2.

GRUNDLEGUNG ZU EINER KONTINUITÄTSTHEORIE DER ELEKTRIZITÄT UND DES MAGNETISMUS.

Von JULIUS FARKAS.

Vorgelegt der Akademie in den Sitzungen vom 14. Nov. 1909 und 15. Nov. 1910.
Aus „Mathematikai és Természettudományi Értesítö", Band XXVIII u. XXIX.

Einleitung.

§ 1. Diese Grundlegung stützt sich, wie diejenige von MINKOWSKI-Born auf die Fiktion der kontinuierlichen Raumerfüllung. Die verschiedenen materiellen Bestandteile (materielle Komponenten) eines zusammengesetzten Körpers werden alle für sich als räumlich kontinuierliche Stoffe aufgefaßt. Befinden sich also verschiedene materielle Bestandteile eines Körpers in verschiedenen Bewegungen, so sind in einem und demselben Punkte des Körpers verschiedene simultane Geschwindigkeiten der Materie anzunehmen: der Bewegungszustand des Körpers wird durch verschiedene Geschwindigkeiten als stetige Funktionen von Ort und Zeit bestimmt. Die Elektrizitäten, die beständig oder vorübergehend verschiedenen materiellen Komponenten des Körpers angehören und sich schon demzufolge verschiedenartig verhalten — z. B. verschiedene Bewegungen ausführen — überhaupt die Elektrizitäten, die verschiedenes Betragen im Körper aufweisen, werden gleichermaßen alle für sich als räumlich kontinuierliche Wesenheiten betrachtet. Diese „elektrischen Bestandteile" befinden sich im allgemeinen in verschiedenen Bewegungen, weshalb auch in einem und demselben Punkte des Körpers verschiedene simultane Geschwindigkeiten der Elektrizitäten zu denken sind: der Bewegungszustand der Elektrizitäten wird durch verschiedene Geschwindigkeiten als stetige Funktionen von Ort und Zeit dargestellt.

In betreff der Materie werde ich mich aber auf den Fall beschränken, daß ihr Bewegungszustand durch eine einzige Geschwindigkeit bestimmt ist, die eine stetige Funktion von Ort und Zeit ist. Diese Geschwindigkeit als dreidimensionaler Vektor wird hier immer mit $\mathfrak{v}_0$ oder $\mathfrak{v}_{(0)}$ bezeichnet.

Alle Betrachtungen werden auf LORENTZsche Raumzeitsysteme bezogen, in welchen die möglich größte Geschwindigkeit der Materie und der Elektrizitäten dem absoluten Werte nach mit c bezeichnet wird.

Ich werde lediglich reelle Größen anwenden und stets die gewöhnliche dreidimensionale Vektorsymbolik benutzen. Die dreidimensionalen Vektoren (Raumvektoren) werden mit deutschen Buchstaben bezeichnet. Insbesondere wird der Ort eines Raumpunktes zu der Zeit t mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet, so daß die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z des Punktes die rechtwinkligen Komponenten des Vektors $\mathfrak{r}$ sind. Die Benennungen: Vierervektor, Sechservektor sollen auf vier, beziehungsweise auf sechs reelle Skalare angewendet werden, die sich der LORENTZtransformation des Systems $(\mathfrak{r}, t)$, beziehungsweise des Systems

$$\left(\frac{1}{c}\,[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2],\quad t_2\mathfrak{r}_1 - t_1\mathfrak{r}_2\right) \equiv \left(t_1\mathfrak{r}_2 - t_2\mathfrak{r}_1,\quad \frac{1}{c}\,[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2]\right)$$

unterordnen.

Außerdem werden dreidimensionale Vektoren vorkommen, die sich gegenüber LORENTZtransformationen verhalten wie $\mathfrak{r} - t\mathfrak{v}_0$. Ein Vektor dieser Art soll schlechthin ein $(\mathfrak{r} - t\mathfrak{v}_0)$-artiger Vektor genannt werden. Die „spezielle" LORENTZtransformation eines derartigen Vektors $\mathfrak{q}$ ist gegeben durch

$$(1)\qquad \mathfrak{q}' - \mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{v}_0 - \mathfrak{m}}{c^2 - \mathfrak{w}\mathfrak{v}_0}\,(\mathfrak{w}\mathfrak{q}) = \frac{\mathfrak{v}'_0 + \mathfrak{m}}{c^2 + \mathfrak{w}\mathfrak{v}'_0}\,(\mathfrak{w}\mathfrak{q}')$$

wo $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeit des gestrichenen Achsensytems in bezug auf das ungestrichene bedeutet, und

$$\frac{c\mathfrak{w}}{c + \sqrt{c^2 - \mathfrak{w}^2}} \equiv \mathfrak{m}$$

gesetzt ist. Setzt man noch zur Abkürzung

$$(2)\qquad \frac{c}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}_0{}^2}} \equiv k_0\,,$$

so ist das System

$$([k_0 \mathfrak{v}_0 \mathfrak{q}], \quad c k_0 \mathfrak{q})$$

ein Sechservektor und die Systeme

$$(c^2 \mathfrak{q} + (k_0 \mathfrak{v}_0 \mathfrak{q}) k_0 \mathfrak{v}_0, \quad (k_0 \mathfrak{v}_0 \mathfrak{q}) k_0),$$

$$([\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2] c^2 k_0, \quad [\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2] k_0 \mathfrak{v}_0)$$

sind Vierervektoren. Bedeutet $(\mathfrak{g}, g)$ einen Vierervektor, so ist $\mathfrak{g} - g\mathfrak{v}_0$ ein $(\mathfrak{r} - t\mathfrak{v}_0)$-artiger Vektor, und bedeutet $(c^2 \mathfrak{g}, \mathfrak{v}_0 \mathfrak{g})$ einen Vierervektor, so ist die skalare Größe $(\mathfrak{g}\mathfrak{q})$ invariant gegenüber LORENTZtransformationen. Alle diese Behauptungen ergeben sich daraus, daß $(k_0 \mathfrak{v}_0, k_0)$ ein Vierervektor ist.

Endliche Größen, die so klein (oder so groß) angenommen werden, daß in der Behandlung derselben die Vernachlässigungen der Infinitesimalrechnung zulässig sind, sollen hier physikalisch unendlich klein (physikalisch unendlich groß) genannt werden. Ist ein $(\mathfrak{r} - t\mathfrak{v}_0)$-artiger Vektor physikalisch unendlich klein in irgend einem LORENTZschen Raumzeitsysteme, so ist sie auch in jedem anderen physikalisch unendlich klein, denn Geschwindigkeiten ϑ, die der Grenze c physikalisch unendlich nahe kommen, sollen aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen werden.

Merkmale der elektrischen und magnetischen Zustände.

§ 2. Zustände in Isolatoren. Ein Körper wird ein Isolator genannt, wenn die Elektrizitäten in demselben bloß physikalisch unendlich kleine Verschiebungen in bezug auf die Materie ausführen können.

Betrachten wir zu der Zeit t die momentane elektrische Gesamtladung des materiellen Teilchens DK am Orte $\mathfrak{r}$ im Innern des Isolators. Gewisse Bestandteile (§ 1) dieser Ladung, $\varrho_1 DV$, $\varrho_2 DV$, .., $\varrho_n DV$ (wo DV das Volumen des Teilchens DK bedeutet), sind entstanden durch Verschiebungen aus benachbarten Teilchen DK_1, DK_2, .., DK_n, die sich zurzeit t an physikalisch unendlich nahen Orten $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, .., $\mathfrak{r}_n$ befinden. Die physikalisch unendlich kleinen Vektoren

$$\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i \equiv \bar{\mathfrak{r}}_i, \quad (i = 1, 2, .., n) \tag{3}$$

sind die Verschiebungen zu der Zeit t nach dem materiellen Teilchen DK. Zu einer anderen Zeit bedeuten dieselben, für Verschiebungen nach DK betrachtet, im allgemeinen Verschiebungen aus anderen Teilchen als DK_1, DK_2, .., DK_n; für Verschiebungen aus DK_1, DK_2, .., DK_n betrachtet, im allgemeinen Verschiebungen nach anderen Teilchen als DK. Aus und nach einem jeden Teilchen zu jeder Zeit sollen n Verschiebungen angenommen werden.

