznek, a' mi egyébiránt a' czélelleses mennyiség $(-y)$ páros és páratlan hatalmainak $+$ és $-$ jegyeiből is a' fentebbi szabályal öszvevetve következik; mivel a' czélelleses mennyiségek' páratlan hatalmaik mind czélellesesek, a' párosok mind czélirányosok lévén, látnivaló, hogy ha amazok mind a' magok jegyével, ezek pedig mind ellenkező jeggyel iratnak, az egész sorzat czélelleses jeggyel lesz irva. Azután az $(1+y)$ természetes logaritmusából levonjuk az $(1-y)$ természetes logaritmusát; mi végre az utóbbiban minden tagokat czélellesesekből czélirányosokká kelletvén változtatni, a' páros tagok a' két sorzatban egymást lerontják, a' páratlanok pedig megkettőztetődnek, 's így a' két logaritmus közötti különbség, t. i. $\text{Log.}(1+y) - \text{Log.}(1-y)$; azaz: $\text{Log.}\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$, az eredeti sorzat páratlan tagjainak kettőzete fog lenni, e'képen:

Log. $(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \dots$ ebből kijő:

Log. $(1-y) = -y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5 + \dots$'s marad:

Log. $\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2y + \frac{2}{3}y^3 + \frac{2}{5}y^5 \left\{ \text{vagy } a' \text{ közös szorzót el-} \right.$
váltasztván:

Log. $\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = 2\left[y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 + \dots\right].$

Igy már ha $y = \frac{1}{2}$, és így $1+y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $1-y$ pedig $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, lesz:

Log. $\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = \text{Log. } \frac{3/2}{1/2} = \text{Log. } 3 = 2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots\right],$

azaz: Log. 3 = $2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{160} + \frac{1}{896} + \dots\right]$, mely sorzat

már, noha 2-nél nagyobb is a' szám, melynek természetes logaritmusa kifejezi, mégis, a' mint látjuk, öszvetartó, és ha 19 első tagját kidolgoznók, a' 3-nak természetes logaritmusát egész a' tizmilliód részéig hibátlanul meg fognök találni.

Egyébiránt, minthogy itt az y mindig törtszámot jelent, még pedig olyat, melyet a' sorzat különböző tagjaiban különböző hatalmakra kell emelni: tehát a' természetes logaritmusokat kifejező törvény legvilágosabb és egyszersmind legegyszerűbb lesz úgy, ha itt az y helyett törtszám formájú kifejezést teszünk, még pedig olyat, melynek felsőbb hatalmakra emelése legegyszerűbb legyen. Ilyen

pedig ez: $\frac{1}{z}$, mely akármely törtszámot jelenthet, nem lévén olyan törtszám, melyet ilyen formára ne lehetne venni, ha mind felsejét, mind alsaját felsejével elosztjuk; azonban ha felsőbb hatalmakra kell emelni, felseje mindig változatlan maradván, csak alsója felibe iratik a' hatványjel. Ez szerint fog lenni:

$(1+y) = \left(1 + \frac{1}{z}\right) = \frac{z}{z} + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z}$. Hasonlóképen lesz:

$(1-y) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{z}{z} - \frac{1}{z}\right) = \frac{z-1}{z}$, 's amazz ezzel elosztván, vagy ezzel megfordítva szorozván, lesz:

$\left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \frac{z+1}{z} \times \frac{z}{z-1} = \frac{z+1}{z-1}$. Mely értéket, ha a' fentebbi e-

gyenlet bal oldalán az $\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$ helyébe teszünk, 's ugyanott a' jobb-

oldalon az y -t mindenütt $\frac{1}{z}$ -vel cseréljük fel, fog lenni:

Log. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 2 \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} + \frac{1}{7z^7} + \dots \right]$; hol ha

$z = 2$, 's következésképen $\frac{z+1}{z-1} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$, ugy fog lenni:

Log. 3 = 2 $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \dots \right)$... mint fentebb;

ha pedig $z = 3$, és így $\frac{z+1}{z-1} = \frac{4}{2} = 2$, ugy fog lenni:

Log. 2 = 2 $\left[\frac{1}{1 \cdot 3^1} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right]$, stb.

De még ezen egyenletet is lehet mind hirtelenebb öszvetartóvá, mind pedig annyiban is alkalmasabbá tenni, hogy a' szám, melynek természetes logaritmusát keressük, ne ilyen bonyolodott szám legyen, mint $\frac{z+1}{z-1}$, hanem egy egyszerű egész szám, például p , melynek aztán sorban adhassuk egymásután ezen értékeket: 2, 3, 4, 5, 6, 7 stb, 's így sorban kereshessük ki egymásután a' természetes számok logaritmusait. Ez így eshetik meg: Legyen

$\frac{z+1}{2} = p$; így lesz: $z = 2p - 1$; $z + 1 = 2p$; $z - 1 = 2p - 2$, 's

végre: $\frac{z+1}{z-1} = \frac{2p-2}{2p} = \frac{p}{p-1}$; mely értéket tóvén a' közelebbi

egyenlet bal oldalára a' $\frac{z+1}{z-1}$ helyett, a' jobb oldalon pedig a' z -t mindenütt $(2p-1)$ -gyel cserélvén fel, az egyenlet fog lenni:

Log. $\frac{p}{p-1} = 2 \left[\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3(2p-1)^3} + \frac{1}{5(2p-1)^5} + \frac{1}{7(2p-1)^7} + \dots \right]$, azaz

Log. $p - \text{Log. } (p-1) = 2 \left[\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3(2p-1)^3} + \frac{1}{5(2p-1)^5} + \dots \right]$ azaz

Log. $p = \text{Log. } (p-1) + 2 \left[\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3(2p-1)^3} + \frac{1}{5(2p-1)^5} + \dots \right]$

Mely egyenletben ha a' p -nek sorban egymás után ezen jelentéseket adjuk: 2, 3, 4, 5 'stb., a' természetes számok' természetes logaritmusai e'kép fognak kijöni sorban egymásután:

Log 2 = Log. 1 + 2 $\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots \right]$

Log. 3 = Log. 2 + 2 $\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right]$

Log. 4 = Log. 3 + 2 $\left[\frac{1}{7} + \frac{1}{3 \cdot 7^3} + \frac{1}{5 \cdot 7^5} + \frac{1}{7 \cdot 7^7} + \dots \right]$

Log. 5 = Log. 4 + 2 $\left[\frac{1}{9} + \frac{1}{3 \cdot 9^3} + \frac{1}{5 \cdot 9^5} + \frac{1}{7 \cdot 9^7} + \dots \right]$

Ez szerint már, ha sort veszünk a' természetes számokon, azok közül mindegyiknek természetes logaritmusát könnyen kiszá-

mithatjuk, ha már elébb a' nála egygyel kisebb szám' természetes logaritmusát kiszámítottuk; mert csak ehez kell adnunk egy mindig összebb-összebbtartó végetlen sorzat' néhány elsőbb tagjai' összegének kettőzetét. A' végetlen sorzat' összesummázandó tagjainak száma mindig kevesedik a' szerint, a' mint a' számok növekednek, 's annálfogva a' végetlen sorzat jobban-jobban összetartóvá lesz, és az 1 után, melynek természetes logaritmusa is = 0, legkisebb egész számnak, a' 2-nek, természetes logaritmusa' kiszámítására sem kívántatik több, mint a' 10 első tagnak összeszámítása a' végetlen sorzathból, hogy az a' tizedes törtszámnak egész a' 8-ik helyéig, azaz egész a' százmilliódrészekig tökéletes legyen.

Még ennél is sebesebben összetartóvá lesz pedig a' természetes logaritmusok' kiszámítására való végetlen sorzat, ha megteszszük, hogy legyen a' közelebbi egyenletben mindenütt $p = q^2$, 's azután az ez által származott új egyenletben némi módosításokat teszünk e'képen:

$$\text{Log. } q^2 = \text{Log. } (q^2 - 1) + 2 \left[\frac{1}{2q^2 - 1} + \frac{1}{3(2q^2 - 1)^3} + \frac{1}{5(2q^2 - 1)^5} + \dots \right]$$

$$\text{Mint hogy pedig } \lambda \sigma. (q^2 - 1) = \lambda \sigma. (q^2 - 1^2) = \lambda \sigma. [(q+1)(q-1)]$$

$$= \lambda \sigma. (q+1) + \lambda \sigma. (q-1), \text{ és } \lambda \sigma. q^2 = 2 \lambda \sigma. q: \text{ tehát fog lenni:}$$

$$2 \text{Log. } q = \text{Log. } (q+1) + \text{Log. } (q-1) + 2 \left[\frac{1}{2q^2 - 1} + \frac{1}{3(2q^2 - 1)^3} + \frac{1}{5(2q^2 - 1)^5} + \dots \right]$$

's végre, ha ezen egyenletnek mind a' két oldalon minden tagjait eloszljuk 2-vel, lesz:

$$\text{Log. } q = \frac{\text{Log. } (q+1) + \text{Log. } (q-1)}{2} + \left[\frac{1}{(2q^2 - 1)} + \frac{1}{3(2q^2 - 1)^3} + \frac{1}{5(2q^2 - 1)^5} + \frac{1}{7(2q^2 - 1)^7} + \dots \right]$$

mely egyenlet szerint, ha sort veszünk a' természetes számok' természetes logaritmusainak kikeresésén, akármely első számnak (numerus primus) logaritmusát, a' 2-ét kivéven, igen könnyű kiszámítani mikor rá kerül a' sor; mivel már akkor a' kérdéses első számnál, mely természetel mindenkor páratlan, egygyel nagyobb, és egygyel kisebb páros számok logaritmusait, melyeket a' kérdéses első szám logaritmusának kiszámítására ismernünk kell, kisebb tényezőik logaritmusainak, melyek már akkor ki vannak számítva, összeadása által kiszámíthatjuk, melyeknek aztán fél summájához a' végetlen sorzatnak, mely itt igen hirtelen összetartó, elsőbb tagjai közül, a' legrosszabb esetben, t. i. a' 3' természetes logaritmusának kiszámításában is elég 3 tagot kiszámítani, ha azt akarjuk, hogy

logarithmusunk a' száz milliód-részekig tökéletes legyen; az 5-től a' 29-ig eső első számok logarithmusaiban pedig, hogy ugyanezen tökéletességet elérjük, csak a' két első, azon felül pedig csupán az egy első tagját szükség a' végtelen sorzatnak kiszámítani; sőt a' 6's több betűvel irt nagy számok logarithmusait illetőleg, még csak ez sem szükséges; mert itt már, ha a' száz milliód-részeknél apróbb törtszámokra nem tekintünk; a' logarithmusok ugy növekedvén, mint magok a' számok: valamint maga a' kérdéses első szám közép szám a' nála egygyel nagyobb, és egygyel kisebb számok között: épen ugy annak logarithmusa is közép szám ezeknek logarithmusai között, mely kijő ha e' kettőnek logarithmusait összeadván, a' summának felit veszszük.

