

ALAPVETÉS AZ ELEKTROMOSSÁG ÉS MÁGNESSÉG FOLYTONOSSÁGI ELMÉLETÉHEZ.

FARKAS GYULA I. tagtól.

(Második közlemény.)¹

MINKOWSKI nyomán BORN is publikált folytonossági elméletet (Math. Ann. 68). Azonban az övé kevésbé egyszerű s a mellett kevésbé általános és a kifejtésében a physikai tartalom nagyon elburkolódik. Fenntartom tehát a magamét és most továbbfejleszttem.

A VII. cikk a szükséges transformáló kifejezések gyűjteménye és a tárgy természetéből folyólag nagy részét teszi a dolgozatnak. A közönséges hárommértű vectorjelvényeket használom benne, mert a kifejezései így is elég egyszerűek és alkalmazásaikban így jobban érvényre jut a physikai fölfogás. SOMMERFELD ugyan időközben közelebb vitte a képzelethez a négymértű vectorok tanát (Ann. d. Phys. 1910. Nr. 9, Nr. 14), de még nála is sokat szenved a physikai fölfoghatóság.

A VIII. cikk az elektromos és mágneses momentum transformációját még egyszer kifejti, mert most a VII. cikk alapján sokkal egyszerűbb módon intézhető el, mint a hogyan az V. cikk teszi.

A IX. cikkben a relativitás elvén (mindig a LORENTZ-féle

¹ Első közleményemben (XXVIII. kötet, 1-25. lap) felejtett hibák: A 4. lap végén a Σ alól kimaradt az \bar{r}_i szorzó. — A 16. lapon $(42)_0$ alatt $[n] \bar{M}'$ van $[n \bar{M}']$ helyett. — A 20. lap első sorában az utolsó tagban $(n\bar{r}_i) \bar{r}_i$ van $(n\bar{r}_i) \bar{r}_i$ helyett. — Ugyanezen lap végén $(42)_1$ alatt $(n_0 u)$ van $(n u_0)$ helyett.

relativitás értetvén) mozgó izotrop testekben az elektromosságok mozgásának kétféle igen általános egyenlet-típusát határozom meg. Kétfélet az inertiaerő kétféle (közönséges és MINKOWSKI-féle) definitiója szerint.

A X. cikkben a relativitás elvén elektromágneses ponderomotoros erőt határozok meg. Abból indulok ki, hogy a MINKOWSKI-féle inertiaerő értelmében NEWTON reactio-törvénye nyugvó izotrop testekben megilleti az elektromosságok és a matéria viszonyát; de arra az esetre szoritkozom, hogy az elektromosságok inertiaereje elhanyagolható. Ily módon a LORENTZ-féle elemi erőhöz jutok vissza. Azután mozgó testekben a LORENTZ-féle transformatio a relativitás elvével egyezően juttat el az elektromágneses tér ponderomotoros erejéhez. Ez nem szenved a MINKOWSKI-félének a hibájában.

A XI. cikkben a közönséges mechanikából a virtuális munka törvényét a relativitás (elektromágneses, azaz LORENTZ-féle relativitás) elvéhez alkalmazom a virtuális elmozdulások megfelelő definitiója által.

A XII. cikkben a relativitás elvén merev testet definiálok. Végtelen sokféle olyan definitiója lehetséges, a mely a legszükségesebb föltételeket kielégíti. Ilyen például az újabb BORN-féle definitio (Gött. Nachr. 1910. Heft 2). Én abból indulok ki, hogy a «merev test» valamely téridőrendszerben a közönséges mechanika értelmében való merev test legyen.

A XIII. cikkben ideális folyós testnek (belső surlódás nélkül való légnak, compressibilis folyadéknak) a belső kényszerét, a XIV. cikkben ideális (belső surlódás nélkül való) rugalmas testnek a belső kényszerét, a XV. cikkben surlódástalan érintkezésnek a kényszerét definiálok a relativitás elvén, mindezt úgy, hogy az alkalmazások másodrendű kis eltérésekkel a régi mechanikai egyenletekhez vezetnek; ennek a kimutatását azonban mellőztem, mert a XI. cikk végének az alapján könnyen fölismerhető az.

