

AZ EURO STOXX 50 ÉS A BUX 5 PORTFÓLIÓK HATÉKONY FELÜLETEINEK ANALITIKUS FORMÁI¹

VÖRÖS JÓZSEF – KEHL DÁNIEL – RAPPAI GÁBOR

Pécsi Tudományegyetem

Felügyeleti szervek kezében a fedezetlen eladások (shortolás) tilalma fontos szabályozó eszköz. A modellezőknek ekkor a beruházási változókra nemnegativitási feltételt kell kiróni, melyek megnehezítik általánosabb tulajdonságok megállapítását. Például, míg portfóliók hozam-kockázat hatékony felületének analitikus formája régóta ismert shortolás megengedésével, de még nem láttuk neves portfóliók hatékony felületének egzakt leírását shortolás tiltása esetén. A tanulmány egy algoritmust ajánl a hatékony felület analitikus formájának meghatározására, a hozzá írt komputerkód pedig elősegíti, hogy számos portfólió sokoldalú elemzését végezzük el, melyeket az olvasók figyelmébe ajánlunk.

1 Bevezetés

A portfólióanalízis még mindig népszerű témája a pénzügyi irodalomnak, és talán érthető is, hiszen a kockázat fogalmának felvetése és mérése lehetővé teszi a hozam és kockázat együttes értékelését. Módszertanának vizsgálata is népszerű, a kutatók szinte kifogyhatatlanok újabbnál újabb ötletekből, melyek arra irányulnak, hogy minél pontosabban, átfogóbban és körültekintőbben modellezzük a valóságot. Minket az inspirált, hogy soha nem láttuk még valós, népszerű portfóliók hatékony felületének analitikus formáját, véleményünk szerint még az olvasó sem. A legjelentősebb könyvek is arra ösztönöznek bennünket, hogy jelöljük ki egy elvárt hozam szintet, és oldjuk meg az adódó konvex programozási feladatot, lehetőleg minél többet, s talán akkor lesz fogalmunk róla, miként is nézhet ki egy portfólió hatékony felülete, azaz azon pontok halmaza, melyek már nem tökéletesíthetők tovább, nincs már olyan pont azon túl, mely hozam, vagy kockázat, vagy mindkét szempont alapján jobb befektetés lenne. Hogy pótoljuk e hiányt, Európa 50 legjelentősebb részvényeit magában foglaló Euro Stoxx 50-ről, valamint, összehasonlítási alapként, a BUX öt legjelentősebb részvényéről adatokat gyűjtöttünk az elmúlt tíz évből: 2015. január 1-től, megfigyelve a havi hozam adatokat. Ezen adatbankból tetszőlegesen választhatunk ki időintervallumot, melyre vonatkozóan meghatározzuk a kosárban levő részvények átlagos hozamát, és a hozzá tartozó kovarianciamátrixot, melyek felhasználásával megjelenítjük a hatékony felület analitikus formáját. A piaci kapitalizációs értékeket is megfi-

¹Beérkezett 2025. december 9. DOI: <https://doi.org/10.15170/SZIGMA.57.1317>. E-mail: voros.jozsef@tkk.pte.hu.

gyeljük, és a három input adat (átlaghozam, kovarianciamátrix és a részvény értékhányada a piaci kapitalizáció szerint) alapján jellemezzük a portfólió valós teljesítményét. Felfedett analitikus formáink így lehetővé teszik egy adott portfóliót felülteljesítő portfóliók meghatározását és jellemzését. De nem csak egy hatékony felületet határozunk meg: meghatározzuk a hatékony felület analitikus formáját arra az esetre, amikor a fedezetlen eladások tilalom alatt vannak (a shortolás nem megengedett), és akkor is, amikor ez a folyamat lehetséges. 2023 novemberében a shortolást betiltották Dél-Koreában (Reuters, 2024. november 11-i jelentés), bevezették a tilalmat Törökországban 2025. március 23-án (Bloomberg, e napi jelentés), és a shortolás tiltása egy folytonosan meglevő eszköz a pénzügyi piacokat szabályozók kezében (Edwards et al., 2024). Sőt, elméleti oldalról is komoly támadás alatt van. Brennan és Lo (2010) kijelentik, hogy a pénzügyi eszközök piaci portfóliója, melyben valamennyi eszköz súlya a portfólióban arányos a teljes piaci kapitalizációval, és a haszon-kockázati hatékony felületen fekszik, az nem tartalmazhat negatív befektetési súlyokat. Ez azt jelenti, hogy az összes olyan portfóliómodell, melyben a befektetési változókra nincs kiróva a nem-negativitási feltétel, valóságtartalma megkérdőjelezhető, és gyakorlatilag a befektetésekkel szemben olyan elvárásokat gerjeszt, melyek nem elérhetők. Azon hatékony felületeket, melyek negatív súlyokat tartalmaznak, lehetetlen hatékony felületnek nevezik. A könnyű kezelhetőség miatt ugyanakkor a nem-negativitási feltételeket mellőző modellek nagyon népszerűek az irodalomban. Például, az Elton et al. (2014) könyvben az akár végtelen mértékű shortolási lehetőség alapfeltétel. Ezért mi mindkét hatékony felületet előállítjuk, és eltérésüket mérjük.

A korlátok nélküli shortolást feltételező tárgyalások alapvetően Markowitz (1959) modelljéből indulnak ki, ahol a befektető egy t időpontban olyan portfóliót állít össze, melynek hozama a $t + 1$ időpontban bizonytalan. Mivel a befektetőt kockázatérzékenynek tekintjük, a portfóliónak haszon-kockázat hatékonynak kell lennie, vagyis, ha a kockázati szintet rögzítjük, akkor a lehető legnagyobb hozam elérése a cél, vagy, ha a hozamszintet rögzítjük, akkor a lehető legkisebb kockázatú portfóliót választjuk. A kockázatot a hozam szórásnégyzetével, vagy a szórással mérjük.

A befektetési változókra vonatkozó előjelkorlátok eltekintése mellett, vagyis shortolási lehetőség esetén, Merton (1972) felfedte a haszon-kockázat hatékony felület analitikus formáját. Mivel nincs előjelmegkötés a befektetési változókon, az úgynevezett lehetetlen hatékony felület előfordulhat. A korlátlan hitelfelvétel, illetve kölcsönadás feltételezésével kockázatmentes kamatláb mellett, mely valamennyi befektető számára azonos, Sharpe (1964) és Lintner (1965) tovább forradalmasította a pénzügyi analízis modern útját. Tőkeeszköz Árazó Modelljük (CAPM) ma is alapeszköze a befektetett tőkétől elvárt hozam megállapításának különböző iparágakban. Sharpe (1964, 1970) és Buser (1977) a feltételek és levezetések egyszerűsítésével jutottak el a népszerű Tőkeeszköz Árazó Modellhez (CAPM). Megfigyelve, hogy a részvények hozama gyakran függ közös tényezőktől, Sharpe (1963) indexmodellje tovább egyszerűsítette a pénzügyi analízist, hasonlóan Elton és társaihoz (1978), akik

állandó korrelációt tételeztek fel a részvények hozamai között. Feldman és Reisman (2003) olyan eljárást mutattak be, mely mindössze két lépést igényel egy tőkeeszköz-árazó egyenesen fekvő portfólió meghatározásához.

A CAPM empirikus tesztelése még ma is sok kutatót vonz. Gibbons és társai (1989) egy tesztelési eljárást vizsgáltak, arra voltak kíváncsiak, hogy egy előre megadott portfólió hozam-kockázat hatékony-e, és az elméleti és gyakorlati eredményeket összehasonlító tanulmányok sora elég hosszú. Fama és French (2004) tanulmánya ad egy összefoglalót e tanulmányokról, bemutatva egyúttal a háromfaktoros modelljüket (Fama and French, 1996). Markowitz (2005) megjegyzi, hogy a jelentős empirikus eltérések a CAPM-től nem meglepő módon abból is eredhetnek, hogy a tényszerű feltételezések a CAPM feltételrendszerétől eltérőek. Például, a CAPM végtelen mennyiségű hitelezést és kölcsönadást tételez fel, mely a valós életben nem tényszerű. Brennean és Lo (2010) tovább ássa a sírt, kimutatva, hogy ha még a CAPM feltételezései fent is állnának, egy piaci portfólió egyáltalán nem biztos, hogy hozam-kockázat hatékony. Megmutatják, hogy a részvényhozamok, kovarianciák és varianciák értékeinek létezik olyan kombinációja, melyre minden hozam-kockázat hatékony portfólió tartalmaz negatív súlyokat. Vagyis shortolást tételez fel, mely azt jelenti, hogy valójában nem lehetnek piaci portfóliók. Továbbá, ahogy a részvények száma növekszik korlát nélkül, annak valószínűsége, hogy ilyen paramétereket találunk, folytonosan növekszik. Következésképpen, nem-negativitási feltételeket ki kell róni a portfólióoptimalizálási modellekben, ha életszerű eredményeket akarunk. Ezen esetekre viszont nem áll rendelkezésünkre a hatékony felület analitikus formája, miként az megvan a shortolási esetre. Viszont a hozam-kockázat felület tartalmazhat meglepetéseket nem-negativitási feltételek mellett.

Ugyan az akkor még nem Nobel-díjas Dybvig (1984) három részvényre megmutatta, hogy sztenderd esetben (vagyis shortolni nem lehet), amikor a hatékony felületen csomó van (azaz olyan töréspont, ami miatt nem differenciálható), a csomót meghatározó portfólióban olyan részvények lehetnek csak, melyekhez tartozó hozamértékek azonosak. Ennek fordítottja viszont nem igaz. Amikor csomó van, tehát a haszon-kockázat felület nem differenciálható, a csomót meghatározó piaci portfólióhoz egy sereg (végtelen sok) kockázat nélküli kamatláb kapcsolható, kockázat nélküli kamatlábtól húzott érintők mindannyian a csomóban levő piaci portfóliót érintik. Amikor a hatékony felület minden pontjában differenciálható, a kockázat nélküli kamatlábak csökkenésével a piaci portfólió kockázati szintje mindig csökken, csomó esetén viszont a kockázati szint befagy egy ideig.

Természetes folyamat, hogy amikor szeretnénk, hogy portfólió modellünk jobban közelítse meg a valóságot, több és több további feltételt kell modellünkben bevezetni. Ezek viszont növelik a modellek kezelhetőségének nehézségi fokát.

Zhang és Nie (2005) a kockázatos részvények hatékony felületének tulajdonságait tárgyalva azt tételezték fel, hogy az átlagos hozamok és a kovarianciák meghatározása során hibák fordulhatnak elő, ezeket korlátok közé szorítva származtatták a hatékony felületet. Zhang és Wang (2008) tovább általá-

nosították ezen vizsgálatukat azzal, hogy hitelfelvételt tettek lehetővé. Qi et al. (2009) különböző hozamértékeket vettek fel, ezek mindegyikében megoldva az adódó feladatot, a kapott hatékony felületen fekvő pontok tulajdonságai-ból arra a következtetésre jutottak, hogy a hatékony felület egyáltalán nem biztos, hogy olyan sima, miként azt az osztályteremben meg szoktuk húzni. Valóban, amikor negatív súlyokat nem engedünk meg, a portfólió hatékony felület a két végpontjában biztosan nem differenciálható, mert végtelen sok érintő húzható mind annak minimum, mind maximum pontjához.

De még ennél is több meglepetést tartalmazhat. Kernsterns et al. (2012) az általuk kialakított „pénzügyi univerzumra” bemutatták, hogy egy irányvektor megváltoztatása miként alakítja a hozam-kockázat hatékony portfóliók sorrendjét, feltérképezve ezzel a 78 befektetési eszköz szerkezetét. Guijarro (2018) egy hasonlósági mérték bevezetésével méri össze a hatékony felületeket a kirótt, úgynevezett sarkalatos feltételek (például hány részvény lehet egy portfólióban) mellett. Genetikus eljárás, mely összeházasítja a heurisztikus és kvadratikus programozást, kellett a megoldáshoz. Hasonlóan Steuer és társaihoz (2024), akik egy új eljárást mutatnak be, hogy miként kell származtatni a hozam-kockázat felületet sarkalatos feltételek bevezetésével. A korrelációs mátrix enyhe perturbációja jelentősen növelte az eljárás hatékonyságát nagyszámú részvényt tartalmazó portfóliókra is.

A kockázatosított érték (VaR) koncepciójának behozatala egy újabb fejlődési irányt jelentett, ami természetesen technikailag újabb feltétel bevezetését jelentette (Duffie és Pan, 1997). Mivel a VaR-on felüli veszteségeket nem tekintjük, Rockafellar és Uryasev (2000) bevezette a feltételesen kockázatosított érték fogalmát (C-VaR), majd később a koncepciót kiterjesztették általánosított veszteségeloszlásokra is (Rockafellar és Uryasev, 2002). Cesarone és társai (2023a) pedig a klasszikus hozam-kockázat portfólióanalízist olyan feltételekkel bővítették, melyek figyelembe veszik a felügyeleti szervek elvárásait, melyeket szabályozói korlátoknak neveztek el. Az eredmény persze egy vegyes egészértékű kvadratikus programozási feladat, melyet a Gurobi-féle szoftverrel oldanak meg. Az algoritmust alkalmazták a Euro Stoxx 50 portfóliókötegre is, mely csomag központi szerepet játszik e tanulmányban. Mittal és Mehlawat (2014) tanulmányukban empirikusan vizsgálják a National Stock Exchange (NSE, Mumbai) indiai piacot, hogy teszteljék modelljüket, melyet genetikus algoritmussal oldanak meg. Tehát az alapmodell kiterjesztése mindig számítástechnikai nehézségekkel jár, hasonlóan a Sharma és Mehra (2013) -féle megközelítéshez, akik a GAMS szoftvert használják a hatékony felület előállításához két, lineáris célfüggvény esetében. Xidas és Mavrotas (2014) pedig oly módon terjesztik ki a haszon-kockázat analízist, hogy sarkalatos feltételeik mellé belépési korlátokat határoznak meg, és tranzakciós költségeket is figyelembe vesznek. A keletkezett modellt vegyes egészértékű algoritmusokkal lehet megoldani, amit alkalmaznak a Euro Stoxx 50 csomagra is. Wu és Wu (2021) szintén a Gurobi-szoftvert használják fel a feladat megoldására, amikor a sarkalatos feltételek mellé fizetőképességi feltételeket kirónak. Nem meglepő módon arra jutnak, hogy ha a feltételekkel korlátozzák a negatív befektetések számát, sokkal észszerűbb eredményekhez jutnak. Arcuri és társai

(2023) befektetési súlyokat írnak elő számos befektetési kategóriára, összeházasítva a klasszikus Markowitz (1959) modellt a robusztus CVaR-t tartalmazó Grossi és Laurini (2019) -féle modellel. Szerintük a R-CVaR megközelítés jobb hozamokat eredményez számos esetben, mint az egyszerű klasszikus modell.

Természetesen az új kor új szellemet hoz. Megjelentek a „zöld” megközelítések, például Cesarone és társai (2023b) egy kétszintű megközelítést alkalmaznak, hogy figyelembe lehessen venni veszélyes tevékenységeket is. Még bizonyítják is, hogy mind a Dow Jones, mind az NDX adathalmazra kezdeményezésük életszerű, és azt a következtetést vonják le, hogy az ESG vonatkozású teljesítmény határozottan jobb.