Im allgemeinen wird nur ein Teil der momentanen Gesamtladung des Teilchens DK von den Elektrizitäten $\varrho_1 DV$, $\varrho_2 DV$, .., $\varrho_n DV$ gebildet, während der übrige Teil $\equiv \varrho_0 DV$ eine permanente Ladung des Teilchens ist. Diese permanente Ladung selbst soll in zwei Bestandteile zerlegt werden. Der eine $\equiv \varrho_{n+1} DV$, ist entgegengesetzt gleich den aus dem Teilchen DK nach anderen Teilchen verschobenen Elektrizitäten; der andere $\equiv (\varrho_0 - \varrho_{n+1}) DV$ ist unter ganz besonderen Umständen vor unseren Betrachtungen dem Teilchen eingeprägt worden (die „wahre Ladung" bei MAXWELL).

Die zum Zeitpunkte t gehörigen Geschwindigkeiten der Elektrizitäten $\varrho_1 DV$, $\varrho_2 DV$, .., $\varrho_n DV$ sollen mit $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}_2$, .., $\mathfrak{v}_n$ bezeichnet werden. Wiewohl die Verschiebungen $\bar{\mathfrak{r}}_i$ (3) physikalisch unendlich kleine sind, so können doch die zur Materie relativen Geschwindigkeiten

$$\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0 \equiv \bar{\mathfrak{v}}_i, \quad (i = 1, 2, .., n) \tag{4}$$

physikalisch endlich große Werte haben, wenn nämlich umlaufende Bewegungen von den verschobenen Elektrizitäten ausgeführt werden.

Die permanenten Ladungen $\varrho_{n+1} DV$, $(\varrho_0 - \varrho_{n+1})\, DV$ bewegen sich selbstverständlich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ des Teilchens DK.

§ 3. Die hauptsächlichsten elektrischen und magnetischen Merkmale in Isolatoren. Als besondere Merkmale der elektrischen und magnetischen Zustände im Isolator sollen defini rt werden:

„die elektrische Gesamtdichte"

$$\varrho_G \equiv \sum_0^n \varrho_i \tag{5$_1$}$$

„die elektrische Polarisationsdichte"

$$(5)_2 \qquad \varrho_P \equiv \sum_{1}^{n+1} \varrho_i$$

„der elektrische Gesamtstrom"

$$(6)_1 \qquad \mathfrak{S}_G \equiv \sum_{0}^{n} \varrho_i \mathfrak{v}_i$$

„der elektrische Polarisationsstrom"

$$(6)_2 \qquad \mathfrak{S}_P \equiv \sum_{1}^{n+1} \varrho_i \mathfrak{v}_i$$

„das elektrische Moment" pro Volumeneinheit

$$(7) \qquad \mathfrak{P} \equiv \sum_{1}^{n} \varrho_i \bar{\mathfrak{r}}_i$$

„das relative magnetische Moment" pro Volumeneinheit

$$(8) \qquad \overline{\mathfrak{M}} \equiv \frac{1}{2c} \sum_{1}^{n} \varrho_i \, [\bar{\mathfrak{r}}_i \bar{\mathfrak{v}}_i]$$

„das magnetische Moment" pro Volumeneinheit

$$(9) \qquad \mathfrak{M} \equiv \overline{\mathfrak{M}} + \frac{1}{c} [\mathfrak{P} \mathfrak{v}_0]$$

„das relative elektrische Moment" pro Volumeneinheit

$$(10) \qquad \overline{\mathfrak{P}} \equiv \mathfrak{P} + \frac{1}{c} [\mathfrak{M} \mathfrak{v}_0] .$$

§ 4. Bedingungen der elektrischen und magnetischen Zustände in Isolatoren. Im Interesse der Übereinstimmung mit den Erfahrungen sind gewisse Bedingungen in bezug auf die Dichten, Verschiebungen und Geschwindigkeiten, ϱ_i, $\bar{\mathfrak{r}}_i$, $\mathfrak{v}_i$ festzusetzen. Als derartige Bedingungen sollen in dieser elementaren Behandlung die folgenden angenommen werden:

a) Die Dichten $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{n+1}$ sind im allgemeinen physikalisch unendlich groß und stehen in solchen Beziehungen zu einander, zu den Verschiebungen $\bar{\mathfrak{r}}_i$ und zu den Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_i$, daß die Produkte $\varrho_i \bar{\mathfrak{r}}_i$ und alle vorstehenden Summen (§ 3) physikalisch endlich große Werte darstellen.

b) Zwischen den Dichten, Verschiebungen und zur Materie relativen Geschwindigkeiten (ϱ_i, $\bar{\mathfrak{r}}_i$, $\bar{\mathfrak{v}}_i$) bestehen zu der Zeit t die Symmetriegleichungen:

$$(11)\quad \sum_1^n \varrho_i(\bar{\mathfrak{r}}_{ix}\bar{\mathfrak{v}}_i + \bar{\mathfrak{v}}_{ix}\bar{\mathfrak{r}}_i) = 0, \quad \sum_1^n \varrho_i(\bar{\mathfrak{r}}_{iy}\bar{\mathfrak{v}}_i + \bar{\mathfrak{v}}_{iy}\bar{\mathfrak{r}}_i) = 0,$$
$$\sum_1^n \varrho_i(\bar{\mathfrak{r}}_{iz}\bar{\mathfrak{v}}_i + \bar{\mathfrak{v}}_{iz}\bar{\mathfrak{r}}_i) = 0.$$

Diese „Symmetriebedingung“ ersetzt hier eine schon von H. A. LORENTZ angenommene Beschränkung der Bewegungszustände.[1])

c) Die Dichten ϱ_i und die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_i$ genügen der Kontiuitätsgleichung, d. h.

$$(12)\quad \frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div.} \varrho_i\mathfrak{v}_i = 0, \quad (i = 0, 1, .., n+1)$$

§ 5. Transformationssätze in Isolatoren. Aus den Definitionen der Vektoren $\mathfrak{v}_i$ und $\bar{\mathfrak{r}}_i$ folgt, daß das System $(k_i\mathfrak{v}_i, k_i)$ (wo $k_i\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}_i^2} \equiv c$) ein Vierervektor, $\bar{\mathfrak{r}}_i$ ein $(\mathfrak{r} - t\mathfrak{v}_0)$-artiger Vektor ist. Für die Transformation der Dichten ϱ_i wird Invarianz des Produktes $\varrho_i\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}_i^2}$ festgesetzt, wonach für die relativen Geschwindigkeiten $\bar{\mathfrak{v}}_i$ sich ergibt, daß $\varrho_i\bar{\mathfrak{v}}_i$ ein $(\mathfrak{r} - t\mathfrak{v}_0)$-artiger Vektor ist.

Aus diesen Eigenschaften folgt, daß alle Bedingungen (§ 4) invariant gegenüber LORENTZtransformationen sind.