85. §. Most lássunk néhány példát a' természetes logarithmusok kiszámítására, kezdvén a' 2 log.sán a' fentebbi egyenlet szerint :

$$\text{Log. } p = \text{Log. } (p - 1) + 2 \left[\frac{1}{2p-1} + \frac{1}{3 \cdot (2p-1)^3} + \frac{1}{5 \cdot (2p-1)^5} + \dots \right]$$

mely, ha $p=2$, mivel ekkor $p-1=1$, ennek log. pedig $=0$, lesz:

$$\text{Log. } 2 = 2 \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right], \text{ mely kidolgozva így lesz:}$$

$\frac{1}{1 \cdot 3^1}$	$\frac{1}{3}$	= 0,3333333333
$\frac{1}{3 \cdot 3^3}$	$\frac{1}{81}$	= 0,01234567901
$\frac{1}{5 \cdot 3^5}$	$\frac{1}{1215}$	= 0,00082304527
$\frac{1}{7 \cdot 3^7}$	$\frac{1}{15309}$	= 0,00006532105
$\frac{1}{9 \cdot 3^9}$	$\frac{1}{177147}$	= 0,00000564503
$\frac{1}{11 \cdot 3^{11}}$	$\frac{1}{1948617}$	= 0,00000051318
$\frac{1}{13 \cdot 3^{13}}$	$\frac{1}{20726199}$	= 0,00000004825
$\frac{1}{15 \cdot 3^{15}}$	$\frac{1}{215233605}$	= 0,00000000465
$\frac{1}{17 \cdot 3^{17}}$	$\frac{1}{2195382771}$	= 0,00000000046
$\frac{1}{19 \cdot 3^{19}}$	$\frac{1}{22082967873}$	= 0,00000000005
összeg		= 0,34657359028

's ez összeg 2-szer véve = $\text{Log. } 2 = 0,69314718056$

Ezentúl már a' nem első számok természetes logaritmusait mind té-
nyezdik logaritmusáiból rakjuk össze, az elsőket pedig ezen
egyenlet szerint számítjuk ki:

$$\text{Log. } q = \frac{\text{Log. } (q+1) + \text{Log. } (q-1)}{2} + \left[\frac{1}{2q^2-1} + \frac{1}{3 \cdot (2q^2-1)^3} + \frac{1}{5 \cdot (2q^2-1)^5} + \dots \right]; \text{ még pedig mind a' tizedes törtnek 11-ik he-}$$

lyéig azért, hogy legalább a' 8-dik helyig tökéletes legyen, e'kép:

$$\text{Log. } 2 = 0,693147181$$

$$2 \text{ Log. } 2 = \text{Log. } 2^2 = \text{Log. } 4 = 1,386294361$$

$$\underline{\text{összeg} = 2,079441542}$$

$$'s \text{ ha } q = 3, \text{ lesz: } \frac{\text{Log. } 4 + \text{Log. } 2}{2} = 1,039720771$$

$$+ \frac{1}{(2 \cdot 3^2) - 1} = \frac{1}{17} = 0,058823529$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 17^3} = \frac{1}{14739} = 0,000067847$$

$$+ \frac{1}{5 \cdot 17^5} = \frac{1}{7099285} = 0,000000141$$

$$\underline{\text{összesen} = \text{Log. } 3 = 1,098612288}$$

$$+ \text{Log. } 2 = 0,693147181$$

$$\text{Log. } 3 + \text{Log. } 2 = \text{Log. } 6 = 1,791759469$$

$$+ \text{Log. } 4 = 1,386294361$$

$$\underline{\text{összeg} = 3,178053830}$$

$$'s \text{ ha } q = 5, \text{ lesz: } \frac{\text{Log. } 6 + \text{Log. } 4}{2} = 1,569026915$$

$$+ \frac{1}{(2 \cdot 5^2) - 1} = \frac{1}{49} = 0,020408163$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 49^3} = \frac{1}{352947} = 0,00002833$$

$$\underline{\text{összesen} = \text{Log. } 5 = 1,609437912}$$

$$\text{Továbbá: } 3 \text{ Log. } 2 = \text{Log. } 2^3 = \text{Log. } 8 = 2,079441542$$

$$+ \text{Log. } 6 = 1,791759469$$

$$\underline{\text{összeg} = 3,871201011}$$

$$'s \text{ ha } q = 7, \text{ lesz: } \frac{\text{Log. } 8 + \text{Log. } 6}{2} = 1,935600505$$

$$+ \frac{1}{(2 \cdot 7^2) - 1} = \frac{1}{97} = 0,010309278$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 97^3} = \frac{1}{2738019} = 0,000000365$$

$$\underline{\text{összesen} = \text{Log. } 7 = 1,945910149}$$

$$\begin{aligned} \text{Végre: } 2 \times \text{Log. } 3 &= \text{Log. } 3^2 = \text{Log. } \mathbf{9} = 2,197224576 \\ &\quad \text{Log. } 2 = 0,693147181 \\ &\quad + \text{Log. } 5 = 1,609437912 \\ &= \text{Log. } \mathbf{10} = 2,302585093 \end{aligned}$$

Ily könnyű a' természetes logaritmusok kiszámítása, sőt tovább-tovább még könnyebb-könnyebb: mert már a' 29 logaritmusának, annnyival inkább a' még nagyobb első számok logaritmusainak kiszámítására elég a' végtelen sorzatnak csak első tagját számítani ki, ha csak a' száz-milliód részekig akarjuk hogy logaritmusunk tökéletes legyen, következőképen:

$$\begin{aligned} \text{Log. } 5 &= 1,609437912 \\ + \text{Log. } 6 &= 1,791759469 \\ \hline &= \text{Log. } 5 \times 6 = \text{Log. } \mathbf{30} = 3,401197381 \\ \text{Log. } 4 &= 1,386294361 \\ + \text{Log. } 7 &= 1,945910149 \\ \hline &= \text{Log. } 4 \times 7 = \text{Log. } \mathbf{28} = 3,332204510 \\ &\quad \text{összeg} = 6,733401891 \\ \hline \text{'s ha } q=29, \text{ lesz: } &\frac{\text{Log. } 30 + \text{Log. } 28}{2} = 3,366700945 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{1}{(2 \cdot 29^2) - 1} &= \frac{1}{1681} = 0,000594884 \\ \hline &\text{Log. } \mathbf{29} = 3,367295829 \end{aligned}$$

Ha itt a' 29 természetes logaritmusának kikeresésében a' végtelen sorzatnak 2-dik tagját is, $\frac{1}{3 \cdot (2 \times 29^2 - 1)^3} = \frac{1}{14250312723} = 0,000000000070$, kidolgoztuk volna is, ennek a' tizedes törtszám 8 első helyére már semmi befolyása nem lett volna.

III. SZAKASZ.

A' természetes és közönséges logaritmusoknak egymásrai átváltoztatásáról, 's mind a' két alkotmányban akármely szám logaritmusának egyenes és független kiszámításáról.

86. §. Ha a' természetes számoknak természetes logaritmusai már ki vannak dolgozva, ezekből akármely más szorzámalkot-

mányt, például a' közönséges logaríthmusokat is igen könnyű kiszámítani. Ugyanis, először: egyenlő számoknak ugyanazon egyféle logaríthmusaik is egyenlők lévén egymással, ha például $10^x = a$, ugy: $\text{Log. } 10^x = \text{Log. } a$, 's innen $x \cdot \text{Log. } 10 = \text{Log. } a$, 's végre: $x = \frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } 10}$. Ugyde másfelől meg ha $10^x = a$, ugy $x = \log. a$;

innen pedig, az x -nek két értékét egymással egyenlítve, lesz: $\log. a = \frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } 10}$. A' honnan ez a' szabály kerekedik: akármely számnak közönséges logaríthmusa kijő, ha ugyanannak természetes logaríthmusát a' közönséges logaríthmusok alapszámjának, a' 10-nek, természetes logaríthmusával elosztjuk. Például:

$$\log. 2 = \frac{\text{Log. } 2}{\text{Log. } 10} = \frac{0,693147181}{2,302585093} = 0,301029996. \text{ Mely loga-}$$

ríthmust ha csak a' tiz-milliód részekig, vagy is a' tizedes törtszám 7-dik helyéig akarunk kifejteni, mivel a' 8-dik és azt követő helyeken lévő törtszámok többet tesznek egy fél tiz-milliód résznél, sőt igen kevés híján 1 egész tiz-milliód részt tesznek, tehát a' 7-dik helyen lévő 9 tiz-milliód részt egygyel megszorítjuk, 's így lesz: $\log. 2 = 0,3010300$, 's így van ez feltéve a' mi szorszám tábláinkban is. A' magyar tudós Társaság által kiadott szorszám táblákban az ilyen logaríthmusok, melyekben a' 8-dik 's azt követő helyekre jövő egy fél tiz-milliód résznél nagyobb törtszámok egy egész tiz-milliód részre ki vannak pótolva, és így a' melyek egy kevéssel nagyobbak kelletnél, az által vannak a' többiektől, melyekből a' 8-dik 's azt követő helyekre jövő egy fél tiz-milliód résznél kisebb törtszámok elmaradtak, és így a' melyek kelletnél egy kevéssel kisebbek, megkülönböztetve, hogy amazoknak tizedes törtszámjok utolsó betűje alá egy pont van téve, e'képen: $\log. 2 = 3010300$

Egyébiránt, mivel fentebb (a' 84-dik § elején) már meg volt mutatva, hogy ezen hatványjeli sorzatban:

$$(1+a)^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{1.2} x^2 + \frac{A^3}{1.2.3} x^3 + \frac{A^4}{1.2.3.4} x^4 + \dots \text{ az}$$

első ösztényző, az A , vagyis a' modulus, annyi, mint az alapszámnak, $(1+a)$, természetes logaríthmusa: $A = \text{Log. } (1+a)$, 's következőképen, hogy a' közönséges szorszámok' alkotmányában, hol $(1+a) = 10$, a' modulus, $A, = \text{Log. } 10$: tehát ezen e-

gyenletbe: $\log. b = \frac{\text{Log. } b}{\text{Log. } 10}$, a' $\text{Log. } 10$ helyett ezt tévén: (mo-

dulus logarithmorum vulgarium), fog lenni: $\log. b = \frac{\text{Log. } b}{\text{modul. log.}}$, 's innen: $\log. b \times \text{modul. log.} = \text{Log. } b$, 's innen ismét: $\text{modul. log.} = \frac{\text{Log. } b}{\log. b}$. A' honnan világos, hogy valamely szorszám alkotmányának modulusa vagy mérczé-je az a' szám, mely megméri, hányszor találta meg valamely számnak azon alkotmánybeli logarithmusa ugyanazon számnak természetes logarithmusában.

Ezt azonban csak mellesleg említjük itt a' modulus, vagy mérce név magyarázására, a' dologra nézve pedig még azt jegyezzük meg, hogy ha a' kérdés nem az, mikép lehet a' közönséges logarithmusokat a' természetesekből, és csupán ezekből, eredetileg kiszámítani; hanem csak az, hogy már most, mikor a' közönséges szorzástáblák készen vannak, 's azokból akármely számnak, a' többek közt az e-nek is közönséges logarithmusát kikereshetjük, mikép lehet akármely számnak természetes logarithmusát ugyanannak közönséges logarithmusává átalváltoztatni: ennek van egy igen könnyű módja. Ugyanis, ha felteszszük, hogy például $e^x = 2$, ugy $\log. e^x = \log. 2$, azaz $x \times \log. e = \log. 2$, 's innen $x = \frac{\log. 2}{\log. e}$; másfelől pedig, ha $e^x = 2$, ugy $x = \text{Log. } 2$, 's végre az x két értékét egymással egyenletbe tévén:

$\text{Log. } 2 = \frac{\log. 2}{\log. e}$, vagy $\log. e \cdot \text{Log. } 2 = \log. 2$; azaz, akármely számnak közönséges logarithmusa kijő, ha ugyanannak természetes logarithmusával szorozzuk a' természetes logarithmusok alapszámjának, az e-nek, közönséges logarithmusát. Például, csak a' tizmilliód részekig menve: $\log. 2 = 0,4342945 \times 0,6931472$; hol ha jobb felől az első tényezőt, mely (mint $\log. e$) mindig állandó marad, szorzandónak vesszük, és egyszer mindenkorra kidolgozzuk, mennyi az, 1-szer, 2-szer, 3-szor, 4-szer, . . . 9-szer véve; továbbá, mennyi annak 1, 2, 3, 4, . . . 9 tizedrésze; mennyi 1, 2, 3, 4, . . . 9 századrésze, és így tovább a' tizmilliód részekig, 's mindezeket rovatokba elrendeljük — mint ezt már a' Véga kis tábláiban a' 202-dik lapon kidolgozva és elrendelve találjuk — nem kell egyéb, mint hogy ezen rovatokból írjuk ki az első, állandó tényezőt, 0,4342945, annyiszor véve, a' hány a' 2-dik tényező' jellemzője; azután ennek alá az első tényezőnek annyi tizedrészt; a' hány a' tizedrész a' 2-dik tényezőben, ennek ismét alá amannak annyi szá-

zadrészét, a' hány ebben a' századrész, és így tovább a' tizmilliódrészekig, például:

$$\log. 2 = \left\{ \begin{array}{l} 0, 000000 \\ + 0, 2605767 \\ + \dots 390865 \\ + \dots 13029 \\ + \dots 434 \\ + \dots 174 \\ + \dots 30 \\ + \dots 1 \end{array} \right\} = 0, 3010300.$$

Épen ily könnyű a' közönséges logaritmusokat is természetessékké átváltoztatni. Mert ha ama' fentebb (ezen § elején) már előfordult egyenletet: $\frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } 10} = \log. a$, így változtatjuk:

$\text{Log. } a = \text{Log. } 10 \times \log. a$, ez szerint akármely számnak természetes logaritmusa kijő, ha ugyanazon számnak közönséges logaritmusával szorozzuk a' közönséges logaritmusok alapszámjának, a' 10-nek, természetes logaritmusát, például:

$\text{Log. } 2 = \text{Log. } 10 \times \log. 2$, azaz, csak a' tizmilliódrészekig menve, $\text{Log. } 2 = 2, 3025851 \times 0, 3010300$, és ha itt is az első ténnyezőt, mely (mint $\text{Log. } 10$) állandó, szorzandónak vévén, annak szorzatait 1, 2, 3, 4, . . . 9 egészszel, azután 1, 2, 3, 4, . . . 9 tized-részszel, 1, 2, 3, 4, . . . 9 század-részszel stb, kidolgozzuk, és rovatokba illendően elrendeljük — mint ezt a' Véga kis tábláiban a' 202-dik lapon láthatni — valamely szám közönséges logaritmusának ugyanazon szám természetes logaritmusává átváltoztatására, csak egynehány számnak ezen rovatokból kiírása és összeadása kívántatik, például:

$$\text{Log. } 2 = \left\{ \begin{array}{l} 0, 907755 \\ + \dots 23026 \\ + \dots 691 \end{array} \right\} = 0, 6931472.$$

87. §. Ha czélunk az volna, hogy a' természetes számoknak sorban egymásután elébb természetes, azután ezekből közönséges logaritmusaikat kiszámítsuk: ezt már az eddig kifejtett szabályok szerint végbevinni képesek volnánk. De erre már ma szükségünk nincsen, ki lévén számítva mind a' kétféle logaritmusok. Hanem az megtörténhetik, 's meg is történik egyszer-másszor, hogy szereznek, nem sorban egymásután a' számoknak, hanem csak egyik vagy másik számnak logaritmusát magánosan kiszámítani tudni; mint például, ha valamely logaritmus tábláinkban elmocskolódott,

's olvashatatlaná lett, vagy abból kiszakadt; vagy gyanakszunk, hogy valamely logaritmus táblánkban hibás, vagy azt nagyobb pontossággal kívánók tudni, mint táblánkban kiteve találtatik, például, nemcsak a' tiz-, hanem a' száz- vagy ezer-milliód részekig, stb. Az efféle esetekben már a' fentebbi szabályok közvetlen ugyan nem segíthetnek rajtunk; de közvetve itt is csakugyan azok segítenek ki bennünket, a' mennyiben azok' szerint készíthetünk mind a' természetes, mind a' közönséges logaritmusok kiszámítására egy-egy olyan kis táblácskát, melyeknek segítsége által akármely számnak is természetes vagy közönséges logaritmusát kevés minutumok alatt akár a' billiód-részekig tökéletesen kiszámíthatjuk. — Minn alapul ezen segéd táblácskák' hasznóvétele, mikép lehet ezeket készítenünk, 's mikép hasznukat vennünk, lássuk rövideden itt, és a' következő két §-ban.

Ha tudunk olyan tényezőket, még pedig csak kevés számukat, találni, melyek közül majd ezeknek, majd amazoknak, többnek vagy kevesebbnek egymással szorzása által akármely számot is, akár a' billiód-részekig ható tökéletességgel elő lehet, mint szorzatot, állítani: ugy csak ezen kevés számú tényezőknak természetes és közönséges logaritmusaikat kell kiszámítanunk, 's magokkal ezen tényezőkkal együtt egy-egy kis táblácskába foglalnunk. Ez meglévén, mikor aztán valamely szám logaritmusát ki akarjuk számítani, csak szétbontjuk azt olyan tényezőkre, a' milyeneknek logaritmusaik táblácskáinkban taláthatnak, 's tényezőik logaritmusaikat a' természetes vagy a' közönséges logaritmusok segéd táblácskájából, a' mint melyik kívántatik, kiírván, összeadjuk. Ezzel a' kérdéses szám' kívánt logaritmusa ki van számítva.

Olyan tényezőket pedig, a' milyeneket mondánk, lehet találnunk. Ugyanis, nincs olyan szám, melyet ugy ne lehetne vennünk, mint egy törtszámnak számlálóját; 's alá ne lehetne írunk nevezőül egy olyan számot, mely nála nagyobb, 's egyszersmind a' 10 valamely hatalmának a' kilencz egyes számok közül: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, valamelyikkel való szorzata, 's e'kép' ne lehetne belőle formálnunk egy igazi, vagy is 1-nél kisebb törtszámot. 'S ha ezt teszszük valamely számmal, és az abból e'kép' származott közönséges törtszám értékét tizedes törtszámmal kifejezzük: ugy a' felvett számot szélyelbontottuk három olyan tényezőre, melyek közül egyik a' kilencz első természetes számok' valamelyike, másik a' 10-nek valamelyik célirányos egész hatalma, a' harmadik pedig valamely

igazi, azaz 1-nél kisebb törtszám. Például ezen számokat: 37, 451, 7564, olyan három tényezőre, a' melyeneket mondánk, szélyelbontjuk, e'képen:

$$\frac{37}{4 \cdot 10^1} = \frac{37}{40} = 0,925; \text{ 's innen: } 37 = 4 \cdot 10^1 \cdot 0,925.$$

$$\frac{451}{5 \cdot 10^2} = \frac{451}{500} = 0,902; \text{ 's innen: } 451 = 5 \cdot 10^2 \cdot 0,902.$$

$$\frac{7564}{8 \cdot 10^3} = \frac{7564}{8000} = 0,9455; \text{ 's innen: } 7564 = 8 \cdot 10^3 \cdot 0,9455, \text{ 's ha a'}$$

számot, melyet ilyen tényezőkre szélyel akarunk bontani, általánosan nagy A-nak, a' kilencz első természetes számok közül valamelyiket, már akármelyiket, kis a-nak, a' 10-nek akármely célirányos egész hatalmát 10^n -nek, 's végre az igazi, azaz, 1 egésznél kisebb tizedes törtszámot, mely A-nak a 10^n általi elosztásából származik, nagy B-nek nevezük, fog lenni átjában:

$$\frac{A}{a \cdot 10^n} = B, \text{ 's innen: } A = a \cdot 10^n \cdot B.$$

Ha továbbá, miután már valamely számot ilyen 3 tényezőre szélyelbontottunk, ezek közül az utolsóhoz, B, még egynehány olyan szorzókat: f, g, h, k, l, 'stb. tudnánk találni, melyekkel ezen törtszám szoroztatván a' szorzat: B. f; B. f. g; B. f. g. h. 'stb. mindig nagyobb-nagyobb, és az 1-hez mind inkább inkább közelítő igazi törtszám lenne, 's utoljára az 1-hez oly közel vitetnék, hogy a' szorzatot észrevehető hiba nélkül ugy lehetne tekinteni, mint 1-et: B. f. g. h. k. l. = 1: ekkor a' közelebbi általános egyenletet ezen egynehány szorzóval mind a' két oldalon szorozván, fogna lenni:

$$A \cdot f \cdot g \cdot h \cdot k \cdot l = a \cdot 10^n \cdot B \cdot f \cdot g \cdot h \cdot k \cdot l. \text{ Azután pedig, mivel a' jobb oldalon, a' B-nek minden utána következő szorzókkal szorzata } = 1; \text{ ez pedig mint szorzó elmaradhat, lenne: } A \cdot f \cdot g \cdot h \cdot k \cdot l = a \cdot 10^n \text{ 's}$$

$$\text{innen: } A = \frac{a \cdot 10^n}{f \cdot g \cdot h \cdot k \cdot l} \text{ Miszerint látnivaló, hogy akármely szám,}$$

A, logaríthmusának kiszámítására elégséges volna egy kis táblácskában előterjesztve birnunk a' kilencz első természetes számnak, a' 10 néhány alsóbb célirányos egész hatalmainak, és egynehány olyan tényezőnek logaríthmusait, melyekkel szorzás által valamely igazi törtszám az 1-hez mind közelebb-közelebb vitetik; 's utoljára azzal csaknem egyenlővé lesz.

Ilyen tényezőket pedig könnyű találni. Ugyanis, ha valamely igazi törtszámhoz, B, hozzáadjuk annak magának egynehány, de csak annyi 10-edrészt, hogy azok hozzájárulván is, még kisebb

legyen 1-nél, úgy azonban, hogy ha még 1 tizedrészével több járulna hozzá; akkor már az 1-et meghaladná; 's az így megnövelt, és az 1-hez közelebbvitt törtszámhoz ismét hozzáadjuk ugyanannak egynehány 100-ad részét (10-ed részét itt már nem, mivel ez által 1-nél nagyobbá lenne); az így újra megnövelthez ismét néhány 1000-ed részét, és így tovább; de mindig úgy, hogy a' törtszám ez által még 1 egészsze ne legyen; hanem, ha még egy olyan rész járulna hozzá, már akkor az 1-et haladná: látnivaló, hogy az, ez által minden lépten annyira közelít az 1-hez, a' mennyire csak lehet oly móddal, hogy azon mindig alul maradjon, 's ahoz oly közel vitethetik, a' mily közel csak tetszik. Ugyde valamely igazi törtszámhoz, B, hozzáadni ugyanannak valahány 10-edrészét, annyi, mint azt venni 1-szer, és valahány 10edrészszel $= B \left[1 + \frac{a}{10} \right]$; 's ezt az így már megnövelt törtszámot ismét a' maga egynehány 100-adrészével szaporítani, annyi, mint ezt szorozni 1-gyel és egynehány századrészszel $= B \left(1 + \frac{a}{10} \right) \left(1 + \frac{a}{100} \right)$; 's ezt az újra megnöveltet ismét a' maga néhány ezeredrészével növelni, annyi, mint ezt venni 1-szer, és még azon felül néhány ezeredrészszel $= B \left(1 + \frac{a}{10} \right) \left(1 + \frac{a}{100} \right) \left(1 + \frac{a}{1000} \right)$, és így tovább. A' honnan látnivaló, hogy azok a' szorzók, melyek valamely igazi törtszámot az 1-hez közelebb-közelebb visznek, mind két tagúak, 's első tagjuk mindenkor az 1, második pedig mindegyikben egy olyan törtszám, melyeknek nevezőik sorban egymásután a' 10-nek czélirányos egész hatalmai: 10, 100, 1000, 10000 'stb. a' meddig folytatni tetszik, számlálója pedig mindegyiknek valamelyik a' kilencz egyes számok közül 1, 2, 3, 4 9; mert az a' itt is természetel csak ezek közül valamelyiket jelentheti.

Mindezekből már, melyeket eddig mondottunk, következik, hogy ha két olyan táblácskát készítünk egyszer mindenkorra magunknak, melyek közül egyikben természetes, másikban közösleges logaritmusai fel lesznek rakva: először a' 10 czélirányos egész hatalmainak az 1-sőtől kezdve egész azon hatalomig, a' hány betűjű számok' logaritmusait akarjuk legfeljebb táblácskáink' segédleme által kiszámítani; másodsor a' kilencz első természetes számoknak; harmadszor minden olyan számoknak, melyek állanak 1 egészből, és valahány 10-edrészből, 9 tizedrészről le az 1 tized-

részig e'képen: 1, 9; 1, 8; 1, 7; 1, 6; 1, 5; 1, 4; 1, 3; 1, 2; 1, 1; azután a' melyek állanak egy egészből és valahány századrészből a' 9 századrésztől le az 1 századrészig e'képen: 1,09; 1,08; 107.....1,01; azután ismét a' melyek állanak 1 egészből és valahány ezeredrészből 9 ezeredrésztől le az 1 ezeredrészekig e'képen: 1,009; 1,008; 1,007 1,001; és így tovább egész addig, sőt 2 vagy 3 tizedes helylyel még tovább, mint a' hanyad részig akarjuk, hogy logaritmusaink tökéletesek legyenek; ha, mondom, ilyen két táblácskát készítünk magunknak: ezeknek segítségével, ha őket úgy alkotjuk, akár billiószámoknak a' billiódrészekig tökéletes logaritmusait kiszámíthatjuk egynehány minutum alatt; mert mindazoknak alkotórészeit készen találjuk táblácskáinkban, csak ki kell azokat onnan irnunk, és részint összeadnunk egymással, részint kivonnunk egymásból.

88. §. A' mi már ezen segéd táblácskák' elkészítését illeti, kétség kívül, hogy a' kettő közül azt kell előbb elkészíteni, mely a' közelebb említett három rendbeli számoknak természetes logaritmusait foglalja magában; mivel ennek segítségével aztán könnyű lesz ugyanazon számoknak közönséges logaritmusait kiszámítani, 's ezekből a' másik táblácskát alkotni, mindegyiknek természetes logaritmusát elosztván a' 10 természetes logaritmusával, mint ezt már fentebb a' 86-dik §. elején láttuk.