Bár szinte ösztönösen egy sima, differenciálható, konvex görbét húzunk fel, amikor a haszon-kockázat összefüggést interpretáljuk, viszont egészen nagy valószínűséggel egy lehetetlen hatékony felületet ábrázolunk, mert negatív befektetések lesznek a portfóliókban. Tulajdonképpen azt hisszük, senki sem látta valós, igazi portfóliók hatékony felületének analitikus formáját. Célunk ezért két valós portfólió hatékony felületének analitikus feltárása, az Euro Stoxx 50-é és a BUX 5-é. Azért BUX 5, mert öt olyan részvényünk van jelenleg, melynek piaci kapitalizációs aránya felülmúlja az 1%-ot. A feltárás mind shortolási, mind az anélküli esetre vonatkozik, és a két analitikus forma ismerete lehetővé teszi a pontos összehasonlítást. Mint említettük, a klasszikus esetre, shortolással, Merton (1972) analitikus formáját már ismerjük. Qi et al. (2015) ennél tovább mennek, amikor a megvalósítandó célok mellé egy újabbat tesznek, és meghatározzák a hatékony felület analitikus formáját, shortolással. Később Bodnar és társai (2017) a klasszikus portfólióprobléma globális minimumpontja analitikus formáját határozták meg, ismét shortolást feltételezve. Bodnár és Gupta (2015) megmutatták, hogy a hozamokban felfedhető aszimmetria jelentősen befolyásolhatja a globális minimális kockázatot meghatározó portfólió szerkezetét. A minimális kockázattal járó portfólió analitikus formájával Qi és Steuer (2020) is foglalkozott, amikor három célfüggvényünk van, és a befektetési változóknak ki kell elégíteni egy lineáris egyenletrendszer által meghatározott feltételrendszert. De Qi és Steuer (2024) még tovább mentek, jelenleg analitikus megoldási formájuk van az esetre, amikor a célokat több, mint egy kvadratikus függvény írja le. Meng és társai (2022) a várható hozamok és maximális bizonytalanság közötti átváltási arányok mellett állítja elő a hatékony felületet, de shortolási lehetőséggel. Ugyanakkor Kim és Fabozzi-nél (2024) a shortolás nem megengedett, de nemlineáris programozási problémát megfogalmazva, 51 pontot felvéve, és ezek mindegyikére a feladatot megoldva, a DJIA 30 részvényére előállítják a hatékony felületet. Analitikus formákat Monte Carlo-szimulációval határoznak meg.

Mi az Euro Stoxx 50 és a BUX 5 részvénycsomagra állítjuk elő a hozamkockázat hatékony felületek analitikus formáit – shortolási lehetőséget kizárva – több érdekes időintervallumra. A vizsgált intervallumok az alábbiak:

- 2015. január 1 – 2020. január 1;

- 2015. január 1 – 2025. január 1;
- 2015. január 1 – 2024. január 1;
- 2020. január 1 – 2025. január 1;
- 2022. február 1– 2025. január 1.

Hogy megbirkózzunk a hatalmas számolási igénnyel, az itt definiált algoritmust R-ben kódoltuk, az eredményeket manuálisan (Excel segítségével) ellenőriztük. Az algoritmus egyszerű és gyors, robusztus, megbízhatóan old meg nagyméretű feladatokat is. Az analitikus formák megbízhatóan segítik elő annak megállapítását, hogy neves portfóliók hozam-kockázat hatékony felületei vajon tartalmazhatnak olyan csomópontokat, amikor a felület nem differenciálható, és emiatt a CAPM modell labilis.

A következő fejezet a problémafelvetés elméleti háttérét foglalja össze, továbbá a vizsgálat motorjának számító algoritmust definiálja. A harmadik fejezet két portfóliócsomagot vizsgál: az Euro Stoxx 50-t és a BUX 5-öt. Az utolsó fejezet négy fontos következtetést von le.

2 A hatékony felületen fekvő csomópontokra fókuszáló vizsgálat elméleti háttere

A portfólióanalízis egyik lényeges kérdése a hatékony felület előállítása, vagyis azon pontok meghatározása, amikor minden szóba jöhető kockázati szintre nem létezik magasabb várható hozamú befektetés, vagy minden lehetséges várható hozamnál nincs olyan portfólió, mely alacsonyabb kockázattal járna. A kockázatot a portfólió szórásnégyzetével mérjük, ezért a várható érték-variancia hatékony felület olyan összefüggés, mely tovább már nem javítható. A Stoxx nevet viselő portfólió (melyben csak kockázatos befektetések vannak) hatékony felületét az alábbi, paraméteres, kvadratikus programozási feladat megoldásával tudjuk előállítani:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \quad (1a)$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} = 1 \quad (1b)$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} = E \quad (1c)$$

$$\frac{V_R^{Stoxx}(E)}{2} = \min_x \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \quad (1d)$$

E modellben x_i a vagyonnak azon hányadát jelenti, melyet az i -edik kockázatos vagyontárgyba (az egyszerűség kedvéért legyen ez részvény) fektettünk; $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{x}' = [x_1, \dots, x_n]$, és n a kockázatos részvények számát jelenti a Stoxx nevet viselő portfólióban, a $'$ transzformáltat jelöl (egy nem vektoriális leírást például a Wu and Wu, 2021 munkában találhatunk kiterjesztett feltételek mellett). A portfólióban levő részvények várható hozamát

az \mathbf{a} vektor fogja össze, a hozzá tartozó kovariancia-variancia mátrixot pedig \mathbf{V} -vel jelöljük. Feltesszük, hogy \mathbf{V} pozitív definit. $V_R^{Stoxx}(E)$ a kockázatos részvények minimális szórásnégyzetét határozza meg, amikor a befektetéstől E hozamot várunk. Az első feltétel a fedezetlen eladásokat zárja ki, azt is szokás mondani, hogy nem lehet shortolni. Ez a feltétel az Euro Stoxx esetében 50 egyenlőtlenségi korlátot jelent, de az FTSE 100 már százat. Az (1b) azt határozza meg, hogy egységnyi tőkét tekintünk, ezért egy részvénybe fektetett tőkearány a $[0, 1]$ intervallumba esik. Az (1c) azt biztosítja, hogy a befektetett tőke E várható hozamot produkál majd, az (1d) célja a minimális kockázat biztosítása, miközben a várható hozam E . A tőkeeszköz árelmélet (CAPM) szerint az összes részvény piaci portfóliója, melyben minden részvény súlya piaci kapitalizációs értékével arányos, a hatékony felületen fekszik, ezért ez az arányszám nem lehet negatív. Brennan és Lo (2010) „lehetetlen” felületnek nevez minden olyan hatékony felületet, melyben valamelyik részvénynek az aránya negatív. Bebizonyítják, hogy a lehetetlen piaci portfóliók előfordulási valószínűsége a befektetésre szóba jöhető részvények számának arányában növekszik. Továbbá, a shortolásra javasolt részvények minimális száma lineárisan növekszik a részvények számában. Miként a bevezetőben megjegyeztük, Törökországban jelenleg is, Dél-Koreában pedig 2023 ősze óta shortolási tilalom van (ez évben várhatóan feloldják), de a 2008-as válság idején érvényben volt Ausztráliában, az USA-ban, 2012. július 23-án újra kirótták ideiglenesen Spanyolországban és Olaszországban (Battalio et al., 2012).

Ugyancsak említettük, hogy a shortolási lehetőség számos tanulmányban, könyvben sztenterd feltétel, lásd például Elton et al. (2014), méghozzá végtelen mennyiségben. Az ennek megfelelő modellt megkapjuk, ha az (1a) feltételeket töröljük. Jelölje a $V_{short}^{Stoxx}(E)$ a minimum kockázati szintet (szórásnégyzetet) shortolási lehetőség mellett, amikor a befektetés elvárt hozamszintje E a *Stoxx* nevű portfóliótól.

Elsődleges célunk az (1) alatti feladat megoldása, de ehhez egy segédmodellt definiálunk, mely egyúttal legalább annyira híres. E modellben azt tételezzük fel, hogy létezik egy kockázat nélküli befektetési lehetőség, ennek pozitív várható hozama pedig r . Tervezett eljárásunkkal az a célunk, hogy az (1)-(2) feladatot szimultán módon oldjuk meg, ami azt jelenti, hogy analitikus formában adjuk meg a haszon-kockázati hatékony felületet azon esetekre is, amikor shortolás nem lehetséges, de mind a csak kockázatos részvényeket tartalmazó portfólióra, mind arra az esetre, amikor a kockázatos részvények mellett egy kockázat nélküli befektetési lehetőségünk is van. Az új modellünk tehát egy kockázat nélküli befektetési lehetőség esetén az alábbi lesz:

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{2a}$$

$$\mathbf{1}'\mathbf{x} + y = 1 \tag{2b}$$

$$\mathbf{a}'\mathbf{x} + ry = E \tag{2c}$$

$$\frac{V^{Stoxx}(E)}{2} = \min_x \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \tag{2d}$$

Az y változó az egységnyi tőkéből azt a részarányt méri, melyet a kockázat nélküli helyre fektetünk be r kamatláb mellett, a keletkező minimális kockázatot pedig a $V^{Stoxx}(E)$ függvény méri, amikor a befektetéstől E hozamot várunk el, oly módon, hogy shortolási lehetőség tiltva van.

Mindkét modellünk esetében, ha eltekintünk a befektetési változókra vonatkozó nem-negativitási feltételektől, akkor a shortolási tevékenységet lehetővé tevő modellekhez jutunk. E modellekre viszont régóta ismertek analitikus megoldások. Merton 1972-ben adta meg az (1) alatti feladat explicit megoldását a nem-negativitási feltételek nélkül. A hatékony felületet az alábbi függvénnyel lehet meghatározni:

$$V_{short}^{Stoxx}(E) = \frac{fE^2 - 2dE + e}{ef - d^2}. \quad (3)$$

Ahhoz, hogy az E nagyságú várható hozam minimális kockázat mellett valósuljon meg, az alábbi befektetési arányokra van szükség:

$$\mathbf{x}(E) = \frac{(e - dE)\mathbf{C}\mathbf{1} + (fE - d)\mathbf{C}\mathbf{a}}{ef - d^2}, \quad (4)$$

ahol $\mathbf{C} = \mathbf{V}^{-1}$, $e = \mathbf{a}'\mathbf{C}\mathbf{a}$, $f = \mathbf{1}'\mathbf{C}\mathbf{1}$, $d = \mathbf{1}'\mathbf{C}\mathbf{a}$. Hangsúlyozni kell, eme analitikus formák akkor léteznek, amikor a részvények várható hozamai között különbözők vannak (mely feltétel az eredeti Merton-diszkusszióban nem szerepel). A differenciálhatóság szempontjából fontos szerepe lesz e tulajdonságnak, ugyanis, ha a portfólióban olyan részvények lesznek, amikor azok várható hozamai egyformák, a hatékony felület nagy valószínűséggel nem lesz differenciálható. A shortolási lehetőség feltételezésével tehát, amikor a részvények várható hozamai nem mind egyformák, a hatékony felület mindig differenciálható lesz (lásd Vörös és társai, 1999).

Amikor egy kockázat nélküli befektetési lehetőség van r hozammal, és shortolás lehetséges, azaz a (2a) feltételektől eltekintünk, akkor Buser (1977) alapján a minimális kockázat az alábbi lesz:

$$V_{short}^{Stoxx}(E) = \frac{(E - r)^2}{fr^2 - 2dr + e}, \quad (5)$$

vagyis az (5) négyzetgyöke egy egyenes vonal, mely az r pontban lépi át a vízszintes vonalat. Másként interpretálva, az $y = 0$ esetre az (1) és (2) alatti modelleknek ugyanaz a megoldása, az (5) alatti parabola érinti a (3) alatti parabolát e pontban. (A (3)-(5) alatti kifejezésekhez hasonló formulákat láthatunk a Guijarro, 2018 és Guijarro – Tsinaslanidis, 2021 tanulmányokban is.)

Most térjünk vissza abba a világba, amikor a shortolás tilalom alatt van, vagy kutatók eleve úgy gondolják, a hatékony felület nem is tartalmazhat olyan portfóliókat, melyekben valamelyik részvény aránya negatív súllyal van jelen. Szokásos módon, tételezzük fel, hogy egy angyal megmondja nekünk, hogy a portfóliótól elvárt E hozam egy adott nyílt intervallumban melyek azok a részvények, melyek aránya pozitív számmal fejezhető ki, és

e részvényeket fogja össze az M halmaz. Az összes többi legyen az N halmazban, vagyis ők azok a részvények, melyek aránya nulla a portfólióban. Amennyiben a részvények (változók) e kategorizálása optimális, akkor a pozitív változók halmazára Merton fenti képletei alkalmazhatók, hiszen optimális a változók kategóriába sorolása, és a zérus befektetések olyanok, mintha nem is léteznének a szóban forgó intervallumban.

Interpretációként nézzünk rá a ma már Nobel-díjas Dybvig 1984-es híres problémájára, ahol

$$\mathbf{a}' = [1 \quad 3 \quad 4], \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon & 2 \\ 0 & 2 & 4 + \epsilon \end{bmatrix}$$

és ϵ egy adott paraméter a kovarianciamátrixban, továbbá shortolás nem lehetséges. Pozitív paraméterre tehát mindegyik részvény kockázatos, és Dybvig arra hívta fel a figyelmet, hogy amennyiben a hatékony felületen töréspont van, vagyis nem differenciálható, akkor a törésponthoz tartozó részvényben csak olyan részvények lehetnek, melyekhez tartozó várható értékek azonosak, viszont ennek fordítottja nem igaz. Történetesen az $0 < \epsilon < 1/3$ paraméterértékekre az $E = 3$ várható értéknél a portfólió optimális struktúrája (ami minimális kockázatot ad): $x_2 = 1, x_1 = x_3 = 0$, és a hatékony felület nem differenciálható. Azonban amikor $\epsilon = 1/3$, a portfólió optimális struktúrája ugyan az, vagyis $x_2 = 1, x_1 = x_3 = 0$, de a hatékony felület simává válik és differenciálható. Most nézzük meg a fenti feladatot $\epsilon = 0.1$ értékre. Az $E = 4$ várható hozamértékre könnyű meghatározni az optimális megoldást. Az nem lehet más, mint $x_3 = 1, x_1 = x_2 = 0$, és $V_R^{Dybvig}(4) = 4.1$, és $M_1 = \{Stock_3\}$, ahol M_i jelölje az aktuálisan pozitív változók halmazát.

Tegyük fel, angyalunk elárulta: a $3 < E < 4$ intervallumban, $E = 3$ -ban, az $1 < E < 3$ intervallumban a pozitív változók halmaza sorjában a következőképpen alakul: $M_2 = \{Stock_3, Stock_2\}$, $M_3 = \{Stock_2\}$ és $M_4 = \{Stock_2, Stock_1\}$. Ekkor M_2 -re: $\mathbf{a}' = [4, 3]$ és $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 4.1 & 2 \\ 2 & 1.1 \end{bmatrix}$, és a szükséges számításokat elvégezve azt kapjuk (3) felhasználásával, hogy a $3 < E < 4$ intervallumban a hatékony felület analitikus formája az alábbi:

$$V_R^{Dybvig}(E) = 1.2E^2 - 5.4E + 6.5.$$

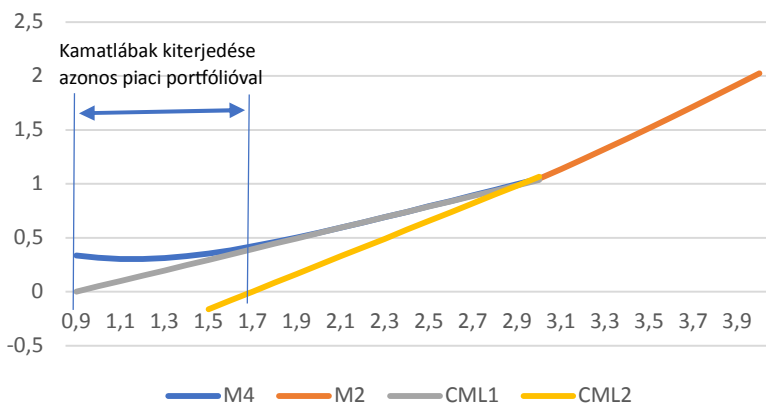
Hasonló eljárással az $1 < E < 3$ intervallumra (ahol $M_4 = \{Stock_2, Stock_1\}$, $\mathbf{a}' = [3, 1]$ és $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$), a hatékony felület:

$$V_R^{Dybvig}(E) = 0.3E^2 - 0.7E + 0.5.$$

A teljes hatékony felület az 1. ábrán látható, és jól láthatóan a hatékony felület az $E = 3$ pontban nem differenciálható, töréspontja van, és e ponthoz nagyon sok (végtelen) kockázat nélküli hozampontból húzható érintő. A kockázat beragad, nem csökken a kamatláb csökkenésével egy intervallumon keresztül, ellentétben azzal, amikor a felület differenciálható, és a kockázat

nélküli kamatlábakból húzott érintők mindig más és más, kisebb kockázatú piaci portfóliót érintenek.