Was die Merkmale in § 3 anbelangt, so sind die Systeme $(\mathfrak{S}_G, \varrho_G)$, $(\mathfrak{S}_P, \varrho_P)$ ebenfalls Vierervektoren, weil das System $(\varrho_i\mathfrak{v}_i, \varrho_i)$ ein Vierervektor ist. Ferner folgt aus den Symmetriebedingungen, daß das System $(\mathfrak{M}, \mathfrak{P}) \equiv (-\mathfrak{P}, \mathfrak{M})$ ein Sechservektor ist. Setzt man nämlich

$$\bar{\mathfrak{r}}_i + \frac{1}{c^2}(k_0\mathfrak{v}_0\bar{\mathfrak{r}}_i)\,k_0\mathfrak{v}_0 \equiv \mathfrak{a}_i, \quad \frac{1}{c^2}(k_0\mathfrak{v}_0\bar{\mathfrak{r}}_i)\,k_0 \equiv a_i,$$

$$\varrho_i\bar{\mathfrak{v}}_i - \frac{1}{2}\left\{\varrho_i\bar{\mathfrak{v}}_i + \frac{1}{c^2}(k_0\mathfrak{v}_0\varrho_i\bar{\mathfrak{v}}_i)\,k_0\mathfrak{v}_0\right\} \equiv \mathfrak{u}_i, \quad \varrho_i - \frac{1}{2c^2}(k_0\mathfrak{v}_0\varrho_i\bar{\mathfrak{v}}_i)\,k_0 \equiv u_i,$$

wo unter k_0 der Ausdruck (2) zu verstehen ist, so bedeuten die beiden Systeme $(\mathfrak{a}_i, a_i)$ und $(\mathfrak{u}_i, u_i)$ zwei Vierervektoren und infolge der Bedingung (11) haben wir nach (7) und (9)

---

1) H. A. LORENTZ, Enc. d. Math. Wiss. V, 14, S. 181.

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{c} \sum_1^n [\mathfrak{a}_i \mathfrak{u}_i], \quad \mathfrak{P} = \sum_1^n (u_i \mathfrak{a}_i - a_i \mathfrak{u}_i).$$

Das System ($\mathfrak{M}, \mathfrak{P}$) ist also in der Tat ein Sechservektor. Hieraus folgt nach (8) und (10), daß $\left(k_0 \overline{\mathfrak{M}}, \frac{1}{c^2} k_0 \mathfrak{v}_0 \overline{\mathfrak{M}}\right)$ und $\left(k_0 \overline{\mathfrak{P}}, \frac{1}{c^2} k_0 \mathfrak{v}_0 \overline{\mathfrak{P}}\right)$ Vierervektoren sind.

§ 6. Beziehungen der Merkmale in Isolatoren. Zwischen den Merkmalen (§ 3) bestehen die Beziehungen:

$$(13)_1\ (13)_2 \qquad \frac{\partial \varrho_G}{\partial t} + \text{div.}\, \mathfrak{S}_G = 0, \qquad \frac{\partial \varrho_P}{\partial t} + \text{div.}\, \mathfrak{S}_P = 0,$$

$$(14) \qquad -\,\text{div.}\, \mathfrak{P} = \varrho_P, \qquad c \,\text{rot}\, \mathfrak{M} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} = \mathfrak{S}_P.$$

Die Beziehungen $(13)_1$ und $(13)_2$ folgen aus $(5)_1$ $(5)_2$ $(6)_1$ $(6)_2$ und (12) unmittelbar. Die erste Gleichung in (14) ist lediglich eine Folge der Definitionen $(5)_2$ und (7) und der Definition der Vektoren $\bar{\mathfrak{r}}_i$ als physikalisch unendlich kleiner Verschiebungen der Ladungen $\varrho_i DV$ zwischen gleichzeitigen Orten je zweier materiellen Teilchen. Da nämlich zu der Zeit t die Ladungen $\varrho_1 DV, \varrho_2 DV, \ldots, \varrho_n DV$ die Stelle der aus DK verschobenen Ladungen einnehmen, die Summe der letzteren aber gleich $-\varrho_{n+1} DV$ ist, so hat man

$$\sum_1^n \text{div}\, \varrho_i \bar{\mathfrak{r}}_i = \sum_1^n \varrho_i - (-\varrho_{n+1}).$$

Die Ableitung der zweiten Gleichung in (14) bedarf außer den Definitionen der darin vorkommenden Vektoren auch noch der Bedingungen (§ 4) und der soeben bestätigten ersten Gleichung in (14).

Wenn die Geschwindigkeiten der materiellen Teilchen DK_1, $DK_2, \ldots, DK_n$ zu der Zeit t mit $\mathfrak{v}_{01}, \mathfrak{v}_{02}, \ldots, \mathfrak{v}_{0n}$ bezeichnet werden, so haben wir

$$\mathfrak{v}_i \equiv (\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_{0i}) + \mathfrak{v}_{0i} \equiv \frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt} + \mathfrak{v}_{0i}$$

$$= \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}_i}{\partial x} \mathfrak{v}_{ix} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}_i}{\partial y} \mathfrak{v}_{iy} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}_i}{\partial z} \mathfrak{v}_{iz} + \mathfrak{v}_0 - \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_0}{\partial x} \bar{\mathfrak{r}}_x + \frac{\partial \mathfrak{v}_0}{\partial y} \bar{\mathfrak{r}}_y + \frac{\partial \mathfrak{v}_0}{\partial z} \bar{\mathfrak{r}}_z\right).$$

Multipliziert man hier mit ϱ_i und addiert dann zur zweiten Zeile die mit $\bar{\mathfrak{r}}_i$ multiplizierte linke Seite der Gleichung (12), so kann das Resultat so geschrieben werden:

$$\varrho_i \mathfrak{v}_i = (\varrho_i + \operatorname{div} \varrho_i \bar{\mathfrak{r}}_i)\, \mathfrak{v}_0 + \frac{\partial \varrho_i \bar{\mathfrak{r}}_i}{\partial t} + \operatorname{rot} [\varrho_i \bar{\mathfrak{r}}_i \mathfrak{v}_0]$$
$$+ \frac{\partial \varrho_i \bar{\mathfrak{r}}_i \bar{\mathfrak{v}}_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_i \bar{\mathfrak{r}}_i \bar{\mathfrak{v}}_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_i \bar{\mathfrak{r}}_i \bar{\mathfrak{v}}_{iz}}{\partial z}.$$

Man hat aber

$$\bar{\mathfrak{r}}_i \bar{\mathfrak{v}}_{ix} \equiv \frac{1}{2} (\bar{\mathfrak{r}}_i \bar{\mathfrak{v}}_{ix} - \bar{\mathfrak{v}}_i \bar{\mathfrak{r}}_{ix}) + \frac{1}{2} (\bar{\mathfrak{r}}_i \bar{\mathfrak{v}}_{ix} + \bar{\mathfrak{v}}_i \bar{\mathfrak{r}}_{ix}) \text{ usw.}$$

Infolge der Gleichungen (11) bekommt man daher aus der vorstehenden Gleichung die zweite Gleichung in (14).

Aus $(13)_2$ und aus der zweiten Gleichung in (14) ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho_P + \operatorname{div} \mathfrak{P}) = 0$$

in Übereinstimmung mit der ersten Gleichung in (14).

Da $(\varrho_G, \mathfrak{S}_G)$ und $(\varrho_P, \mathfrak{S}_P)$ Vierervektoren sind und $(\mathfrak{M}, \mathfrak{P})$ ein Sechservektor ist, so sind die Gleichungen $(13)_1$ und $(13)_2$ und das System der Gleichungen (14) den Lorentztransformationen gegenüber invariant.

§ 7. **Zustände in Konduktoren.** Ein Körper wird ein Konduktor genannt, wenn die Elektrizitäten in demselben freibeweglich sind.

Die bewegten Elektrizitäten, die zu der Zeit t das Volumenelement DV im Konduktor passieren, sollen mit $\varrho_{(1)} DV$, $\varrho_{(2)} DV$, .., $\varrho_{(\nu)} DV$, ihre momentanen Geschwindigkeiten mit $\mathfrak{v}_{(1)}$, $\mathfrak{v}_{(2)}$, .., $\mathfrak{v}_{(\nu)}$ bezeichnet werden. Außerdem enthält das Volumenelement DV im allgemeinen eine momentane Ladung $\varrho_{(0)} DV$ mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_{(0)}$ der Materie in DV.