Ha tehát valakinek kedve jő, hogy ezen segéd táblácskákat maga készítse el egyszer mindenkorra a' maga számára, hogy így azoknak tökéletessége felől annál inkább meg legyen győződve, és hogy megpróbálja, ha vajon a' táblácskáiba, melyeket mi itt adunk, nem csusztak-é be valami hibák, (mire valóban ohajtanám, hogy vállalkoznék valaki, ifju magyar Mathematicusaink közül): kezdje munkáját a' 9 első természetes számok' természetes logaritmusainak kiszámításán, úgy, mint ezt már fentebb láttuk, csakhogy a' tökéletességet vigye mindenütt még messzebb. Nevezetesen ha azt akarja, hogy logaritmusai, melyeket így alkotandó táblácskájá' segédelmével dolgozand ki, egész a' billiódrészekig, vagyis a' tizedes törtszám' 12-dik helyéig tökéletesek legyenek, dolgozza ki minden egyes szám' természetes logaritmusát egész a' 16-dik tizedes helyig, de a' 16-dik helyre esendő számot már ne írja be a' táblába, hanem ha az 5-nél kisebb, hagyja ki egyszerűen, ha pedig 5, vagy 5-nél nagyobb, úgy is hagyja ki azt, de akkor a' 15-dik helyen levő számot 1-gyel növelje meg. — Másodszor szá-

mitsa ki épen ilyen tökéletességgel a' 10' természetes logaritmusát is, mely aztán 2szer, 3szor, 4szer vétetvén, kijönek a' 10' egymásután következő czélirányos hatalmainak: 10^2 , 10^3 , 10^4 , 'stb. természetes logaritmusai, melyeknek kidolgozásában igaz elég lesz a' 10^{15} -ig menni; mert olyan szám' természetes logaritmusát, mely 15 betünél is többlet iratik, aligha lesz valaha életünkben szükség keresnünk. — A' mi pedig harmadszor azon kéttagu mennyiségek' természetes logaritmusait illeti, melyek 1-ből, és egy olyan igazi törtszámból állanak, melynek nevezője a' 10-nek valamely czélirányos egész hatalma, számlálója pedig a' 9 első természetes számok közül valamelyik: ezek közül elől a' nagyobbaknak logaritmusait könnyebb lesz ugy keresni, hogy az ember az egészet összeolvasztja a' törtszámmal, 's azután a' törtszám' számlálójának logaritmusát fentebb a' 194-ik lapon kifejtett egyenlet szerint ($\text{Log. } q = \text{'stb.}$) kiszámítván, abból a' nevezőnek már tudva levő logaritmusát levonja. Peldául $\text{Log.}(1, 9) = \text{Log.}\left(1 + \frac{9}{10}\right) = \text{Log.}\frac{19}{10}$; 's kiszámítván a' 19 természetes logaritmusát a' 20 és a' 18 logaritmusainak segítségével, melyek közül amaz kijö, ha a' 2 és a' 10, vagy a' 4 és az 5, ez pedig ha a' 2 és a' 9, vagy a' 3 és a' 6 logaritmusait, melyeket már azelőtt mind kiszámítottunk, összeadjuk, a' 10 logaritmusát levonjuk a' 19-éből, 's a' maradék lesz a' keresett logaritmus; azaz $\text{Log.}(1, 9) = \text{Log. } 19 - \text{Log. } 10$. 'stb. Ha pedig az ilyen számokban a' törtszám' nevezője számlálójához képest igen nagy, 's annál fogva a' törtszámnak nagyobb-nagyobb hatalmakra emelése által amaz hirtelen, ez pedig csak lassan növekedik: ilyen esetben sokszor még könnyebb lesz azoknak természetes logaritmusát az eredeti logaritmusi sorzat: $\text{Log.}(1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$ szerint keresni ki. Peldául $\text{Log.}(1, 00002) = \text{Log.}\left(1 + \frac{2}{100000}\right) = \frac{2}{100000} - \frac{4}{20000000000} + \frac{8}{300000000000000}$; mely sorzatot, a' fentebb kitűzött cél' elérésére tovább folytatni nem szükséges. Ezek szerint az első segéd táblácskát elkészítvén, ennek segítségével a' 2-dikat könnyű lesz elkészíteni ezen egyenlet szerint: $\text{log.} = \frac{\text{Log. } a}{\text{Log. } 10}$ Ezek szerint kidolgozva a' két segéd táblácska így lesz:

I. Segéd táblácska, a' természetes logaritmusok' kiszámítására

<i>Szám</i>	<i>Logaritmus</i>
1000 000 000 000 000	34, 538 776 394 910 685
100 000 000 000 000	32, 236 191 301 916 640
10 000 000 000 000	29, 933 606 208 922 594
1 000 000 000 000	27, 631 021 115 928 548
100 000 000 000	25, 328 436 022 934 503
10 000 000 000	23, 025 850 929 940 457
1 000 000 000	20, 823 265 836 946 411
100 000 000	18, 420 680 743 952 365
10 000 000	16, 118 095 650 958 320
1 000 000	13, 815 510 557 964 274
100 000	11, 512 925 464 970 228
10 000	9, 210 340 371 976 183
1 000	6, 907 755 278 982 137
100	4, 605 170 185 988 091
10	2, 302 585 092 994 046

Szám	logaritmus	Szám	logaritmus
9	2, 197 224 577 336 219	9	0, 086 177 696 241 052
8	2, 079 441 541 679 836	8	0, 076 961 041 139 128
7	1, 945 010 149 055 313	7	0, 067 658 648 473 815
6	1, 791 759 469 228 055	6	0, 058 268 908 123 976
5	1, 609 437 912 434 100	1,5	0, 048 790 164 160 432
4	1, 386 294 361 119 891	4	0, 039 220 713 153 281
3	1, 098 612 288 668 110	3	0, 029 558 802 241 544
2	0, 693 147 180 559 945	2	0, 019 802 627 296 180
1	1	0, 009 950 330 853 168
9	0, 641 853 886 172 395	9	0, 008 959 741 371 472
8	0, 587 785 664 902 119	8	0, 007 968 169 649 177
7	0, 530 628 251 062 170	7	0, 006 975 613 736 425
6	0, 470 003 629 245 736	6	0, 005 982 071 677 547
1,5	0, 405 465 108 108 164	1,5	0, 004 987 541 511 039
4	0, 336 472 236 621 213	4	0, 003 992 021 269 537
3	0, 262 364 264 467 491	3	0, 002 995 508 979 798
2	0, 182 321 556 793 955	2	0, 001 998 002 662 675
1	0, 095 310 179 804 325	1	0, 000 999 500 333 084

Szám	logarithmus	Szám	logarithmus
1,000	9 0,000 899 595 242 836	1,000 000 0	9 0,000 000 089 999 996
	8 0,000 799 680 170 564		8 079 999 997
	7 0,000 699 755 114 273		7 069 999 998
	6 0,000 599 820 071 968		6 059 999 998
	5 0,000 499 875 041 651		5 049 999 999
	4 0,000 399 920 021 327		4 039 999 999
	3 0,000 299 955 008 998		3 030 000 000
	2 0,000 199 980 002 666		2 020 000 000
	1 0,000 099 995 000 333		1 010 000 000
1,000 0	9 0,000 089 995 950 243	1,000 000 00	9 0,000 000 009 000 000
	8 0,000 079 996 800 171		8 8 000 000
	7 0,000 069 997 550 114		7 7 000 000
	6 0,000 059 998 200 072		6 6 000 000
	5 0,000 049 998 750 042		5 5 000 000
	4 0,000 039 999 200 021		4 4 000 000
	3 0,000 029 999 550 009		3 3 000 000
	2 0,000 019 999 800 003		2 2 000 000
	1 0,000 009 999 950 000		1 1 000 000
1,000 00	9 0,000 008 999 959 500	1,000 000 000	9 0,000 000 000 900 000
	8 7 999 968 000		8 800 000
	7 6 999 975 500		7 700 000
	6 5 999 982 000		6 600 000
	5 4 999 987 500		5 500 000
	4 3 999 992 000		4 400 000
	3 2 999 995 500		3 300 000
	2 1 999 998 000		2 200 000
	1 0 999 999 500		1 100 000
1,000 000	9 0,000 000 899 999 595	1,000 000 000 0	9 0,000 000 000 090 000
	8 799 999 680		8 80 000
	7 699 999 755		7 70 000
	6 599 999 820		6 60 000
	5 499 999 875		5 50 000
	4 399 999 920		4 40 000
	3 299 999 955		3 30 000
	2 199 999 980		2 20 000
	1 099 999 995		1 10 000

III. Segéd táblácska a' közönséges logaritmuskok' kiszámítására.

Szám	logarithmus	Szám	logarithmus
9	0,954 242 509 439 325	9	0,000 390 689 249 910
8	0,903 089 986 991 944	8	0,000 347 296 685 364
7	0,845 098 040 014 257	7	0,000 303 899 784 812
6	0,778 151 250 383 644	6	0,000 260 498 547 390
5	0,698 970 004 336 019	5	0,000 217 092 972 230
4	0,602 059 991 327 962	4	0,000 173 683 058 465
3	0,477 121 254 719 662	3	0,000 130 268 805 227
2	0,301 029 995 663 981	2	0,000 086 850 211 649
1	1	0,000 043 427 276 863
1,000			
9	0,278 753 600 952 829	9	0,000 039 084 744 584
8	0,255 272 505 103 306	8	0,000 034 742 168 884
7	0,230 448 921 378 274	7	0,000 030 399 549 761
6	0,204 119 982 655 925	6	0,000 026 056 887 215
5	0,176 091 259 055 681	5	0,000 021 714 181 245
4	0,146 129 035 678 238	4	0,000 017 371 431 849
3	0,113 943 352 306 837	3	0,000 013 028 639 028
2	0,079 181 246 047 625	2	0,000 008 685 802 780
1	0,041 392 685 158 225	1	0,000 004 342 923 104
1,0000			
9	0,037 426 497 940 624	9	0,000 003 908 632 748
8	0,033 423 755 486 950	83 474 341 958
7	0,029 383 777 685 210	73 040 050 733
6	0,025 305 865 264 770	62 605 759 074
5	0,021 189 299 069 938	52 171 466 981
4	0,017 033 339 298 780	41 737 174 433
3	0,012 837 224 705 172	31 302 881 491
2	0,008 600 171 761 918	20 868 588 095
1	0,004 321 373 782 643	10 434 294 265
1,00000			
9	0,003 891 166 236 911	9	0,000 000 390 864 858
8	0,003 460 532 109 506	8347 435 447
7	0,003 029 470 553 618	7304 006 031
6	0,002 597 980 719 909	6260 576 611
5	0,002 166 061 756 508	5217 147 187
4	0,001 733 712 809 001	4173 717 758
3	0,001 300 933 020 418	3130 288 325
2	0,000 867 721 531 227	2086 858 888
1	0,000 434 077 479 319	1043 429 446
1,000000			
9	0,000 390 689 249 910	9	0,000 000 390 864 858
8	0,000 347 296 685 364	8347 435 447
7	0,000 303 899 784 812	7304 006 031
6	0,000 260 498 547 390	6260 576 611
5	0,000 217 092 972 230	5217 147 187
4	0,000 173 683 058 465	4173 717 758
3	0,000 130 268 805 227	3130 288 325
2	0,000 086 850 211 649	2086 858 888
1	0,000 043 427 276 863	1043 429 446

Szám	logarithmus	Szám	logarithmus
9	0,000 000 039 086 502	9	0,000 000 000 003 909
834 743 557	83 474
730 400 613	73 040
626 057 668	62 606
521 714 724	52 171
417 371 779	41 737
313 028 834	31 303
208 685 890	20 869
104 342 045	10 434
9	0,000 000 003 908 650	9	0,000 000 000 000 391
83 474 356	8347
73 040 061	7304
62 605 767	6261
52 171 472	5217
41 737 178	4174
31 302 883	3130
20 868 589	2087
10 434 294	1043
9	0,000 000 000 390 865	9	0,000 000 000 000 039
8347 435	8035
7304 006	7030
6260 577	6026
5217 147	5022
4173 718	4017
3130 288	3013
2086 859	2009
1043 429	1004
9	0,000 000 000 039 087	9	0,000 000 000 000 004
834 744	84
730 401	73
626 058	63
521 715	52
417 372	42
313 029	31
208 686	21
104 343	10

Az elsőt ezen táblácskák közül nem láttuk szükségesnek tovább folytatni, mint a' meddig folytattuk; mivel a' szabályt, mely szerint azt folytatni lehet, a' táblácska' három utolsó szakaszaiból akárki is egy tekintettel kivetheti, 's annak okát is ezen logaritmusi sorzathól: $\text{Log.}(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \dots$ könnyen állathatja. A' második táblácskának pedig nem volt szükség a' 10' különböző hatalmainak logaritmusaikat is elébe bocsátani, mint az elsőnek; mivel tudva van, hogy azok nem egyebek, mint a' természetes számok: 1, 2, 3, 4, 'stb. renddel egymásután.