VII. Transformáló képletek.

1. A «speciális» LORENTZ-féle transformatiót általános vektorjelvényekkel egyszerű alakban tartalmazza (32). Az r vektort és t időt mint az r' vektor és t' idő függvényét pedig és viszont, az utóbbiakat mint az előbbieket függvényét, a következő vonatkoztatások egybefoglalva fejezik ki:

$$\begin{aligned} r - r' &= wt_0, & t + t' &= \frac{x + 1}{x} t_0, \\ t_0 &= x(t - nt) = x(t' + nt'), & (66) \\ x &\equiv \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}}, & n &\equiv \frac{xw}{x + 1}. \end{aligned}$$

2. Ha g_1 és g_1 transformatiója olyan mint r és t transformatiója s g_2 és g_2 transformatiója is olyan, azaz, ha a IV. szakaszban alkalmazott jelölésmód értelmében

$$(g_1, g_1) \sim (g_2, g_2) \sim (r, t), \quad (67)^0$$

akkor $g_1 g_2 - g_1 g_2 = g'_1 g'_2 - g'_1 g'_2$, vagyis $g_1 g_2 - g_1 g_2$ invariants alak a LORENTZ-féle transformatióban, a mit egyszerűen úgy írok, mint (67)⁰ következményét, hogy

$$g_1 g_2 - g_1 g_2 = \text{Inv.} \quad (67)$$

Ha továbbá

$$N_1 = \text{Inv.}, \quad N_2 = \text{Inv.}, \quad (67)_1^0$$

akkor (67)-ből

$$(N_1 g_1 + N_2 g_2, N_1 g_1 + N_2 g_2) \sim (r, t). \quad (67)_1$$

3. Ha

$$\begin{aligned} (a, a) &\sim (g_1, g_1) \sim (g_2, g_2) \sim (r, t), \\ (ag_1 - ag_1) g_2 - (ag_2 - ag_2) g_1 &\equiv g_0, \end{aligned} \quad (68)^0$$

akkor (67) és (67)₁ következtében

$$\left(g_0, \frac{a}{a} g_0 \right) \sim (r, t). \quad (68)$$

4. Ha

$$(a_1, a_1) \sim (a_2, a_2) \sim \left(a_1, \frac{a_1}{a_1} a_1 \right) \sim \left(a_2, \frac{a_2}{a_2} a_2 \right) \sim (r, t), \quad (69)^0$$

akkor

$$(a_1 g_2 - a_2 g_1) \left(\frac{a_2}{a_2} - \frac{a_1}{a_1} \right) = \text{Inv.}, \quad (69)$$

mert azt írván, hogy

$$\frac{a_1}{a_1} g_1 \equiv g_1, \quad \frac{a_2}{a_2} g_2 \equiv g_2,$$

a (69)-nek a baloldala \equiv

$$(a_1 g_2 - a_1 g_2) + (a_2 g_1 - a_2 g_1),$$

a hol (67) szerint mindkét tag = Inv.

5. Ha azt írjuk, hogy

$$\frac{r}{t} \equiv \mathfrak{Z}, \quad (70)^o$$

akkor $(t\mathfrak{Z}, t) \sim (r, t)$, $t \sqrt{1 - \mathfrak{Z}^2} = \text{Inv.}$, tehát

$$\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\sqrt{1 - \mathfrak{Z}^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{Z}^2}} \right) \sim (r, t) \quad (70)$$

