

# ALAPVETÉS AZ ELEKTROMOSSÁG ÉS MÁGNESSÉG FOLYTONOSSÁGI ELMÉLETÉHEZ.

FARKAS GYULA 1. tagtól.

LORENTZ elméletétől COHN elmélete és MINKOWSKI elmélete nemcsak abban különböznek, hogy a folytonos térbetöltés elvéhez fűződnek, hanem abban is, hogy tiszta phænomenologikus elméletek szoros HERTZ-féle értelemben.

Oly elméletet szándékozom most megjelölni, a mely a maga kifejlésében a MINKOWSKI-féle elmélethez hasonúl, nevezetesen a relativitás elvével és elejétől kezdve a folytonos térbetöltés képzeletéhez szövídik, de alapvetésében mégis LORENTZ elektronelméletéhez simul, a melynek az alapvetésétől annyiban hajlik el, hogy közvetlenül az elektronelmélet átlagértékeire (Mittelwerte) vonatkozik. A mellett összefüggése a «physikailag végtelen kicsinyek» fogalmával (Enc. V<sub>2</sub>. 14. 201. l.) abban van, hogy a mit  $D\tau$  térelemben lévő  $\rho_i D\tau$  elektromos quantum-elemnek mond, az úgy tekintendő, mint physikailag végtelen kicsiny  $D\tau$  térben a materiához (atomokhoz, molekulákhoz) egyképen viszonyuló és végtelen nagy physikai pontossággal egyképen is mozgó elektronok töltéseinek az összege. Az e módon gondolt  $\rho_1 D\tau$ ,  $\rho_2 D\tau$  stb. elektromos töltések matematikai tárgyalásában pedig úgy fogható fel a végtelen tér természeti tartalma, mintha bármi kis térben létezhetnének különbözően mozgó és a materiához különbözően viszonyuló elektromosságok, valamint különböző milyenségű és állapotú és különbözően mozgó materiák, szóval különböző elektromos és különböző materiális componensek.

E felfogással kezdettől fogva a folytonos térbetöltés elvére

helyezkedve, az elektromos fluidumok gondolatához jutunk vissza (mint LEVI-CIVITA a kathodsugarak tárgyalásában az Accademia dei Lincei 1909. évi Rendicontijában), a melyre azonban a mai álláspontokon is egyszerű módon lehet építeni. Ez ugyan szintén csak phænomenologia, de nem a rideg HERTZ-féle értelemben, mert minden alkotó eleme természeti állományoknak és azok mechanikai állapotainak a képzeletéhez fűződik.

Addig megyek a kifejtésében, a honnan részint az elektronelméletek nyomán, részint tiszta phænomenologikus elméletek nyomán egyenes úton juthatni tovább; részint pedig bizonytalanok még a továbbjutás útjai. Például az utóbbi okból ponderomótoros erőknél s energia- és entropia-vonatkozásoknak a megállapítására itt még nem terjeszkedtem ki.

Az I. cikk a folytonos térbetöltés képzeletében bontja az elektromos áramlást azon összetevőkre, a melyek LORENTZ elektronelméletében a «Polarisations-, Magnetisierungs-, Leitungselektronen»-tól származó átlagértékekben kerülnek elő (Enc. V<sub>2</sub>. 14. 206—208. 1.). Beléje jut az elektromosságok különböző eredetű sűrűségeinek s az elektromos és mágneses momentumnak a definitiója is.

A II. cikk az elektromos és a mágneses polarisatio alaptypusát jelöli meg, az utóbbiét egy pentapolus képében.

A III. cikkben az elektromágneses tér átlagos LORENTZ-féle differenciálegyenleteinek rendszere (Enc. V<sub>2</sub>. 14. 209. 1. I"—V") és egyben mint vele lényeg szerint azonos, a MIN-KOWSKI-féle differenciálegyenletek rendszere (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1908. 22. 1. I—IV) az elektromosságok continuitási egyenletének általános megoldása gyanánt jelentkezik.

A IV. cikk csupán arra szolgál, hogy a LORENTZ-féle transformatio fölhasználandó eredményeit összefoglalja. Azonban e cikkben, a szokástól eltérően, minden vonatkozás vectorjelvényekkel van föltüntetve, mert bizonyos alakokban igen egyszerű módon írható így is minden vonatkozás és azután egyszerű módon is kezelhető az alkalmazásokban.

Az V. cikk azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy az elektromos és a mágneses momentumnak az ő kinematikai definitiójuk alapján való transformatiója egyezik-e a differenciál-

egyenletek alapján való transformatiójukkal. Egy elektromos quantumelemnek a maga eredeti materiális székhelyéből való eltolódását minden téridőrendszerben oly vectornak számítván, a melynek az eleje az illető téridőrendszer időszámítása szerint van ugyanakkor az eredeti materiális székhelyen, a mikor a vége a quantumelem pillanatnyi helyén van: kitűnik, hogy e meghatározás rendén az elektromos és a mágneses momentum mindkétfele alapon egyféleképpen transformálódik s következőleg e momentumok kinematikai definitiója is megfelel a relativitás elvének.

A VI. cikk az elektromosságok mozgási egyenleteiről szól és már teljesen járt útra tér, de befejezésül, különös példagyánánt, egyszerű módon vezet le mágnesezési egyenletet.

## I. Az elektromos áramlások osztályozása.

*Az eltolódott elektromosságok áramlásának szétválasztása polarisatiós áramlásra, Röntgen-áramlásra és mágneseződést helyettesítő áramlásra ( $r, t$ ) téridőrendszerben.*

A  $t$  pillanatban  $r$  helyen  $D\tau$  térelemben lévő  $\rho_i D\tau$  elektromos quantum a  $D\tau$  térelemben oly materiális elemi részből tolodott légyen el, a mely materiális elemi rész  $t$  pillanatban  $r_i^0$  helyen van. A mellett egy térelem helyén a térelem quasi tömegcentrumának a helye értendő. Az  $r - r_1^0, r - r_2^0, \dots$  eltolódásokat mint  $t$  pillanati és  $r$  helyű eltolódásokat fogva fel, röviden  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots$  alakban fogom írni:

$$r - r_i^0 \equiv \bar{r}_i. \quad (1)$$

Nyilvánképen a  $t$  idő és  $r$  hely függvényei gyanánt jelentkeznek ezek.

Ezeket végtelen kicsinyeknek, a  $\rho_i$  sűrűségeket azonban végtelen nagyoknak gondolom oly vonatkozásokban, hogy a

$$\Sigma \rho_i \equiv \rho^{(u)} \quad (2)$$

összeg csak véges nagy lehessen és a  $\rho_i \bar{r}_i$  momentumok is csak véges nagyok lehessenek, a  $\rho_i D\tau$  quantum pedig elemi

quantum, azaz végtelen kicsiny legyen. A  $\rho^{(l)}$  skalárist látszatos elektromos sűrűségnek, a

$$\Sigma \rho_i \bar{r}_i \equiv \mathfrak{P} \quad (3)$$

vectort elektromos momentumnak vagy elektromos polarisatio-nak nevezem. Minthogy a  $\rho^{(l)}$  látszatos sűrűség az  $\bar{r}_i$  végtelen kis eltolódások révén keletkezett a  $D\tau$  térelemben, ennél fogva

$$\rho^{(l)} + \text{div } \mathfrak{P} = 0. \quad (4)$$

A  $D\tau$ -ba tolódott  $\rho_1 D\tau$ ,  $\rho_2 D\tau$  stb. töltések sebességét  $\dot{r}_1$ ,  $\dot{r}_2$  stb., ellenben azok  $\dot{r}_1 - \dot{r}_1^0$ ,  $\dot{r}_2 - \dot{r}_2^0$  stb. relativ sebességét  $\dot{\bar{r}}_1$ ,  $\dot{\bar{r}}_2$  stb. jelölje. Ezek véges nagyok is lehessenek. Nyilvánképen irható, hogy

$$\dot{\bar{r}}_i = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial x} \dot{x}_i + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial y} \dot{y}_i + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial z} \dot{z}_i. \quad (5)$$

Az eltolódott elektromosságok totális áramlását  $\Omega$  jelölje, azaz

$$\Omega \equiv \Sigma \rho_i \dot{\bar{r}}_i \equiv \Sigma \rho_i \dot{r}_i + \Sigma \rho_i \dot{r}_i^0 \quad (6)$$

legyen, a hol  $\dot{r}_i^0$  azon materiális elemi rész sebességét jelenti, a melyből  $D\tau$ -nak a  $\rho_i D\tau$  töltése eltolódott.