89. §. Hogy ezen táblácskáknak hasznát vehessük, szükség, hogy a' számot, melynek természetes vagy közönséges logaritmusaikat ezeknek segítségével által akarjuk kiszámítani, szétbontsuk csupa olyan tényezőkre, a' milyeneknek logaritmusaikat táblácskáinkban fel vannak rakva. Mikép' eshetik ez meg, már fentebb a' 87-ik §-ban előadtuk. Mindazáltal, hogy ezen munkának gyakorlati végbevitelére a' lehető legkevesebb bajjal történjék, jegyezzük meg még itt e' következőket:

a) Hogy azon igazi törtszámot, melyet a' 87-dik § szerint ezen egyenletben: $\frac{A}{a \cdot 10^n} = B$, a' B jelent, minél kevesebb munkával lehessen az 1-hez oly közel vinni, hogy azt észrevehető hiba nélkül vehessük 1-nek, szükség azt már kezdetben is úgy formálnunk, hogy az 1-hez minél közelebb járjon. Minthogy pedig a' törtszám' értéke annál közelebb jár az 1-hez, minél közelebb jár annak számlálója nevezőjéhez: tehát nyilván van, hogy azon számot, A, melynek logaritmusaikat ki akarjuk számítani, úgy vévén mint egy törtszámnak számlálóját, ahoz a' nevezőt a. 10ⁿ úgy kell választanunk, hogy az minden olyan számok között, melyek az A-nál nagyobbak, 's egyszersmind a' kilencz első természetes számok közül valamelyiknek a' 10 valamelyik célirányos egész hatalmávali szorzatai, az A-hoz legközelebb járó legyen. Peldául, ha ezen számok' logaritmusaikat akarnók kikeresni: 9; 76; 483; 6891; nevezőkül im ezeket kellene alájok írunk: 10, 80, 500, 7000, e'képen:

$$\frac{9}{10} = 0,9; \text{ innen } 9 = 10 \cdot 0,9$$

$$\frac{76}{80} = 0,95; \text{ innen } 76 = 8 \cdot 10^1 \cdot 0,95$$

$$\frac{483}{500} = 0,966; \text{ innen } 483 = 5 \cdot 10^2 \cdot 0,966$$

$$\frac{6891}{7000} = 0,984428571429; \text{ innen } 6891 = 7 \cdot 10^3 \cdot 0,984428571429.$$

Igy már az e'kép' formált törtszámok eredetileg is közel járván az 1-hez, annál könnyebb lesz azokat ehez oly közel vinni, hogy értékek 1-nek vétethessék.

b) Ezen közel vitel, a' mint már láttuk, az által esvén meg, hogy a' tizedes törtszámot szorozzuk elébb 1-gyel és valahány tizedrészszel, azután a' szorzatot ismét 1-gyel és valahány századrészszel, ezen szorzatot újra 1-gyel és valahány ezeredrészszel, és így tovább, vagyis más szókkal az által, hogy a' tizedes törtszámhoz hozzáadjuk először magának valahány tizedrészét, az így megnövelthez ismét magának valahány századrészét; az e'kép' megszorítottához újra magának valahány ezeredrészét 'stb.: erre nézve ezeket jegyezzük meg:

a) Itt először is azt kell meg tudnunk itélni, hozzá lehet-e valamely tizedes törtszámhoz adni tulajdon magának $\frac{1}{10}$, vagy

$\frac{1}{100}$, vagy $\frac{1}{1000}$ részét 'stb., úgy hogy az ez által még 1-nél nagyobbá ne legyen. Ezt megítélni igen könnyű; mert ha a' tizedes törtszámot leírjuk, vagy csak leírva képzeljük maga alá, de úgy hogy annak mindegyik betűje egy, vagy két, vagy három helylyel elébb essék jobbkézfelé, úgy előttünk áll a' tizedes törtszámnak

$\frac{1}{10}$, vagy $\frac{1}{100}$, vagy $\frac{1}{1000}$ része 'stb., és ha ennek csak legelső

betűjét összeadjuk is gondolattal a' tizedes törtszámnak felette álló betűjével, mindjárt megtetszik, nagyobbá lesz-e a' törtszám 1-nél

azon $\frac{1}{10}$, vagy $\frac{1}{100}$, vagy $\frac{1}{1000}$ résznek hozzáadása által, vagy

nem. Például, ha ezen törtszámnak: 0,95, aláírva képzeljük magának $\frac{1}{10}$ részét: 0,095, 's ennek első betűjét, 9, a' törtszámnak felibe eső betűjével, 5, elménkben összeadjuk = 14 századrész vagy = 1 tizedrész és 4 századrész: mindjárt látjuk, hogy ezek már az első helyen álló 9 tizedrészszel együtt többet tennének 1-nél, ha mindjárt több nem jöne is hozzájuk; és így hogy ezen törtszámhoz: 0,95 tulajdon magának csak 1 tizedrészét sem lehet hozzáadni, ha célunk az, hogy ezen törtszám csak közelítsen az 1-hez, de azt meg ne haladja. Szinte olly könnyű átállátni azt is, hogy ugyan-

ezen tizedes törtszámhoz: 0, 9500

a' maga tulajdon 1 századrészt . . . 0, 0095 már hozzá lehet adni
 ugy, hogy az által csak közelit az 1-hez, de azt meg nem haladja.

β) Miután azt megítéltük, hanyadrészt lehet valamely tize-
 des törtszámnak magához adni ugy, hogy az által 1-nél nagyobbá
 ne legyen, tizedrészt-é, vagy századrészt, vagy ezeredrészt 'stb:
 következik másodsor, hogy megvizsgáljuk, legfeljebb hányszor
 véve lehet azon részt a' tizedes törtnek ugy adni ahoz, hogy az ez
 által az 1-et ugyan meg ne haladja, de ahoz a' lehetőségig közeli-
 tsen. Ezt is könnyű megítélni. Mert ha például ezen tizedes tört-
 számnak: 0, 9500

már aláírtuk a' maga $\frac{1}{100}$ -adrészt 0, 0095, ugymint a'
 melynek hozzájárulása által még nem lesz nagyobbá 1-nél, mint
 lenne $\frac{1}{10}$ -edrésznéek hozzájárulása által: ha ezen $\frac{1}{100}$ -adrészt csak
 ugy, a' mint van, egyszer véve adnók az eredeti törtszámhoz, nem
 vitelnék az oly közel az 1-hez, a' milyen közel csak vitethetik
 századrészeinek hozzáadása által. Ezt az $\frac{1}{100}$ -adrészt tehát annyis-
 szor véve kell hozzáadni a' törtszámhoz, a' hányszor csak lehet
 ugy, hogy az az 1-et meg ne haladja. Azt pedig hányszor lehet, ugy
 tudjuk meg, hogy az $\frac{1}{100}$ -adrész' első számbetűjét, a' 9-et, sorba
 próbálgatjuk szorozni ezen számokkal: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, és a'
 szorzatot mindenkor az $\frac{1}{100}$ alá a' 3-dik sorba leírva képzeljük ugy,
 hogy annak egyes betűje az ezred, tizes pedig a' századeszek alá
 essék, és azokat elménkben az eredeti törtszám' felettök eső betűi-
 vel összeadjuk; 's így könnyen által fogjuk látni, hogy itt az ere-
 deti törtszámhoz 0, 9500

annak $\frac{1}{100}$ -ad részét 0, 0095
 legfeljebb is 5-ször véve 0, 0475 lehet hozzáadni
 ugy, hogy az 1-et meg ne haladja $\equiv 0, 9975$. Ez a' törtszám
 már \equiv az eredeti törtszám, és annak $\frac{5}{100}$ -adrésze, vagyis az ere-
 deti törtszám 1-szer és $\frac{5}{100}$ részszer véve, azaz $\equiv (0, 95) (1, 05)$.
 Ha tovább is akarjuk folytatni ezen törtszámnak az 1-hezi közelebb
 vitélet: már ez után semmi új nem fordul elő, hanem mindig csak
 ez a' két munka ismételtetik, t. i. először aláírjuk a' törtszámnak a'
 maga $\frac{1}{10^n}$ részét, még pedig a' lehető legnagyobb ilyen részét,
 melynek hozzáadása által a' törtszám 1-nél nagyobbá nem lesz; az-
 után ezen részt annyiszor véve adjuk a' törtszámhoz, a' hányszor
 véve csak lehet ugy, hogy az az 1-et meg ne haladja. Ezek sze-

riut ezen tizedes törtszámnak: . . . 0, 9975000, sem $\frac{1}{10}$
sem $\frac{1}{100}$ részét nem lehetvén aláírni a'

mondott feltétellel, aláírjuk $\frac{1}{1000}$ részét = 0, 0009975

melyet csak kétszer véve = 0, 0019950 adhatunk
hozzá a' sokszor mondott feltétellel . = 0, 9994950; — mely

szám már a' közelebbinek $(1 + \frac{2}{1000})$ részszeli szorzata lévén,

fog lenni: = (0, 95) (1, 05) (1, 002) = 0, 999495000

Továbbá ez alá már csak $\frac{1}{10000}$ részét = 0, 0000999495

irhatjuk, és ezt legfeljebb 5-ször véve = 0, 0004997475

adhatjuk magához a' törthez, mellyel az lesz = 0, 9999947475

's így eddigi munkálkodásunk' eredménye lesz:

(0, 95) (1, 05) (1, 002) (1, 0005) = 0, 9999947475, — Ezt így
folytathatjuk a' meddig tetszik, a' meddig elégségesnek tartjuk, akár
addig, hogy a' tizedes törtszámnak 10, vagy 12, vagy 15 első he-
lyén is mindenütt 9-es szám legyen, 's a' törtszám az 1-től oly pa-
rányiban különbözzék, mint nekünk tetszik.

2.) De ezen munkában előbb utóbb egy kellemetlenség adja elő
magát. Mert tegyük fel például, hogy mi itt elégnek tartanók annyira
menni, hogy a' tizedes törtszám' 7 első helyén mindenütt 9 le-
gyen, hogy így az, a' mit 1-nek veszünk, az 1-től 1 tizmilliódrész-
ben se különbözzék: c' végre a' munkát rendes uton következőkép'
kellene folytatnunk:

0, 999994747500000

Ennek 0, 000001 része . = 0, 0000009999947475 's ez 5-ör

véve = 0, 000005 része , = 0, 0000049999737375

Öszvege = 0, 999999747473737500000

Ennek ismét 0, 0000001 része = 0, 00000009999997474737375

× 2 = 0, 0000002 része . = 0, 00000019999994949474750

Öszvege = 0, 99999994747368699474750

Így már a' tizedes törtszám' 7 első helyén mindenütt 9-esek állanak.
Célunkat elértük; de mily nagy alkalmatlansággal, mily hosszú,
16, sőt 23 betűvel is írott tizedes törtszámokat kellett kiszámítanunk,
's mind ennek mi haszna? Nagyobb részint semmi. A' dologra csak
annyi tartozik belőle, hogy a' 7 első helyen mind 9-esek vannak,
többi részére a' törtszámnak semmi szükségünk. Ez az alkalmatlan-

ság pedig hova tovább jobban-jobban növekedik, és ha az elkezdett mód szerint mennék tovább is, azt akarván, hogy tizedes törtszámunknak 8-dik, 9-dik, 10-dik 'stb. helyére is mind 9-esek jöjenek: majd 30, 40, 50 's több betűkkel irandó rőfnyi hosszúságu tizedes törtszámokkal is lenne bajunk. De ezen kellemetlen 's egyszersmind hasztalan munkát elkerülhetjük, ha gyakorlatot szerzünk magunknak a' felülről lefelé menő szorozásban, mely rövideden megmondva abból áll, hogy a' szorzandónak először is a' legfelső, legnagyobb rangu számját szorozzuk a' szorzóval, 's ugy szállunk a' szorzásban egygyel-egygyel alább balról jobbfelé menve, és a' szorzatnak mindenkor csak tizesét írjuk le a' szorzandó alá a' maga illő helyére, egyesét pedig oldalt jegyezzük, vagy csak elménkben tartjuk, és adjuk a' következő szorzat' tizeséhez, 's csak akkor írjuk le a' szorzat' egyesét is azon módon a' maga helyére, mikor látjuk,

hogy a' következő szorzatnak tizeze nem lesz. Például:
$$\begin{array}{r} 7 \times 2814 \\ \hline 19698 \end{array}$$