és következõleg

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Z}}{\sqrt{1 - \mathfrak{Z}^2}} - \frac{\mathfrak{Z}'}{\sqrt{1 - \mathfrak{Z}'^2}} &= \frac{1 - n\mathfrak{Z}}{\sqrt{1 - \mathfrak{Z}^2}} x w = \frac{1 + n\mathfrak{Z}'}{\sqrt{1 - \mathfrak{Z}'^2}} x w = \\ &= \frac{n}{\sqrt{1 - \mathfrak{Z}^2}} + \frac{n}{\sqrt{1 - \mathfrak{Z}'^2}}, \\ \frac{\sqrt{1 - \mathfrak{Z}'^2}}{\sqrt{1 - \mathfrak{Z}^2}} &= \frac{1 + n\mathfrak{Z}'}{1 - n\mathfrak{Z}} = x(1 + w\mathfrak{Z}') = \frac{1}{x(1 - w\mathfrak{Z})}. \end{aligned} \quad (70)_r$$

6. Ha

$$\begin{aligned} (g_1, g_1) \sim (g_2, g_2) \sim (r, t), \quad (v) \sim \left(\frac{r}{t} \right), \\ \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \equiv k, \quad \frac{kv}{k+1} \equiv m, \end{aligned} \quad (71)^o$$

akkor

$$\{g_2 + (m g_2 - g_2) kv\} \{g_1 + (m g_1 - g_1) kv\} = \text{Inv.}, \quad (71)$$

mert a baloldal \equiv

$$g_1 g_2 - g_1 g_2 + k(v g_1 - g_1) k(v g_2 - g_2),$$

a minnek az első tagja pedig (67) szerint s a második tagjában mindegyik zárjeles kifejezés k -szorosra (67) és (70) értelmében = Inv.

7. Ha

$$(\mathfrak{A}) \sim \left(\frac{r}{t} \right), \quad r - \mathfrak{A}t \equiv \mathfrak{B}, \quad (72)^0$$

akkor a \mathfrak{B} vector olyan viszonyban van a \mathfrak{A} vectorral, hogy

$$\mathfrak{B}' - \mathfrak{B} = (w\mathfrak{B}) \frac{\mathfrak{A} - n}{1 - w\mathfrak{A}} = (w\mathfrak{B}') \frac{\mathfrak{A}' + n}{1 + w\mathfrak{A}'} = (n\mathfrak{B}) \frac{\mathfrak{A}}{1 - n\mathfrak{A}} + (n\mathfrak{B}') \frac{\mathfrak{A}'}{1 + n\mathfrak{A}'}. \quad (72)$$

Kitűnik ez, ha r és t transformatiójában

$$r = \mathfrak{B} + t\mathfrak{A}, \quad r' = \mathfrak{B}' + t'\mathfrak{A}'$$

írjuk s azután az időket elimináljuk.

Ha

$$(\mathfrak{A}) \sim \left(\frac{r}{t} \right), \quad (g, g') \sim (r, t), \quad (73)^0$$

akkor $g - \mathfrak{A}g$ transformatiója olyan, mint $r - \mathfrak{A}t$ transformatiója:

$$(g - \mathfrak{A}g) \sim (r - \mathfrak{A}t). \quad (73)$$

8. Ha

$$(v) = \left(\frac{r}{t} \right), \quad (f) \sim (r - vt), \quad (74)^0$$

$$f + Gv \equiv \mathfrak{G},$$

akkor mindig van olyan \mathfrak{G} és G , hogy

$$(\mathfrak{G}, G) \sim (r, t). \quad (74)$$

Ugyanis, bármely zérustól különböző értéket tulajdonítunk a G scalarisnak, ha úgy szabjuk meg a transformatióját, hogy

$$G' = x(1 - wv) G - x(wf)$$

legyen, akkor már (74) teljesül. Egyszerűen következik ez v és f transformatiójából az 5. és 7. alapján.