A portfólió hatékony felületének analitikus formában történő felfedése nagy pontossággal teszi lehetővé a differenciálhatóság megállapítását. Több, neves portfólió hatékony felületének analitikus formáját állítottuk elő, az értelemeszerű helyhiány miatt most csak az Euro Stoxx 50 csomagot tekintjük. Mivel a shortolás melletti analitikus formákat régóta ismerjük, megismerve a shortolás nélküli felület explicit formáit, kínálja magát a két felület összehasonlítása. A különbség meglepő, még a BUX5 esetében is (mely a piaci kapitalizáció alapján az 1%-nál magasabb arányt képviselő 5 részvényt foglalja magában), főleg azért, mert az utóbbi esetben a két felület egybeesik, az előbbiben viszont a különbség lényeges. Az explicit formák előállítására egyedi algoritmust fejlesztettünk ki, mely robusztus és stabil. Tekintve, hogy új szoftverről van szó, jóságának, pontosságának manuális ellenőrzése (Excel használatával) nagy méretű feladat esetén megterhelő.



1. ábra. A Dybvig-féle feladat hatékony felületei, amikor egy piaci portfólióhoz számos kamatláb tartozhat (CML: capital market line)

A probléma elméleti háttere a 90-es évekre nyúlik vissza, amikor Vörös és társai (1999) választ adtak Dybvig felvetésére, miszerint amikor az M halmazban levő részvények várható hozamai azonosak, a felület mégis differenciálható. A kulcs az M halmaz azon tulajdonságának ismerete, hogy a várható hozam egy adott intervallumában vagy pontjában, illetve az ehhez tartozó kamatláb intervallumában, mely részvények részaránya pozitív. Az említett angyalunk gondolkodásának megismeréséhez vezessük be az alábbi jelöléseket: jelölje \mathbf{V}_{11} az M halmazban levő részvények kovarianciamátrixát, a teljes kovarianciamátrixot pedig particionáljuk ennek megfelelően: $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}$, hasonló módon a várható értékből álló vektor: $\mathbf{a}' = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$. Legyen \mathbf{C} a \mathbf{V}_{11} mátrix inverze, és amennyiben az M halmazban k elem van, akkor a \mathbf{C} mátrix mérete $k \times k$, az \mathbf{a}_1 vektornak pedig k eleme van. Az angyal a részvények helyes besorolását akkor végezte el, ha az r kamatlábnak

a $-\infty < r < \max_i\{a_i\}$ intervallumban létezik olyan értéke, mely megoldása az alábbi egyenlőtlenségrendszernek:

$$\mathbf{C}\mathbf{a}_1 - r\mathbf{C}\mathbf{1} \geq \mathbf{0} \quad (6a)$$

az M halmazra, és

$$\mathbf{V}_{21}\mathbf{C}\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + r(\mathbf{1} - \mathbf{V}_{21}\mathbf{C}\mathbf{1}) \geq \mathbf{0} \quad (6b)$$

az N halmazra, ahol az N halmaz az M komplementere, azaz a zérus értékű változók halmaza. Az $y = 0$ értékre a részvények ezen elrendezése optimális megoldását adja az (1) alatti feladatnak is. Ezek alapján az (1)-(2) alatti feladatok megoldására az alábbi algoritmust definiálhatjuk:

Az egyszerűség miatt azt tételezzük fel, hogy a részvények várható hozamértékei között nincsenek azonosak (ha igen, lásd Vörös és társai, 1999). Legyen $r_0 = \max_i\{a_i\}$, és tegyük fel, ezt a maximális hozamot a $Stock_1$ nevű részvény adta meg. Ekkor az ALGORITMUS-t az alábbi módon definiáljuk:

1. **lépés:** Legyen $k = 1$, $M_k = \{Stock_k\}$, és legyen így az összes többi részvény az N_k halmazban, mely nincs az M_k -ban.
2. **lépés:** Particionáljuk a várható érték vektort és a kovarianciamátrixot ennek megfelelően. Elsőként számítsuk ki a kovarianciamátrix inverzét, valamint az összes kifejezés értékét, melyeket a (6) alatti egyenlőtlenségrendszerekben használunk. Számítsuk ki az e , f , d értékeket.
3. **lépés:** Ha sem $\mathbf{C}\mathbf{1}$ -ben, sem $(\mathbf{V}_{21}\mathbf{C}\mathbf{1} - \mathbf{1})$ -ben nincs negatív érték, ugrás az 5. lépésre. Másként legyen r_k az a legnagyobb alsó korlát, mely kielégíti a (6) alatti egyenlőtlenségrendszereket, és tételezzük fel, hogy a korlát a $Stock_{k+1}$ nevű részvényhez tartozik, és e korlát csak egy részvényhez tartozik (az egyszerűség kedvéért).
4. **lépés:** Ha r_k értéket egy (6b)-béli egyenlőtlenség adja, legyen $M_{k+1} = M_k \cup \{Stock_{k+1}\}$, és az összes többi részvény az N_{k+1} -ben lesz. Ha r_k értékét egy (6a)-hoz tartozó egyenlőtlenség adja, legyen $N_{k+1} = N_k \cup \{Stock_{k+1}\}$, és az összes többi részvény az M_{k+1} halmazban lesz. Ekkor az $r_k \leq r < r_{k-1}$ intervallumra a hatékony felületet egyetlen kockázat nélküli papír esetén, melyet $V(E)_k$ -val jelölünk, az (5) alatti egyenlet adja. Ha az M_k -nak több mint egy eleme van, ezen r értékekre a kockázatos részvények hatékony felületét, melyet $V_R(E)_k$ -val jelölünk, a (3) kifejezés adja. Másként, legyen $Stock_u$ az egyetlen részvény az M_k halmazban. Ekkor legyen E_k a $Stock_u$ részvény várható értéke, továbbá a kockázatos papírok hatékony felülete: $V_R(E_k)_k = Stock_u$ részvény hozamának szórásnégyzete. Legyen $k = k + 1$. Ugrás a 2. lépéshez.
5. **lépés:** Felhasználva az e , f , d értékeket, a $-\infty < r < r_{k-1}$ intervallumra megkaptuk a $V(E)$ és $V_R(E)$ függvényeket. A teljes portfólió hatékony felület minimumpontja az $E_{\min} = d/f$ pontban van, melyhez tartozó kockázati érték: $V_R(\frac{d}{f}) = 1/f$. Stop.

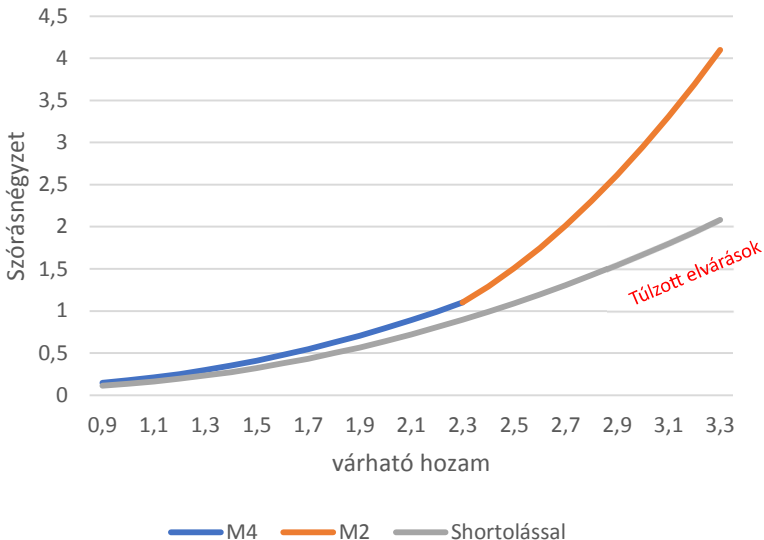
(Az algoritmusban feltételeztük, hogy a korlátokat mindig *egy* egyenlőtlenség adja. Amikor ez nem így van, a részvényeket ugyanúgy az előírásnak megfelelően mozgatjuk. Az összes vizsgálatot tekintve gyakorlatilag a több százas nagyságrendű iterációs lépések során nem fordult elő (de megeshet), hogy egy pontban több részvény is kilép vagy belép a pozitív változók halmazába, vagy egy belépéskor egy másik kilép).

Egy M_k halmaz a (6a-b) feltételeket kielégíti azon r értékekre, melyekre $r \in [r_k, r_{k-1}]$, vagy másként, azon E várható hozam értékekre, melyekre $E \in [E_k, E_{k-1}]$, ahol E_k a megoldása a $V_R(E)_k = V_R(E)_{k+1}$, $1 < k < n$ ($n \geq 3$) egyenletnek. (Amennyiben a felület differenciálható, a $V_R(E)_k = V_R(E)_{k+1}$ egyenlet megoldása egyszerű, mivel a diszkriminánsnak zérusnak kell lennie.)

Miután most már rendelkezünk a kockázatos részvények hatékony felülete analitikus formájával, pontosan tudjuk összehasonlítani azt a shortolással adódó hatékony felülettel. Használva a fenti 3×3 -as mátrixunkat az $\epsilon = 0.1$ input értékkel a (3) alatti képlet megadja a shortolás esetén adódó hatékony felületet:

$$V_{short}^{Dybvig}(E) = 0.2625E^2 - 0.65E + 0.483.$$

A 2. ábra mutatja a hatékony felületeket shortolással és a nélkül, mutatva egyúttal a kettő közötti különbséget. Minél nagyobb a szakadék a két hatékonysági felület között, annál nagyobb tévedési lehetőség egy portfólió teljesítményének értékelésénél. A shortolással kimutatott hatékony felület sokszor fokozott várakozást ígér portfóliókkal szemben, melyek a valóságban nem is érhetők el.



2. ábra. A Dybvig-feladat hatékony felületei shortolással és nélküle

A következő fejezetben a Euro Stoxx 50, valamint a BUX5 portfóliócsomagot elemezzük, az input adatokat különböző időperiódusokra alapozva.

Külön időszakot jelölünk ki a „béke” időszakára, melyet a 2015. január 1. és 2020. január 1. közötti időszakkal azonosítottunk, lesz Covid- és háborús időszak, valamint ezeket átívelő periódusok.

3 Portfóliók empirikus elemzése különböző időszakokban

3.1 A Euro Stoxx 50

A Euro Stoxx 50 Európa legtekintélyesebbnek tartott 50 blue chipjét fogja össze 11 különböző országból és iparágból, melyek a legbefolyásosabbnak és leglikvidebb papíroknak tekinthetők. A Euro Stoxx 50 részvényindexeket a Deutsche Börse Group kezeli, és nyilvánosan elérhetők a finance.yahoo.com felületen. Minden részvény esetében a hónap végi árfolyamokat tekintettük 2015-től napjainkig, melyeket adatbankban gyűjtöttünk össze. Ebből az időintervallumokat tetszőlegesen választhatjuk ki, majd az analízisre használt, a fent definiált algoritmusra alapozott szoftverünk a későbbiekben látható táblázatokat, analitikus formákat és függvényeket adja. Az alábbi intervallumokat választottuk ki: 2015–19, 2015–23, 2015–24, 2020–24 (Covid- és háborús időszak), 2022–24 (háborús időszak). Minden kezdő év január elsejével értendő, kivéve a 2022-es évet, mely február elsejével kezdődik. A záró évek december 31-ig végződnek. Mindegyik portfólió esetében az adatigény és a kapott információtömeg jelentős, tulajdonképpen ezért nem közlünk adatokat és eredményeket az FTSE100-ról és a DAX 40-ről. Ezek átfogó analízisét lásd Vörös és Rappai, 2025 tanulmányban. Az Euro Stoxx 50 input adatait az 1. és a 2. függelék adják közre, melyek tartalmazzák a 2015.01.01–2025.01.01 időszak alatt megfigyelt havi adatokból adódó átlagos hozamértékeket, piaci kapitalizációs hányadot, valamint a kovariancia-variánciá-mátrixot. Hogy növeljük az algoritmusunkba vetett bizalmat, az első két lépést részletezzük.

Első lépésben a kezdő M halmazt definiáljuk, amihez kiválasztjuk azt a részvényt, melynek legnagyobb volt az átlagos hozama a megfigyelt időszak alatt, tehát $M_1 = \{Ferrari\}$, mivel a Ferrari részvénynek volt a legnagyobb átlagos hozama, mely 0.0203, és kovariancia-variánciá-mátrixból a hozzá tartozó szórásnégyzet: 0.00461. Ezért a hozzá tartozó partíció: $\mathbf{a}_1 = [0.0203]$ és $\mathbf{V}_{11} = [0.00461]$, továbbá N_1 a Ferrari kivételével az összes többi részvényt magában foglalja. Következésképpen, \mathbf{a}_2 magában foglalja az összes részvény átlagos hozamát, kivéve a Ferrariét, míg \mathbf{V}_{21} a Ferrari oszlopvektorát jelöli a kovariancia-variánciá-mátrixból, kizárva abból a Ferrari szórásnégyzetét.

Most könnyen kiszámíthatók a kulcsösszefüggések: $\mathbf{C} = 216.96$, $\mathbf{Ca}_1 = 4.39$, és természetesen $\mathbf{C1} = 216.96$. Ezen értékeket felhasználva a (6a) alatti összefüggésekben egy felső korlát adódik, mely természetesen $r < 0.0206$. A (6b)-re vonatkozó kalkuláció most könnyű, mivel \mathbf{V}_{21} -nek csak egy oszlopa van 49 elemmel. E 49 egyenlőtlenségből csak a 43.-at mutatjuk be, mely $-0.008 \geq -0.49016r$, tekintettel arra, hogy ez adja a legnagyobb alsó

korlátot: $r \geq 0.0164$. Ez az egyenlőtlenség az RMA.PA (Hermes) részvényhez tartozik, azt jelezve, hogy be akar lépni a pozitív változók halmazába. Az eseményt a következőképpen azonosítjuk: $M_2 : RMA.PA$, így M_2 -nek most már két eleme van, a Ferrari és a Hermes. Amikor egy részvény el szándékozik hagyni a pozitív változókat tartalmazó halmazt, úgy jelezzük, hogy \rightarrow , a részvény neve után. Szóval, a második iterációs lépésben az alábbi inputjaink vannak:

$$\mathbf{V}_{11} = \begin{bmatrix} 0.0046 & 0.0023 \\ 0.0022 & 0.0049 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 287.54 & -138.44 \\ -138.44 & 271.54 \end{bmatrix} \quad \text{és}$$

$$\mathbf{a}'_1 = [0.0206, 0.0184],$$

ahol 0.0184 a Hermes részvény átlagos hozama, melynek varianciája 0.0049, kovarianciája a Ferrarival pedig 0.0023. Természetesen (6a) adja a felső korlátot az r értékének, ugyanakkor W Kluwer szolgáltatja a legnagyobb alsó korlátot, amikor $r = 0.01402$. A 3. függelék listázza az iteráció szükséges inputjait, és dőlttel jelöltük a következő alsó korlátot adó részvényt. Vagyis, $M_3 : WKL$ (Kluwer), így az új indexhalmaz: $M_3 = \{Ferrari, RMA, WKL\}$. Az iterációs lépéseket addig kell folytatni, amíg el nem érjük, hogy r -nek nem lesz alsó korlátja. Az eljárás felfedi a portfólió hatékony felületének teljes struktúráját, egészen a minimum pontjáig. Az 1. táblázat foglalja össze a hatékony felület kifejlődésének útját, az intervallumhatárokat mindkét modellre vonatkozóan. És persze a legfontosabb eredményt, a hatékony felület analitikus formáját. Mint látható, a kulcs output információkat az e , f , d értékek adják, melyek intervallumonként változnak.