§ 8. **Die hauptsächlichsten Merkmale in einem Konduktor.** Als besondere Merkmale in einem Konduktor sollen definiert werden:

„die elektrische Gesamtdichte"

$$\varrho_{(G)} \equiv \sum_0^\nu \varrho_{(i)}, \tag{15}$$

„der elektrische Gesamtstrom"

$$\mathfrak{S}_{(G)} \equiv \sum_0^\nu \varrho_{(i)} \mathfrak{v}_{(i)} \tag{16}$$

„der relative elektrische Strom oder Leitungsstrom“

$$(17)\qquad \mathfrak{S}_{(L)} \equiv \sum_{0}^{\nu} \varrho_{(i)} (\mathfrak{v}_{(i)} - \mathfrak{v}_{(0)}) \equiv \mathfrak{S}_{(G)} - \varrho_{(G)} \mathfrak{v}_{(0)},$$

alles unter der Bedingung der totalen Kontinuitätsgleichung

$$(18)\qquad \frac{\partial \varrho_{(G)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S}_{(G)} = 0,$$

wogegen im allgemeinen

$$(19)\qquad \frac{\partial \varrho_{(i)}}{\partial t} + \operatorname{div} \varrho_{(i)} \mathfrak{v}_{(i)} \neq 0$$

ist.

§ 9. Transformationssätze in Konduktoren. In der Festsetzung, daß $\varrho_{(i)} \sqrt{c^2 - \mathfrak{v}_{(i)}^2}$ eine Invariante der Lorentztransformationen ist, folgt offenbar, daß das System $(\varrho_{(i)} \mathfrak{v}_{(i)}, \varrho_{(i)})$ ein Vierervektor ist. Hieraus ergibt sich, daß $(\mathfrak{S}_{(G)}, \varrho_{(G)})$ ein Vierervektor, $\mathfrak{S}_{(L)}$ ein $(\mathfrak{r} - t\mathfrak{v}_0)$-artiger Vektor ist, und die linken Seiten in (18) und (19) Invarianten der Lorentztransformationen sind.

§ 10. Zustände in neutralen Körpern. Endlich sollen auch materielle Systeme zugelassen werden, die hinsichtlich aller elektrischen und magnetischen Eigenschaften als innerliche Zusammensetzungen von Isolatoren und Konduktoren betrachtet werden.

Neben den bisherigen Merkmalen, Bedingungen und Bezeichnungen, ist in dergleichen Zusammensetzungen noch der Vierervektor zu beachten, der aus der nach $(5)_1$ und (15) berechneten „totalen elektrischen Dichte“:

$$(20)\qquad \varrho_T \equiv \varrho_G + \varrho_{(G)}$$

und aus dem nach $(6)_1$ und (16) berechneten „totalen elektrischen Strom“:

$$(21)\qquad \mathfrak{S}_T \equiv \mathfrak{S}_G + \mathfrak{S}_{(G)}$$

als Komponenten zusammengesetzt ist. Man hat hierfür nach $(13)_1$ und (18) die „totale Kontinuitätsgleichung“:

$$(22)\qquad \frac{\partial \varrho_T}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S}_T = 0$$

Es ist zu beachten, daß die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{v}_{(0)}$ in $\mathfrak{S}_G$ $(6)_1$ und $\mathfrak{S}_{(G)}$ (16) hier eine gemeinsame Bedeutung haben = Geschwindigkeit der Materie.

Die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes als allgemeine Lösungen der totalen Kontinuitätsgleichung der Elektrizitäten.

§ 11. Genügt ein differentiierbarer Viererverktor $(\mathfrak{q}, q)$ der Gleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{q} = 0,$$

so hat man hierfür als allgemeine Lösung:

$$(\mathrm{B})_1, (\mathrm{B})_2 \qquad q = \operatorname{div} \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{q} = \operatorname{rot} \mathfrak{U} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t},$$

wo $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{U}$ wenigstens zweimal differentiierbare Funktionen, sonst aber willkürliche Parameter bedeuten. Ihre Willkürlichkeit kann indessen beschränkt werden, ohne daß damit die Allgemeinheit der Lösung $(\mathrm{B})_1$ $(\mathrm{B})_2$ eingebüßt würde. Bekanntlich kann z. B.

$$(\mathrm{B})_3, (\mathrm{B})_4 \qquad \operatorname{div} \mathfrak{U} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{N} = 0$$

verlangt werden. Es sind aber unendlich viele andere Beschränkungen neben Bewahrung der Allgemeinheit möglich. Insbesondere kann aus dem System $(\mathrm{B})_1 \,..\, (\mathrm{B})_4$ abgeleitet werden das System:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} q = \operatorname{div} \mathfrak{T}, \quad \mathfrak{q} = c \operatorname{rot} \mathfrak{B} - \dfrac{\partial \mathfrak{T}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathfrak{B} = o, \quad c \operatorname{rot} \mathfrak{T} + \dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Bedeutet nämlich $\mathfrak{K}$ einen wenigstens dreimal differentiierbaren Vektor von der Beschaffenheit:

$$c^2 \Delta \mathfrak{K} - \frac{\partial^2 \mathfrak{K}}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{K} = 0,$$

und setzt man in $(\mathrm{B}_1) \,..\, (\mathrm{B})_4$:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{T} - \operatorname{rot} \mathfrak{K}, \quad \mathfrak{U} = c\mathfrak{B} - \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial t},$$

so erhält man aus $(\mathrm{B})_1 \,..\, (\mathrm{B})_4$ das System (C) als allgemeine Lösung der Gleichung (A), und bei der Verfügung, daß $(\mathfrak{T}, \mathfrak{B})$

ein Sechservektor ist, ist das System (C) den LORENTZtransformationen gegenüber invariant.

Die elektromagnetischen Feldgleichungen von H. A. LORENTZ[1]) können nun bei Anwendung der Bezeichnungen (20) und (21) auf die Form:

$$(23)\qquad \begin{cases} \operatorname{rot}\mathfrak{B} - \dfrac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \mathfrak{S}_T, & \operatorname{div}\mathfrak{E} = \varrho_T \\ \operatorname{rot}\mathfrak{E} + \dfrac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0, & \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0 \end{cases}$$

gebracht werden. Dies System ist also als allgemeine Lösung der Kontinuitätsgleichung (22):

$$\frac{\partial \varrho_T}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{S}_T = 0$$

zu betrachten.

Die physikalische Bedeutung der Vektoren $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{B}$ als „elektrischer Feldstärke" und „magnetischer Erregung" wird durch die Angabe der elektromagnetischen Kräfte festgesetzt.

Bewegungsgleichungen der Elektrizitäten.

§ 12. Die Dichte einer elektrischen Komponente (§ 1) soll allgemein mit ϱ und die zugehörige Geschwindigkeit mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet werden.

Als Bewegungsgleichungen der Elektrizitäten werden hier:

$$(24)\qquad \begin{cases} pk\,\dfrac{dqk\mathfrak{v}}{dt} = \varrho\left\{\mathfrak{E} + \dfrac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}]\right\} + \mathfrak{f} \\ pk\,\dfrac{dqk}{dt} = \dfrac{\varrho}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) + f \\ \left(k \equiv \dfrac{c}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{v}^2}},\quad \dfrac{d}{dt} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{v}_x\dfrac{\partial}{\partial_x} + \mathfrak{v}_y\dfrac{\partial}{\partial_y} + \mathfrak{v}_z\dfrac{\partial}{\partial_z}\right) \end{cases}$$

angenommen, wo p eine invariante Massendichte, q eine invariante (veränderliche) Zahl und $(\mathfrak{f}, f)$ ein Vierervektor ist, der pro Volumeneinheit eine von der Materie herrührende Kraft bedeutet.