Egyelőre tegyük fel, hogy anyagi rendszerünk mozgását egyetlen sebesség jellemzi mint a hely és idő függvénye, vagyis tegyük föl egyelőre, hogy anyagi rendszerünk különböző anyagi componensei nem mozognak különböző módon. Jelölje pedig a  $D\tau$ -ban foglalt materiális elemi részek közös sebességét  $v_0$ . Akkor  $\bar{x}_i$ ,  $\bar{y}_i$ ,  $\bar{z}_i$ -vel mint az  $\bar{r}_i$  eltolódás componenseivel

$$\dot{\bar{r}}_i^0 = v_0 - \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \bar{x}_i + \frac{\partial v_0}{\partial y} \bar{y}_i + \frac{\partial v_0}{\partial z} \bar{z}_i \right). \quad (7)$$

Helyettesítsük be  $\dot{\bar{r}}_i^0$  e kifejezését és helyettesítsük be (5) alól  $\dot{\bar{r}}_i$  kifejezését (6)-ba. Azután pedig figyelembe véve, hogy

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div } \rho_i \dot{r}_i = 0, \quad (8)$$

adjuk hozzá (6) jobboldalához a

$$\Sigma \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \text{div } \rho_i \dot{r}_i \right)$$

kifejezést. A (2), (3) és (4) számbavételével s végtelen kicsinyek elhagyásával azt találjuk, hogy

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \text{rot} [\mathfrak{P}v_0] + \frac{\partial \Sigma \rho_i \ddot{x}_i}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma \rho_i \ddot{y}_i}{\partial y} + \frac{\partial \Sigma \rho_i \ddot{z}_i}{\partial z}. \quad (9)$$

Azonban

$$\rho_i \ddot{x}_i = \frac{1}{2} \rho_i (\ddot{x}_i - \dot{x}_i \dot{x}_i) + \frac{1}{2} \rho_i \frac{d\dot{x}_i}{dt} \text{ stb.}$$

Ezek jobboldalairól az első tagok a (9)-ben rotatiót szolgáltatnak, ugyanis

$$\frac{1}{2} \Sigma \rho_i [\ddot{x}_i \dot{x}_i] \equiv \mathfrak{M} \quad (10)$$

rotatióját. Ugyanazon jobboldalak utolsó tagjából származó

$$\frac{1}{2} \Sigma \rho_i \frac{d\dot{x}_i}{dt}, \quad \frac{1}{2} \Sigma \rho_i \frac{d\dot{y}_i}{dt}, \quad \frac{1}{2} \Sigma \rho_i \frac{d\dot{z}_i}{dt} \quad (11)$$

összegekről pedig felteszem, hogy olyankor is mindig végtelen kicsinyek, midőn az  $\dot{x}_i$  relativ sebességek között véges nagyok is vannak. Lényegbe vágó föltevés ez, a melynek LORENTZ elektroméltében az Enc. V<sub>2</sub>, 14. 181. lapján a 15. pontban tett «Beschränkung» felel meg. E föltevés tipikus jellemzését adja a II. §.

Ezek értelmében így írható (9):

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \text{rot} [\mathfrak{P}v_0] + \text{rot} \mathfrak{M}. \quad (12)$$

Az időegység oly választásában, a melyben a fénysebesség vacuumban az egységgel egyenlő, az  $\mathfrak{M}$  vectort mágneses momentumnak vagy mágneses polarisációnak vagy magnetisációnak nevezvén, a  $\mathfrak{D}$  áramlás három tagja, rendre mint polarisációs áramlás, Röntgen-áramlás, mágnesezést helyettesítő áramlás, teljesen a LORENTZ-féle tagolásnak felel meg.

Levezetésünkben fel volt téve, hogy a matéria mozgását egyetlen sebesség,  $v_0$  jellemzi mint az idő és hely függvénye. Ha különböző materiális componensek különböző  $v_{01}$ ,  $v_{02}$  stb. sebességek szerint mozognak, akkor az egyes materiális componensekbe tartozó elektromos és mágneses momentumokat

$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$  stb. és  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$  stb. jelöljék és most az ilyenek összegét jelentse  $\mathfrak{P}$ , illetőleg  $\mathfrak{M}$ :

$$\mathfrak{P} \equiv \sum \mathfrak{P}_i, \quad \mathfrak{M} \equiv \sum \mathfrak{M}_i. \quad (13)$$

Ezúttal az eltolódott elektromosságok áramlása mint polarisációs áramlásnak, Röntgen-áramlásnak és mágnesesződést helyettesítő áramlásnak az összetétele:

$$\mathfrak{D} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \text{rot } \sum [\mathfrak{P}_i v_{0i}] + \text{rot } \mathfrak{M}. \quad (14)$$

Hozzája csatlakozik az ő divergentiájából és (4) időderiváltjából folyólag:

$$\frac{\partial \rho^{(u)}}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{D} = 0. \quad (15)$$

*Conductiós és convectiós áramlás* ( $r, t$ ) téridőrendszerben.

A conductiós mozgásban lévő elektromosságok sűrűségét jelentse most  $\rho_1, \rho_2$  stb. és ezek sebességét jelentse most  $\dot{r}_1, \dot{r}_2$  stb. az  $r$  helyen  $t$  pillanatban. Magát a conductiós áramlást  $\mathfrak{S}$  jelölje az

$$\mathfrak{S} \equiv \sum \rho_i \dot{r}_i \quad (16)$$

definitio szerint, a melyhez

$$\sum \rho_i = 0 \quad (17)$$

csatlakozik.

Azokat az elektromos töltéseket, a melyek conductiós áramlás következtében keletkeznek és változnak a materiális elemi részekben, valóságos töltéseknek mondván, ha  $r$  helyen  $t$  pillanatban az anyagi componensek valóságos elektromos töltéseinek összes sűrűsége  $\rho^{(v)}$ , akkor abban az esetben, ha téridőrendszerünkben nincs mozgása a materiának,

$$\frac{\partial \rho^{(v)}}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{S} = 0.$$

Ha van mozgása a materiának téridőrendszerünkben és a különböző materiális componensek sebessége  $v_{01}, v_{02}$  stb., a hozzájuk tartozó valóságos sűrűségek pedig  $\rho_1^{(v)}, \rho_2^{(v)}$  stb. az  $r$  helyen  $t$  pillanatban, akkor a

$$\mathfrak{R} \equiv \sum \rho_j^{(v)} v_{0j} \quad (18)$$

vectort convection áramlásnak nevezzük. Általánosan nyilvánképen

$$-\frac{\partial \rho^{(v)}}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathfrak{S} + \mathfrak{R}) = 0 \quad (19)$$

continuitási egyenletünk van a valóságos sűrűségek számára. Hozzája csatlakozik, hogy

$$\Sigma \rho_j^{(v)} = \rho^{(v)}. \quad (20)$$

*A totális elektromos áramlás (r, t) téridőrendszerben.*

A mennyiben eltolódott elektromosságok áramlása és conduction áramlás és convection áramlás együttesen jelentkezik, a teljes elektromos áramlás r helyen t pillanatban ezek összege:

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S} + \mathfrak{R} + \mathfrak{D} \quad (21)$$

a (16), (17), (18), (14) és az utóbbihoz tartozó külön meghatározások értelmében.

A teljes elektromos sűrűség pedig a  $\rho^{(v)}$  teljes valóságos sűrűségnek és  $\rho^{(l)}$  teljes látszatos sűrűségnek az összege:

$$\rho \equiv \rho^{(v)} + \rho^{(l)}, \quad (22)$$

a melyet szabad sűrűségnek is mondunk. Ezt és a teljes elektromos áramlást (19) és (15) alapján

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0 \quad (23)$$

köti össze.

## II. Az elektromos és mágneses polarisatio alaptypusa.

*Bipolusok*, a melyekben a két polus egymástól való távol-sága és relativ sebessége folyvást végtelen kicsiny, mindig és mindenütt csak elektromos momentumot szolgáltatnak, mágneses momentumot, véges nagyot, nem és csak polarisatiós áramlást és Röntgen-áramlást szolgáltathatnak azok véges nagyot, mert esetükben nem csak a (11) alatti kifejezések végtelen kicsinyek, hanem (10) is végtelen kicsiny és következésképpen (9) egész második sora is végtelen kicsiny.