9. Ha

$$(a, \alpha) \sim (a_0, \alpha_0) \sim (r, t), \quad (f) \sim \left(r - \frac{a}{a} t\right), \quad (75)^{\circ}$$

$$(a_0 a - a_0 \alpha) f + (a_0 f) a \equiv g,$$

akkor

$$\left(g, \frac{a_0}{a_0} g\right) \sim (r, t). \quad (75)$$

Ugyanis azt irván g kifejezésében (75)^o alatt, hogy

$$f = \mathfrak{G} - \frac{a}{a} G$$

és az előbbi pont engedelmeivel kizárván, hogy $(\mathfrak{G}, G) \sim (r, t)$ legyen, azt kapjuk, hogy

$$g = (a_0 a - a_0 \alpha) \mathfrak{G} - (a_0 f - a_0 \mathfrak{G}) a,$$

tehát a 3. pont értelmében a (75) csakugyan teljesül.

Specziálisan

$$\frac{a}{a} = \frac{a_0}{a_0} = v$$

téve (75)^o és (75) alatt, kitűnik, hogy: ha

$$(v) \sim \left(\frac{r}{t}\right), \quad (f) \sim (r - vt), \quad f + \frac{(vf)v}{1-v^2} \equiv u, \quad (76)^{\circ}$$

akkor

$$(u, vu) \sim (r, t), \quad (76)$$

a minek egy következménye, hogy

$$f^2 + \frac{(vf)^2}{1-v^2} = \text{Inv.} \quad (76)_1$$

10. Ha

$$(v) \sim \left(\frac{r}{t}\right), \quad (g, vg) \sim (r, t), \quad (f) \sim (r - vt), \quad (77)^{\circ}$$

akkor

$$fg = \text{Inv.}, \quad (77)$$

mert azt irván, hogy

$$f = \mathfrak{G} - vG$$

és a 8. pont alapján kiróván, hogy $(\mathfrak{G}, G) \sim (r, t)$ legyen, (67) szerint

$$g\mathfrak{G} - (v\mathfrak{G})G = \text{Inv.},$$

a mi pedig nem más, mint (77), mert $= (\mathfrak{G} - vG)g$.

11. Ha

$$\begin{aligned} (r_1, t_1) &\sim (r_2, t_2) \sim (r, t), \\ [r_1 r_2] &\equiv r_{12}, \quad t_1 r_2 - t_2 r_1 = t_{12}, \end{aligned} \quad (78)^0$$

akkor

$$\begin{aligned} r'_{12} + [nt'_{12}] &= r_{12} - [nt_{12}], \\ t'_{12} - [nr'_{12}] &= t_{12} + [nr_{12}], \end{aligned} \quad (78)$$

a honnan

$$\begin{aligned} r'_{12} &= \varkappa \{ r_{12} - [wt_{12}] - (wr_{12})n \}, \\ t'_{12} &= \varkappa \{ t_{12} + [wr_{12}] - (wt_{12})n \}, \end{aligned} \quad (78)_1$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= \varkappa \{ r'_{12} + [wt'_{12}] - (wr'_{12})n \}, \\ t_{12} &= \varkappa \{ t'_{12} - [wr'_{12}] - (wt'_{12})n \}. \end{aligned} \quad (78)_2$$

A (41)-ből látható, hogy

$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \sim (r_{12}, t_{12}). \quad (78)_3$$

Ha

$$(g_1, g_1) \sim (g_2, g_2) \sim (r, t), \quad (79)^0$$

akkor

$$([g_1 g_2], g_1 g_2 - g_2 g_1) \sim (r_{12}, t_{12}). \quad (79)$$

12. Ha

$$(\mathfrak{N}, \mathfrak{U}) \sim (r_{12}, t_{12}), \quad (80)^0$$

akkor

$$(\mathfrak{U}, -\mathfrak{N}) \sim (-\mathfrak{U}, \mathfrak{N}) \sim (-\mathfrak{N}, -\mathfrak{U}) \sim (r_{12}, t_{12}), \quad (80)$$

$$\mathfrak{N}\mathfrak{U} = \text{Inv.} \quad (80)_1$$

13. Ha

$$(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{U}_1) \sim (\mathfrak{N}_2, \mathfrak{U}_2) \sim (r_{12}, t_{12}), \quad (81)^0$$

akkor

$$\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 - \mathfrak{U}_1 \mathfrak{U}_2 = \text{Inv.}, \quad \mathfrak{N}_1 \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{N}_2 \mathfrak{U}_1 = \text{Inv.}, \quad (81)$$

$$(\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2, \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) \sim (\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 - \mathfrak{N}_1) \sim (r_{12}, t_{12}). \quad (81)_1$$