A 3. ábra az Euro Stoxx 50 hatékony felületét ábrázolja, melyet 15 különböző ívű parabolaszakasz feszít ki (melyből 13-at mutatunk). A maximum-pontot adó M_1 kivételével mindegyik ívet meghatározó M halmazban legalább két részvény van, amiből következik, hogy az azokhoz tartozó átlagos hozamértékek között mindig van különböző. Mint tudjuk, a nem-differenciálhatóság szükséges feltétele, hogy a hatékony felületen olyan portfólió kell legyen, melyben levő részvények hozam értékei azonosak. Ez csak az M_1 halmaznál fordul elő, másutt sehol. Ezért a nem-differenciálhatóság szükséges feltétele nem teljesül a belső pontokban, így nyugodtan kijelenthetjük, hogy a végpontok kivételével a Euro Stoxx 50 portfólió hatékony felülete egy folytonosan differenciálható függvény, egymásba simuló parabolaívek sorozata, melyek mindig érintik, és nem metszik egymást. A parabolaszakaszok láthatósága céljából szaggatott vonallal jelöltük a hatékony felületet, a határpontokban a parabolaívek érintik, vagy metszik egymást (esetünkben utóbbi nem fordul elő), és e pontok adják meg az intervallumok határát, amikor azokat a várható hozammal jellemezzük.

Az analitikus, explicit forma mellett az 1. táblázat számos információt tartalmaz. A tábla utolsó sora adja az Euro Stoxx 50 részvényekkel elérhető minimális kockázatot, melyet az M_{16} halmaz részvényeivel lehet elérni. Ezt az iterációs eljárás 16-ik lépése adta, és a halmazban 10 részvény van. Az M_{16} sor szerint $f = 5376.4$ és $d = 3.1$. A (3) meghatározás adja meg a

paraboláiv explicit formáját, és a parabola minimumpontja az $E = d/f$ pontban van. Behelyettesítve a sorban levő értékeket, azt kapjuk, hogy $E = 0.000575$, mely csak 0.7%-os éves hozamra elegendő. A parabola egyenletébe helyettesítve az értéket, megkapjuk a minimális kockázati szintet, szórásnégyzetben kifejezve: $V_R^{Euro}(0.000575) = 0.000186$, ahol $V_R^{Euro}(E)$ a minimális szórásnégyzet nagysága, amikor az elvárt hozam szintje E , és csak kockázatos részvényekben van a pénzünk. Ehhez mindössze 10 részvény kell az 50-ből.

Az r kamatláb határai	Hozamhatárok (az (1) megoldása)	A hatékony felület részvényösszetétele	Kulcs output együtthatók			A hatékony felület analitikus formája, a $V_R^{Euro}(E)$ fv.		
(a (2) megoldása)			e	f	d	a	b	c
[0.0164, 0.0203]	[0.0203]	$M_1 = \{\text{Ferrari}\}$	0.8900	217.0	4.40			0.00461
[0.014, 0.0164]	[0.0199, 0.0203]	$M_2: \text{Hermes}$	0.1070	282.2	5.47	1332.8	-51.6	0.504
[0.0079, 0.014]	[0.0181, 0.0199]	$M_3: \text{W Kluwer}$	0.1443	473.6	8.15	249.1	-8.6	0.0759
[0.0056, 0.0079]	[0.0179, 0.0181]	$M_4: \text{ASML}$	0.1445	476.2	8.17	236	-8.1	0.0716
[0.0035, 0.0056]	[0.0173, 0.0179]	$M_5: \text{D.Börse}$	0.1490	619.5	8.98	52.9	-1.53	0.0127
[0.00135, 0.0035]	[0.01661, 0.0173]	$M_6: \text{MüV2}$	0.1497	676.0	9.18	39.8	-1.08	0.0088
[0.00132, 0.00135]	[0.01660, 0.01661]	$M_7: \text{Iberdola}$	0.1499	788.1	9.33	25.3	-0.599	0.0048
[-0.0005, 0.0013]	[0.0159, 0.0166]	$M_8: \text{ASML} \rightarrow$	0.1499	783.3	9.32	25.7	-0.611	0.0049
[-0.00131, -0.0005]	[0.0155, 0.0159]	$M_9: \text{PRX.AS}$	0.1499	889.8	9.27	18.7	-0.39	0.0032
[-0.0005, 0.0013]	[0.0159, 0.0155]	$M_{10}: \text{DPWA}$	0.1574	5231.5	3.59	6.462	-0.00886	0.00019
[-0.0024, -0.0013]	[0.0102, 0.0155]	$M_{11}: \text{DeutchTele}$	0.1580	5345.1	3.31	6.41	-0.00796	0.00019
[-0.0087, -0.0024]	[0.0038, 0.0102]	$M_{12}: \text{Adidas}$	0.1590	5380.0	3.00	6.29	-0.00704	0.000188
[-0.022, -0.0087]	[0.0018, 0.0038]	$M_{13}: \text{Hermes} \rightarrow$	0.1580	5374.9	3.13	6.4	-0.00746	0.000188
[-0.0315, -0.022]	[0.0015, 0.0018]	$M_{14}: \text{TTE.PA}$	0.1610	5376.5	3.08	6.34	-0.00726	0.000188
[-0.217, -0.0315]	[0.000707, 0.0015]	$M_{15}: \text{DBörse} \rightarrow$	0.1560	5376.4	3.10	6.48	-0.00746	0.000188
[-0.29, -0.217]	[0.00067, 0.000707]	$M_{16}: \text{EL.PA}$	0.1570	5376.4	3.10	6.43	-0.0074	0.000188
$(-\infty, -0.29]$	[0.000575, 0.00067]							

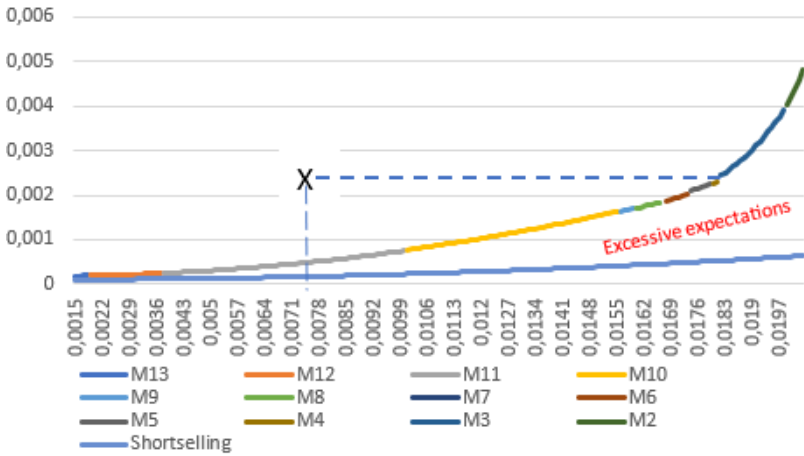
1. táblázat. A Euro Stoxx 50 részvények hatékony felületének struktúrája a várható hozon függvényében, shortselling nélkül, a 2015. január 1–2025. január 1. adatok alapján

A 3. ábrán ábrázoltuk a Euro Stoxx 50 teljesítményét, melynek hozamértékét úgy kaptuk meg, hogy a részvények átlagos hozamát megszoroztuk a piaci kapitalizációs aránnyal, és ezt összegeztük. Ennek szórásnégyzetét pedig úgy érjük el, hogy a kovarianciamátrixot szoroztuk meg jobbról és balról a piaci kapitalizációs arányt mutató vektorral. Ennek megfelelően a Euro Stoxx 50 várható hozama a jelenlegi piaci kapitalizációs arányok alapján 0,0073, mely évesített nagysága közel 9% ($0,0073 \times 12 \times 100$). A havi várható hozam szórásnégyzete 0,0024, és e két szám határozza meg a 3. ábrán elhelyezett X pontot. A 0,0024-es kockázati szinten vízszintes vonalat húzva az ábrán azt látjuk, hogy ez a szaggatott vonal a shortolás nélküli hatékony felületet az M_3 halmazhoz tartozó parabolaívben metszi, közel a következő váltási ponthoz. Az 1. táblázat szerint e halmazhoz tartozó parabola egyenlete: $V_R^{Euro}(E) = 249.1E^2 - 8.6E + 0.0759$. Megoldva a $0.0024 = 249.1E^2 - 8.6E + 0.0759$ egyenletet, azt kapjuk, hogy $E = 0.0183$ (22% évesített). Másként fogalmazva, ha ugyanakkora kockázati szintet vállalunk fel, mint amennyit a jelenlegi piaci kapitalizációs értéken a Euro Stoxx megvalósít, évi 22%-os hozamot érhetnénk el. Ez akkor lenne, ha a portfólió szerkezet az alábbi lenne:

$$x_{Ferrari} = 48.4\%, \quad x_{Herm} = 14.2\%, \quad x_{Kluwer} = 37.4\%.$$

E befektetési arányok a (4) alatti képlet felhasználásából erednek, melynek e, f, d értékeit az M_3 sorából olvashatjuk ki, és az $E = 0.0183$ -as hozamot helyettesítjük be.

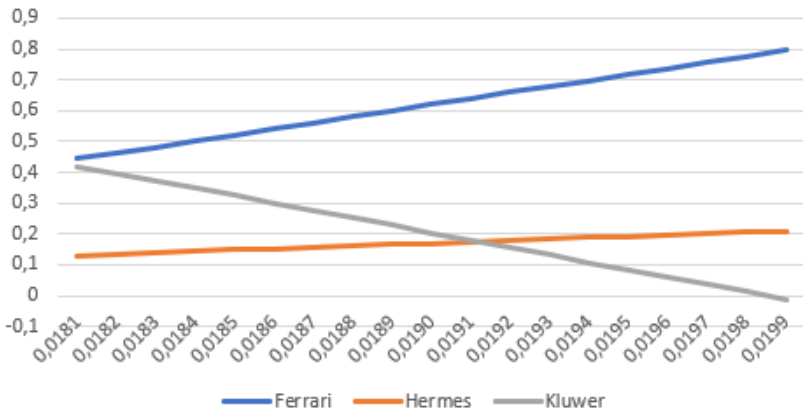
Euro Stoxx 50: 2015.01.01-2025.01.01



3. ábra. A Euro Stoxx 50 hatékony felületei shortolással és nélküle, valamint a portfólió teljesítménye piaci kapitalizáció alapján

A (4) alatti képlettel a részvények arányának dinamikus változását követhetjük az elvárt hozam függvényeként. Az M_3 által meghatározott portfólió összetételének változását mutatja a 4. ábra, ahol az arányok összege mindig 1. Ferrari folyamatosan növeli részesedését, a Kluwer nem bírja a versenyt, és kezd kiszállni, míg a Hermes erősíti pozícióját.

The dynamic structure of M_3



4. ábra. A portfólió összetételének változása a $0,0181 \leq E \leq 0,0199$ intervallumban

Miután ismerjük néhány kritikus pont paramétereit, valamint a hatékony felület analitikus formáját, pontosan meghatározhatjuk azon portfóliók halmazát, melyek felülírják az Euro Stoxx 50 piaci kapitalizációs összetétele

alapján mért teljesítményt. Az Euro Stoxx 50-hez képest felülteljesítő portfóliók kiterjedését azzal a területtel mérjük, melyet az Euro Stoxx 50 teljesítményéből kiinduló vízszintes (azonos kockázat mellett nagyobb hozamot adó portfóliók), függőleges (azonos hozam mellett kisebb kockázattal járó portfóliók) vonalak, valamint a shortolás nélküli hatékony felület (mindkét dimenzióban jobban teljesítő portfóliók) határolnak közre.

Jelöljük e terület méretét T_{posi}^{Euro} szimbólummal. Ekkor

$$T_{posi}^{Euro} = 0.0024 \times (0.0183 - 0.0073) - \int_{0.0073}^{0.0183} V_R^{Euro}(E) dE = 0.0000119.$$

A következőkben azt mérjük meg, hogy mekkora a felülteljesítő portfólióknak a kiterjedése, amikor shortolás lehetséges. Ehhez a teljes méretű, 50 részvényre vonatkozó kovarianciamátrix és hozamvektor szükséges, és mivel nincs a változókra előjelmegkötés, a (3) alatti összefüggés a teljes hozamskálára használható. Vegyük tehát az eredeti, 50-es kovarianciamátrixot, használjuk szintén az 50 elemű hozamvektort, és vegyük e mátrix inverzét. Határozzuk meg a hozamvektor (és az egységvektor) segítségével az e , f és d értékeket: $e = 0.8016$, $f = 10219.9$, $d = 21.78$. Merton (1972) szerint tehát, alkalmazva a (3) alatti összefüggést, a shortolás melletti hatékony felület (melyet $V_{short}^{Euro}(E)$ szimbólummal jelölünk), az alábbi lesz:

$$V_{short}^{Euro}(E) = 1.3242E^2 - 0.005645E + 0.000104,$$

a 3. ábrán a legalacsonyabb vonal. Ez a parabola az Euro Stoxx 50 kockázati szintjével (szórásnégyzetével, ami 0.0024) azonos értéket akkor veszi fel, amikor $E = 0.0439$, mely évi átlagos 53%-os hozamnak felel meg. Talán ezért nevezi több komoly szerző e hatékony felületet „lehetetlennek”. Hasonlóan a shortolás tilalmi esethez, az Euro Stoxx 50 teljesítményét felülíró portfóliók kiterjedését megmérhetjük, de most az Euro Stoxx 50 teljesítményét felülíró portfóliók határa a „lehetetlen” hatékony felület határáig terjed. T_{short}^{Euro} -vel jelölve e területet, azt írhatjuk, hogy:

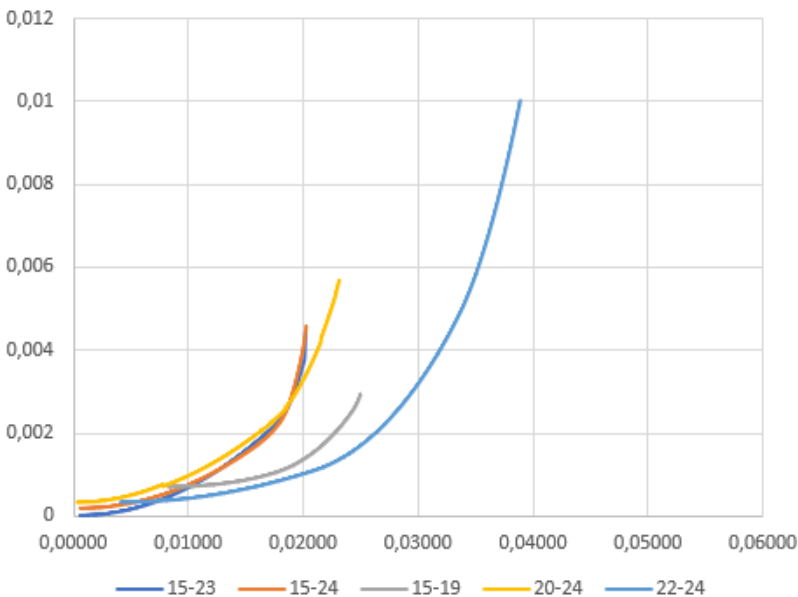
$$T_{short}^{Euro} = 0.0024 \times (0.044 - 0.0073) - \int_{0.0073}^{0.0440} V_{short}^{Euro}(E) dE = 0.000047.$$

Összehasonlítva a két területet azt láthatjuk, hogy a $T_{short}^{Euro}/T_{posi}^{Euro}$ hányados 4, ami megengedhetetlenül magas elvárásokat támaszt, vagy másként nézve, jelentősen leértékeli az Euro Stoxx 50 portfóliócsomag jelenlegi piaci kapitalizációs arány alapján mért teljesítményét.

A kifejlesztett algoritmusunkkal kapcsolatban jegyezzük meg, hogy minden iterációs lépés során egy mátrixot kell invertálnunk, el kell végezni néhány mátrix-vektor szorzást, majd meg kell oldani egy 50 egyenlőtlenségből álló rendszert, melynek egy változója van, az r . Az invertálandó mátrix mérete az M halmaz számosságával nő, tehát az első mátrix 1×1 -es, a legnagyobb méretű pedig 10×10 -es, mivel M -nek soha nincs tíznél több eleme.

Össességében pedig mindössze 16 iterációs lépésre volt szükség, és rendelkezésre áll a teljes hatékony felület analitikus formája. Az eljárás tehát viszonylag egyszerű, hatékony, a hozzá kidolgozott szoftver robusztus, biztosan old meg nagyobb feladatokat is.