Most pedig egy *pentapolust* gondolok, a melynek a szerkezete a következő: végtelen kicsiny egyenlőszárú derékszögű kereszthalak közepében van az elemi materiális székhely pozitív egyéni töltéssel s a szárak mindegyikének a végében azon székhely negyedrésnyi eltolódott negatív töltése van. Fölteszem, hogy e negatív töltések az ő eredeti székhelyük körül a saját síkjukban véges sebességű (végtelen nagy szögsebességű) keringő mozgásban vannak, mi mellett minden egyéb relatív sebességek végtelen kicsinyek a pentapolusban, ú. m. a keresztszárak hosszának a változási sebessége és a keresztvégeknek a kereszt tengelyét irányító sebessége. Az ily pentapolusok csak mágneses momentumot szolgáltatnak minden térelemnben, és pedig merőlegest a síkjukra; elektromos momentumot nem szolgáltatnak, valamint látszatos elektromos töltést sem, véges nagyot, és a (11) alatti kifejezések velük is végtelen kicsinyek, dacára annak, hogy belőlük az  $\dot{\mathbf{r}}_i$  relatív sebességek véges nagyok.

A folytonos térbetöltés elvén ily bipolusoknak és pentapolusoknak a tért folytonosságban betöltő rendszerei tekinthetők mindig egy téridőrendszerben nyugvó testben az elektromos és mágneses polarizáltság alanyának. Egy téridőrendszerben mozgó materiát illetően az alább bevezetendő LORENTZ-féle transformatio szolgáltatja ezekből az alaptípusokat.

### III. A continuitási egyenletek általános analitikai megoldása és az elektromágneses tér egyenletei.

Bármiféle sűrűséget és áramlást jelentsenek ezúttal  $\rho$  és  $\mathfrak{S}$  az  $(\mathbf{r}, t)$  téridőrendszerben, de elégítsék ki a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S} = 0 \quad (24)$$

continuitási egyenletet.

Mivel van oly gradiens,  $\mathfrak{D}_0$ , hogy  $\rho$  annak a divergen-tiájával egyenlő, (24) helyett

$$\operatorname{div} \left( \frac{\partial \mathfrak{D}_0}{\partial t} + \mathfrak{S} \right) = 0$$

írható. Ezen egyenlet általános analitikai megoldása gyanánt pedig van olyan rotatio  $\mathfrak{U}_0$ , hogy a zárójel tartalma e rotatio rotatiójával egyenlő. Ilyképen a

$$\rho = \operatorname{div} \mathfrak{B}_0, \quad \mathfrak{S} = \operatorname{rot} \mathfrak{U}_0 - \frac{\partial \mathfrak{B}_0}{\partial t} \quad (24)_1$$

kifejezések (24) általános analitikai megoldásaként jelentkeznek az  $\mathfrak{U}_0$  és  $\mathfrak{B}_0$  vectorok mint parametrumok szerint, jöllehet ezen vectorok alávetvők a

$$\operatorname{div} \mathfrak{U}_0 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{B}_0 = 0 \quad (24)_2$$

egyenleteknek.  $\mathfrak{U}_0$  és  $\mathfrak{B}_0$  alakjára nézve csak akkor általános analitikai megoldás ugyan (24)<sub>1</sub>, ha az  $\mathfrak{U}_0$  és  $\mathfrak{B}_0$  vectort nem vetjük alá semmi más megszorításnak mint annak, a melyet a rajtuk végezett analitikai műveletek követelnek; de tartalom szerint akkor is általános analitikai megoldása (24)<sub>1</sub> a (24)-nek, ha ama vectorokat alávetjük a (24)<sub>2</sub>-nek, azaz kirójuk, hogy  $\mathfrak{U}_0$  rotatio,  $\mathfrak{B}_0$  gradiens legyen.

Azonban a (24)<sub>2</sub> helyett más egyenleteket is szabhatunk ki a két vectorra, olyanokat, a melyek a (24)-nek (24)<sub>1</sub> alatt foglalt megoldását tartalom szerint nem speczializálják. Jelentsen pedig  $\rho_0$ ,  $\mathfrak{S}_0$  tetszésre adott sűrűséget, illetőleg áramlást azzal a kikötéssel, hogy kielégítsék a continuitás

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \operatorname{div} \mathfrak{S}_0 = 0 \quad (25)$$

egyenletét. Minthogy kielégítik, ennél fogva  $\mathfrak{U}_0$  és  $\mathfrak{B}_0$  eddigi jelentményének fenntartásával

$$\rho_0 \text{ és } \mathfrak{S}_0 + \frac{\partial \mathfrak{U}_0}{\partial t}$$

szintén kielégítik (24)<sub>2</sub> első egyenlete miatt. Van tehát olyan  $\mathfrak{U}$  rotatio és olyan  $\mathfrak{B}$  gradiens, hogy

$$\rho_0 = \operatorname{div} \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{S}_0 + \frac{\partial \mathfrak{U}_0}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{U} - \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}. \quad (25)_1$$

Írjuk így az  $\mathfrak{U}$  rotatiót:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{M} - \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial t^2} \quad (25)_2$$

azzal a hozzáadással, hogy  $\mathfrak{N}$  rotatio legyen. Minthogy  $\mathfrak{B}$  gradiens,  $\mathfrak{N}$  pedig rotatio:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{N} = 0. \quad (25)_3$$

Ha most

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_0 + \mathfrak{B} + \operatorname{rot} \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &\equiv \mathfrak{B}, \\ \mathfrak{B}_0 - \mathfrak{U} - \frac{\partial^2 \mathfrak{N}}{\partial t^2} &\equiv \mathfrak{C} \end{aligned} \quad (25)_4$$

teszszük, akkor  $(24)_1$ ,  $(24)_2$ ,  $(25)_1$ ,  $(25)_2$ ,  $(25)_3$ ,  $(25)_4$  között  $\mathfrak{U}_0$ ,  $\mathfrak{B}_0$ ,  $\mathfrak{U}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{N}$  eliminálható és az eliminálás eredménye a következő négy egyenlet:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{B} - \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} &= \mathfrak{S}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{C} = \rho, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{C} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} &= -\mathfrak{S}_0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = \rho_0, \end{aligned} \quad (26)$$

A két első itteni egyenlet tehát a (24) alatt írt continuitási egyenletnek tartalom szerint általános analitikai megoldása a  $\mathfrak{B}$  és  $\mathfrak{C}$  vektorokkal mint parametrumokkal, bármely sűrűséget és áramlást jelentsen is a másik két egyenletben a  $\rho_0$  és  $\mathfrak{S}_0$  a (25) alatt írt continuitási egyenlet keretében.

Úgy is kimondható ez az eredmény, hogy két continuitási egyenlet mindig megoldható (26) módjára két vector mint közös parametrum révén. Egyébiránt egy continuitási egyenlet mindig explicite megoldható általánosan egyetlen vector mint parametrum révén, mert ha  $(24)_1$ -ben

$$\mathfrak{U}_0 = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}, \quad \mathfrak{B}_0 = \mathfrak{I} + \operatorname{rot} \mathfrak{D}$$

írjuk, azt kapjuk, hogy

$$\rho = \operatorname{div} \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{S} = -\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial t}. \quad (27)$$

Könnyen eljuthatunk a  $\mathfrak{C}$  és  $\mathfrak{B}$  vectornak  $\rho$ ,  $\mathfrak{S}$ ,  $\rho_0$ ,  $\mathfrak{S}_0$  által való integrálkifejezéséhez is. Ha ugyanis

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$$

írjuk és a  $\mathfrak{B}_1$  és  $\mathfrak{C}_1$  vectoron a  $\rho_0=0$ ,  $\mathfrak{S}_0=0$  esetnek megfelelő  $\mathfrak{B}$  és  $\mathfrak{C}$  vectort értjük, akkor  $\mathfrak{B}_2$  és  $\mathfrak{C}_2$  a  $\rho=0$ ,  $\mathfrak{S}=0$  esetnek megfelelő  $\mathfrak{B}$  és  $\mathfrak{C}$  vector. A  $\mathfrak{B}_1$  és  $\mathfrak{C}_1$  meg a  $\mathfrak{B}_2$  és  $\mathfrak{C}_2$  integrálkifejezésének ösmeretes meghatározásával eljutunk ezek összegében  $\mathfrak{B}$  és  $\mathfrak{C}$  integrálkifejezéséhez.