14. Ha

$$(\mathfrak{N}, \mathfrak{U}) \sim (r_{12}, t_{12}), \quad (a, a) \sim (r, t), \quad (82)^0$$

$$a\mathfrak{U} + [a\mathfrak{N}] \equiv \mathfrak{X},$$

akkor

$$\left(\mathfrak{X}, \begin{smallmatrix} a \\ a \end{smallmatrix} \mathfrak{X} \right) \equiv (a\mathfrak{U} + [a\mathfrak{N}], a\mathfrak{U}) \sim (r, t). \quad (82)$$

15. Ha

$$(a, a) \sim (r, t), \quad (f) \sim \left(r - \frac{a}{a} t \right). \quad (83)^0$$

akkor

$$([af], af) \sim (r_{12}, t_{12}), \quad (83)$$

mert, ha azt írjuk, hogy

$$f = \mathcal{G} - \frac{a}{a} G,$$

akkor

$$[af] = [a\mathcal{G}], \quad af = a\mathcal{G} - Ga.$$

Mivel tehát a 8. pont szerint

$$(\mathcal{G}, G) \sim (r, t)$$

lehet, a (79) következtében csakugyan helyes a (83).

16. A (83) alatt írt következmény (80) szerint így is írható :

$$\left(af, \left[af \cdot \frac{a}{a} \right] \right) \sim (r_{12}, t_{12}).$$

Mihelyt pedig olyan vector a v és a \mathfrak{X} , hogy

$$(v) \sim \left(\frac{r}{t} \right), \quad (\mathfrak{X}, [\mathfrak{X}v]) \sim (r_{12}, t_{12}), \quad (84)^0$$

akkor

$$([f\mathfrak{X}], v [f\mathfrak{X}]) \sim (r, t), \quad (84)$$

mert, ha azt írjuk, hogy

$$f = \mathcal{G} - vG,$$

akkor

$$[f\mathfrak{X}] = G[\mathfrak{X}v] + [\mathcal{G}\mathfrak{X}], \quad v[f\mathfrak{X}] = f[\mathfrak{X}v] = \mathcal{G}[\mathfrak{X}v].$$

tehát azon kikötéssel, hogy a 8. pont engedelmeivel $(\mathcal{G}, G) \sim (r, t)$ legyen, a 14. pont alapján csakugyan következik (84) a (84)⁰-ból.

17. A t pillanatban r helyen egy materiális vagy elektromos pont sebessége \dot{r} legyen a t időszámítás értelmében. Ha tehát dt időelemben dr a pont elemi elmozdulása, akkor $\dot{r} = dr : dt$. A (32) vagy (66) differenciálásán pedig $(dr, dt) \sim (r, t)$. Ha tehát

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dot{r}^2}} \equiv k \quad (85)^0$$

teszszük, akkor $dt : k = \text{Inv.}$ és következöleg

$$(k\dot{r}, k) \sim (r, t), \quad (85)$$

a melyből pedig (70)₁ hasonlatára

$$k\dot{r} - k'\dot{r}' = k(1 - n\dot{r})\alpha w = k'(1 + n'\dot{r}')\alpha w = kn + k'n,$$

$$\frac{k}{k'} = \frac{1 + n'\dot{r}'}{1 - n\dot{r}} = \alpha(1 + w\dot{r}') = \frac{1}{\alpha(1 - w\dot{r})}. \quad (85)_1$$

A (85) további következménye, hogy $dt : k$ invariáns voltánál fogva

$$\left(k \frac{d\dot{r}}{dt}, k \frac{dk}{dt}\right) \equiv \left(k \frac{d\dot{r}}{dt}, k\dot{r} \frac{dk}{dt}\right) \sim (r, t). \quad (85)_2$$

Ebből pedig (73) értelmében

$$\left(k \frac{d\dot{r}}{dt} - \dot{r}k \frac{dk}{dt}\right) \equiv (k^2\dot{r}) \sim (r - \dot{r}t) \quad (85)_3$$

következik.