Nem csak a 2015–25 közötti időszakot vizsgáltuk, kíváncsiak voltunk, találunk-e nem differenciálható hatékony felületet más időintervallumokat véve. A következő időszakokra végeztünk vizsgálatokat még: 2015–24, 2015–20, 2020–25 és 2022. február – 2025, vagyis összességében öt vizsgálatot végeztünk a Euro Stoxx 50 portfóliócsomagon. Bár néha közel voltunk hozzá, de végül is egyetlen esetben sem volt nem-differenciálható pont a hatékony felületeken. Az 5. ábra mutatja együtt az öt hatékony felületet, talán mondhatjuk, néhány érdekes információt szolgáltatva. Először is a 2015–23 (2024. január 1.) és 2015-24 (2025. január 1.) hatékony felületek szinte egybeesnek, ugyanazt az eredményt adják. Meglehetősen kockázatos volt a Covid-időszak, ellentétben a háborús időszakkal, amikor nem csak a hozamok voltak magasabbak, de ráadásul a kockázati szintek is alacsonyabbak a békeidőszakhoz (2015–2019) képest.



5. ábra. Az Euro Stoxx 50 hatékony felületei különböző időintervallumokban

A háborús időszak nagy jövedelmeit érdekes módon döntően a pénzügyi szolgáltató szektor hozta: a nagy győztes az Unicredit (UCG.MI), mely dominálja a felső hozamszegmenseket a 46.6%-os éves átlagos hozamával, melyet a SAP, a MunV2 és a D. Telekom követ, és a W Kluwerrel az $E = 0.03$ hozamszinten öt részvény van a piaci portfólióban. A 2015. január 1. és 2023. december 31. közötti adatokat használva mindössze két részvény van

a portfólióban az $E = 0.02$ hozamszint környékén, ugyanakkor a háborús időszak alatt a részvények szinte sorban állnak, hogy részt vegyenek e magas hozamot biztosító portfólióban, és olyannyira verekednek a helyért, hogy gyakran cserélnek helyet. A helyzet pontosan fordítottja a hatékony felület minimumpontja környékén: a pozitív változók tábora stabil, és hosszú hozamintervallumban uralják a jövedelemszinteket. A háborús időszak alatt az M_{12} 12%-os hosszúságú. Ugyanakkor ugyanezen hozamszakaszon a 2015–25-ös adatok alapján a részvények gyakran váltják egymást, a háborús időszak felső hozamszegmenséhez hasonlóan. A 2. táblázat adja meg a 2022. február 1.-től napjainkig (a háborús időszak) időszak alapján készült analízist.

Az r kamatláb határai (a (2) megoldása)	Hozamhatárok (az (1) megoldása)	A hatékony felület részvényösszetétele	Kulcs output együtthatók	A hatékony felület analitikus formája, a $V_R^{Euro}(E)$ fv.
			e f d	a b c
[0.02443, 0.03889]	[0.03889, 0.03889]	$M_1 = UCG.MI$	0.1506 99.6 3.87	0.000 0.000 0.0100
[0.01615, 0.02443]	[0.03358, 0.03889]	$M_2 = SAP$	0.2454 258.5 7.75	78.1021 -4.686 0.0742
[0.01497, 0.01615]	[0.03209, 0.03358]	$M_3 = DTE$	0.3106 508.3 11.79	26.903 -1.248 0.0164
[0.01328, 0.01497]	[0.02964, 0.03209]	$M_4 = MUV2$	0.3526 695.7 14.59	21.5406 -0.904 0.0109
[0.01125, 0.01328]	[0.02696, 0.02964]	$M_5 = WKL$	0.3905 910.5 17.45	17.8054 -0.682 0.0076
[0.00905, 0.01125]	[0.02514, 0.02696]	$M_6 = RACE$	0.3949 945.1 17.84	17.1671 -0.648 0.0072
[0.00735, 0.00905]	[0.02408, 0.02514]	$M_7 = PRX$	0.3996 1002.9 18.36	15.7456 -0.577 0.0062
[0.00351, 0.00735]	[0.02239, 0.02408]	$M_8 = DB1.DE$	0.4023 1052.6 18.72	14.4517 -0.514 0.0055
[-0.00024, 0.00351]	[0.02169, 0.02239]	$M_9 = SAP \rightarrow$	0.4014 981.0 18.47	18.6833 -0.704 0.0076
[-0.00343, -0.00025]	[0.02082, 0.02169]	$M_{10} = IBE$	0.4014 1130.9 18.44	9.9216 -0.323 0.0035
[-0.00372, -0.00343]	[0.02069, 0.02082]	$M_{11} = TTE.PA$	0.4038 1338.8 17.72	5.9102 -0.157 0.0018
[-0.01341, -0.00372]	[0.01076, 0.02069]	$M_{12} = DPWA$	0.4293 3175.0 10.89	2.5517 -0.018 0.0004
[-0.02307, -0.01341]	[0.00884, 0.01076]	$M_{13} = UCG \rightarrow$	0.3764 2880.8 14.84	3.3342 -0.034 0.0004
[-0.03503, -0.02307]	[0.00761, 0.00884]	$M_{14} = AD.AS$	0.3983 2922.1 13.89	3.0091 -0.029 0.0004
[-0.05934, -0.03503]	[0.00631, 0.00761]	$M_{15} = NOKIA$	0.4490 2963.4 12.44	2.5204 -0.021 0.0004
$(-\infty, -0.05934]$	[0.00410, 0.00631]	$M_{16} = BN.PA$	0.4671 2968.5 12.14	2.3955 -0.020 0.0004

2. táblázat. Az Euro Stoxx 50 portfólió hatékony felületének leírása, 2022.02.01 – 2025.01.01, shortolás nélkül

3.2 A BUX 5

A BUX 5 portfólióba azon részvényeket helyeztük el, melyeknek piaci kapitalizációs értéke meghaladja az 1%-ot a Budapesti Értéktőzsde egészén belül, a többiektől eltekintettünk, biztosítva egyfajta likviditását a szóban forgó részvényeknek. Ezek: MOL, MTELE, OPUS, OTP, és a Richter, képviselve az olajipart, telekommunikációt, pénzügyi szolgáltatásokat és a gyógyszeripart, kitéve a teljes piaci kapitalizáció több, mint 95%-át. Az input adatok most könnyen áttekinthetők, a 4. függelék tartalmazza a felhasznált adatokat.

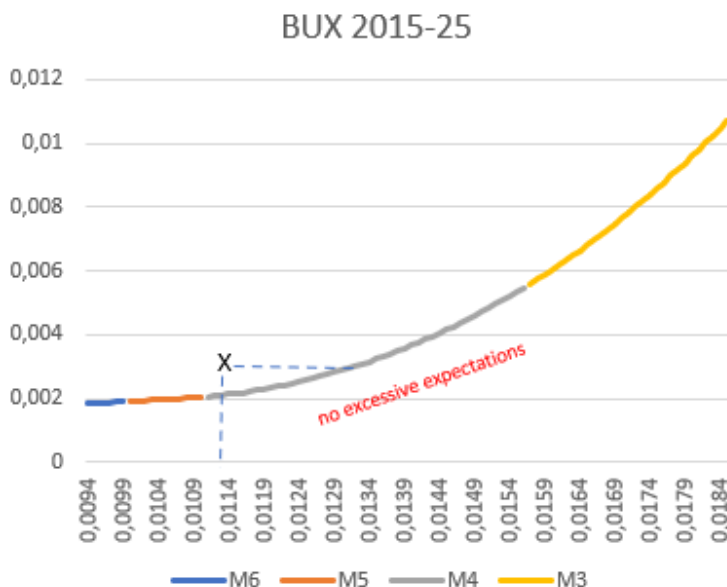
A legnagyobb átlagos hozamot az Opus adja, ezért az M_1 halmazba e részvény kerül, a legnagyobb volatilitással. Az M_5 halmaz mind az öt részvényt magában foglalja, vagyis ebben az intervallumban minden részvény egyidejűleg hasít ki pozitív hányadot a portfólióból. Ebből az következik, hogy a lehetséges és a lehetetlen hatékony felület egybeesik, és nincsenek olyan teljesítményi elvárások, melyeket nem lehetne valamilyen befektetési kombinációval valóra váltani. A 3. táblázat összegzi a megvalósítható hatékony felület teljes leírását, a 6. ábra pedig a hatékony felületet rajzolja fel. Ebből az Opus-szal kezdődő részt levágtuk, hogy ki tudjuk nagyítani az érdekesebb szakaszokat. A BUX 5 egyediségét legalább két dolog adja: egyrészt tehát a lehetséges (shortolás nélküli) és a lehetetlen hatékony felület (shortolási lehetőséggel nyert) egybeesik az $0.0093 \leq E \leq 0.01108$ intervallumban, melyet az M_5 határoz meg, másrészt a BUX 5 a jelenlegi piaci kapitalkizációs értékek alapján jóval hatékonyabb befektetésnek tekinthető, mint az Euro

Stoxx 50 jelenlegi befektetési szerkezete. Mindemellett a két hatékony felület még az M_5 -ön kívül is szorosan együtt halad egy ideig, szinte fedik egymást.

A BUX 5 havi várható hozamaira alapozva, a hatékony felületen elérhető legkisebb szórásnégyzet 0.00191, melyet a 0.0094 hozamszint valósít meg (a 3. táblázat utolsó sorából jövő adat). Ehhez négy részvény kell, a 3. táblázat megadja a hatékony felület teljes leírását. A piaci kapitalizációs struktúrát használva a BUX 5 teljesítményéről azt állíthatjuk, hogy e befektetési szerkezettel (lásd 4. függelék) a havi átlagosan elérhető hozam 0.0112, mely közel 13%-os évi hozamnak felel meg, ennek volatilitása 0.003, mely évi átlagos 19%-os szórásnak felel meg: a kockázatosabb piacok közé tartozó. Ugyanezen kockázati szinten viszont havi 0.0137 hozam is elérhető, mely megvalósítható, ha tőkénket az alábbi arányban fektetjük be: $x_{OPUS} = 14.3$, $x_{OTP} = 29.6$, $x_{Richter} = 15.4$, $x_{MTEle} = 40.7\%$. Vagyis meglehetősen jól teljesítő tőkepiac, hiszen a BUX 5 teljesítménye a hatékony felülethez nagyon közel esik, mely jól látható a 6. ábrán is.

Az r kamatláb határai (a (2) megoldása)	Hozamhatárok (az (1) megoldása)	A hatékony felület részvényösszetétele	Kulcs output együtthatók			A hatékony felület analitikus formája, a $V_R^{Euro}(E)$ fv.		
			e	f	d	a	b	c
[0.01348, 0.02534]	[0.02534, 0.02534]	$M_1 = OPUS$	0.0143	22.2	0.5637	0.0000	0.0000	0.0449
[0.00897, 0.01348]	[0.01815, 0.02534]	$M_2 = OTP$	0.0369	146.8	2.2421	376.6369	-11.5065	0.0947
[0.00741, 0.00897]	[0.01562, 0.01815]	$M_3 = MTELEK$	0.0545	365.2	4.2020	162.8426	-3.7475	0.0243
[-0.01228, 0.00741]	[0.01108, 0.01562]	$M_4 = RICHTER$	0.0620	501.5	5.2126	128.1587	-2.6643	0.0158
[-0.03855, -0.01228]	[0.00993, 0.01108]	$M_5 = MOL$	0.0670	534.4	4.8082	42.2087	-0.7595	0.0053
$(\infty, -0.03855]$	[0.0094, 0.00993]	$M_6 = OTP \rightarrow$	0.0605	530.1	4.9756	72.4943	-1.3610	0.0083

3. táblázat. A hatékony felület szerkezetének alakulása a várható hozam függvényében; BUX 5 (shortolás nélkül), 2015. január 1.– 2025. január 1.



6. ábra. A BUX 5 hatékony felülete, shortolás nélkül, 2015-2025

Az M_5 halmaz tehát mind az öt részvényt magában zárja, nem lehet tehát különbség a lehetséges és a lehetetlen hatékony felület között. Az előbbiekhöz hasonlóan megmérve a BUX 5 teljesítményét felülíró portfóliók halmazát, az alábbiakat írhatjuk:

$$\begin{aligned} T_{short}^{BUX} &\equiv T_{posi}^{BUX} = \\ &= 0.0034 \times (0.0137 - 0.0112) - \int_{0.0112}^{0.0137} V_R^{BUX}(E) dE = 0.0000027. \end{aligned}$$

Következésképpen a $T_{short}^{BUX}/T_{posi}^{BUX}$ arány 1, meglehetősen ritka eset.

4 Következtetések

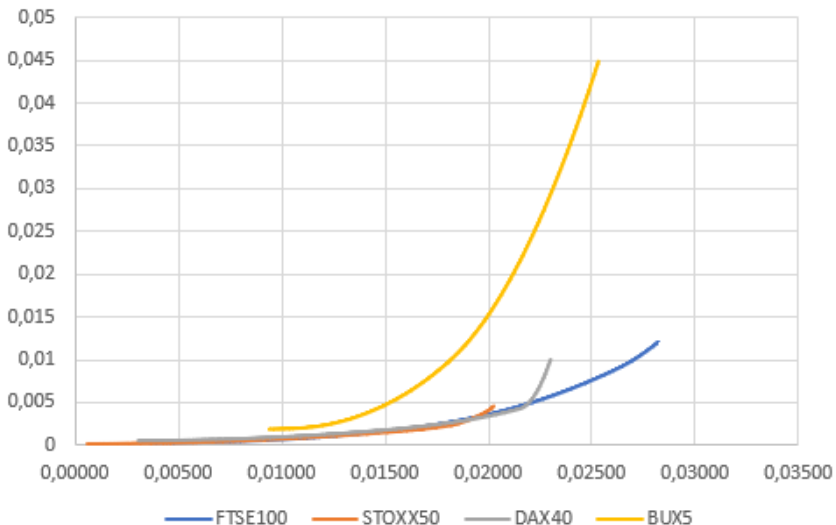
Bár ideiglenesen, de néha a tőzsdei fedezetlen eladások (shortolás) évekre is tilalom alatt vannak. 2023 ősze óta Dél-Koreában be van tiltva a shortolás, talán ebben az évben feloldják, de Törökországban marad. Számos, jelentős publikáció kétségbe vonja, hogy a hatékony felületen lehetnek negatív súlyok egy piaci portfólióban. Modellezési oldalról, amikor a shortolást megengedjük, a befektetési változók negatív értéket is felvehetnek, de módszertanilag a probléma könnyebben kezelhető. A shortolás tilalmát úgy érzékeltetjük, hogy a befektetési változóink nem vehetnek fel negatív értéket, és a problémára két parametrikus, konvex programozási feladatot fogalmaztunk meg. Dybvig nyomán viszont tudjuk, hogy amikor a nem negativitás feltételével élünk, szinte végtelen mennyiségben generálható olyan portfólió probléma, melynek hatékony felületén töréspontok lesznek belső pontokban. Mivel még senki nem látta nemnegativitási feltétel mellett a hatékony felület analitikus formáját, ezért nagyon magabiztosnak ítéltető az a jelenség, hogy ilyen esetekben is mindig egy sima, jól viselkedő függvényt tételezünk fel. Először is egy jól működő algoritmust fejlesztettünk ki, melynek outputja a hatékony felület analitikus formája, és ezen analitikus formák ismerete lehetővé teszi a töréspontok létének ellenőrzését. Számítógépes programunk pedig elősegíti szinte tetszőleges számú és méretű eset ellenőrzését. Az elmúlt tíz év havi részvényhozam adatait állítottuk elő az Euro Stoxx 50 és öt BUX részvényre, melyekből átlaghozamokat és a kovarianciamátrixot származtattuk öt különböző időperiódusra. Figyelembe véve még a hivatkozott Vörös – Rappai (2025) tanulmányt is, négy portfólió csomagra, valamennyi időperiódusra elvégezve az elemzést, az így adódó közel háromszáz iteráció során a csatlakozó parabola ívek mindig érintették, és nem metsztek egymást. Vagyis a hatékony felületek mindenütt differenciálhatók voltak. Bár néha közel voltunk a nem differenciálhatósághoz, mégis eléggé érdekes meglepetés, hogy míg elméletileg végtelen sok portfólió problémát definiálhatunk, melynek felületén csomók vannak, a valós élet nem produkált ilyen eseményeket. Számunkra a másik nagy meglepetés a háborús időszak viselkedése. Nem csak a hozamok voltak nagyobbak, mindez úgy valósult meg, hogy a kockázat is kisebb. Ezzel szemben a Covid-időszak sokkal hektikusabb volt, minden portfólióra a legmagasabb vonalat (kockázatot) hozta az időszak. A harmadik meglepetés

a sok felesleges részvény. A rendelkezésre álló részvények töredéke elég a hatékony felület bármely szegmensének előállításához. E tényhez kapcsolódik a felülteljesítő részvények kiterjedésének megállapítása. A BUX esetében nem lehet túlzott várakozás, az elérhető hozamintervallum hosszú szakaszán keresztül a két hatékony felület egybeesik. Talán felkelti az olvasó érdeklődését a már hivatkozott Vörös – Rappai (2025) cikk után, ha megemlítjük, hogy az Euro Stoxx 50 négyszeres várakozásával szemben a DAX 40 esetében e mutató csak kétszeres, az FTSE 100 esetében pedig 10-szeres. Ezek az eredmények a Brennan és Lo (2010) tanulmány megállapításainak empirikus alátámasztásai, miszerint a negatív befektetések előfordulási valószínűsége a részvények számával szinte lineárisan nő.