Ha  $\rho$  az elektromosság teljes sűrűségét,  $\mathfrak{S}$  az elektromosság teljes áramlását jelenti és ha a matéria mozgását egyetlen sebesség jellemzi mint a hely és idő függvénye, akkor  $\rho_0=0$ ,  $\mathfrak{S}_0=0$  tételével a (26) alatti egyenletek az elektromágneses tér LORENTZ-féle differenciálegyenletei, föltéve, hogy oly időegységet használunk, hogy a fénysebesség nagysága a vacuumban az egységgel legyen egyenlő. (Enc. V<sub>2</sub>, 14. 209. l. I''—V''). Kitűnik ez, ha (26) két első egyenletében a

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{G} + \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{D} - \mathfrak{P} \quad (28)$$

jelölésekkel élünk és tekintetbe vesszük, hogy az itten valószínűsnek nevezett  $\rho^{(v)}$  sűrűséget jelöli LORENTZ egyszerű  $\rho$  betűvel, tehát az itteni  $\rho$  helyett  $\rho - \rho^{(v)}$ , azaz  $\rho + \text{div } \mathfrak{P}$  irandó (és tekintetbe vesszük LORENTZ XXV., XXVI. és XXXI., meg XXVIII. alatti kifejezését a 208., 209. lapról. Ezek nyomán a (26) alatti két első egyenletünk a 209. lap III'' és I'' egyenletébe megy át; (26) alatti másik két egyenletünk közvetlenül összeillik a 209. lap IV'' és V'' egyenletével, miután t. i.  $\rho_0=0$ ,  $\mathfrak{S}_0=0$  tettük; a 209. lap II'' egyenlete pedig, a mely III'' és I'' folyománya, nem más, mint (23) alatti continuitási egyenletünk).

Ha pedig

$$\mathfrak{M} + [\mathfrak{P}v_0] = \mathfrak{M} \quad (29)$$

irva, nem a  $\mathfrak{B} - \mathfrak{M}$  különbséget, hanem a  $\mathfrak{B} - \mathfrak{M}$  különbséget jelöljük külön betűvel úgy, hogy

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{G} + \mathfrak{M} \quad (30)$$

írjuk, akkor az elektromágneses tér LORENTZ-féle differenciálegyenletei MINKOWSKI differenciálegyenleteivé válnak (Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern 22. l., de a benne használt jelöléseknek és a LORENTZ-féléknek, benne a 24. lapon található összehasonlításán azzal

a különbséggel, hogy az  $m$  betű ne a  $\mathfrak{S}$ , hanem a  $\tilde{\mathfrak{S}}$  jelölésére szolgáljon). Lényegbe vágó különbség tehát nincs LORENTZ-nek és MINKOWSKI-nak a differenciálegyenletei között, mint már többen észrevették, minélfogva MINKOWSKI tévesen állítja (24. l.), hogy LORENTZ differenciálegyenletei nem felelnek meg bármiként magnetizált testekben a relativitás elvének; az elektromos és a mágneses polarisatio s az áraminductio LORENTZ-féle egyenletei módosítandók csak a relativitás szempontjából (PH. FRANK, Ann. d. Physik XXVII. 1908). Minthogy azonban általános tárgyalásban  $\mathfrak{M}$  és  $\mathfrak{S}$  használata kényelmesebb, mint  $\mathfrak{M}$  és  $\mathfrak{S}$  használata, a következőkben ezeket fogom alkalmazni és az  $\mathfrak{M}$  vectort fogom ezentúl mágneses momentumnak s ahhoz képest a  $\tilde{\mathfrak{S}}$  vectort mágneses térerősségnek nevezni.  $\mathfrak{E}$ ,  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{B}$  neve itt is elektromos térerősség, elektromos gerjesztés, mágneses gerjesztés lesz, midőn  $\rho_0=0$ ,  $\mathfrak{S}_0=0$ , vagyis midőn

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{B} &= \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \mathfrak{S}, \quad \text{div } \mathfrak{E} = \rho, \\ \text{rot } \mathfrak{E} &= -\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathfrak{B} = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

A (26) alatt irt egyenletrendszer a maga tartalma szerint akkor is általános analitikai megoldása (24)-nek, ha  $\rho_0=0$ ,  $\mathfrak{S}_0=0$  írjuk benne, tehát az elektromágneses tér LORENTZ-féle differenciálegyenleteinek rendszere mint a teljes elektromos sűrűség és áramlás continuitási egyenletének tartalom szerint általános analitikai megoldása jelentkezik.

#### IV. A Lorentz-féle transformatio fölvétele.

A LORENTZ-féle transformatio vectorjelvényekkel is egyszerű alakban állítható elő és egyszerű módokon alkalmazható. Még pedig a «specziális» LORENTZ-féle transformatio vectorjelvényekkel egyszerű alakban írva

$$\begin{aligned} r' + nt' &= r - nt \\ t' + (nr') &= t - (nr) \end{aligned} \quad (n = \text{const.}) \tag{32}$$

t. i. úgy lévén választva az idő egysége mindkét téridőrend-

szerben, hogy a fénysebesség nagysága vacuumban mindkét téridőrendszerben  $= 1$  legyen.

Vesszós bötű fölé irt ponttal majd mindig a  $t'$  idő szerint képezett totalis differenciálhányadost jelöljük, úgy hogy például

$$\dot{r}' = \frac{dr'}{dt'}, \quad \ddot{r}' = \frac{d^2 r'}{dt'^2}.$$

Ebben az értelemben, az  $n$  constans vector meghatározására magából (32)-ből

$$(\ddot{r})_{\dot{r}=0} = -(\ddot{r}')_{\dot{r}=0} = -\frac{2n}{1+n^2}$$

szolgál, a mely szerint az  $r'$  tér az  $r$  térben haladó mozgást végez

$$w = \frac{2n}{1+n^2} \quad (33)_1$$

állandó sebességgel és az  $r$  tér az  $r'$  térben haladó mozgást végez  $-w$  állandó sebességgel és:

$$n = \frac{w}{1 + \sqrt{1-w^2}}. \quad (33)_2$$

Azt pedig mindig fölteszszük, hogy

$$w^2 < 1. \quad (33)_3$$

Az EINSTEINTŐL construált LORENTZ-féle transformatio alakjának felel meg (32) (Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik. Über das Relativitätsprinzip etc.), de annak a kikötésével, hogy az időegységet különböző téridőrendszerekben különbözően választhassuk meg, ABRAHAM ellenvetésétől (Theorie der Elektrizität II. második kiadásában 367—369. l.) megszabadul.

Az alkalmazások érdekében azzal az elemi követeléssel egészítsük ki ezen transformatiót (mint POINCARÉ a Rendiconti di Circolo Matematico di Palermo XXI. kötetében), hogy az elektromos quantumokat változatlanul hagyja; sőt azt is ki-  
rójjuk, hogy a materiális quantumokat (tömegeket) is változatlanul hagyja. Bármiféle sűrűséget jelentsen tehát  $\rho$  a  $1/r$  térelemben az  $(r, t)$  rendszerben  $r$  helyen  $t$  pillanatban, ha az

$(r', t')$  rendszerben  $D\tau'$  a  $\rho D\tau$  quantum térfogata a  $t'$  pillanatban, akkor a megfelelő  $\rho'$  sűrűséget a

$$\rho' D\tau' = \rho D\tau \quad (34)$$

egyenlet határozza meg a megfelelő  $r'$  helyre. Minthogy pedig a LORENTZ-féle transformatio determinánsa (és egyúttal JACOBI-féle determinánsa is) az egységgel egyenlő, ha a  $\rho D\tau$  quantum  $(r, t)$  rendszerbeli  $t+dt$  pillanati helyének az  $(r', t')$  rendszerben  $t'+dt'$  pillanati hely felel meg, akkor  $dt' D\tau' = dt D\tau$ , tehát (34) helyett az is írható, hogy

$$\rho' dt = \rho dt'. \quad (35)$$

Összefoglalok néhány következményes transformatiót. Ez összefoglalásban hasonló módon transformálandó mennyiségcsoportokat röviden a  $\sim$  hasonlósági jellel fogok egymásután kapcsolni.