Ezen szorzást felülről lefelé menve így visszük véghez: 7×2 ezer = 14 ezer; ennek tizesét leírjuk a' tizezes helyre, egyesét pedig a' 4 ezret, feljegyezzük, 's a' következő szorzatnak: 7×8 száz = 56 száz, a' tizesével, mely = 50 száz = 5 ezer, összeadjuk, 's lesz 9 ezer; azután leírjuk a' százakból lett szorzat' egyesét, 6 száz, azon módon, mivel látjuk, hogy itt a' következő szorzatnak $7 \times 1 = 7$, tizeze nem lesz, mely a' százásokhoz adandó lenne. De a' $7 \times 1 = 7$ tizedet nem írjuk le ezen módon, hanem ehez elébb hozzáadjuk az egyesekből keletkező szorzatnak 7×4 egység = 28 egység, a' tizesét, 2, 's lesz = 9 tizes, egyese pedig az egységeknek 8, jő a' maga helyére legutól. Hogy az ember az ilyen szorozásban, kivált eleinte mig bele nem szokik, annál inkább ne téveszszen, jó lesz a' szorzandó' minden betűjének szorzása' alkalmával a' szorzat' egyesét a' szorzandó' azon betűje felibe írni, a' mely alá fog az majd esni, miután a' következő szorzat' tizeze, ha lesz, hozzáadatik; misze-

rint a' fentebbi szorzás e'képen fogna lenni:
$$\left\{ \begin{array}{r} 7 \times \overset{4}{2}\overset{6}{8}\overset{7}{1}4 \\ \hline 19698 \end{array} \right.$$

Ha az ilyen szorozásban az történik meg, hogy miután már valamely szorzatnak tizesét leirtuk a' maga helyére, annak felül jegyzett egyese a' következő szorzat' tizesével együtt többre megyen 9-nél: ilyen esetben annak tizesét, mely — mint általlátni könnyű — 1-nél nagyobb soha sem lehet, jegyezzük egy kis ponttal a' közelebbi

szorzatnak már leirt tizedese alá, 's az összeszámításkor adjuk ahhoz

$$\left. \begin{array}{l} \text{következésképen: } \dots\dots\dots \\ \text{miszerint az egész szorzat} = 4,371\,179\,34. \end{array} \right\} \begin{array}{r} \overline{6 \times 0,72852989} \\ 4,36117834 \end{array}$$

Már most, ha valamely hosszú tizedes törtszámnak $\frac{1}{10}$, vagy $\frac{1}{100}$, vagy $\frac{1}{1000}$ részét 'stb. szoroznunk kell ezen egyes számok közül: 2, 3, 4 9, valamelyikkel, de azután a' szorzatból legfeljebb is csak a' 10 első betűre lesz szükségünk: a' munkát nagyon könnyíthetjük az által, hogy a' szorzást felül kezdvén, csak addig megyünk lefelé, míg a' 10-dik helyet betöltöttük, egygyel többet írván ezen helyre, ha a' 11-dikre 4-nél nagyobb szám fogna esni, a' többit elhagyjuk mind. Az által pedig még egyszerűbbé lesz ez a' munka, ha a' tizedes törtszámnak $\frac{1}{10}$, vagy $\frac{1}{100}$, vagy $\frac{1}{1000}$ részét 'stb. melyet szoroznunk kell, nem írjuk le a' törtszám alá, mint fentebb, hanem a' helyett szorozzuk magát a' törtszámot, mely ugyanazon számbetűkből áll felülről kezdve lefelé, csak hogy egy tekintettel kinézvén, hanyadrészét kell annak, 's hányszor magához adni, ha azt akarjuk, hogy az ez által az 1-hez minél inkább közelebb kerüljön, de azt meg ne haladja, az első szorzat' tizedesét a' maga illő helyére (az első szám alá, mely még nem 9-es), egyesét pedig a' következő hely fölibe írjuk; a' többi aztán önkint foly a' közelebbi szabályok szerint.

Ezek szerint már a' fentebb elkezdett példa' kidolgozása, t. i. a' 76 logaritmusának a' tíz-milliód részekig hibátlan kiszámítása—mi végre, igaz elég a' tizedes törtszámokat legfeljebb a' 10-dik helyig számítani ki — így lesz:

$$\begin{aligned} \frac{76}{80} &= 0,95\overline{000000} \times 1,05 \\ &\quad \underline{475} \\ &= 0,997\overline{500000} \times 1,002 \\ &\quad \underline{19950000} \\ &= 0,999\overline{495000} \times 1,0005 \\ &\quad \underline{4997475} \\ &= 0,99999\overline{47475} \times 1,000005 \\ &\quad \underline{49999} \\ &= 0,999999\overline{47475} \end{aligned}$$

$$\text{Áthozat:} = 0, \overline{999\,999\,747\,5}^{\frac{888}{1999}} \times 1,000\,000\,2$$

$$= 0, \overline{999\,999\,947\,5}^{\frac{55}{499}} \times 1,000\,000\,05$$

$$= 0, \overline{999\,999\,997\,5}^{\frac{6}{19}} \times 1,000\,000\,002$$

$$\underline{0,999\,999\,999\,5.}$$

Ha csak annyit akarunk, hogy logaritmusunk a' tíz-milliód részekig legyen tökéletes, elég ezen munkában ennyire mennünk, hogy a' tizedes törtszám' 9 első helyén mind 9-esek legyenek; 's ezen törtszámot aztán, mely 1 ezer-milliód résznek felével sem kisebb 1 egősznél, 1 egésznek vévén, e' következő egyenletet nyerjük — hol rövidség' okáért a' sokszor egymásután irandó 0 helyett csak egyszer iratik az, 's fölibe jegyeztelik, hányszor kell azt egymás-

után írva gondolni; például: $\overset{5}{0} = 00000 -$

$$\frac{76}{80} \times (1,05) (1,002) (1,0005) (1,05) (1,02) (1,05) (1,02) = 1.$$

Innen, az egyenletet mind a' két oldalon szorozván 80-nal, 's osztván a' rekeszben álló 7 szorzók' szorzatával, fog lenni:

$$76 = \frac{10 \cdot 8}{(1,05) (1,002) (1,05) (1,05) (1,02) (1,05) (1,02)}$$

Igy már ha természetes logaritmusát akarjuk kiszámítani a' 76-nak, az 1-ső táblácskából, ha közönségest, a' 2-ikből irjuk ki, a' 76-ot szorzás és osztás által alkotó számok' logaritmusait, 's bánunk azokkal a' szabályok szerint következőképen,

I. A' 76' természetes log.musának kiszámítása.

	Log.	1, 05	-	-	-	=	0, 048 790 164 2
+	"	1, 002	-	-	-	=	0, 001 998 002 7
+	"	1, 000 5	-	-	-	=	0, 000 499 875 0
+	"	1, 000 005	-	-	-	=	0, 000 005 000 0
+	"	1, 000 000 2	-	-	-	=	0, 0 200 0
+	"	1, 000 000 05	-	-	-	=	0, 0 050 0
+	"	1, 000 000 002	-	-	-	=	0, 0 002 0
							<hr/>
							0, 051 293 293 9

Ezt ki

$$\left. \begin{array}{l} \text{Log. } 10 = 2,302\,585\,093\,0 \\ + \text{ ,, } 8 = 2,079\,441\,541\,7 \end{array} \right\} = 4,382\,026\,634\,7\text{-ből}$$

lesz Log. **76.** = 4,330 733 340 8

III. A' 76' közönséges log.sának kiszámítása.

log.	1, 05	- - -	=	0, 021 189 299 1	
+	1, 002	- - -	=	0, 000 867 721 5	
+	1, 000 5	- - -	=	0, 000 217 093 0	
+	1, 000 005	- - -	=	0, 000 002 171 5	
+	1, 000 000 2	- - -	=	0, 000 000 086 9	
+	1, 000 000 05	- - -	=	0, 0 021 7	
+	1, 000 000 002	- - -	=	0, 0 000 9	
				0, 022 276 394 6	Ezt ki
log. 80				=	1, 903 089 987 0-ből,
fog lenni log. 76				=	1, 880 813 592 4

Ha azt akarjuk, hogy valamely szám' logaritmusát nemcsak a' 10, vagy száz-milliód részekig, hanem tovább is, például egész a' billiód részekig tökéletesen kiszámíthassuk táblácskáink' segítségével: úgy mind a' törtszámöt, melyet a' fentebbi szabály szerint alkotunk, legalább a' 15-ik tizedes helyig ki kell dolgoznunk, mind annak az 1-hezi közelebb vitelésben annyira kell mennünk, hogy a' 15 első helyen mind 9-esek legyenek; mind végezetre a' tényezők' logaritmusait a' táblákból mind ki kell irnunk egész a' 15-ik tizedes helyig. Lássunk erre is egy könnyű példát, és egy nehezet; keressük ki például előbb a' 9, azután a' π közönséges logaritmusát, legalább a' billiód részekig tökéletesen.

$$\begin{array}{l} \frac{9}{10} = 0,9 \quad - - - - - \times 1,1 \\ \quad 0,09 \\ \hline = 0,99 \quad - - - - - \times 1,01 \\ \quad 0,009\,9 \\ \hline = 0,999\,9 \quad - - - - - \times 1,000\,1 \\ \quad 0,000\,099\,99 \\ \hline = 0,999\,999\,99 \quad - - - \times 1,000\,000\,01 \\ \quad 0,000\,000\,009\,999\,999 \\ \hline = 0,999\,999\,999\,999\,999\,9 = 1. \text{ Ez szerint tehát} \\ \frac{9}{10} \times (1,1) (1,01) (1,000\,1) (1,000\,000\,01) = 1; \\ \text{ezt pedig mind a' két oldalon szorozván } 10\text{-el, és elosztván a' re-} \\ \text{keszekben levő tényezők' szorzatával, lesz:} \end{array}$$

$$9 = \frac{10}{(1, 1) (1, 01) (1, 000 1) (1, 000 000 01)}, \text{ mely a '9-et szorzás}$$

és osztás által formálódó számok' logaritmusaait a' második táblából kiírván, 's azokkal a' szabályok szerint bányán, kijő a' 9-nek kö-zönséges logaritmusa e'képen:

$$\begin{array}{r} \text{log. } 1, 1 - - - = 0, 041 392 685 158 225 \\ + \text{ ,, } 1, 01 - - - = 0, 004 321 373 782 643 \\ + \text{ ,, } 1, 000 1 - - = 0, 000 043 427 276 863 \\ + \text{ ,, } 1, 000 000 01 = 0, 000 000 004 342 945 \\ \hline \text{Öszveg} = 0, 045 757 490 560 675 \end{array}$$

$$\text{Ezt levonván log. } 10\text{-ből azaz} = 1, 000 000 000 000 000\text{-}$$

$$\text{ből, a' maradék lesz log. } 9 = 0, 954 242 509 439 325$$

Ez a' logaritmus tökéletes, egész a' 15-ik tizedes helyig, azaz, az ezer-billiód részig, a' minék okát könnyű általlátni. Ugyanis ha a' $\frac{9}{10}$ részt az 1-hez közelebb-közelebb vivő tényezők' keresésében még egy lépéssel tovább mentünk volna, a' következő tényező lett

volna: $= 1, 01$, azaz 1 egész és 1 tízezer-billiód rész; és így ennek logaritmusát kellett volna még a' fentebbi négy tényezők' logaritmusaihoz adni. Ugyde, a' mint a' második táblácska' végén láthatni,

már az $1, 01$ logaritmusának is 15 első tizedes helyein mindenütt nullák vannak, annyival inkább azok fognának hát lenni az $1, 01$ logaritmusának 15 első helyein, melyek a' 9-nek fentebb kijött logaritmusát semmivel sem fognák növelni.