18. Ha

$$(\mathfrak{L}) \sim \left(\frac{r}{t}\right), \quad (86)_0$$

akkor (85) és (73) nyomán

$$k(\dot{r} - \mathfrak{L}) \sim (r - \mathfrak{L}t). \quad (86)$$

Bármely pontnak bármikori sebessége \dot{r}_0 és \dot{r} , azt irván, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \dot{r}_0^2}} \equiv k_0, \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{r}^2}} \equiv k, \quad (87)_0$$

$$g_0 \equiv k_0 k (1 - \dot{r}_0 \dot{r}) k\dot{r} - k_0 \dot{r}_0,$$

az következik (85) és a 3. pont értelmében, hogy

$$(g_0, \dot{r}g_0) \sim (r, t), \quad (87)$$

következik pedig ez olyképen, hogy (68)⁰-ban

$$a = g_2 = k\dot{r}, \quad a = g_2 = k; \quad g_1 = k_0\dot{r}_0, \quad g_1 = k_0$$

teszszük.

19. Ha egy materiális vagy elektromos continuum két végtelen közeli pontja P^0 és P ugyanazon t pillanatban r^0 , illetőleg r helyen van, akkor t pillanatban a P^0P vector $D\mathbf{r}$ ($\equiv r - r^0$) transzformációja olyan mint $r - \dot{r}t$ transzformációja, odaértve, hogy a P pont sebessége \dot{r} .

Ha ugyanis a P pont t pillanati r helyének t' pillanati r' hely felel meg a vesszős rendszerben és ha ezen rendszerben a P^0 pont a t' pillanatban $r^{0'}$ helyen van, akkor a Dr ($\equiv r - r^0$) távolsági vectornak a vesszős rendszerben megfelelő Dr' távolsági vector $\equiv r' - r^{0'}$, t. i. mint a t' időszámítás szerint egyidejű helyek távolsági vectora. Az $r^{0'}$ hely és t' idő r_0 helynek és t_0 időnek feleljen meg, mihez képest

$$(r - r_0, t - t_0) \sim (r, t).$$

Azonban \dot{t} lévén a P pont sebessége:

$$r - r_0 (\equiv r - r^0 + r^0 - r_0) = Dr + (t - t_0) \dot{t},$$

tehát

$$(Dr + (t - t_0) \dot{t}, t - t_0) \sim (r, t).$$

Ebből pedig (73) módjára

$$(Dr) \sim (r - \dot{t}t) \quad (88)$$

következik.

20. Ha T valamely invariáns időt jelent és ha egy continuum P_0 és P pontjának ugyanazon T pillanati helye r_0 , illetőleg r s a vesszős rendszerben r'_0 , illetőleg r' , akkor az $r - r_0 \equiv Dr_T$ távolsági vectornak a T időszámítás értelmében $r' - r'_0 \equiv Dr'_T$ távolsági vector felel meg.

Ezen T időszámítás T időpontjához, r_0 helyen t_0 , r helyen t s a vesszős rendszerben r'_0 helyen t_0 , r' helyen t' tartoznak mint LORENTZ-féle idő. Ha P_0 és P végtelen közel van egymáshoz és t differenciálható függvénye r és T -nek, akkor

$$\begin{aligned} t - t_0 &\equiv Dt_T = Dr_T \overset{T}{\text{grad}} t, \\ t' - t'_0 &\equiv Dt'_T = Dr'_T \overset{T}{\text{grad}} t', \end{aligned}$$

a hol a gradiensek képzésében t mint T és r függvénye, t' mint T és r' függvénye szerepel. E szerint

$$(Dr_T, Dr_T \overset{T}{\text{grad}} t) \sim (r, t) \quad (89)$$

az invariáns T időszámítás szerint való elemi vectoregységnek transformatio-szabálya.