§ 13. Aus den beiden Gleichungen (24) sollen zwei anders geformte äquivalente Gleichungen abgeleitet werden. Die eine entsteht, indem die zweite Gleichung mit $\mathfrak{v}_0$ (Geschwindigkeit der

1) H. A. LORENTZ, Enc. d. Math. Wiss. V. 14, S. 209.

Materie) multipliziert und dann von der ersten Gleichung subtrahiert wird; die andere entsteht, indem die erste Gleichung mit $\frac{\mathfrak{v}}{c^2}$ skalar multipliziert und dann von der zweiten Gleichung subtrahiert wird. Wir erhalten so:

$$(25)\qquad pk\left(\frac{dqk\mathfrak{v}}{dt} - \mathfrak{v}_0\frac{dqk}{dt}\right) = \varrho\left\{\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}] - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})\mathfrak{v}_0\right\} + \mathfrak{k},$$

$$(26)\qquad p\frac{dq}{dt} = f - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{v}\mathfrak{f}),$$

wo

$$(27)\qquad \mathfrak{k} \equiv \mathfrak{f} - f\mathfrak{v}_0$$

eine $(\mathfrak{r} - t\mathfrak{v}_0)$-artige, von der Materie herrührende Kraftdichte bedeutet.

Sind $p, q, \mathfrak{k}$ als Funktionen von Geschwindigkeit, Ort und Zeit gegeben, so hat man allein mit (25) als Bewegungsgleichung zu tun, wogegen (26) und (27) lediglich zur nachträglichen Bestimmung des Vierervektors $(\mathfrak{f}, f)$ dienlich sind.

Ponderomotorische Kraft nach dem Reaktionsprinzip.

§ 14. Es soll nun die Annahme gemacht werden, daß im Falle der Ruhe ($\mathfrak{v}_0 = 0$) des zu betrachtenden Körpers das Reaktionsprinzip (Newtons lex tertia) zwischen der Materie und den Elektrizitäten im Sinne der Gleichzeitigkeit gültig ist. Wenn also die Trägheitskräfte der Elektrizitäten und somit auch die linken Seiten der Gleichungen (24) vernachlässigt werden können, so folgt, daß das elektromagnetische Feld auf das materielle Teilchen DK mit den folgenden Kräften wirkt:

a) vermöge der Konduktionsladungen $\varrho_{(i)}DV$ (§ 7) mit den vierkomponentigen Kräften:

$$(\mathfrak{F}_{(i)}, F_{(i)})DV \equiv \left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}_{(i)}\mathfrak{B}],\ \frac{1}{c^2}\mathfrak{v}_{(i)}\mathfrak{E}\right)\varrho_{(i)}DV$$

$$(i = 0, 1, .., \nu;\ \mathfrak{v}_{(0)} = \mathfrak{v}_0 = 0)$$

b) vermöge der aus dem Teilchen DK nach der Stelle $\mathfrak{r} = \bar{\mathfrak{r}}_i$ verschobenen, aber mit quasielastischen Kräften an dem Teilchen gebundenen Ladungen $\varrho_i^* DV_i^*$ mit den vierkomponentigen Kräften:

$$(\mathfrak{F}_i^*, F_i^*)\,DV_i^* \equiv \left\{\left(\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{B}],\ \frac{1}{c^2}\mathfrak{v}\mathfrak{E}\right)\varrho\right\}_i^* DV_i^*$$

$$(i = 0, 1, .., n;\ \mathfrak{v}_0 = 0),$$

wo

$$\mathfrak{F}_{ix}^* = \mathfrak{F}_{ix} + \bar{\mathfrak{r}}_i \operatorname{grad} \mathfrak{F}_{ix} \text{ usw.}, \quad F_i^* = F_i + \bar{\mathfrak{r}}_i \operatorname{grad} F_i,$$
$$DV_i^* = (1 + \operatorname{div} \bar{\mathfrak{r}}_i)\, DV$$

und endlich $\mathfrak{E}_i = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}$ zu setzen ist, und die Verschiebung $\bar{\mathfrak{r}}_i$ mit der gleichbezeichneten Verschiebung (3) in § 2 verwechselt werden darf.

So erleidet das Teilchen DK vom elektromagnetischen Felde die Wirkung einer vierkomponentigen ponderomotorischen Kraft $(\mathfrak{K}, K)\, DV$, die im ruhenden Körper pro Volumeneinheit durch die Ausdrücke:

$$\mathfrak{K}_{(\mathfrak{v}_0=0)} = \sum_0^{\nu} \mathfrak{F}_{(i)} + \sum_0^n \mathfrak{F}_i + \frac{\partial}{\partial x} \sum_1^n \mathfrak{F}_i \bar{\mathfrak{r}}_{ix} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_1^n \mathfrak{F}_i \bar{\mathfrak{r}}_{iy} + \frac{\partial}{\partial z} \sum_1^n \mathfrak{F}_i \bar{\mathfrak{r}}_{iz},$$

$$K_{(\mathfrak{v}_0=0)} = \sum_0^{\nu} F_{(i)} + \sum_0^n F_i + \frac{\partial}{\partial x} \sum_1^n F_i \bar{\mathfrak{r}}_{ix} + \frac{\partial}{\partial y} \sum_1^n F_i \bar{\mathfrak{r}}_{iy} + \frac{\partial}{\partial z} \sum_1^n \mathfrak{F}_i \bar{\mathfrak{r}}_{iz}.$$

bestimmt ist.

§ 15. Transformiert man aus der Ruhe ($\mathfrak{v}_0 = 0$) in die Bewegung ($\mathfrak{v}_0 \neq 0$) des Körpers (wobei $\mathfrak{v}_0$ als von Ort und Zeit unabhängig betrachtet wird) und setzt man zur Abkürzung

$$\bar{\mathfrak{r}}_i + \frac{1}{c^2} (k_0 \mathfrak{v}_0 \bar{\mathfrak{r}}_i)\, k_0 \mathfrak{v}_0 \equiv \mathfrak{a}_i, \quad \frac{1}{c^2} (k_0 \mathfrak{v}_0 \bar{\mathfrak{r}}_i)\, k_0 \equiv a_i,$$

so erhält man für die Kraftdichte im gleichmäßig bewegten Körper:

$$\mathfrak{K} = \sum_0^{\nu} \mathfrak{F}_{(i)} + \sum_0^n \mathfrak{F}_i + \frac{\partial}{\partial t} \sum_1^n \mathfrak{F}_i a_i + \frac{\partial}{\partial x} \sum_1^n \mathfrak{F}_i \mathfrak{a}_{ix} + \ldots,$$

$$K = \sum_0^{\nu} F_{(i)} + \sum_0^n F_i + \frac{\partial}{\partial t} \sum_1^n F_i a_i + \frac{\partial}{\partial x} \sum_1^n F_i \mathfrak{a}_{ix} + \ldots$$

Aus der in § 14 und hier definierten Bedeutung der Vektoren $(\mathfrak{F}_{(i)}, F_{(i)})$, $(\mathfrak{F}_i, F_i)$ und $(\mathfrak{a}_i, a_i)$ sieht man, daß $(\mathfrak{K}, K)$ ein Vierervektor ist (§ 1) und zwar auch dann, wenn die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ nachträglich als von Ort und Zeit abhängig betrachtet wird.