Végül a 4. táblázat ad egy összefoglalót a két portfóliócsomag legfontosabb felfedett tulajdonságairól, a 7. ábra pedig azonos időszakra hasonlítja össze különböző portfóliók hatékony felületeit.

Portfólió csomag	Euro Stoxx 50	BUX 5
A hatékony felület minimumpontja (E)	0.00058	0.00940
A hatékony felület minimális kockázati szintje	0.00019	0.00190
A portfólió átlaghozama	0.0073	0.0112
Volatilitása (szórásnégyzete)	0.0024	0.0030
A felülteljesítő portfóliók kiterjedése, shortolás nélkül	0.0000120	0.0000027
A felülteljesítő portfóliók kiterjedése, shortolással	0.000047	≈ 0.0000027
T_{short}/T_{posi} arány	4	1
Maximum hozam	0.02	0.025

4. táblázat. Összegző információk a két portfóliócsomagról a 2015–2025 közötti adatok alapján



7. ábra. A 2015–25 időszakra vonatkozó hatékony felületek

Köszönetnyilvánítás

A kutatás a TKP2021-NKTA-19 számú projekt keretében készült, mely az Innovációs és Technológiai Minisztérium Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alapból nyújtott támogatásával, a TKP2021-NKTA pályázati program finanszírozásában valósult meg.

Irodalom

1. Arcuri, M. C., G. Gandolfi and F. Laurini (2023). Robust portfolio optimization for banking foundations: a CVaR approach for asset allocation with mandatory constraints, *Central European Journal of Operations Research*, 31, 557–581
2. Battalio, R., H. Mehran and P. Schultz (2012). Market declines: What is accomplished by banning short-selling, *Current Issues in Economics and Finance*, 18(5), 1–7
3. Buser, S. A. (1977). A simplified expression for the efficient frontier in mean-variance portfolio analysis, *Management Science*, 23(8), 901–904
4. Bodnar, T. and A. K. Gupta (2015). Robustness of the inference procedures for the global minimum variance portfolio weights in a skew-normal model, *The European Journal of Finance*, 21 (13-14), 1176–1194
5. Bodnar, T., S. Mazur and Y. Okhrin (2017). Bayesian estimation of the global minimum variance portfolio, *European Journal of Operational Research*, 256, 292–307
6. Brennan, T. J., and A. W. Lo (2010). Impossible frontiers, *Management Science*, 56(6), 905–923
7. Cesarone, F., M. L. Martino and F. Tardella (2023a). Mean-Variance-VaR portfolios: MIQP formulation and performance analysis, *OR Spectrum*, 45, 1043–1069
8. Cesarone, F., L. Lampariello, D. Merolla, J. M. Ricci, S. Sagratella and V. G. Sasso (2023b). A bilevel approach to ESG multi-portfolio selection, *Computational Management Science*, 20:24
9. Duffie, D. and J. Pan (1997). An overview of value at risk, *Journal of Derivatives*, 4(3), 7–49
10. Dybvig, P. H. (1984). Short sales restrictions and kinks on the mean variance frontier, *The Journal of Finance*, 39(1), 239–244
11. Edwards, A. K., A. V. Reed and P. Saffi (2024). A survey of short-selling regulations, *The Review of Asset Pricing Studies*, 14, 613–639
12. Elton, E. J., M. J. Gruber and M. W. Padberg (1978). Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection: Tracing out the Efficient Frontier, *The Journal of Finance*, 33(1), 296–302
13. Elton, E. J., M. J. Gruber, S. J. Brown and W. N. Goetzmann (2014). *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 9th ed., Wiley
14. Fama, E. F. and K. R. French (1996). Multifactor Explanations of Asset Pricing Anomalies, *The Journal of Finance*, 51(1), 55–84
15. Fama, E. F. and K. R. French (2004). The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence, *Journal of Economic Perspectives*, 18(3), 25–46
16. Feldman, D. and H. Reisman (2003). Simple Construction of the Efficient Frontier, *European Financial Management*, 9(2), 251–259

17. Gibbons, M. R., S. A. Ross and J. Shanken (1989). A test of the efficiency of a given portfolio, *Econometrica*, 57(5), 1121–1152
18. Guijarro, F. (2018). A similarity measure for the cardinality constrained frontier in the mean-variance optimization model, *Journal of the Operational Research Society*, 69(6), 928–945
19. Guijarro, F. and P. E. Tsinaslanidis (2021). A surrogate similarity measure for the mean-variance frontier optimisation problem under bound and cardinality constraints, *Journal of the Operational Research Society*, 72(3), 564–579
20. Grossi L. and F. Laurini (2019). Robust asset allocation with conditional value-at-risk using the forward search, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 36(3), 335–352.
21. Kerstens, K., A. Mounir and I. Van de Woestyne (2012). Benchmarking mean-variance portfolios using a shortage function: the choice of direction vector affects rankings!, *Journal of the Operational Research Society*, 63, 1199–1212
22. Kim, Y. S. and F. J. Fabozzi (2024). Portfolio optimization with relative tail risk, *Annals of Operations Research*, 341, 1023–1055
23. Lintner, J. (1965). Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification, *The Journal of Finance*, 20(4), 587–615
24. Markowitz, H. (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, N.Y. John Wiley and Sons
25. Markowitz, H. (2005). Market Efficiency: A Theoretical Distinction and So What?, *Financial Analysts Journal* 61, 17–30.
26. Meng, K., H. Yang, X. Yang and C. Kwok Wai You (2022). Portfolio optimization under a minimax rule revisited, *Optimization*, 71(4), 877–905
27. Merton, R. C. (1972). An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 7(4), 1851–1872
28. Mittal, G. and M. K. Mehawat (2014). A multi-objective portfolio rebalancing model incorporating transaction costs based on incremental discounts, *Optimization*, 63(10), 1595–1613
29. Qi, Y., M. Hirschberger and R. E. Steuer (2009). Dotted Representation of Mean-Variance Efficient Frontiers and their Computation, *INFOR*, 47(1), 15–21
30. Qi, Y., R. E. Steuer and M. Wimmer (2017). An analytical derivation of the efficient surface in the portfolio selection with three criteria, *Annals of Operations Research*, 251(1-2), 161–177
31. Qi, Y. and R. E. Steuer (2020). On the analytical derivation of efficient sets in quad-and-higher criterion portfolio selection, *Annals of Operations Research*, 293(2), 521–538
32. Qi, Y. and R. E. Steuer (2024). An analytic derivation of properly efficient sets in multi-objective portfolio selection, *Annals of Operations Research*, in press
33. Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2, 21–42
34. Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2002). Conditional value-at-risk for general loss distribution, *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 1443–1471
35. Sharma, A. and A. Mehra (2013). Portfolio selection with a minimax measure in safety constraint, *Optimization*, 62(11), 1473–1500

36. Sharpe, W. F. (1963). A Simplified Model for Portfolio Analysis, *Management Science*, 9(2), 277–293
37. Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk, *Journal of Finance*, 19(3), 425–442
38. Sharpe, W. F. (1970). *Portfolio Theory and Capital Markets*, N.Y. McGraw-Hill
39. Steuer, R. E., Y. Qi and M. Wimmer (2024). Computing cardinality constrained portfolio selection efficient frontiers via closest correlation matrices, *European Journal of Operational Research*, 313(2), 628–636
40. Vörös, J. (1986). Portfolio analysis – An analytic derivation of the efficient portfolio frontier, *European Journal of Operational Research*, 23, 294–300
41. Vörös, J., J. Kriens and L. W. G. Strijbosch (1999). A note on the kinks at the mean variance frontier, *European Journal of Operational Research*, 112, 236–239
42. Vörös, J. and G. Rappai (2025). Searching for kinks on the efficient frontiers of the Euro Stoxx 50, the DAX 40 and FTSE 100 portfolios, working paper
43. Xidonas, P. and G. Mavrotas (2014). Multiobjective portfolio optimization with non-convex policy constraints: Evidence from the Eurostoxx 50, *The European Journal of Finance*, 20(11), 957–977
44. Zhang, W-G. and Z-K. Nie (2005). On Admissible Efficient Portfolio Selection Policy, *Applied Mathematics and Computations*, 169, 608–623
45. Zhang, W-G. and Y-L. Wang (2008). An Analytic Derivation of Admissible Efficient Frontier with Borrowing, *European Journal of Operational Research*, 184, 229–243
46. Wu, D. and D. D. Wu (2021). Credit risk control and management using limited diversification, *Journal of Risk Research*, 24(8), 958–971.

Függelékek

Cégnév	Tickers	Átlaghozam	Arányok
Pernod Ricard	RI.PA	0.0003	0.0078
Eni	ENI.MI	-0.0007	0.0086
Airbus	AIR.PA	0.0105	0.0267
Stellantis	STLAM.MI	0.0047	0.0134
AXA	CS.PA	0.0047	0.0181
Essilor Luxottica	EL.PA	0.0084	0.0179
BBVA	BBVA.MC	0.0031	0.0166
Iberdrola	IBE.MC	0.0067	0.0203
ING Group	INGA.AS	0.0031	0.0154
Volkswagen	VOW.DE	-0.0055	0.0068
Allianz	ALV.DE	0.0064	0.0297
Schneider Electric	SU.PA	0.0108	0.0375
Saint-Gobain	SGO.PA	0.0073	0.0117
Air Liquide	AI.PA	0.0068	0.0270
UniCredit	UCG.MI	0.0044	0.0179
SAFRAN	SAF.PA	0.0117	0.0232
Santander	SAN.MC	-0.0010	0.0217
BMW	BMW.DE	-0.0023	0.0079
Siemens	SIE.DE	0.0076	0.0377
Kering	KER.PA	0.0035	0.0065
Ferrari	RACE.MI	0.0203	0.0126
Intesa Sanpaolo	ISP.MI	0.0040	0.0167
L'Oréal	OR.PA	0.0068	0.0307
Sanofi	SAN.PA	0.0021	0.0290
AB InBev	ABI.BR	-0.0068	0.0148
Prosus	PRX.AS	0.0015	0.0147
Bayer	BAYN.DE	-0.0147	0.0079
Deutsche Börse	DB1.DE	0.0105	0.0097
SAP	SAP.DE	0.0128	0.0523
Münchener Rückversicherungs	MUV2.DE	0.0090	0.0177
BNP Paribas	BNP.PA	0.0028	0.0210
Danone	BN.PA	0.0010	0.0108
VINCI	DG.PA	0.0067	0.0193
LVMH Moët Hennessy Louis Vuitton	MC.PA	0.0132	0.0540
Ahold Delhaize	AD.AS	0.0058	0.0078
Wolters Kluwer	WKL	0.0158	0.0103
ASML NV	ASML.AS	0.0171	0.0926
Nordea Bank Abp Registered Shs	NDA.FI.HE	0.0001	0.0113
Deutsche Telekom	DTE.DE	0.0062	0.0218
Infineon	IFX.DE	0.0097	0.0138
DHL Group	DPW.DE	-0.0018	0.0106
Adidas	ADS.DE	0.0119	0.0110
TotalEnergies	TTE.PA	0.0018	0.0446
Hermès	RMS.PA	0.0184	0.0215
Enel	ENEL.MI	0.0045	0.0147
Inditex	ITX.MC	0.0058	0.0141
Adyen B.V. Parts Sociales	ADYEN.AS	0.0100	0.0097
Nokia	NOKIA.HE	-0.0034	0.0054
Mercedes-Benz Group	MBG.DE	-0.0011	0.0151
BASF	BAS.DE	-0.0044	0.0123

1. függelék. Euro Stoxx 50 átlaghozamok 2015–25 időintervallumra, valamint jelenlegi piaci kapitalizációs arányok