Az a' szám, mellyel a' kör' átmérőjét szorozni kell, hogy annak kerülete kijöjön, vagy, a' mint ezt egy betűvel írni szokás, a' π egész az ezer-billiód részekig tökéletesen kiszámítva így van: $\pi = 3, 141 592 653 589 793$. Melynek logaritmusát egész a' billiód-részekig tökéletesen e'kép' keressük ki: Először is a' π -ből az 1-hez minél közelebb járó törtszámot csinálunk, elosztván azt 4-gyel 'stb.

$$\frac{3, 141 592 653 589 793}{4, 000 000 000 000 000} = 0, 785 398 163 397 448$$

$$\begin{array}{r} \frac{\pi}{4} = 0, \overline{785 398 163 397 448} \times 1, 2 \\ \quad \quad \quad \overline{157 069 622 669 488} \\ \hline = 0, \overline{942 477 796 076 938} \end{array}$$

4 4 2 4 2 2 2 4 6 0 2 6 4	
0, 942 477 796 076 938	× 1, 06
56 548 667 764 515	
1 1 1 0 8 4 6 4 7 2 6	
0, 999 026 463 841 554	× 1, 000 9
899 113 716 456	
3 3 3 3 4 5 5 6 9 2	
0, 999 925 587 659 011	× 1, 000 07
69 994 780 035	
6 6 6 6 6 0 0 2 8	
0, 999 995 582 450 147	× 1, 000 004
3 999 982 329	
6 6 6 6 6 6 0 2	
0, 999 999 582 432 477	× 1, 000 000 4
399 999 832	
9 999 999	
0, 999 999 982 432 310	× 1, 000 000 01
6 999 999	
3 3 3 3 3 3 3	
0, 999 999 992 432 310	× 1, 000 000 007
6 999 999	
5 5 5 5 5	
0, 999 999 999 432 310	× 1, 000 000 000 5
499 999	
4 4 4 4	
0, 999 999 999 932 310	× 1, 000 000 000 06
59 999	
3 3 3	
0, 999 999 999 992 310	× 1, 000 000 000 007
6 999	
4 4	
0, 999 999 999 999 310	× 1, 000 000 000 000 6
599	
1 1	
0, 999 999 999 999 910	× 1, 000 000 000 000 09
89	
1, 000 000 000 000 000	És így

$\pi = \frac{1}{(1,2)(1,06)(1,09)(1,07)(1,04)(1,04)(1,01)(1,07)(1,08)(1,05)(1,06)(1,07)(1,06)(1,09)}$
 's következésképen a' π értékét szorzás és osztás által formáló ezen számok logaritmusait a' 2-dik táblácskából kiirván, 's azokkal a' szabályok szerint bányán, kijö a' π közönséges logaritmusa következőképen:

log. 1, 2	-	-	-	-	-	-	=	0, 079 181 246 047 625
+	„	1, 06	-	-	-	-	=	0, 025 305 865 264 770
+	„	1, 000 9	-	-	-	-	=	0, 000 390 689 249 910
+	„	1, 000 07	-	-	-	-	=	0, 000 030 399 549 761
+	„	1, 000 004	-	-	-	-	=	0, 000 001 737 174 433
+	„	1, 000 000 4	-	-	-	-	=	0, 0 173 717 758
+	„	1, 000 000 01	-	-	-	-	=	0, 0 004 342 945
+	„	1, 000 000 007	-	-	-	-	=	0, 3 040 061
+	„	1, 000 000 000 5	-	-	-	-	=	0, 0 217 147
+	„	1, 000 000 000 06	-	-	-	-	=	0, 026 058
+	„	1, 000 000 000 007	-	-	-	-	=	0, 03 040
+	„	1, 000 000 000 000 6	=	-	-	-	=	0, 0 261
+	„	1, 000 000 000 000 09	=	-	-	-	=	0, 039

öszveg = 0, 104 910 118 633 808

Ezt levonván log. 4-ből, mely = 0, 602 059 991 327 962

a' maradék lesz log π = 0, 497 149 872 694 154

mely egész az ezer billiód részéig tökéletes. De tagadhatatlan, hogy a' logaritmusok ily módoni könnyü kiszámítására egy kis gyakorlottság kívántatik a' felülről lefelé menő sokszorozásban.

90. §. Vannak a' logaritmusok kiszámításának többféle módjai is, melyenek a' láncztörtek'- és a' középszerűsek' segítségével általi kiszámítások. De ezeket itt mellőzzük; mivel célunk nem az volt, hogy itt a' logaritmusok kiszámításának minden módjait előadjuk, hanem csak az, hogy a' legjobb elméleti és gyakorlati módokat ismertessük meg, kivált pedig, hogy a' logaritmusok' kiszámítására vezető útmutatásunk egyszersmind előkészületül szolgáljon a' fellengős mértanra (mathesis sublimior). A' honnan ajánljuk, hogy a' kik a' mi később adandó útmutatásunk szerint a' fellengős mértanban, melyet egészen elemileg kívánunk kifejteni, boldogulni akarnak, azokat, a' melyeket itt a' IV-dik és V-dik szakaszokban előadtunk, egészen magokévá tegyék, nevezetesen az általános számvetésnek ezen négy vagy öt törvényét alaposan megértsek:

1) Kéttagi törvény.

$$(1 + a)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

2) Hatványjeli törvény általánosan.

$$(1 + a)^x = 1 + \frac{A}{1}x + \frac{A^2}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{A^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{A^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots \text{ mely-}$$

$$\text{ben } A = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} + \dots = \text{Log. } (1 + a)$$

3) Hatványjeli törvény,

mikor $A = 1$, és így $(1 + a) = e = 2,718\ 281\ 828\ 459$.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \dots$$

4) Logarithmisi törvény.

$$\text{Log. } (1 + y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6} + \dots$$

A' kik ezeket alaposan megértendik, azok alaposan meg fogják érteni a' fellengős mértant is az én utmutatásom szerint.

Pótlék.

A' 31-dik § végéről kimaradt, és oda iktatandó lesz e' két pont:

a) Ha igazi, vagyis 1-nél kisebb törtszám' valamelyik gyökereinek logaritmusát kell keresnünk, gyakran megtörténik, hogy ha e' végett az ilyen törtszám logaritmusát azonmódon, a' mint az leg-egyszerűbb formájában kijött, osztanók a' gyökér jellel, a' kívánt logaritmus mantissája, 's így az egész logaritmus is, úgy jőne ki, mint czélelles szám, a' milyen pedig tábláinkban nem találhatik.

Peldául: $\text{log. } \sqrt[5]{\frac{3}{4}}$ annyi lévén mint $\text{log. } \frac{3}{4}$ elosztva 5-tel a' közelebb (t. i. a' 31-ik §-ban fentebb) mondottak szerint fogna lenni:

$$\text{log. } \sqrt[5]{\frac{3}{4}} = \frac{0,8750613 - 1}{5} = 0,1750123 - \frac{1}{5} = 0,1750123 - 0,2 = \left\{ \begin{array}{l} -0,2000000 \\ +0,1750123 \end{array} \right\} = -0,0249877. \text{ Hogy ez ne történjék, ha-}$$

nem inkább a' keresett logaritmus ilyenkor is úgy jöjön ki, miszerint

annak mantissája czélirányos tört characteristicája pedig czélelles egész szám legyen, szükség hogy ilyenkor a' gyökérjegy alatt álló igazi törtszám' logarithmusának czélelles characteristicáját szaporítsuk annyival: hogy az a' gyökérjelenek, mellyel azt osztani kell, épen valahány egészszeli szorzata legyen, hogy így, ha azt a' gyökérjellel osztjuk, egész szám jön ki hanyadosul; a' mikor aztán, hogy az osztandó 's azzal együtt a' hanyados, azaz, a' keresett logarithmus értéke is meg ne változzék, az osztandó czélirányos részét is ugyan annyival kell szaporítanunk, a' mennyivel czélelles részét növeltük, 's így lesz aztán például:

$$\log. \sqrt[5]{\frac{4,8750613 - 5}{5}} = 0,9750123 - 1.$$

β) Ha olyan törtszám logarithmusát kell kiszámítanunk, melynek mind számlálója mind nevezője több szorzóknak szorzata, czélunkat érhetjük ugyan az által is, ha elébb a' számláló minden szorzóinak logarithmusait összeadjuk egymással, azután hasonlóképen összeadjuk egymással a' nevező szorzóinak logarithmusait is, 's végre ezeknek öszvegét, mely a' nevező logarithmusa, amazoknak öszvegéből, mely a' számláló logarithmusa, levonjuk; mert így a' maradék fog lenni az ilyen törtszám logarithmusa. De ezen számítást, mely e' szerint két rendbeli összeadással, és egy rendbeli kivonással menvén véghez, egy kissé hosszadalmas munka, lehet sokkal egyszerűbbé tenni, és egyetlenegy számtani munkára, 's ott is a' legkönnyebbre, t. i. összeadásra vonni le az ugynevezett tizedes kiegészítők (complementum decadicum) által; mely mesterséges fogás rövideden ebben áll:

Mikor olyan igazi törtszám logarithmusát kell keresnünk, melynek számlálója = 1, nevezője pedig 1-nél nagyobb szám; ha a' számláló logarithmusát, mely itt mindig = 0, hogy belőle a' nevező logarithmusát le lehessen vonni, mindenkor egyformán 10-zel szaporítjuk meg, (mely szám e' végre sem nem szükségtelenül nagy, sem nem igen kicsiny, mivel belőle a' legnagyobb nevezőnek is, mely az ilyen törtszámokban előfordulhat; logarithmusát le lehet vonni, azonban minden számtani munkálatot tenni vele a' legkönnyebb): úgy világos hogy az ilyen törtszám logarithmusa kijő, ha a' nevező logarithmusát 10-ből levonjuk, és a' maradéknak a' 10-t, mellyel a' számláló logarithmusát megszorítottuk volt, és így a' mennyivel a' maradék nagyobb kelletinél, kivonás jegyével utána ragasztjuk. Például:

$$\log. \frac{1}{12} = \left\{ \begin{array}{l} \log. 1 \\ -\log. 12 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 10,000000 - 10 \\ -1,0791812 \end{array} \right\} = 8,9208188 - 10$$

$$\log. \frac{1}{7} = \left\{ \begin{array}{l} \log. 1 \\ -\log. 7 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 10,000000 - 10 \\ -0,8450980 \end{array} \right\} = 9,1549020 - 10 \text{ stb.}$$

Mi szerint látjuk, hogy az ilyen törtszám logaritmusának, ha a számláló logaritmusát mindig 10-zel szaporítjuk, célirányos része mindenkor egy olyan szám, mely a' nevező logaritmusával együtt épen 10-et teszen, vagyis a' nevező logaritmusának kiegészítője 10-re, vagyis a' mint nevezni szokták, annak tizedes kiegészítője (complementum decadicum), célelles része pedig mindenkor = - 10.

Ezeket így értvén, már most ha az a' kérdés, mi lesz

$$\log. \frac{3854 \times 27,986 \times 3254}{5446 \times 28,456 \times 57}, \text{ ennek formáját így változtatjuk, vagyis}$$

inkább csak így képzeljük változni, (mert ezt mindenkor leírni, felesleges volna, itt csak világosítás kedvéért írjuk le egyszer mindenkorra):

$$\log. \left(2854 \times 27,986 \times 3254 \times \frac{1}{5446} \times \frac{1}{28,456} \times \frac{1}{57} \right),$$

mi által hogy értéke nem változik egy tekintettel láthatni. Mert ha itt a' három utolsó szorzókat egymással szorozzuk, a' szorzatnak felsője lesz = 1, alsója pedig a' három alsók szorzata, 's ha aztán a' három utolsó szorzók ezen szorzatát a' három első szorzókkal szorozzuk, visszaáll az elébbeni forma, látnivaló. De ezen megváltoztatott forma szerint már nincs szükség kétrendbeli összeadásra, 's még azon felül egy levonásra, hanem a' 6 szorzó logaritmusait írjuk folytába mind egymásalá, és összeadjuk, 's az összeg lesz a' keresett logaritmus. Mely munkát még egyszerűbbé lehet tenni az által, ha itt a' 3 utolsó szorzók logaritmusainak csak célirányos részét, mely is mindegyikben a' törtszám' nevezője' logaritmusának tizedes kiegészítője, írjuk le mindenütt oly móddal, hogy kikeresvén a' nevező logaritmusát annak minden sifrája helyett, kezdvén a' jellemzőn, irunk olyat, mely azt 9-re pótolja, kivéven az utolsó olyan sifrát, mely való vagy lévő számot (nem nullát) jelent, mely helyett olyat irunk, mely azt tizre pótolja, 's ha ez nem legutol áll, hanem még van utána egy vagy több nulla is, ezeknek helyeit nullákkal töltjük be; a' (-10-et pedig a' tizedes kiegészítők mellől mindenütt elhagyjuk, hanem mivel ez által minden ilyen logaritmus 10-zel nagyobbá lesz kellenél, utoljára az összegből kihagyunk annyi tizet, a' hány tizedes kiegészítő volt az összeadott logaritmusok között.