Bármely sűrűséget jelentsen  $\rho$ , ha a  $\rho D\tau$  quantum sebességét jelenti  $\dot{t}$ , akkor (32) differenciálásából és (35)-ből folyólag a  $\rho$  scalaris és  $\rho \dot{t}$  vector transformatiója olyan a megfelelő  $\rho'$  scalarisba és  $\rho' \dot{t}'$  vectorba mint  $t$  és  $r$  transformatiója  $t'$  és  $r'$ -be:

$$(\rho, \rho \dot{t}) \sim (t, r). \quad (36)$$

Továbbá ebből folyólag (16), (17), (18), (20) és (2), (6) és (21), (22) értelmében

$$(\rho^{(v)}, \mathfrak{J} + \mathfrak{K}) \sim (\rho^{(l)}, \mathfrak{D}) \sim (\rho, \mathfrak{S}) \sim (t, r). \quad (37)$$

Ha továbbá

$$\sqrt{1 - \dot{t}^2} = \frac{1}{k}, \quad \rho \frac{dk \dot{t}}{dt} = \mathfrak{K}, \quad (38)$$

tehát nemkülönben

$$\sqrt{1 - \dot{t}'^2} = \frac{1}{k'}, \quad \rho' \frac{dk' \dot{t}'}{dt'} = \mathfrak{K}' \quad (38)'$$

írjuk, ugyancsak

$$(k, k \dot{t}) \sim ((\mathfrak{K}), \mathfrak{K}) \sim (t, r) \quad (39)$$

odaértve, hogy az  $\rho D\tau$  quantum sebessége az  $\dot{t}$  az  $r$  helyen és  $t$  pillanatban. Ha pedig

$$k \rho \dot{t} = \mathfrak{J}, \quad k' \rho' \dot{t}' = \mathfrak{J}' \quad (38)_1, (38)'_1$$

teszszük, akkor ugyanazon föltétel alatt

$$\mathfrak{B}' - (n\mathfrak{B}') \frac{\dot{\mathfrak{r}}'}{1 + (n\dot{\mathfrak{r}}')} = \mathfrak{B} + (n\mathfrak{B}) \frac{\dot{\mathfrak{r}}}{1 - (n\dot{\mathfrak{r}})}. \quad (39)_1$$

Továbbá ugyanazon föltétel alatt

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \text{div}' \rho' \dot{\mathfrak{r}}' = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \dot{\mathfrak{r}}, \quad (40)$$

a hol  $\text{div}'$  az  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  szerint képezett divergentiát jelöl. Mint-hogy a  $\rho \dot{\mathfrak{r}}$  quantum sebességét jelenti  $\dot{\mathfrak{r}}$ , ennél fogva (40) jobb-oldala eltűnik, tehát a baloldala is eltűnik, tehát continuitási egyenletnek continuitási egyenlet felel meg.

Következőleg, a mily kifejezéseink vannak  $(24)_1$ – $(24)_2$  vagy (26) vagy (27) vagy (31) alatt a  $\rho$  és  $\mathfrak{C}$  számára, épen olyan kifejezések  $\rho'$  és  $\mathfrak{C}'$  számára is léteznek. Azonban  $(24)_1$ – $(24)_2$  nem teljesíti a LORENTZ-féle transformatióban a relativitás elvét és (27) sem teljesíti. Csak (26) és a benne foglalt (31) teljesíti a specziális alakú általános megoldások közül. Ezekből a  $\mathfrak{C}$  és  $\mathfrak{B}$  vectorok s a megfelelő  $\mathfrak{C}'$  és  $\mathfrak{B}'$  vectorok vonatkozását vector-jelvényekkel legegyszerűbb alakban

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}' + [n\mathfrak{C}'] &= \mathfrak{B} - [n\mathfrak{C}] \\ \mathfrak{C}' - [n\mathfrak{B}] &= \mathfrak{C} + [n\mathfrak{B}], \end{aligned} \quad (41)$$

egyenletek szolgáltatják.

Ezek mintáját követi (4) és (12) értelmében  $\mathfrak{M}$  és  $-\mathfrak{B}$  transformatiója, mert (4) és (12) épen olyan alakú ezekre nézve, mint (26) első sorának egyenletei  $\mathfrak{B}$ -re és  $\mathfrak{C}$ -re nézve. Tehát

$$(\mathfrak{M}, -\mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}). \quad (42)$$

Mint-hogy pedig ebből folyólag

$$(\mathfrak{B} - \mathfrak{M}, \mathfrak{C} + \mathfrak{B}) \sim (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}),$$

(28) második kifejezése és (30) szerint

$$(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}) \sim (\mathfrak{B}, \mathfrak{C}).$$

Mint-hogy azonban az I. §. az elektromos és mágneses

momentumot elektromos sűrűségekkel és elektromosságok eltolódásával és utóbbiak változási sebességével ( $\rho_i$ ,  $\bar{r}_i$ ,  $\dot{\bar{r}}_i$ ) definiálta, külön megvizsgálandó, hogy e definíciók értelmében teljesül-e a (42) alatt  $\mathfrak{M}$ -re és  $\mathfrak{P}$ -re szóló transformatio, ú. m. részletesen írva:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}' - [n\mathfrak{P}'] &= \mathfrak{M} + [n\mathfrak{P}] \\ \mathfrak{P}' + [n]\mathfrak{M}' &= \mathfrak{P} - [n\mathfrak{M}]\end{aligned}\quad (42)_0$$

teljesül-e, miként a relativitás elve kívánja? Ki fog tűnni, hogy teljesül, ha csak az  $(r', t')$  téridőrendszerben úgy értelmezzük az  $\bar{r}_i$  eltolódásokat, a mint az  $(r, t)$  téridőrendszerben értelmezték az  $\bar{r}_i$  eltolódások.

V. Az elemi eltolódás Lorentz-féle transformatiója és az elektromos momentum s a mágneses momentum ebből következő transformatiója.

*Az elemi eltolódás Lorentz-féle transformatiója.*

Ha a  $t$  pillanatban  $r$  helyen lévő  $\rho_i D\tau$  elektromos quantum eredeti materiális széke (a melyből eltolódott) ugyancsak a  $t$  pillanatban  $r_i^0$  helyen van, akkor az I. §. értelmében  $r - r_i^0 \equiv \bar{r}_i$  jelenti a  $\rho_i D\tau$  elektromos quantum  $t$  pillanati  $r$  helyű végtelen kis eltolódását az  $(r, t)$  téridőrendszerben. E quantum  $t$  pillanati  $r$  helyének  $t'$  pillanati  $r'$  hely felel meg az  $(r', t')$  téridőrendszerben. Eredeti materiális széke  $t$  pillanati  $r_i^0$  helyének azonban nem  $t'$  pillanati hely felel meg, hanem valamely  $t_i^{0'}$  más pillanati  $r_i^{0'}$  hely az  $(r', t')$  rendszerben. Ennélfogva az  $\bar{r}_i$  eltolódás definíciójával congruens definitio szerint nem  $r - r_i^{0'}$  felel meg az  $(r', t')$  rendszerben az  $\bar{r}_i$  eltolódásnak, hanem, ha az  $(r', t')$  rendszerben az  $\rho_i D\tau (= \rho_i' D\tau')$  quantum eredeti materiális széke  $t'$  pillanatban  $r_{0i}'$  helyen van,  $r' - r_{0i}'$  felel meg. Ezt tekintem tehát az  $(r', t')$  rendszerben azon quantum  $t'$  pillanati,  $r'$  helyű eltolódásának és ezt jelölje  $\bar{r}_i'$ . A  $t'$  pillanati  $r_{0i}'$  helynek pedig az  $(r, t)$  rendszerben nem  $t$  pillanati hely felel meg, hanem valamely  $t_{0i}$  más pillanati hely.