	RI	ENI	AIR	STLAM	CS	EL	BBVA	IBE	INGA	VOW	ALV	SU	SGO
	.PA	.MI	.PA	.MI	.PA	.PA	.MC	.MC	.AS	.DE	.DE	.PA	.PA
RI.PA	.0030	.0007	.0020	.0017	.0011	.0013	.0014	.0009	.0011	.0016	.0010	.0010	.0011
ENI.MI	.0007	.0054	.0043	.0038	.0036	.0020	.0046	.0012	.0043	.0031	.0029	.0016	.0027
AIR.PA	.0020	.0043	.0096	.0074	.0053	.0033	.0067	.0016	.0071	.0049	.0043	.0034	.0052
STLAM.MI	.0017	.0038	.0074	.0146	.0053	.0031	.0072	.0014	.0073	.0073	.0043	.0042	.0057
CS.PA	.0011	.0036	.0053	.0053	.0064	.0024	.0060	.0014	.0062	.0043	.0046	.0028	.0042
EL.PA	.0013	.0020	.0033	.0031	.0024	.0036	.0027	.0011	.0028	.0023	.0020	.0019	.0024
BBVA.MC	.0014	.0046	.0067	.0072	.0060	.0027	.0100	.0018	.0078	.0049	.0048	.0030	.0049
IBE.MC	.0009	.0012	.0016	.0014	.0014	.0011	.0018	.0029	.0014	.0012	.0014	.0011	.0016
INGA.AS	.0011	.0043	.0071	.0073	.0062	.0028	.0078	.0014	.0107	.0057	.0046	.0034	.0059
VOW.DE	.0016	.0031	.0049	.0073	.0043	.0023	.0049	.0012	.0057	.0104	.0035	.0038	.0046
ALV.DE	.0010	.0029	.0043	.0043	.0046	.0020	.0048	.0014	.0046	.0035	.0042	.0021	.0032
SU.PA	.0010	.0016	.0034	.0042	.0028	.0019	.0030	.0011	.0034	.0038	.0021	.0042	.0036
SGO.PA	.0011	.0027	.0052	.0057	.0042	.0024	.0049	.0016	.0059	.0046	.0032	.0036	.0065
AI.PA	.0009	.0018	.0024	.0024	.0021	.0015	.0020	.0014	.0021	.0023	.0019	.0021	.0022
UCG.MI	.0010	.0049	.0072	.0081	.0067	.0025	.0092	.0017	.0098	.0061	.0050	.0037	.0062
SAF.PA	.0015	.0033	.0062	.0051	.0041	.0027	.0051	.0016	.0051	.0031	.0034	.0024	.0038
SAN.MC	.0012	.0042	.0062	.0065	.0057	.0021	.0084	.0016	.0077	.0050	.0045	.0029	.0048
BMW.DE	.0012	.0030	.0042	.0066	.0038	.0020	.0045	.0010	.0053	.0057	.0033	.0031	.0040
SIE.DE	.0012	.0021	.0036	.0044	.0030	.0022	.0032	.0012	.0042	.0040	.0024	.0034	.0042
KER.PA	.0020	.0016	.0026	.0046	.0021	.0014	.0023	.0011	.0026	.0038	.0020	.0028	.0023
RACE.MI	.0010	.0011	.0020	.0026	.0020	.0010	.0016	.0008	.0015	.0018	.0015	.0020	.0017
ISP.MI	.0008	.0041	.0059	.0066	.0060	.0023	.0077	.0017	.0082	.0049	.0047	.0028	.0052
OR.PA	.0016	.0011	.0016	.0021	.0015	.0015	.0017	.0013	.0014	.0019	.0014	.0018	.0015
SAN.PA	.0005	.0015	.0017	.0015	.0015	.0010	.0017	.0013	.0015	.0015	.0016	.0010	.0015
ABI.BR	.0016	.0025	.0039	.0029	.0029	.0019	.0031	.0018	.0033	.0024	.0027	.0016	.0026
PRX.AS	.0003	.0003	.0003	.0003	.0006	.0002	.0007	.0006	.0015	.0006	.0008	.0005	.0004
BAYN.DE	.0018	.0033	.0035	.0042	.0035	.0024	.0039	.0016	.0041	.0039	.0032	.0021	.0033
DB1.DE	.0008	.0009	.0020	.0026	.0020	.0014	.0016	.0007	.0017	.0018	.0016	.0013	.0016
SAP.DE	.0012	.0017	.0031	.0028	.0028	.0022	.0025	.0014	.0025	.0028	.0024	.0026	.0026
MUV2.DE	.0007	.0020	.0034	.0035	.0034	.0017	.0038	.0010	.0041	.0028	.0029	.0017	.0021
BNP.PA	.0012	.0045	.0069	.0067	.0065	.0028	.0080	.0017	.0091	.0054	.0050	.0033	.0057
BN.PA	.0010	.0015	.0024	.0013	.0017	.0014	.0019	.0011	.0015	.0016	.0015	.0009	.0016
DG.PA	.0012	.0025	.0042	.0031	.0031	.0020	.0038	.0012	.0037	.0028	.0024	.0018	.0029
MC.PA	.0019	.0019	.0032	.0040	.0027	.0018	.0032	.0011	.0032	.0033	.0023	.0026	.0026
AD.AS	.0009	.0007	.0010	.0008	.0009	.0009	.0007	.0005	.0005	.0014	.0007	.0009	.0011
WKL.AS	.0009	.0004	.0016	.0015	.0007	.0013	.0005	.0005	.0005	.0018	.0007	.0017	.0012
ASML.AS	.0013	.0017	.0027	.0041	.0021	.0018	.0025	.0009	.0029	.0037	.0015	.0033	.0031
NDA.FI.HE	.0007	.0021	.0037	.0046	.0032	.0018	.0042	.0006	.0051	.0035	.0024	.0024	.0039
DTE.DE	.0005	.0018	.0025	.0026	.0022	.0015	.0024	.0011	.0028	.0020	.0019	.0011	.0020
IFX.DE	.0017	.0023	.0044	.0068	.0035	.0029	.0043	.0017	.0057	.0050	.0028	.0040	.0053
DPWA.DU	.0002	.0000	.0000	.0002	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0000	.0000	.0001
ADS.DE	.0011	.0015	.0029	.0032	.0019	.0020	.0026	.0012	.0029	.0022	.0019	.0020	.0026
TTE.PA	.0006	.0041	.0035	.0027	.0033	.0015	.0039	.0008	.0039	.0025	.0026	.0012	.0022
RMS.PA	.0017	.0007	.0017	.0026	.0012	.0019	.0012	.0005	.0014	.0020	.0010	.0023	.0018
ENEL.MI	.0011	.0021	.0027	.0024	.0022	.0015	.0028	.0025	.0029	.0021	.0022	.0016	.0025
ITX.MC	.0011	.0023	.0038	.0037	.0029	.0019	.0042	.0014	.0048	.0025	.0024	.0022	.0030
ADYEN.AS	.0015	.0004	.0031	.0042	.0020	.0028	.0021	.0016	.0017	.0034	.0011	.0032	.0031
NOKIA.HE	.0010	.0012	.0023	.0011	.0020	.0012	.0013	.0015	.0015	.0009	.0013	.0015	.0022
MBG.DE	.0015	.0033	.0052	.0072	.0042	.0024	.0053	.0012	.0060	.0060	.0035	.0033	.0048
BAS.DE	.0012	.0036	.0046	.0058	.0040	.0024	.0048	.0012	.0053	.0043	.0035	.0027	.0041

2. függelék. Euro Stoxx 50 részvények kovarianciamátrixa (2015-25)

	AI .PA	UCG .MI	SAF .PA	SAN .MC	BMW .DE	SIE .DE	KER .PA	RACE .MI	ISP .MI	OR .PA	SAN .PA	ABI .BR
RI.PA	.0009	.0010	.0015	.0012	.0012	.0012	.0020	.0010	.0008	.0016	.0005	.0016
ENI.MI	.0018	.0049	.0033	.0042	.0030	.0021	.0016	.0011	.0041	.0011	.0015	.0025
AIR.PA	.0024	.0072	.0062	.0062	.0042	.0036	.0026	.0020	.0059	.0016	.0017	.0039
STLAM.MI	.0024	.0081	.0051	.0065	.0066	.0044	.0046	.0026	.0066	.0021	.0015	.0029
CS.PA	.0021	.0067	.0041	.0057	.0038	.0030	.0021	.0020	.0060	.0015	.0015	.0029
EL.PA	.0015	.0025	.0027	.0021	.0020	.0022	.0014	.0010	.0023	.0015	.0010	.0019
BBVA.MC	.0020	.0092	.0051	.0084	.0045	.0032	.0023	.0016	.0077	.0017	.0017	.0031
IBE.MC	.0014	.0017	.0016	.0016	.0010	.0012	.0011	.0008	.0017	.0013	.0013	.0018
INGA.AS	.0021	.0098	.0051	.0077	.0053	.0042	.0026	.0015	.0082	.0014	.0015	.0033
VOW.DE	.0023	.0061	.0031	.0050	.0057	.0040	.0038	.0018	.0049	.0019	.0015	.0024
ALV.DE	.0019	.0050	.0034	.0045	.0033	.0024	.0020	.0015	.0047	.0014	.0016	.0027
SU.PA	.0021	.0037	.0024	.0029	.0031	.0034	.0028	.0020	.0028	.0018	.0010	.0016
SGO.PA	.0022	.0062	.0038	.0048	.0040	.0042	.0023	.0017	.0052	.0015	.0015	.0026
AI.PA	.0025	.0028	.0019	.0019	.0022	.0022	.0021	.0012	.0023	.0014	.0013	.0017
UCG.MI	.0028	.0149	.0053	.0087	.0060	.0040	.0025	.0019	.0102	.0013	.0014	.0026
SAF.PA	.0019	.0053	.0063	.0047	.0031	.0027	.0023	.0017	.0046	.0015	.0015	.0033
SAN.MC	.0019	.0087	.0047	.0089	.0044	.0031	.0020	.0012	.0074	.0013	.0013	.0030
BMW.DE	.0022	.0060	.0031	.0044	.0064	.0036	.0034	.0015	.0048	.0016	.0016	.0025
SIE.DE	.0022	.0040	.0027	.0031	.0036	.0052	.0029	.0015	.0033	.0017	.0013	.0023
KER.PA	.0021	.0025	.0023	.0020	.0034	.0029	.0072	.0021	.0021	.0025	.0012	.0018
RACE.MI	.0012	.0019	.0017	.0012	.0015	.0015	.0021	.0046	.0013	.0012	.0003	.0016
ISP.MI	.0023	.0102	.0046	.0074	.0048	.0033	.0021	.0013	.0094	.0012	.0015	.0029
OR.PA	.0014	.0013	.0015	.0013	.0016	.0017	.0025	.0012	.0012	.0026	.0012	.0018
SAN.PA	.0013	.0014	.0015	.0013	.0016	.0013	.0012	.0003	.0015	.0012	.0029	.0017
ABI.BR	.0017	.0026	.0033	.0030	.0025	.0023	.0018	.0016	.0029	.0018	.0017	.0058
PRX.AS	.0000	.0009	.0007	.0010	.0007	.0009	.0011	.0004	.0011	.0012	.0001	.0011
BAYN.DE	.0024	.0047	.0026	.0037	.0034	.0025	.0030	.0009	.0041	.0017	.0021	.0024
DB1.DE	.0009	.0014	.0017	.0014	.0015	.0015	.0013	.0009	.0017	.0010	.0012	.0015
SAP.DE	.0021	.0032	.0023	.0020	.0023	.0029	.0030	.0019	.0027	.0016	.0014	.0020
MUV2.DE	.0013	.0043	.0028	.0033	.0025	.0021	.0013	.0009	.0037	.0011	.0007	.0020
BNP.PA	.0022	.0096	.0050	.0078	.0048	.0038	.0023	.0016	.0082	.0016	.0017	.0031
BN.PA	.0011	.0018	.0016	.0014	.0014	.0012	.0010	.0006	.0017	.0011	.0013	.0021
DG.PA	.0013	.0039	.0033	.0034	.0021	.0020	.0017	.0012	.0034	.0013	.0011	.0023
MC.PA	.0018	.0032	.0026	.0027	.0032	.0026	.0044	.0020	.0028	.0022	.0013	.0019
AD.AS	.0008	.0010	.0006	.0004	.0008	.0011	.0004	.0004	.0008	.0009	.0007	.0011
WKL.AS	.0011	.0005	.0010	.0001	.0009	.0014	.0017	.0010	.0002	.0013	.0008	.0013
ASML.AS	.0017	.0025	.0020	.0022	.0030	.0033	.0032	.0023	.0021	.0021	.0010	.0018
NDA.FI.HE	.0012	.0052	.0028	.0036	.0030	.0026	.0017	.0009	.0040	.0007	.0010	.0014
DTE.DE	.0012	.0031	.0019	.0023	.0018	.0016	.0007	.0002	.0024	.0008	.0012	.0014
IFX.DE	.0018	.0048	.0034	.0043	.0052	.0050	.0033	.0020	.0044	.0023	.0009	.0032
DPWA.DU	.0001	.0000	.0000	.0000	.0001	.0000	.0001	-.0001	.0000	.0002	.0001	.0001
ADS.DE	.0012	.0022	.0021	.0026	.0021	.0023	.0025	.0017	.0024	.0019	.0008	.0026
TTE.PA	.0014	.0042	.0024	.0037	.0023	.0018	.0013	.0007	.0034	.0008	.0012	.0022
RMS.PA	.0013	.0013	.0016	.0010	.0019	.0021	.0035	.0023	.0008	.0021	.0006	.0008
ENEL.MI	.0018	.0032	.0023	.0026	.0017	.0018	.0017	.0009	.0032	.0016	.0013	.0022
ITX.MC	.0015	.0047	.0032	.0035	.0027	.0028	.0024	.0016	.0038	.0015	.0017	.0029
ADYEN.AS	.0016	.0014	.0027	.0013	.0027	.0038	.0028	.0035	.0016	.0021	.0005	.0012
NOKIA.HE	.0014	.0024	.0020	.0014	.0011	.0013	.0008	.0013	.0019	.0010	.0014	.0025
MBG.DE	.0022	.0061	.0037	.0049	.0059	.0041	.0034	.0017	.0052	.0015	.0016	.0027
BAS.DE	.0021	.0056	.0034	.0045	.0043	.0035	.0029	.0013	.0047	.0015	.0014	.0025

2. függelék. Euro Stoxx 50 részvények kovarianciamátrixa (2015-25) (folyt.)

	PRX .AS	BAYN .DE	DB1 .DE	SAP .DE	MUV2 .DE	BNP .PA	BN .PA	DG .PA	MC .PA	AD .AS	WKL .AS	ASML .AS	NDA .FI.HE
RI.PA	.0003	.0018	.0008	.0012	.0007	.0012	.0010	.0012	.0019	.0009	.0009	.0013	.0007
ENI.MI	-.0003	.0033	.0009	.0017	.0020	.0045	.0015	.0025	.0019	.0007	.0004	.0017	.0021
AIR.PA	-.0003	.0035	.0020	.0031	.0034	.0069	.0024	.0042	.0032	.0010	.0016	.0027	.0037
STLAM.MI	.0003	.0042	.0026	.0028	.0035	.0067	.0013	.0031	.0040	.0008	.0015	.0041	.0046
CS.PA	.0006	.0035	.0020	.0028	.0034	.0065	.0017	.0031	.0027	.0009	.0007	.0021	.0032
EL.PA	.0002	.0024	.0014	.0022	.0017	.0028	.0014	.0020	.0018	.0009	.0013	.0018	.0018
BBVA.MC	.0007	.0039	.0016	.0025	.0038	.0080	.0019	.0038	.0032	.0007	.0005	.0025	.0042
IBE.MC	.0006	.0016	.0007	.0014	.0010	.0017	.0011	.0012	.0011	.0005	.0005	.0009	.0006
ING.A.S	.0015	.0041	.0017	.0025	.0041	.0091	.0015	.0037	.0032	.0005	.0005	.0029	.0051
VOW.DE	.0006	.0039	.0018	.0028	.0028	.0054	.0016	.0028	.0033	.0014	.0018	.0037	.0035
ALV.DE	.0008	.0032	.0016	.0024	.0029	.0050	.0015	.0024	.0023	.0007	.0007	.0015	.0024
SU.PA	.0005	.0021	.0013	.0026	.0017	.0033	.0009	.0018	.0026	.0009	.0017	.0033	.0024
SGO.PA	.0004	.0033	.0016	.0026	.0021	.0057	.0016	.0029	.0026	.0011	.0012	.0031	.0039
AI.PA	.0000	.0024	.0009	.0021	.0013	.0022	.0011	.0013	.0018	.0008	.0011	.0017	.0012
UCG.MI	.0009	.0047	.0014	.0032	.0043	.0096	.0018	.0039	.0032	.0010	.0005	.0025	.0052
SAF.PA	.0007	.0026	.0017	.0023	.0028	.0050	.0016	.0033	.0026	.0006	.0010	.0020	.0028
SAN.MC	.0010	.0037	.0014	.0020	.0033	.0078	.0014	.0034	.0027	.0004	.0001	.0022	.0036
BMW.DE	.0007	.0034	.0015	.0023	.0025	.0048	.0014	.0021	.0032	.0008	.0009	.0030	.0030
SIE.DE	.0009	.0025	.0015	.0029	.0021	.0038	.0012	.0020	.0026	.0011	.0014	.0033	.0026
KER.PA	.0011	.0030	.0013	.0030	.0013	.0023	.0010	.0017	.0044	.0004	.0017	.0032	.0017
RACE.MI	.0004	.0009	.0009	.0019	.0009	.0016	.0006	.0012	.0020	.0004	.0010	.0023	.0009
ISP.MI	.0011	.0041	.0017	.0027	.0037	.0082	.0017	.0034	.0028	.0008	.0002	.0021	.0040
OR.PA	.0012	.0017	.0010	.0016	.0011	.0016	.0011	.0013	.0022	.0009	.0013	.0021	.0007
SAN.PA	.0001	.0021	.0012	.0014	.0007	.0017	.0013	.0011	.0013	.0007	.0008	.0010	.0010
ABI.BR	.0011	.0024	.0015	.0020	.0020	.0031	.0021	.0023	.0019	.0011	.0013	.0018	.0014
PRX.AS	.0051	.0000	.0008	.0003	.0010	.0012	.0003	.0004	.0012	-.0001	-.0004	.0006	.0001
BAYN.DE	.0000	.0082	.0017	.0022	.0019	.0043	.0017	.0026	.0028	.0010	.0008	.0021	.0023
DB1.DE	.0008	.0017	.0027	.0018	.0013	.0018	.0011	.0013	.0014	.0007	.0009	.0012	.0012
SAP.DE	.0003	.0022	.0018	.0053	.0021	.0026	.0018	.0018	.0025	.0010	.0017	.0027	.0014
MUV2.DE	.0010	.0019	.0013	.0021	.0038	.0038	.0010	.0019	.0017	.0008	.0006	.0015	.0016
BNP.PA	.0012	.0043	.0018	.0026	.0038	.0098	.0016	.0039	.0032	.0005	.0002	.0023	.0047
BN.PA	.0003	.0017	.0011	.0018	.0010	.0016	.0025	.0018	.0013	.0008	.0012	.0010	.0010
DG.PA	.0004	.0026	.0013	.0018	.0019	.0039	.0018	.0035	.0022	.0007	.0010	.0017	.0018
MC.PA	.0012	.0028	.0014	.0025	.0017	.0032	.0013	.0022	.0042	.0005	.0013	.0030	.0017
AD.AS	-.0001	.0010	.0007	.0010	.0008	.0005	.0008	.0007	.0005	.0028	.0014	.0010	.0005
WKL.AS	-.0004	.0008	.0009	.0017	.0006	.0002	.0012	.0010	.0013	.0014	.0026	.0016	.0009
ASML.AS	.0006	.0021	.0012	.0027	.0015	.0023	.0010	.0017	.0030	.0010	.0016	.0062	.0016
NDA.FI.HE	.0001	.0023	.0012	.0014	.0016	.0047	.0010	.0018	.0017	.0005	.0009	.0016	.0054
DTE.DE	.0003	.0019	.0013	.0018	.0018	.0026	.0013	.0015	.0011	.0011	.0010	.0009	.0015
IFX.DE	.0022	.0034	.0020	.0027	.0026	.0052	.0012	.0024	.0030	.0013	.0011	.0049	.0033
DPWA.DU	-.0001	.0004	.0000	-.0001	-.0001	.0001	.0000	.0001	.0001	.0000	.0000	.0000	.0001
ADS.DE	.0023	.0016	.0012	.0020	.0016	.0028	.0014	.0019	.0024	.0006	.0010	.0023	.0007
TTE.PA	.0003	.0028	.0007	.0014	.0019	.0041	.0014	.0023	.0017	.0005	.0002	.0008	.0019
RMS.PA	.0008	.0015	.0009	.0019	.0007	.0014	.0007	.0012	.0032	.0007	.0016	.0029	.0009
ENEL.MI	.0010	.0024	.0010	.0019	.0017	.0030	.0015	.0019	.0016	.0008	.0006	.0015	.0010
ITX.MC	.0013	.0024	.0013	.0026	.0021	.0040	.0017	.0025	.0023	.0006	.0010	.0022	.0022
ADYEN.AS	.0017	.0007	.0024	.0031	.0011	.0018	.0011	.0021	.0032	.0006	.0018	.0041	.0016
NOKIA.HE	.0011	.0017	.0017	.0018	.0007	.0016	.0013	.0011	.0012	.0015	.0012	.0017	.0013
MBG.DE	.0002	.0036	.0016	.0028	.0028	.0056	.0016	.0026	.0033	.0009	.0011	.0034	.0037
BAS.DE	.0005	.0043	.0013	.0024	.0026	.0051	.0016	.0025	.0028	.0007	.0007	.0027	.0027

2. függelék. Euro Stoxx 50 részvények kovarianciamátrixa (2015-25) (folyt.)