Ezek szerint már a fentebbi feladat kidolgozása, a tizedes kiegészítőt rövidség okáért egy nagy latin C-vel, mint a complementum első betűjével írván, így lesz:

$$\begin{aligned} & \log. \frac{3854 \times 27,986 \times 3254}{5446 \times 28,456 \times 57} = x. \\ & = \log. 3854 = 3,5859117 \\ & + \log. 27,986 = 1,4469408 \\ & + \log. 3254 = 3,5124175 \\ & + C. \log. 5446 = 6,2639224 \\ & + C. \log. 28,456 = 8,5458261 \\ & + C. \log. \dots 57 = 8,2441251 \\ & \hline & \text{mely összeg} - 30 = x = 1,5991436 \end{aligned}$$

A' honnan ezt az általános szabályt vonhatjuk el: Ha a' törtszámnak mind számlálója, mind nevezője több szorzóknak szorzata, annak logaritmusát legrövidebb úton megtaláljuk, ha számlálója szorzóinak logaritmusaival összeadjuk

nevezője' szorzói' logaritmusainak tizedes kiegészítőit, 's ezeknek összegéből levonunk annyi tizedet, a' hány volt a' tizedes kiegészítő. Ezzel a' fortélylyal lehetne élni akkor is, mikor a' törtszámnak mind alsója, mind felsője csak egy-egy darab számból áll; de akkor semmi haszon sem lenne benne; mivel két logaritmust összeadni egymással, vagy kivonni egymásból, e' két munka egyik sem könnyebb vagy rövidebb a' másiknál.

Tartalom.

lap.

Előszó.

A' munka' czéljáról, 's ahozképesti felosztásáról, és terjedelméről. 3—8

ELSŐ RÉSZ.

ALSÓBB SZORSZÁMTAN.

Bevezetés:

A' hatványokról.

- 1— 4 §. A' hatvány' szokott határozatainak hibái, 's érthetlensége; és ezek helyébe a' hatvány' fogalmának kimerítő, 's minden esetekre egyenlően illő meghatározása . . . 11—13
- 5— 9 §. A' hatvány' kimerítő meghatározásának alkalmazása, mikor a' hatványjel egészszám; mely alkalommal megmutattatik, hogy a' 0 is szám, még pedig egész szám. 13—20
- 10—12 §. A' hatvány' kimerítő meghatározásának alkalmazása, mikor a' hatványjel törtszám 20—21
- 13—16 §. Hogy a' gyökek nem egyebek tört hatványoknál 21—25
- 17 . . . §. Mikép' kell bännünk ugyanazon szám' különböző hatványaival a' szorzásban, osztásban, hatalomra emelésben és gyöker-vonásban 26—30
- 18 . . . §. Mi hasznát vehetnök egy olyan könyvnek, melyben a' természetes számok mind úgy volnának előterjesztve, mint ugyanazon egy számnak (alapszám) különböző hatványai? 30—32
- 19—21 §. Ezen haszonvételnek példákki világosítása olyan táblácskák' segítségével, melyek közül egyikben a' 2-nek, másikban a' 3-nak czélirányos egész hatványai vannak felrakva . 32—36
- 22 . . . §. Az ilyen táblák' hiányai, 's általmenetel a' hatványokról a' szorszámokra 36—37

I. SZAKASZ.

A' szorszámokról általánosan.

- 23 . . . §. A' szorszám' határozata, 's ennek az eddigi határozatokkal való egybevetése; szorszám-táblák, szorszám-alkotmány, és a' szorszám 's logaríthmus nevezetek' egyezése 37—40
- 24—27 §. Annak apródonkint fejtegető megmutatása, hogy akármely szorszám-alkotmányban az alapszám' egész hatványain kívül minden más számok' logaríthmusai szertelen számok (numeri irrationales), 's ez alkalommal a' szertelen számok' fogalmának kifejtése, 's az a' körül uralkodó fogalomzavarok' tisztába hozása 40—54

II. SZAKASZ.

A' közönséges vagy briggféle szorszámokról.

- 28 . . . §. A' szokásban levő kétféle szorszámalkotmányról, azoknak fel-találásáról, 's a' szükségesebb szorszám-táblákról valami . 54—56
- 29—30 §. A' szorszám-tábláknak, különösen a' Vega' kisebb tábláinak

szerkesztésében használt rövidítésekről, 's az ezekből folyó szabályokról az (czelírányos) egész számok' logaritmusainak kikeresésére	56—74
31 . . . §. A' (czelírányos) törtszámok' logaritmusainak kikereséséről	74—80
32 . . . §. Akármelylogarithmushoz a' neki megfelelő szám' kikereséséről	80—84
33 . . . §. A' czelelleses számok' logaritmusairól valami	84—89

III. SZAKASZ.

Gyakorlat a' közönséges szorszámokkali számvetésben.

34—35 §. Bevezetés a' legnevezetesebb pénzügyi kérdések' megfejtésére, egy tekintettel a' kamatok' különböző időszakaira hazánkban	90—94
36 . . . §. A' pénzügyi kérdések' megfejtésére szükséges alapegyenlet' szerkesztése	94—95
37—41 §. Az alapegyenlet' 4 változatai szerint 4 nevezetes pénzügyi kérdések' megfejtése, u. m. anaticismus' kiszámítása, discontirozás 'stb	95—101
42 . . . §. A' népszaporodás körüli kérdések' megfejtése .	101—103
43 . . . §. Egyenlet-szerkesztés annak kiszámítására, hogy több egymásután következő esztendő' elején vagy végén bizonyos procentre kiadott egyenlő nagyságu tőkék mennyire szaporodnak kamatjaikkal, 's kamatjaik' kamatjaival együtt bizonyos számú évek alatt	103—106
44—49 §. Ezen egyenlethől az adósságtörlesztés körül előforduló több nevezetes kérdések' megfejtése, és a' bitorlott jószág' hasznávételének igazságos kiszámítása	106—113
50 . . . §. Egyenlet-szerkesztés annak kiszámítására, hogy több egymásután következő esztendő' elején fizetendő egyenlő nagyságu summák mennyit érnek jelenleg összességgel	113—115
51—55 §. Ezen egyenlet szerint egy készpénzeli és egy határidőnkinti fizetést ajánló vevők által ígért summák' összehasonlítása, és az évi járandóságok körül előforduló kérdések' megfejtése, hol czelelleses számok' logaritmusai is jönnek elő	115—123
56 . . . §. Egyenlet-szerkesztés annak kiszámítására, hogy több egymásután következő esztendő' végén fizetendő egyenlő nagyságu summák mennyit érnek jelenleg öszvesen	123—125
57 . . . §. Berekesztése ezen szakasznak, 's az ebben kifejtett egyenletek' táblás előterjesztése	125—128

MÁSODIK RÉSZ.

FELSŐBB SZORSZÁMTAN.

I. SZAKASZ.

A' természetes szorszámokra vezető törvényekről.

58—70 §. A' kéttagi törvény' (lex binomia') kifejtése, mikor a' hatványjel czelírányos egész szám	131—149
---	---------

- 71 ... §. Ezen törvény feltalálásáról, 's Newton által lett, de csak induction épített kiszélesítéséről stb, valami 150—152
- 72—73 §. Algebrai egyenlitések nélkül, csak csupa okoskodás általi megmutatása annak, hogy a' kéttagi törvény áll akkor is, mikor a' hatványjel czélirányos törtszám, és ezen törvénynek alkalmazása gyökérkivonásokra 153—158
- 74—76 §. Hasonló megmutatása annak, hogy a' kéttagi törvény áll akkor is, mikor a' hatványjel czélelles egész szám; a' honnan a' fentebbiekkel együtt következik annak akkori érvényessége is, mikor a' hatványjel czélelles törtszám; 's itt alkalmilag általános jegyzések a' véges mennyiségeket kifejező végtelen sorzatokról 158—170
- 77 ... §. A' kéttagi törvény' egyszerűbbítése, 's ennek alkalmával az általános számvetés' egybehasonlítása a' tizedes számvetéssel 170—172
- 78—81 §. A' hatványjeli' törvény' kifejtése; nevezetesen, először a' hatványjeli sorzat 1-ső tagja' ösztényzőjének, azután ebből a' többi tagok ösztényzőinek is kiszámítása 172—184

II. SZAKASZ.

A' természetes szorszámokról, és azoknak kiszámításáról.

- 82—83 §. A' természetes szorszámok alapszámjának kiszámítása, 's annak magyarázása, mik a' természetes szorszámok, 's miért neveztetnek így? 184—187
- 84 ... §. A' szorszámi törvény, vagy szorszámi sorzat kifejtése elébb eredeti formájában, azután más alkalmasabb formákra átváltoztatva 187—195
- 85 ... §. Peldák a' természetes szorszámoknak ezen törvények szerinti kiszámítására 195—197

III. SZAKASZ.

A' kétféle logaritmusok egymásrai átváltoztatásáról, 's akármely szám' akármelyik logaritmusának egyenes és független kiszámításáról.

- 86 ... §. A' kétféle logaritmusok egymásrai átváltoztatása 197—200
- 87 ... §. Akármely szám mind kétféle logaritmusának egyenes és független kiszámítására egy nevezetes mód 200—204
- 88 ... §. Mikép kell e' végre segédtablákat készíteni 204—205
— Maguk ezen segédtablácskák 206—209
- 89 ... §. Hasznávétele ezen tabláknak példákkal világosítva 210—221
- 90 ... §. Potlék, a' tizedes kiegészítőkről, stb. 221—224

Legyen szives a' t. cz. Olvasó az itt következő, minden igrkeze-
tünk mellett is el nem kerülhetett hibákért megbocsátani, és
egszersmind azokat kiigazítani.

lap	$\frac{s}{fel\hat{a}lr\hat{o}l}$	$\frac{o}{alulr\hat{o}l}$	H i b a	I g a z i t á s
5	3	—	nevezem	neveztem
12	1	—	$a^{2/3} = d$	$a^{2/3} = d?$
13	—	14	a' maga	töröltessék ki
14	15	—	a	a
60	—	6	31296	34296
64	—	2	foglaltak el,	foglaltak volna el,
105	—	3	egyszeri sorzat	egy szeri sorzat'
109	—	7	$\left(\frac{104}{100}\right)^{33} = 1$	$\left(\frac{104}{100}\right)^{33} - 1$
119	—	4	melyet, ha	melyet ha
128	—	2	12 U = stb	Ezen egyenlet jobb oldalán az osztóból mind a' két helyütt töröltessék ki az U
151	—	3	$1 + nB$	$1 + nB$
156	—	16	áll, és	áll is,
156	—	1	$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} +$	$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} - \dots$
157	12	—	$\sqrt{49+1}$	$\sqrt{49+1}$
174	—	1	$+\frac{a^4}{4} x$	$-\frac{a^4}{4} x$
182	—	1	$\frac{A^{n+1}}{(1.2\dots(n-1) \times (1.2))}$	$\frac{A^{n+1}}{(1.2\dots(n-1) \times (1.2))}$
182	—	2	$\frac{A^1}{1}$	$\frac{A^1}{1};$
182	—	7	$\frac{A^{n+2} B}{A A}$	$\frac{A^{n-2} B}{A A}$
188	6	—	$\frac{1}{1.2.3.3} \alpha^4 x^4$	$\frac{1}{1.2.3.4} \alpha^4 x^4$
190	1	—	$\frac{8}{8}$	$\frac{8}{3}$
190	3	—	$\frac{4}{16}$	$\frac{16}{4}$
193	14	—	$\frac{2p-2}{2p}$	$\frac{2p}{2p-2}$
205	—	2	log. =	log. a =

Jegyzés. A' 196-dik lapon kiszámított Logarithmusok nincsenek ugyan a' tizedes törtek egész a' 11-dik helyeig kiszámítva, mint ugyanott az 5-dik sorban mondatik, de azért úgy vannak felrakva, hogy egész a' száz-milliód részekig tökéletesek.

Österreichische Nationalbibliothek



+Z157440805