Rövidség kedvéért mellőzve az  $i$  indexet, a következő meghatározásaink és transformáló egyenleteink vannak tehát:

$$\bar{r} \equiv r - r^0, \quad \bar{r}' \equiv r' - r'^0, \quad (43)_1$$

$$r' + nt' = r - nt, \quad (43)_2$$

$$t' + (nr') = t - (nr),$$

$$r^{0'} + nt^{0'} = r^0 - nt, \quad (43)_3$$

$$t^{0'} + (nr^{0'}) = t - (nr^0),$$

$$r'_0 + nt' = r_0 - nt_0, \quad (43)_4$$

$$t' + (nr'_0) = t_0 - (nr_0).$$

A (43)<sub>1</sub> szerint

$$r - r_0 \equiv \bar{r} + (r^0 - r_0), \quad r' - r^{0'} \equiv \bar{r}' + (r'^0 - r^{0'}).$$

Minthogy  $r^0 - r_0$  és  $t - t_0$  meg  $r'^0 - r^{0'}$  és  $t' - t^{0'}$  végtelen kicsinyek és  $r^0 - r_0$ , illetőleg  $r'^0 - r^{0'}$  materiális székhelynek az elmozdulása a  $t - t_0$ , illetőleg  $t' - t^{0'}$  idő alatt:  $v_0$ , illetőleg  $v'_0$  jelölven a materiális székhely sebességét,

$$r - r_0 = \bar{r} + (t - t_0)v_0, \quad r' - r^{0'} = \bar{r}' + (t' - t^{0'})v'_0 \quad (43)_5$$

egyenletek is csatlakoznak az előbbiekhez.

Most már az  $\bar{r}$  végtelen kis eltolódás LORENTZ-féle transformatióját könnyen elvégezhetjük. A (43)<sub>2</sub>-ből és (43)<sub>4</sub>-ből egyiknek a másiktól való kivonása által a (43)<sub>1</sub> és (43)<sub>5</sub> figyelembe vételével:

$$\begin{aligned} \bar{r}' - \bar{r} &= (t - t_0)(v_0 - n), \\ (n\bar{r}') + (n\bar{r}) &= (t - t_0)(1 - (nv_0)) \end{aligned}$$

keletkezik. Hasonlóan (43)<sub>2</sub>-ből és (43)<sub>3</sub>-ból:

$$\begin{aligned} \bar{r}' - \bar{r} &= (t^{0'} - t')(v'_0 + n), \\ (n\bar{r}') + (n\bar{r}) &= (t^{0'} - t')(1 + (nv'_0)). \end{aligned}$$

Az előbbi kettőből  $t - t_0$  eliminálásával s az utóbbi kettőből  $t^{0'} - t'$  eliminálásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \bar{r}' - (n\bar{r}') \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)} &= \bar{r} + (n\bar{r}) \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)}, \\ \bar{r}' - (n\bar{r}') \frac{v'_0 + n}{1 + (nv'_0)} &= \bar{r} + (n\bar{r}) \frac{v'_0 + n}{1 + (nv'_0)}. \end{aligned} \quad (43)_6$$

Azonban, mint ezekből magukból, de már (43)<sub>3</sub> vagy (43)<sub>4</sub> differenciálásából is következik:

$$\frac{v'_0 + n}{1 + (nv'_0)} = \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)}, \quad (44)$$

tehát (43)<sub>6</sub> helyett (44) mellé az

$$\bar{r}' - (n\bar{r}') \frac{v'_0 + n}{1 + (nv'_0)} = \bar{r} + (n\bar{r}) \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)} \quad (45)$$

egyenletet írhatjuk mint az eltolódás LORENTZ-féle transformatióját.

Ha pedig az  $n$  vectorral scalaris szorzást művelünk rajta, azt kapjuk, hogy

$$\frac{(n\bar{r}')}{(1 + (nv'_0))} = \frac{(n\bar{r})}{1 - (nv_0)}, \quad (46)$$

minélfogva (45) helyett

$$\bar{r}' - (n\bar{r}') \frac{v'_0}{1 + (nv'_0)} = \bar{r} + (n\bar{r}) \frac{v_0}{1 - (nv_0)} \quad (45)_1$$

is írható.

Egyszerű alakban állítható elő (45)-ből (44) és (46) révén  $\bar{r}'$  és  $\bar{r}$  közvetlen egymástól függése is, ú. m.

$$\begin{aligned} \bar{r}' &= \bar{r} + (w\bar{r}) \frac{v_0 - n}{1 - (wv_0)}, \\ \bar{r} &= \bar{r}' - (w\bar{r}') \frac{v'_0 + n}{1 + (wv'_0)}, \end{aligned} \quad (45)_2$$

a hol  $w$  a (33)<sub>1</sub> alatt írt jelentményben van.

*Az elektromos momentumnak és a mágneses momentumnak az ő kinematikai definitiójuk alapján való Lorentz-féle transformatiója.*

Mindenekelőtt azt kell kimutatnom, hogy abból a föltevéséből, hogy a (11) alatt írt kifejezések végtelen kicsinyek, következik, hogy az  $(\bar{r}', t')$  rendszerben gondolt

$$\Sigma \rho'_i \frac{d(\bar{r}'_i \bar{x}'_i)}{dt'}, \quad \Sigma \rho'_i \frac{d(\bar{r}'_i \bar{y}'_i)}{dt'}, \quad \Sigma \rho'_i \frac{d(\bar{r}'_i \bar{z}'_i)}{dt'} \quad (47)$$

kifejezések is végtelen kicsinyek. A (45)<sub>2</sub> szerint az  $\bar{r}'_i \bar{x}'_i$  stb.

vectorok az  $\vec{r}_i$  vectorok componenseinek homogén négyzetes függvényei, tehát

$$\Sigma \rho_i \frac{d(\vec{r}_i' \vec{x}_i')}{dt} \text{ stb.} \quad (47)_1$$

végtelen kicsinyek, mert a componenseik a végtelen kicsiny (11) alatti vectorok componenseinek és a végtelen kicsiny  $\rho_i \vec{r}_i \vec{x}_i$  stb. vectorok componenseinek a homogén lineáris függvényeik. Azonban

$$\rho_i \frac{d}{dt} = \rho_i' \frac{d}{dt'},$$

vagy mivel  $\frac{d}{dt'}$  számlálójával nem a  $dt'_i$  időelemnek megfelelő (azaz nem a közös  $dt$  időelemnek megfelelő) elemi megváltozásokat jelöljük (ellentétben  $\frac{d}{dt'_i}$  számlálójával), hanem  $\frac{d}{dt'}$  számlálójával a közös  $dt'$  időelemnek megfelelő elemi megváltozásokat:

$$\rho_i \frac{d}{dt} = \rho_i' \frac{d}{dt'}.$$

Következőleg (47) kifejezései azonosak  $(47)_1$  kifejezéseivel, tehát valóban végtelen kicsinyek amazok is. Hogy pedig a (11) és a (47) alatti kifejezések végtelen kicsinyek, arra figyelemmel kell lennünk a  $\mathfrak{P}$  és  $\mathfrak{M}$  momentumoknak az ő kinematikai definíciójuk alapján művelendő LORENTZ-féle transformatiójában, nevezetesen pedig arra, hogy a (11) és (47) alatti kifejezések végtelen kicsiny voltánál fogva

$$\begin{aligned} \Sigma \rho_i \frac{d(n\vec{r}_i) \vec{r}_i}{dt} &= 0, & \Sigma \rho_i \frac{d(n\vec{r}_i)^2}{dt} &= 0, \\ \Sigma \rho_i' \frac{d(n\vec{r}_i') \vec{r}_i'}{dt'} &= 0, & \Sigma \rho_i' \frac{d(n\vec{r}_i')^2}{dt'} &= 0 \end{aligned} \quad (48)$$

írhatjuk.

A mi már most a transformatiót illeti, egyszerűség kedvéért arra az esetre szorítkozom egyelőre, hogy a matéria mozgását egyetlen sebesség  $v_0$  jellemzi mint hely és idő függvénye. Ehhez képest az I. §. kinematikai definíciójának és (29)-nek értelmében

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} - [n\overline{\mathfrak{M}}] &\equiv \Sigma \rho_i \left\{ \bar{r}_i + (n\bar{r}_i) v_0 - (nv_0) \bar{r}_i + \frac{1}{2} (n\bar{r}_i) \dot{\bar{r}}_i - \frac{1}{2} (n\bar{r}_i) \dot{\bar{r}}_i \right\}, \\ \overline{\mathfrak{M}} + [n\mathfrak{P}] &\equiv \Sigma \rho_i [\bar{r}_i (v_0 + \frac{1}{2} \dot{\bar{r}}_i - n)].\end{aligned}\quad (49)$$