§ 16. Bei Beachtung der Definitionen der Merkmale $(5)_1$, $(6)_1$, (7), (8), (9), (10), (15), (16), (20), (21), und der zugehörigen Gleichungen sowie der vier Feldgleichungen, gelangt man zur Tensordarstellung der Kraftdichte $(\mathfrak{K}, K)$ durch die Größen:

$$\mathfrak{E}, \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{E} + \mathfrak{P} \equiv \mathfrak{D}, \quad \mathfrak{B} - \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{H},$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\,\mathfrak{v}_0 k_0 \overline{\mathfrak{P}}\right) \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\,[k_0 \overline{\mathfrak{P}} \mathfrak{B}] \equiv \mathfrak{G}, \quad \frac{1}{c^2}\,(k_0 \overline{\mathfrak{P}} \mathfrak{E}) \equiv G.$$

Definiert man nämlich einen Tensor durch die sechzehn Komponenten:

$$X_x \equiv \mathfrak{G}_x k_0 \mathfrak{v}_{0x} + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x - \frac{\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{E} + \mathfrak{M}\mathfrak{B}}{2},$$

$$X_y \equiv \mathfrak{G}_x k_0 \mathfrak{v}_{0y} + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y,$$

$$X_z \equiv \mathfrak{G}_x k_0 \mathfrak{v}_{0z} + \mathfrak{E}_x \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_z,$$

$$c X_t \equiv \mathfrak{G}_x k_0 c + \mathfrak{B}_y \mathfrak{D}_z - \mathfrak{B}_z \mathfrak{D}_y, \quad \text{usw.}$$

$$T_x \equiv G k_0 \mathfrak{v}_{0x} c + \mathfrak{H}_y \mathfrak{E}_z - \mathfrak{H}_z \mathfrak{E}_y, \quad \text{usw.}$$

$$c T_t \equiv G k_0 c^2 - \frac{\mathfrak{E}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}}{2} - \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{E} + \mathfrak{M}\mathfrak{B}}{2},$$

so ergeben sich

$$\mathfrak{K}_x = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial X_t}{\partial t},$$

$$\mathfrak{K}_y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \frac{\partial Y_t}{\partial t},$$

$$\mathfrak{K}_z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{\partial Z_t}{\partial t},$$

$$cK = \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} + \frac{\partial T_t}{\partial t}.$$

Da die Systeme $(\mathfrak{D}, \mathfrak{H})$ und $(\mathfrak{E}, \mathfrak{B})$ Sechservektoren sind und das System $(\mathfrak{G}, G)$ ein Vierervektor ist, so folgt abermals, daß $(\mathfrak{K}, K)$ ein Vierervektor ist. Derselbe unterscheidet sich (für $c = 1$) von dem MINKOWSKIschen Vierervektor $\left(K_1, K_2, K_3, \sqrt{-1}\,K_4\right)$ durch den Vierervektor:

$$\left(\frac{d_0 \mathfrak{G} k_0 DV}{DV \cdot dt} + \operatorname{grad} \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{E} + \mathfrak{M}\mathfrak{B}}{2}, \quad \frac{d_0 G k_0 DV}{DV \cdot dt} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{E} + \mathfrak{M}\mathfrak{B}}{2}\right),$$

wo

$$\frac{d_0}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{v}_{0x} \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{v}_{0y} \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{v}_{0z} \frac{\partial}{\partial z}$$

zu denken ist. Eine Folge dieser Beziehung ist, daß die Verbindungen der Komponenten der MINKOWSKIschen Spannungen[1]) hier ebenfalls erfüllt sind.

Elektrokinematische Erklärung des Zustandes in einem isotropen gleichmäßig bewegten Isolator.

§ 17. Die Beschränkung, daß $\mathfrak{v}_0$ (Geschwindigkeit der Materie) nach Ort und Zeit konstant ist, ermöglicht in dieser Theorie eine verhältnismäßig einfache elektrokinematische Interpretation der POISSON-MINKOWSKIschen Beziehungen der Feldvektoren. Und zwar gestalten sich gewisse hierzu führende Lösungen der Grundgleichungen fast ebenso einfach für $\mathfrak{v}_0 \neq 0$ wie für $\mathfrak{v}_0 = 0$. Um also die Invarianz dieser Lösungen sichtlich zu machen, soll in der Beschreibung derselben ein Bezugssystem benützt werden, in welchem $\mathfrak{v}_0 \neq 0$ ist.

Zu diesem Zwecke sollen die zu der Zeit t betrachteten Teilchen DK_i (Art. 1) auch noch zu Zeiten t_{0i}, die von t und von einander verschieden sind, betrachtet werden, wobei zwischen diesen Zeiten die (invariante) Beziehung

$$(a)_1 \qquad t - \frac{\mathfrak{v}_0 \mathfrak{r}}{c^2} = t_{0i} - \frac{\mathfrak{v}_0 \mathfrak{r}_{0i}}{c^2}, \quad (i = 1, 2, .., n)$$

festgesetzt werden soll, wo $\mathfrak{r}_{0i}$ den Ort des Teilchens DK_i zu der Zeit t_{0i} bedeutet. (Mit $\mathfrak{r}_i$ haben wir den Ort des Teilchens zu der Zeit t bezeichnet.)

Neben den Bezeichnungen:

$$(a)_2 \qquad c : \sqrt{c^2 - \mathfrak{v}_i^2} \equiv k_i, \quad c : \sqrt{c^2 - \mathfrak{v}_0^2} \equiv k_0$$

(wo $\mathfrak{v}_i$ die Geschwindigkeit der aus DK_i nach DK verschobenen elektrischen Ladung $\varrho_i DV$ bedeutet § 2) werden noch allgemein die Abkürzungen

$$(a)_3 \qquad \mathfrak{K} + \left(\frac{k_0 \mathfrak{v}_0}{c} \mathfrak{K}\right) \frac{k_0 \mathfrak{v}_0}{c} \equiv \mathfrak{K}^{\nabla}$$

$$(a)_4 \qquad \left\{1 - \frac{k_0^2}{c^2} \left(\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt_{0i}} \frac{d\mathfrak{r}^{\nabla}}{dt_{0i}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \equiv \vartheta_i, \quad (i = 1, 2, .., n)$$

benützt.

---

1) M. BORN, „Elastizitätstheorie und Relativitätsprinzip". Phys. Zeitschr. 1911. S. 570 (7'').

§ 18. Zu den Raumzeitpunkten $(\mathfrak{r}, t)$, $(\mathfrak{r}_i, t)$, $(\mathfrak{r}_{0i}, t_{0i})$ gehören im Sinne der Definitionen des §§ 2 und 14 gewisse dienliche Beziehungen, die hier zusammengefaßt werden sollen.

Man hat

$$\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_{0i} = (t - t_{0i})\, \mathfrak{v}_0,$$

also

$$\mathfrak{r} \equiv \mathfrak{r}_{0i} + (\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i) + (\mathfrak{r}_i - \mathfrak{r}_{0i}) = \mathfrak{r}_{0i} + \bar{\mathfrak{r}}_i + (t - t_{0i})\, \mathfrak{v}_0 .$$

Aus $(a)_1$ folgen daher

$$(a)_5\ (a)_6 \qquad t = t_{0i} + \left(\frac{\mathfrak{v}_0}{c^2}\, \bar{\mathfrak{r}}_i^{\nabla}\right), \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{0i} + \bar{\mathfrak{r}}_i^{\nabla},$$

$$(a)_7\ (a)_8 \qquad \frac{dt}{dt_{0i}} = 1 + \left(\frac{\mathfrak{v}_0}{c^2}\, \frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i^{\nabla}}{dt_{0i}}\right), \qquad \frac{d\mathfrak{r}}{dt_{0i}} = \mathfrak{v}_0 + \frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i^{\nabla}}{dt_{0i}},$$

und für die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_i$ der Ladung $\varrho_i DV$ am Orte $\mathfrak{r}$:

$$(a)_9 \qquad \mathfrak{v}_i \equiv \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \equiv \frac{d\mathfrak{r}}{dt_{0i}}\, \frac{dt_{0i}}{dt} = \left(\mathfrak{v}_0 + \frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i^{\nabla}}{dt_{0i}}\right) : \frac{dt}{dt_{0i}} .$$