21. A t időszámítás szerint gondolt Dr elemi vectoregypén transformatióját az (r', t') rendszerbe (88) szabja meg, tehát (72) értelmében

$$Dr' = Dr + (wDr) \frac{\dot{r} - u}{1 - w\dot{r}}.$$

Innen a Dr componensei mellől való determinans \equiv

$$\frac{1}{x(1 - w\dot{r})},$$

tehát $(85)_1$ szerint $\equiv k:k'$. Ha tehát az r hely környezetét alkotó egyéni elemi rész pontjai közös t pillanatban elfoglalt helyeikkel a DV térelemet töltik be és az elemi rész sebessége \dot{r} , akkor ezen pontok a vesszős rendszerben az r' hely körül a közös t' pillanatban a $DV' = kDV:k'$ térelemet töltik be. Következésképp $k'DV' =$

$$kDV = \text{Inv.} \quad (90)$$

Úgy róván ki pedig az elemi rész ρ sűrűségének a transformatióját, hogy

$$\rho DV = \text{Inv.} \quad (91)_0$$

legyen, (90)-ből folyólag

$$\frac{\rho}{k} = \text{Inv.} \quad (91)$$

és azért (85) , $(85)_2$, $(85)_3$ szerint

$$(\rho\dot{r}, \rho) \sim (r, t), \quad (91)_1$$

$$\left(\rho \frac{d\dot{r}}{dt}, \rho \frac{dk}{dt} \right) \equiv \left(\rho \frac{d\dot{r}}{dt}, \rho\dot{r} \frac{dk}{dt} \right) \sim (r, t), \quad (91)_2$$

$$(\rho k\dot{r}) \sim (r - \dot{r}t). \quad (91)_3$$

Továbbá, ha csak

$$(\mathfrak{B}) \sim \left(\frac{r}{t} \right), \quad (92)_0$$

akkor (86) értelmében

$$\rho(\dot{r} - \mathfrak{B}) \sim (r - \mathfrak{B}t). \quad (92)$$

22. Az invariáns T időszámítás szerint gondolt Dr_T elemi vector-egypén transformatióját az (r', t') rendszerbe (89) szabja meg, tehát (66) értelmében

$$Dx'_T = Dx_T + ((n - \text{grad } t) Dx_T) xw.$$

Innen a Dx_T vector componensei mellől való determinans \equiv

$$x(1 - w \text{ grad } t) \equiv x \left(\frac{\partial T}{\partial t} + w \text{ grad } T \right) : \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Azonban, mihelyt az r -nek és t -nek valamely invariáns scalaris függvénye a ϕ , ha csak deriválható függvényük, akkor

$$\left(-\text{grad } \phi, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \sim (r, t). \quad (93)$$

Ebből folyólag (66) szerint

$$\frac{x+1}{x} x \left(\frac{\partial T}{\partial t} + n \text{ grad } T \right) - \frac{\partial T}{\partial t} \equiv x \left(\frac{\partial T}{\partial t} + w \text{ grad } T \right) = \frac{\partial T}{\partial t'},$$

a hol a szélső oldalon T mint r' és t' függvénye van.

Ha tehát az r hely környezetét alkotó elemi rész pontjai közös T pillanatban elfoglalt helyeikkel a DV_T térelemet töltik be, akkor a vesszős rendszerben ezen pontok az r' hely körül a közös T pillanatban elfoglalt helyeikkel a $DV'_T = \frac{\partial T}{\partial t'} DV_T : \frac{\partial T}{\partial t}$ térelemet töltik be. Következéleg $DV'_T : \frac{\partial T}{\partial t'} =$

$$DV_T : \frac{\partial T}{\partial t} \equiv \frac{\partial t}{\partial T} DV_T = \text{Inv.}, \quad (94)$$

odaértve, hogy t és T egymás növekvő függvényeinek tételezvék föl.