Tekintettel (48)-ra és arra, hogy (43)<sub>1</sub>-ből folyólag  $\dot{\bar{r}}_i = \dot{r}_i - v_0$ , (a hol  $\dot{r}_i$  a  $\rho_i / \tau$  quantum sebessége), a posteriori könnyen igazolható, hogy ezen (49) alatt írt identitások æquivalensek a következő kifejezésekkel:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P} - [n\overline{\mathfrak{M}}] &= \Sigma \rho_i (1 - (n\dot{\bar{r}}_i)) \left( \bar{r}_i + (n\bar{r}_i) - \frac{v_0}{1 - (nv_0)} \right), \\ \overline{\mathfrak{M}} + [n\mathfrak{P}] &= \\ &= \Sigma \rho_i \left[ \left( \frac{\dot{\bar{r}}_i - n}{2} + \frac{1 - (n\dot{\bar{r}}_i)}{2} \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)} \right) \left( \bar{r}_i + (n\bar{r}_i) - \frac{v_0 - n}{1 - (nv_0)} \right) \right].\end{aligned}\quad (50)$$

Ha most (49)-ben  $n$  helyett  $-n$ -et teszünk, a többi mennyiség fejéhez pedig vesszőt írunk, akkor megkapjuk

$$\mathfrak{P}' + [n\overline{\mathfrak{M}}'] \quad \text{és} \quad \overline{\mathfrak{M}}' - [n\mathfrak{P}']$$

definiíószerű kifejezését, a melyekből pedig (48)-nak és annak a számbavételével, hogy  $\dot{\bar{r}}'_i = \dot{r}'_i - v'_0$ , az (50)-hez hasonló kifejezések származnak. Kifejezések, a melyek (50)-ből a  $n$ -nek  $-n$ -vel, a többi bötűnek pedig vesszős bötűkkel való helyettesítése által is kiírhatók.

Ámde (36) szerint

$$\rho'_i (\dot{\bar{r}}'_i + n) = \rho_i (\dot{\bar{r}}_i - n), \quad \rho'_i (1 + (n\dot{\bar{r}}'_i)) = \rho_i (1 - (n\dot{\bar{r}}_i)).$$

Ha most még a (44), (45)<sub>1</sub> és (45) alatt írt vonatkozásokat is számba vesszünk, látjuk, hogy  $\mathfrak{P}$  és  $\overline{\mathfrak{M}}$  a maga kinematikai definitiója s  $\mathfrak{P}'$  és  $\overline{\mathfrak{M}}'$  a maga megfelelő kinematikai definitiója alapján is teljesíti a (42)<sub>0</sub> alatt írt transzformációt.

A (42)<sub>0</sub>-nak egy közvetlen folyománya gyanánt fölemlitem, hogy ha a (44) alatt egyenlőkül írtakat röviden  $u_0$  jelöli, akkor (29) alkalmazásával

$$(1 - (nu_0)) \overline{\mathfrak{M}}' + (u_0 \mathfrak{M}') n = (1 + (n_0 u)) \overline{\mathfrak{M}} - (u_0 \mathfrak{M}) n. \quad (42)_1$$

Ha tehát az  $(r, t)$  rendszerben  $r$  helyen  $t$  pillanatban nincs mágneses momentum LORENTZ-féle értelemben, akkor az  $(r', t')$

rendszerben sincs az  $r'$  helyen  $t'$  pillanatban. Az elektromos momentumokról ez általában nem áll, ugyanis  $(42)_0$ -ból

$$(\mathfrak{P}')_{\mathfrak{P}=0} = \frac{[\mathfrak{M}'w]}{1 + (wv'_0)} = \frac{[\mathfrak{M}w]}{\sqrt{1 - w^2}}.$$

Ha különböző materiális componensek különböző sebességek szerint mozognak, akkor, föltehető lévén, hogy minden ily materiális componens eltolódott elektromosságait külön-külön megilleti a jelen §. értelmében a  $(42)_0$  alatt írt transformatio, összegezés által a resultans  $\mathfrak{M}$  és  $\mathfrak{P}$  vector transformatiója ugyancsak  $(42)_0$  alakjában áll elő.

## VI. Az elektromosságok mozgási egyenletei.

Már PLANCKnak egy közleményéből kitűnik (Berichte der deutschen Phys. Ges. 1906. 139. l.), hogy elvileg fölösleges dolog eltérni az állandó tömeg fogalmától, úgy hogy a változó tömeg vagy tömegek (longitudinalis és transversalis tömeg) fogalmának a használata úgy tekinthető, mint csupán formai szükséglet. Ennélfogva közönséges mechanikai értelemben való tömeget tulajdonítok itt minden elektromos és minden materiális elemi résznek. E mellett fölteszem, hogy az elektromosságok sűrűségének és tömötségének (materiális sűrűségének) a hányadosa ugyan egyetemleges állandó, de elektromosságok materiával szorosan összeállva is jelentkezhetnek és ilyenkor az ő saját egyéni tömötségüknek és materiális terhük tömötségének az összegét nevezem röviden a tömötségüknek. Ha tehát valamely elektromosságnak a sűrűségét  $\rho$  és a tömötségét  $\rho_0$  jelöli, a  $\rho:\rho_0$  hányados hely és idő szerint változó is lehet, azonban értékének szabott felső határa van, ugyanis a föntebb gondolt egyetemleges állandónak az értéke.

Az  $(r, t)$  téridőrendszerben  $t$  pillanatban  $r$  helyen  $D\tau$  tér-elemben egy  $\rho$  sűrűségű és  $\rho_0$  tömötségű elektromosság sebessége legyen  $\dot{r}$ , tehát a gyorsulása  $\ddot{r}$  legyen; a reá ható teljes mozgató erőt pedig  $\mathfrak{F}D\tau$  jelölje, a melynek a mérésében az idő egysége szintén a szerint választandó, hogy a fénysebesség

nagysága vacuumban az  $(r, t)$  téridőrendszerben  $=1$ . Közönséges mechanikai értelemben gondolván az  $\mathfrak{F}/\tau$  erőt,

$$\rho_0 \ddot{r} = \mathfrak{F}$$

azon elektromosság mozgási egyenlete.

Az  $\mathfrak{F}$  erővektort két olyan erővector összegére bontsuk, a melyek egyike tisztán az elektromágneses tértől, másika a materiától (és pedig ettől általában mechanikai kényszer folyamánya gyanánt is) származik, úgy hogy az első független a materiától, a második pedig vacuumban nem tesz számot (számot nem tévő gravitációra redukálódik). Az első  $\mathfrak{F}_e$ , a másodikat  $\mathfrak{F}_m$  jelölje:

$$\rho_0 \ddot{r} = \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_e + \mathfrak{F}_m. \quad (51)$$

Ha pedig az  $(r', t')$  téridőrendszerben

$$\rho'_0 \ddot{r}' = \mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'_e + \mathfrak{F}'_m,$$

akkor  $(39)_1$ -ből

$$k\mathfrak{F} = k' \left( \mathfrak{F}' - (w\mathfrak{F}') \frac{\dot{r}' + n}{1 + (w\dot{r}')} \right),$$

mert a  $(39)_1$  alatt írt transformatio olyan mint  $(45)_1$ , tehát  $(45)_2$  mintájára is írható.

Azzal a föltevással, hogy ha valamely  $(r', t')$  rendszerben az  $r'$  helyen  $t'$  pillanatban  $\dot{r}' = 0$ , akkor az  $\mathfrak{F}'_e$  erővector  $\rho'_0 \mathfrak{C}'$ -vel egyenlő, EINSTEIN módszerét alkalmazva (Ann. d. Phys. XVII. 1905. 918. l.)

$$\mathfrak{F}_e = \frac{\rho}{k} (\mathfrak{C} + [\dot{r}\mathfrak{B}] - (\dot{r}\mathfrak{C}) \dot{r}), \quad (52)_e$$

$$\mathfrak{F}_m = \frac{1}{k} \left( \mathfrak{F}'_m - (\dot{r}\mathfrak{F}'_m) \frac{k\dot{r}}{1+k} \right). \quad (52)_m$$

Közönséges mechanikai értelemben  $\mathfrak{F}_e D\tau$  azon mozgató erő (PLANCK l. c.), a mely tisztán az elektromágneses tértől háramlík a quantumelemre. Az  $\mathfrak{F}_m$  és  $\mathfrak{F}'_m$  erővector összefüggése pedig figyelmen kívül maradhat, mert  $\mathfrak{F}_m$  meghatározásában EINSTEIN módszerét a materia mozgására kell vonatkoztatni, mint implicite MINKOWSKI tette, t. i. úgy, hogy oly téridőrendszerből transzformálunk, a melyben a materia számbavett elemi része pilla-

natnyi nyugalomban van. Csupán így írjuk fel tehát most az (51) alatti mozgás-egyenletet:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\rho}{k} (\mathfrak{C} + [\dot{\mathbf{r}} \mathfrak{B}] - (\dot{\mathbf{r}} \mathfrak{C}) \dot{\mathbf{r}}) + \mathfrak{F}_m.$$