Daraus und aus $(a)_2$ und $(a)_7$ kann abgeleitet werden, daß nach der Bezeichnung $(a)_4$:

$$(a)_{10} \qquad \vartheta_i k_i = k_0\, \frac{dt}{dt_{0i}},$$

folglich allgemein

$$(a)_{11} \qquad \left\{ \begin{aligned} & \vartheta_i k_i\, \frac{d}{dt} = k_0\, \frac{d}{dt_{0i}} \\ & \left(\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathfrak{v}_{ix}\, \frac{\partial}{\partial x} + \ldots, \quad \frac{d}{dt_{0i}} \equiv \frac{\partial}{\partial t_{0i}} + \mathfrak{v}_{0x}\, \frac{\partial}{\partial x_{0i}} + \ldots\right). \end{aligned} \right.$$

Aus $(a)_9$ und aus $(a)_7$ folgt weiterhin nach $(a)_{10}$:

$$(a)_{12} \qquad \left\{ \begin{aligned} & \vartheta_i k_i \mathfrak{v}_i = k_0 \left(\mathfrak{v}_0 + \frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i^{\nabla}}{dt_{0i}}\right), \\ & \vartheta_i k_i = k_0 \left(1 + \frac{\mathfrak{v}_0}{c^2}\, \frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i^{\nabla}}{dt_{0i}}\right), \end{aligned} \right.$$

woher

$$(a)_{13} \qquad \vartheta_i k_i\, (\mathfrak{v}_i - \mathfrak{v}_0) \equiv \vartheta_i k_i \bar{\mathfrak{v}}_i = k_0\, \frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt_{0i}} .$$

Wiewohl $\bar{\mathfrak{r}}_i$ einen physikalisch unendlich kleinen Vektor darstellt, wird hier die relative Geschwindigkeit $\bar{\mathfrak{v}}_i$ $\left(\equiv \frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt}\right)$ doch physikalisch endlich groß angenommen.

Es ist noch in acht zu nehmen, daß, wenn die Zahlenwerte einer Funktion

$$\Phi\,(t_{0i},\,\mathfrak{r}_{0i}) \equiv \Phi_i\,, \qquad \Phi\,(t,\,\mathfrak{r}) \equiv \Phi$$

und ihrer partiellen Ableitungen von gleichen physikalischen Größenordnungen sind, so hat man nach $(a)_5$ und $(a)_6$ mit physikalisch unendlich großer Pünktlichkeit zweiter Ordnung:

$$(a)_{14} \qquad \Phi_i = \Phi - \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{v}_0}{c^2}\,\bar{\mathfrak{r}}_i^{\,\triangledown}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\bar{\mathfrak{r}}_{ix}^{\,\triangledown} + \cdot + \cdot \right\}$$

und mit voller Pünktlichkeit:

$$(a)_{15} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t} = \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t_{0i}} - \left\{ \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t_{0i}}\left(\dfrac{\mathfrak{v}_0}{c^2}\,\dfrac{\partial \bar{\mathfrak{r}}_i^{\,\triangledown}}{\partial t}\right) + \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x_{0i}}\,\dfrac{\partial \bar{\mathfrak{r}}_{ix}^{\,\triangledown}}{\partial t} + \cdot + \cdot \right\}, \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x_{0i}} - \left\{ \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t_{0i}}\left(\dfrac{\mathfrak{v}_0}{c^2}\,\dfrac{\partial \bar{\mathfrak{r}}_i^{\,\triangledown}}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial \Phi_i}{\partial x_{0i}}\,\dfrac{\partial \bar{\mathfrak{r}}_{ix}^{\,\triangledown}}{\partial x} + \cdot + \cdot \right\}, \\[2ex] \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \right.$$

§ 19. Es sind zu erfüllen: I. die Symetriegleichungen (11), II. die Kontinuitätsgleichungen (12), III. die Momentgleichungen (14), IV. die Bewegungsgleichungen der Elektrizitäten (25), wo jetzt die Größen p, q, k, $\mathfrak{v}$, ϱ, $\mathfrak{k}$ mit dem Index i zu nehmen sind, V. die Feldgleichungen (23) für $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S}_G$, $\varrho_T = \varrho_G$, alles im Sinne der Definitionen in § 3.

Die unter I, II, III, IV postulierten Gleichungen werden mit physikalisch unendlich großer Pünktlichkeit erfüllt durch die partikulären Ansätze:

$$\underset{\smile}{1} \qquad i = 0,\,1,\,2,\,3,\,4 \ \text{(d. h. } n = 4)$$

$$\underset{\smile}{2} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{G}_i + \mathfrak{N}_i \cos\theta_i + \mathfrak{U}_i \sin\theta_i\,, \qquad (i = 1,\,2,\,3,\,4) \\[1ex] \theta_1 = k_0\,\dfrac{c^2 t - \mathfrak{v}_0\,\mathfrak{r}}{c^2 T} = k_0\,\dfrac{c^2 t_{0i} - \mathfrak{v}_0\,\mathfrak{r}_{0i}}{c^2 T}\,, \\[2ex] \theta_2 = \theta_1 + \dfrac{\pi}{2}\,, \quad \theta_3 = \theta_2 + \dfrac{\pi}{2}\,, \quad \theta_4 = \theta_3 + \dfrac{\pi}{2}\,, \end{array} \right.$$

wo T eine physikalisch unendlich kleine konstante invariante Zeitdauer ist und die dreikomponentigen Größen

$$\mathfrak{G}_i \equiv \mathfrak{G}\,(t_{0i},\,\mathfrak{r}_{0i})\,, \quad \mathfrak{N}_i \equiv \mathfrak{N}\,(t_{0i},\,\mathfrak{r}_{0i})\,, \quad \mathfrak{U}_i \equiv \mathfrak{U}\,(t_{0i},\,\mathfrak{r}_{0i})\,,$$

samt Ableitungen physikalisch unendlich kleine $(\mathfrak{r} - t\mathfrak{v}_0)$-artige Vektoren sind und den Beziehungen

$$\underset{\smile}{3} \qquad \mathfrak{U}_i\mathfrak{U}_i^{\triangledown} = \mathfrak{N}_i\mathfrak{N}_i^{\triangledown}\,, \quad \mathfrak{N}_i\mathfrak{U}_i^{\triangledown} = \mathfrak{U}_i\mathfrak{N}_i^{\triangledown} = 0$$

genügen.

Weitere Ansätze sind:

$$\underset{\smile}{4} \qquad \frac{\varrho_i}{\vartheta_i k_i} = \varpi + \varphi_i \cos\theta_i + \psi_i \sin\theta_i, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wo θ_i die obige Bedeutung hat und ϖ ist eine physikalisch unendlich große invariante Konstante, und

$$\underset{\smile}{5} \qquad \left\{ \begin{aligned} \varphi_i &\equiv \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_0 \mathfrak{N}_i^{\triangledown}}{c^2 \partial t_{0i}} + \operatorname{div}_{0i} \mathfrak{N}_i^{\triangledown} \right) \varpi, \\ \psi_i &\equiv \left(\frac{\partial \mathfrak{v}_0 \mathfrak{U}_i^{\triangledown}}{c^2 \partial t_{0i}} + \operatorname{div}_{0i} \mathfrak{U}_i^{\triangledown} \right) \varpi. \end{aligned} \right.$$

$$\underset{\smile}{6} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varrho_5 = \varrho_0 = -4 k_0 \varpi \left\{ 1 + \frac{\partial \mathfrak{v}_0 \mathfrak{G}^{\triangledown}}{c^2 \partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{G}^{\triangledown} \right\}, \\ &\qquad\qquad \mathfrak{G}^{\triangledown} \equiv \mathfrak{G}^{\triangledown}(t, \mathfrak{r}). \end{aligned} \right.$$

$$\underset{\smile}{7} \qquad \mathfrak{k}_i = -\varpi^2 \lambda_i \bar{\mathfrak{r}}_i,$$

wo λ_i eine invariante positive Funktion von t_{0i} und $\mathfrak{r}_{0i}$ ist.