	DTE	IFX	DPWA	ADS	TTE	RMS	ENEL	ITX	ADYEN	NOKIA	MBG	BAS
	.DE	.DE	.DU	.DE	.PA	.PA	.MI	.MC	.AS	.HE	.DE	.DE
RI.PA	.0005	.0017	.0002	.0011	.0006	.0017	.0011	.0011	.0015	.0010	.0015	.0012
ENI.MI	.0018	.0023	.0000	.0015	.0041	.0007	.0021	.0023	.0004	.0012	.0033	.0036
AIR.PA	.0025	.0044	.0000	.0029	.0035	.0017	.0027	.0038	.0031	.0023	.0052	.0046
STLAM.MI	.0026	.0068	-.0002	.0032	.0027	.0026	.0024	.0037	.0042	.0011	.0072	.0058
CS.PA	.0022	.0035	.0000	.0019	.0033	.0012	.0022	.0029	.0020	.0020	.0042	.0040
EL.PA	.0015	.0029	.0000	.0020	.0015	.0019	.0015	.0019	.0028	.0012	.0024	.0024
BBVA.MC	.0024	.0043	.0000	.0026	.0039	.0012	.0028	.0042	.0021	.0013	.0053	.0048
IBE.MC	.0011	.0017	.0000	.0012	.0008	.0005	.0025	.0014	.0016	.0015	.0012	.0012
INGA.AS	.0028	.0057	.0000	.0029	.0039	.0014	.0029	.0048	.0017	.0015	.0060	.0053
VOW.DE	.0020	.0050	.0001	.0022	.0025	.0020	.0021	.0025	.0034	.0009	.0060	.0043
ALV.DE	.0019	.0028	.0000	.0019	.0026	.0010	.0022	.0024	.0011	.0013	.0035	.0035
SU.PA	.0011	.0040	.0000	.0020	.0012	.0023	.0016	.0022	.0032	.0015	.0033	.0027
SGO.PA	.0020	.0053	.0001	.0026	.0022	.0018	.0025	.0030	.0031	.0022	.0048	.0041
AI.PA	.0012	.0018	.0001	.0012	.0014	.0013	.0018	.0015	.0016	.0014	.0022	.0021
UCG.MI	.0031	.0048	.0000	.0022	.0042	.0013	.0032	.0047	.0014	.0024	.0061	.0056
SAF.PA	.0019	.0034	.0000	.0021	.0024	.0016	.0023	.0032	.0027	.0020	.0037	.0034
SAN.MC	.0023	.0043	.0000	.0026	.0037	.0010	.0026	.0035	.0013	.0014	.0049	.0045
BMW.DE	.0018	.0052	.0001	.0021	.0023	.0019	.0017	.0027	.0027	.0011	.0059	.0043
SIE.DE	.0016	.0050	.0000	.0023	.0018	.0021	.0018	.0028	.0038	.0013	.0041	.0035
KER.PA	.0007	.0033	.0001	.0025	.0013	.0035	.0017	.0024	.0028	.0008	.0034	.0029
RACE.MI	.0002	.0020	-.0001	.0017	.0007	.0023	.0009	.0016	.0035	.0013	.0017	.0013
ISP.MI	.0024	.0044	.0000	.0024	.0034	.0008	.0032	.0038	.0016	.0019	.0052	.0047
OR.PA	.0008	.0023	.0002	.0019	.0008	.0021	.0016	.0015	.0021	.0010	.0015	.0015
SAN.PA	.0012	.0009	.0001	.0008	.0012	.0006	.0013	.0017	.0005	.0014	.0016	.0014
ABI.BR	.0014	.0032	.0001	.0026	.0022	.0008	.0022	.0029	.0012	.0025	.0027	.0025
PRX.AS	.0003	.0022	-.0001	.0023	.0003	.0008	.0010	.0013	.0017	.0011	.0002	.0005
BAYN.DE	.0019	.0034	.0004	.0016	.0028	.0015	.0024	.0024	.0007	.0017	.0036	.0043
DB1.DE	.0013	.0020	.0000	.0012	.0007	.0009	.0010	.0013	.0024	.0017	.0016	.0013
SAP.DE	.0018	.0027	-.0001	.0020	.0014	.0019	.0019	.0026	.0031	.0018	.0028	.0024
MUV2.DE	.0018	.0026	-.0001	.0016	.0019	.0007	.0017	.0021	.0011	.0007	.0028	.0026
BNP.PA	.0026	.0052	.0001	.0028	.0041	.0014	.0030	.0040	.0018	.0016	.0056	.0051
BN.PA	.0013	.0012	.0000	.0014	.0014	.0007	.0015	.0017	.0011	.0013	.0016	.0016
DG.PA	.0015	.0024	.0001	.0019	.0023	.0012	.0019	.0025	.0021	.0011	.0026	.0025
MC.PA	.0011	.0030	.0001	.0024	.0017	.0032	.0016	.0023	.0032	.0012	.0033	.0028
AD.AS	.0011	.0013	.0000	.0006	.0005	.0007	.0008	.0006	.0006	.0015	.0009	.0007
WKL.AS	.0010	.0011	.0000	.0010	.0002	.0016	.0006	.0010	.0018	.0012	.0011	.0007
ASML.AS	.0009	.0049	.0000	.0023	.0008	.0029	.0015	.0022	.0041	.0017	.0034	.0027
NDA.FI.HE	.0015	.0033	.0001	.0007	.0019	.0009	.0010	.0022	.0016	.0013	.0037	.0027
DTE.DE	.0030	.0018	-.0001	.0010	.0015	.0002	.0016	.0018	.0007	.0014	.0019	.0018
IFX.DE	.0018	.0098	.0000	.0035	.0018	.0028	.0025	.0035	.0053	.0022	.0055	.0044
DPWA.DU	-.0001	.0000	.0003	.0000	.0000	.0000	.0001	-.0001	.0000	-.0001	.0000	.0000
ADS.DE	.0010	.0035	.0000	.0067	.0012	.0022	.0019	.0022	.0028	.0015	.0021	.0023
TTE.PA	.0015	.0018	.0000	.0012	.0044	.0003	.0015	.0021	-.0006	.0009	.0026	.0030
RMS.PA	.0002	.0028	.0000	.0022	.0003	.0049	.0008	.0013	.0039	.0009	.0022	.0017
ENEL.MI	.0016	.0025	.0001	.0019	.0015	.0008	.0037	.0020	.0015	.0015	.0019	.0022
ITX.MC	.0018	.0035	-.0001	.0022	.0021	.0013	.0020	.0054	.0020	.0013	.0032	.0032
ADYEN.AS	.0007	.0053	.0000	.0028	-.0006	.0039	.0015	.0020	.0162	.0013	.0030	.0022
NOKIA.HE	.0014	.0022	-.0001	.0015	.0009	.0009	.0015	.0013	.0013	.0083	.0009	.0006
MBG.DE	.0019	.0055	.0000	.0021	.0026	.0022	.0019	.0032	.0030	.0009	.0073	.0047
BAS.DE	.0018	.0044	.0000	.0023	.0030	.0017	.0022	.0032	.0022	.0006	.0047	.0057

2. függelék. Euro Stoxx 50 részvények kovarianciamátrixa (2015-25) (folyt.)

Részvények N-ben	Átlag (\mathbf{a}_2)	\mathbf{V}_{21}	$\mathbf{V}_{21}\mathbf{Ca}_1$	$\mathbf{V}_{21}\mathbf{Ca}_1 - \mathbf{a}_2$	$\mathbf{V}_{21}\mathbf{C1}$	$\mathbf{V}_{21}\mathbf{C1} - 1$	Korlát $r-r_e$	
RI.PA	0.0003	0.0010	0.0017	0.006807	0.0065	0.366363	-0.63364	-0.010310
ENI.MI	-0.0007	0.0011	0.0007	0.004971	0.0057	0.248996	-0.75100	-0.007550
AIR.PA	0.0105	0.0020	0.0017	0.010186	-0.0003	0.518553	-0.48145	0.000727
STLAM.MI	0.0047	0.0026	0.0026	0.014157	0.0095	0.729494	-0.27051	-0.034970
CS.PA	0.0047	0.0020	0.0012	0.009233	0.0045	0.460502	-0.53950	-0.008410
EL.PA	0.0084	0.0010	0.0019	0.007299	-0.0011	0.394610	-0.60539	0.001821
BBVA.MC	0.0031	0.0016	0.0012	0.007795	0.0047	0.394360	-0.60564	0.007720
IBE.MC	0.0067	0.0008	0.0005	0.003765	-0.0029	0.186948	-0.81305	-0.003570
INGA.AS	0.0031	0.0015	0.0014	0.008036	0.0050	0.412421	-0.58758	-0.008460
VOW.DE	-0.0055	0.0018	0.0020	0.010260	0.0158	0.534714	-0.46529	-0.033960
ALV.DE	0.0064	0.0015	0.0010	0.007090	0.0007	0.357151	-0.64285	-0.001120
SU.PA	0.0108	0.0020	0.0023	0.011369	0.0006	0.592912	-0.40709	-0.001360
SGO.PA	0.0073	0.0017	0.0018	0.009536	0.0023	0.492790	-0.50721	-0.004500
AI.PA	0.0068	0.0012	0.0013	0.006804	0.0000	0.351877	-0.64812	-0.000001
UCG.MI	0.0044	0.0019	0.0013	0.009194	0.0048	0.461732	-0.53827	-0.008920
SAF.PA	0.0117	0.0017	0.0016	0.009159	-0.0025	0.469543	-0.53046	0.004719
SAN.MC	-0.0010	0.0012	0.0010	0.006315	0.0073	0.321698	-0.67830	-0.010830
BMW.DE	-0.0023	0.0015	0.0019	0.008942	0.0112	0.470077	-0.52992	-0.021190
SIE.DE	0.0076	0.0015	0.0021	0.009386	0.0018	0.496193	-0.50381	-0.003640
KER.PA	0.0035	0.0021	0.0035	0.014537	0.0110	0.777521	-0.22248	-0.049660
ISP.MI	0.0040	0.0013	0.0008	0.005986	0.0020	0.298670	-0.70133	-0.002850
OR.PA	0.0068	0.0012	0.0021	0.008464	0.0017	0.456723	-0.54328	-0.003110
SAN.PA	0.0021	0.0003	0.0006	0.002286	0.0002	0.122684	-0.87732	-0.000260
ABI.BR	-0.0068	0.0016	0.0008	0.007221	0.0140	0.356444	-0.64356	-0.021820
PRX.AS	0.0015	0.0004	0.0008	0.003143	0.0016	0.171197	-0.82880	-0.001990
BAYN.DE	-0.0147	0.0009	0.0015	0.006219	0.0209	0.331779	-0.66822	-0.031280
DB1.DE	0.0105	0.0009	0.0009	0.004754	-0.0057	0.244868	-0.75513	0.007544
SAP.DE	0.0128	0.0019	0.0019	0.010356	-0.0024	0.533790	-0.46621	0.005220
MUV2.DE	0.0090	0.0009	0.0007	0.004664	-0.0043	0.235897	-0.76410	0.005637
BNP.PA	0.0028	0.0016	0.0014	0.008070	0.0052	0.412625	-0.58737	-0.008910
BN.PA	0.0010	0.0006	0.0007	0.003348	0.0023	0.175190	-0.82481	-0.002800
DG.PA	0.0067	0.0012	0.0012	0.006628	-0.0001	0.341783	-0.65822	0.000089
MC.PA	0.0132	0.0020	0.0032	0.013721	0.0005	0.731890	-0.26811	-0.001760
AD.AS	0.0058	0.0004	0.0007	0.002796	-0.0030	0.151468	-0.84853	0.003537
WKL.AS	0.0158	0.0010	0.0016	0.006869	-0.0089	0.366626	-0.63337	0.014024
ASML.AS	0.0171	0.0023	0.0029	0.013905	-0.0032	0.730012	-0.26999	-0.011692
NDA.FI.HE	0.0001	0.0009	0.0009	0.004783	0.0047	0.247941	-0.75206	-0.006190
DTE.DE	0.0062	0.0002	0.0002	0.001149	-0.0051	0.059887	-0.94011	0.005424
IFX.DE	0.0097	0.0020	0.0028	0.012682	0.0030	0.671647	-0.32835	-0.009000
DPW.DE	-0.0018	-0.0001	0.0000	-0.00048	0.0014	-0.022650	-1.02265	-0.001320

3. függelék. Input adatok a második iterációs lépéshez, Euro Stoxx 50 (2015-2025)

Részvény	Arány	Átlag	\mathbf{V}	MOL	MTELEKOM	OPUS	OTP	RICHTER
MOL	0.2185	0.0052	MOL	0.0048	0.0012	0.0034	0.0034	0.0014
MTELEKOM	0.0968	0.0109	MTELEKOM	0.0012	0.0029	0.0023	0.0020	0.0009
OPUS	0.0331	0.0253	OPUS	0.0034	0.0023	0.0449	0.0031	0.0002
OTP	0.4379	0.0143	OTP	0.0034	0.0020	0.0031	0.0072	0.0018
RICHTER	0.2138	0.0091	RICHTER	0.0014	0.0009	0.0002	0.0018	0.0035

4. függelék. Piaci kapitalizációs arányok, átlagos hozamok és a \mathbf{V} kovarianciamátrix, BUX 5 (2015-2025)

ANALYTICAL FORMS OF EFFICIENT FRONTIER OF EURO STOXX 50 AND BUX 5 PORTFOLIOS

In the hand of supervisory bodies short selling bans are important controlling tools. In this case we must invoke non-negativity assumptions, which decreases the generality of the model and computationally means difficulties. For example, the analytical form of the mean-variance efficient frontier has been known for long time, on the other hand, we have never seen the analytical form of the efficient frontier of portfolios under short selling ban. This study offers an algorithm with computer code to identify the analytical form of efficient frontier for the case when non-negativity assumptions are invoked. Knowing the analytical forms facilitates the interpretations of novel characteristics over the time.

Keywords: portfolio efficient frontier, short selling, risk rigidity, Euro Stoxx, BUX