Hátra van még az  $\mathfrak{F}_m$  erővectornak a meghatározása. Egyszerű definitiója által juthatunk el az  $(\mathbf{r}, t)$  rendszerben nyugvó izotrop testek számára a vezető-áramlások inductiójának (egyben a HALL-féle jelenségnek) s az elektromos momentumok inductiójának (egyben sugárzások dispersiójának s absorptiójának, a «természetes» rotatorius fénysarkításnak, a magneto-rotatorius fénysarkításnak, a KERR-féle magneto-optikai jelenségnek s a ZEEMANN-féle jelenségnek) egyszerűbb alakjaihoz. Ezen célokra elégséges a materiától származó surlódási erőket, quasi elasticus erőket s a materiális minőség és állapot inhomogén voltából származókat föltételezni. Messzebb jutunk, ha elektromosságok materiális terhének egymáshoz surlódását és mechanikai kényszerét is föltételezzük.

Az említett egyszerűbb viszonyoknak az  $(\mathbf{r}, t)$  rendszerben nyugvó izotrop testben megfelel

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{r}}_i + \varphi_i \operatorname{rot} \dot{\mathbf{r}}_i + \theta_i \dot{\mathbf{r}}_i + \lambda_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\rho_i}{k_i} (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_i + [\dot{\mathbf{r}}_i \mathfrak{B}] - (\dot{\mathbf{r}}_i \mathfrak{C}) \dot{\mathbf{r}}_i) \quad (54)$$

( $i=1, 2, \dots$ )

azzal, hogy  $\varphi_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\lambda_i$  arányos  $\rho_i$  négyzetével és különben csak a materiális minőségtől és állapottól függenek,  $\mathfrak{C}_i$  pedig csak a materiális minőség és állapot inhomogén voltától (ezeket meghatározó mennyiségek coordinata deriváltjaitól) függ. Ideális vezetőkben  $\varphi_i = 0$ ,  $\lambda_i = 0$ . Ideális, nem mágnesezhető dielectricumban  $\ddot{\mathbf{r}}_i$  az I. §-ban gondolt eltolódás a II. §-ban említett bipolaris állapothoz.

Az  $(\mathbf{r}, t)$  téridőrendszerben mozgó testek számára EINSTEIN módszere szerint MINKOWSKIVAL (Erstes Axiom) a LORENTZ-féle transformatio juttat el a megfelelő vonatkozásokhoz.

Fölösleges volna ezek kifejtésével foglalkoznom, mert kész utakon halad az. Csak a mágneseződésnek VOIGT-tól (Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1901 és Ann. d. Phys. IX. 1902) és LANGEVINTŐL (Ann. de Chim. et de Phys. 1905) tárgyalt kér-

dését érintem kissé, ugyanis annak a megállapításával, hogy az (54) alatti egyenlet keretében olyankor, a mikor  $\varphi_i=0$ ,  $\theta_i=0$ ,  $\lambda_i=\lambda$ ,  $\mathfrak{C}_i=0$  és csak a mágneses tér tesz számot, az elektromos nem, tehát  $\mathfrak{C}=0$  tehető: mi a mágneses momentumra háruló föltétele azon pentapoláris állapotnak, a melyet a II. §-ban definiáltam?

Ezen pentapolaris állapotban minden térelemben négy elektromos quantumelem van mozgásban mint négy szomszédos térelemből eltolódott négy poláris töltés. Ehhez képest

$$\rho_{0i}\ddot{r}_i + \lambda\ddot{r}_i = \frac{\rho_i}{k_i} [\dot{r}_i\mathfrak{B}], \quad (55)$$

( $i=1, 2, 3, 4$ )

négy vectoregyenletünk van, a melyekhez csatolhatók, mint a pentapolusok definitiója szerint vegtelen nagy pontossággal érvényesek, a következő vonatkozások:

$$(\ddot{r}_1\ddot{r}_i) = 0, \quad \ddot{r}_i = -\frac{\dot{r}_i^2}{\ddot{r}_i^2} \ddot{r}_i, \quad (56), (57)$$

$$(\ddot{r}_1\ddot{r}_2) = 0, \quad (\ddot{r}_3\ddot{r}_4) = 0, \quad (58)$$

$$\dot{r}_1^2 = \dot{r}_2^2 = \dot{r}_3^2 = \dot{r}_4^2 \equiv r^2, \quad (59)$$

$$\dot{r}_1^2 = \dot{r}_2^2 = \dot{r}_3^2 = \dot{r}_4^2 \equiv \dot{s}^2,$$

$$\ddot{r}_1 + \ddot{r}_3 = 0, \quad \ddot{r}_2 + \ddot{r}_4 = 0, \quad (60)$$

$$\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_{03} = \rho_{04} \equiv \rho_0, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 \equiv \rho. \quad (61)$$

Az (55) alatt lévő mozgás-egyenlet az (57) következtében (59) és (61) számbavételével ezt az alakot ölti:

$$\left( \lambda - \rho_0 \frac{\dot{s}^2}{r^2} \right) \ddot{r}_i = \frac{\rho}{k} [\dot{r}_i\mathfrak{B}]. \quad (62)$$

Egyszer  $i=1$  írva ebben, aztán  $\dot{r}_2$  sebességgel vectorilag mindkét oldalán megszorozva, (60) és (56) figyelembe vételével azt kapjuk, hogy  $(\dot{r}_2\mathfrak{B})=0$ . Egy következménye tehát egyenleteinknek, hogy

$$(\dot{r}_i\mathfrak{B}) = 0. \quad (63)$$

Ha most (62) alatt irt egyenletünket a baloldalán  $\rho_i\ddot{r}_i$  vectorral s a jobboldalán a jelenleg egyenlő  $\rho\dot{r}_i$  vectorral vectorilag megszorozzuk, akkor tekintettel (63)-ra és (59) második sorára, a

$$\mu \cdot \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial t^2} = \frac{1}{k} (\lambda r^2 - \mu s^2) \mathfrak{S} \quad (64)$$

egyenlet áll elénk. Mind a négy ilyen egyenletet összeadva, (10) értelmében az

$$\mathfrak{M} = \frac{2\mu^2 r^2 s^2}{k(\lambda r^2 - \mu s^2)} \mathfrak{S}$$

egyenlethez jutunk. Ha pedig  $\mathfrak{S}$  itteni együtthatóját  $\frac{\mu-1}{\mu}$  jelöli, akkor (28) szerint a

$$\mathfrak{S} = \mu \mathfrak{H} \quad (65)$$

egyenletet írhatjuk helyette. A mennyiben a  $\lambda$  együttható függhet az  $r$ -től és  $s$ -től, lehetséges, hogy  $\mu$  csak a materiális minőségtől és állapottól függjön számottevő mértékben.

A (65) a (64)-ben foglalt négy egyenlet mindegyikét külön-külön helyettesítheti, mert (64) baloldala, miként a jobboldala,  $i$  mind a négy értéke mellett ugyanaz. Ekként az (55) alatt lévő mozgás-egyenlet keretében az  $(r, t)$  rendszerre nézve nyugvó isotrop testben a pentapolaris állapotnak föltétele maga a (65) alatt kapott vonatkozás.

Természetesen hasonló eredményhez jutunk abban a föltevésben, hogy egy materiális elemi részből egy síkkal párhuzamosan minden irányban tolódott el negatív elektromosság, a mely aztán körös gyűrűként övedzi az elemi részt. Ugyanis az ilyen módon létesült állapot úgy tekinthető, mint végtelen sok pentapolaris állapot superposituma.

EINSTEIN módszere szerint MINKOWSKIVAL (Erstes Axiom) LORENTZ-féle transformatio vezet az  $(r, t)$  rendszerben mozgó test megfelelő egyenletéhez, mire nézve megjegyzendő, hogy (65)-ben  $\mathfrak{H}$  helyett a (30) szerint való  $\mathfrak{S}$  is írható, mert a (65) az  $(r, t)$  rendszerben nyugvó testre vonatkozván, ezen (65)-höz (29)-ben  $v_0=0$  tartozik.