$\underset{\smile}{8}$ $\left\{\right.$ $\frac{p_i}{\vartheta_i}$ und $\frac{q_i}{\vartheta_i}$ samt Ableitungen bedeuten physikalisch endlich große positive Funktionen von t_{0i} und $\mathfrak{r}_{0i}$.

$$\underset{\smile}{9}_1 \qquad \varpi \lambda \mathfrak{G} = k_0 \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c} \mathfrak{B} \right] - \left(\frac{\mathfrak{v}_0}{c} \mathfrak{E} \right) \frac{\mathfrak{v}_0'}{c} \right\},$$

$$\underset{\smile}{9}_2 \qquad (\lambda - \nu) \varpi \mathfrak{N} = \left[\frac{\mathfrak{U}^{\triangle}}{cT} \left(\mathfrak{B} - \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c} \mathfrak{E} \right] \right) \right],$$

$$\underset{\smile}{9}_3 \qquad (\lambda - \nu) \varpi \mathfrak{U} = -\left[\frac{\mathfrak{N}^{\triangledown}}{cT} \left(\mathfrak{B} - \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c} \mathfrak{E} \right] \right) \right],$$

wo

$$\underset{\smile}{10} \qquad \nu \equiv \frac{pq}{T^2 \varpi^2 \vartheta^2}$$

ist und alle veränderliche Größen auf t und $\mathfrak{r}$ zu beziehen sind.

Die für $\mathfrak{v}_0 \neq 0$ etwas mühsame Verifizierung dieser Ansätze als partikuläre Lösungen der Gleichungen I, II, III, IV ergibt sich doch leicht mittels der Beziehungen $(a)_1, (a)_2, \ldots, (a)_{15}$ im Artikel 17 und 18. Da indessen alle Ansätze invariant gegenüber Lorentz-transformationen sind, so darf die Prüfung derselben auf den Fall $\mathfrak{v}_0 = 0$ beschränkt werden. In diesem Falle haben wir

$$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_{0i}, \quad t = t_{0i}, \quad \mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{0i} + \bar{\mathfrak{r}}_i, \quad k_0 = 1, \quad \vartheta_i k_i = 1, \quad \mathfrak{v}_i = \bar{\mathfrak{v}}_i = \frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt_{0i}},$$

und laut $\underset{\smile}{2}$ haben wir in $(a)_{15}$ mit physikalisch unendlich großer Pünktlichkeit erster Ordnung:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi_i}{dt} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial t_{0i}} + \frac{\sin\theta_i}{T}(\mathfrak{N}_i \operatorname{grad}_{0i}\Phi_i) - \frac{\cos\theta_i}{T}(\mathfrak{U}_i \operatorname{grad}_{0i}\Phi_i) \\ &\frac{\partial \Phi_i}{dx} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_{0i}}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_{0i}}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial z_{0i}}, \end{aligned}\right.$$

und mit physikalisch unendlich großer Pünktlichkeit zweiter Ordnung haben wir in $(\mathrm{a})_{14}$:

$$\Phi_i = \Phi - (\bar{\mathfrak{r}} \operatorname{grad} \Phi).$$

Mittels dieser Beziehungen gestaltet sich die Verifizierung unserer Ansätze $\underset{\smile}{1}$, $\underset{\smile}{2}$, .., $\underset{\smile}{9}_3$ an den Gleichungen I, II, III, IV ziemlich einfach.

Es sind aber noch zu erfüllen die Feldgleichungen (23) für $\mathfrak{S}_T = \mathfrak{S}_G$, $\varrho_T = \varrho_G$. Infolge unserer Ansätze können diese Gleichungen so geschrieben werden:

$$\left\{\begin{aligned} &c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0, \\ &c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0, \\ &(\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{E} + \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{H} \equiv \mathfrak{B} - \mathfrak{M}). \end{aligned}\right.$$

Es wird sich zeigen, daß die Vektoren $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}$ algebraisch ausgedrückt werden können durch die Vektoren $\mathfrak{G}^{\Delta}$ und $k_0[\mathfrak{N}\mathfrak{U}]$, also diese Gleichungen dienen lediglich zur analytischen Beschränkung dieser beiden Vektoren.

§ 20. Aus den Definitionen der Vektoren $\overline{\mathfrak{M}}$ und $\overline{\mathfrak{P}}$ in § 3 folgt nach $(\mathrm{a})_{12}$, $\underset{\smile}{2}$ und $\underset{\smile}{4}$, daß

$$k_0 \overline{\mathfrak{M}} \equiv k_0 \left\{ \mathfrak{M} + \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\mathfrak{P}\right] \right\} = \frac{2\varpi}{cT} k_0 [\mathfrak{N}\mathfrak{U}],$$

$$k_0 \overline{\mathfrak{P}} \equiv k_0 \left\{ \mathfrak{P} - \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\mathfrak{M}\right] \right\} = 4\varpi \mathfrak{G}^{\nabla}.$$

Da weiter nach den Gleichungen $\underset{\smile}{9}_2$, $\underset{\smile}{9}_3$ wegen $\underset{\smile}{3}$:

$$\mathfrak{N}\left(\mathfrak{B} - \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\mathfrak{E}\right]\right) = 0, \quad \mathfrak{U}\left(\mathfrak{B} - \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\mathfrak{E}\right]\right) = 0$$

ist, so ergibt sich nach $\underset{\smile}{3}$ sowohl aus der einen wie aus der anderen jener Gleichungen, indem dieselben mit $\frac{\mathfrak{U}}{cT}$ resp. mit $\frac{\mathfrak{N}}{cT}$ vektoriell multipliziert werden, daß:

$$(\lambda - \nu)\frac{\varpi}{cT}[\mathfrak{N}\mathfrak{U}] = \frac{\mathfrak{N}\mathfrak{N}^{\nabla}}{c^2 T^2}\left(\mathfrak{B} - \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\mathfrak{E}\right]\right).$$

Die Gleichung 9_1, kann aber so geschrieben werden:

$$\varpi \lambda \mathfrak{G}^{\nabla} = k_0 \left(\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\mathfrak{B}\right]\right).$$

Werden diese beiden Gleichungen mit den Ausdrücken der Vektoren $k_0 \overline{\mathfrak{M}}$ und $k_0 \overline{\mathfrak{P}}$ verglichen, so ergeben dieselben (für $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{B} - \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P} \equiv \mathfrak{D} - \mathfrak{E}$) die POISSON-MINKOWSKIschen Beziehungen[1]):

$$\mathfrak{D} - \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\mathfrak{H}\right] = \varepsilon \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\mathfrak{B}\right] \right\},$$

$$\mathfrak{B} + \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\mathfrak{E}\right] = \mu \left\{ \mathfrak{H} - \left[\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\mathfrak{D}\right] \right\},$$

wo übrigens

$$\varepsilon \equiv 1 + \frac{4}{\lambda}, \quad \mu = 1 + \frac{2\mathfrak{N}\mathfrak{N}^{\nabla}}{c^2 T^2 (\lambda - \nu) - 2\mathfrak{N}\mathfrak{N}^{\nabla}}$$

zu denken ist.

---

1) H. MINKOWSKI, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen. 1908.