Úgy róván pedig ki most az elemi rész ρ_T sűrűségének a transformációját, hogy

$$\rho_T DV_T = \text{Inv.} \quad (95)_0$$

legyen,

$$\rho_T : \frac{\partial t}{\partial T} = \text{Inv.} \quad (95)$$

Ha (91)₀ és (95)₀ ugyanazon elemi részre vonatkozik, akkor egyező értelemben jelenthetik az elemi rész tömegét, t. i. invariáns tulajdonságuknál fogva.

23. Figyelembe kell vennünk, hogy ha különböző együttlevő continuumokban (különbözően viselkedő elektromosságok,

különböző materiális componensek continuumjai közös térben) ugyanazon r helyen a különböző continuumok elemi részeit ugyanazon t pillanatban tekintjük, akkor általában különböző T pillanatok tartoznak hozzájuk, mint például a MINKOWSKI-féle egyéni idő (Eigenzeit $\equiv \tau$) esetében olyankor, a mikor a különböző continuumok különbözően mozognak. Viszont ugyanazon T pillanatnak ugyanazon r helyen általában a különböző continuumok szerint különböző t pillanatok felelnek meg.

Hogyha azonban minden continuumhoz ugyanazon függvényt rendeljük valami módon az invariáns T idő meghatározására, akkor ugyanazon r helyen közös t pillanatban való állapotaik egyszersmind közös T pillanatban való állapotaik. Így van ez például, ha a MINKOWSKI-féle egyéni idő gyanánt a

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} dt \quad (96)_0$$

időt egyetemlegesen azon kikötéssel használjuk, hogy $dr:dt$ az r hely körül t közös pillanatban agyanazon térelemben foglalt materiális elemi részek tömegcentrumának a sebességét jelentse (tömegben MINKOWSKI-féle értelemben állandó tömeget gondolva) és t^0 ezen elemi részek tömegcentrumának a $\tau = 0$ pillanati w^0 sebességéből és r^0 origoi vectorából képezett $r^0 w^0$ scalariszorzat legyen, úgy hogy

$$t^0 = r^0 w^0 + \int_0^t \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2} d\tau. \quad (96)$$

Hogy pedig a $t^0 = r^0 w^0$ speciális választás megfelel azon követelésnek, hogy τ invariáns idő legyen, ez kitűnik abból, hogy (85) és (67) szerint

$$\frac{t^0 - r^0 w^0}{\sqrt{1 - w^{02}}} \quad \text{Inv.}$$

minélfogva a $t^0 = r^0 w^0$ vonatkozás invariáns.

24. Egy pontcontinuumban a P_0 és P végtelen közeli pontegyéneket egyszer a t időszámítás szerint, közös t pillanatban, egyszer az invariáns T időszámítás szerint, közös T pillanatban tekintve, a $P_0 P$ vectoregyént az első időszámításban Dr ,

a másodikban Dr_T jelölte (19., 20.). Meg akarjuk most ösmerni e két távolsági vectornak egymásba való transformatióját.

A P pont t pillanati r helye egyszersmind az δ T pillanati helye legyen. A P_0 pont t pillanati helyét r^0 , T pillanati helyét r_0 jelölje s ezen r_0 helyen T -nek t_0 feleljen meg; T mindig a T időszámítás szerint, t és t_0 pedig a t időszámítás szerint értetvén. Ezeknél fogva

$$Dr \equiv r - r^0, \quad Dr_T \equiv r - r_0, \quad r^0 - r_0 = (t - t_0) \dot{t},$$

a hol \dot{t} a P pont sebességét jelenti. Innen

$$Dr_T - Dr = (t - t_0) \dot{t}.$$

Minthogy az r helyhez t pillanat és az r_0 helyhez t_0 pillanat tartozik a t időszámításban s mindkét helyhez T pillanat tartozik a T időszámításban,

$$t - t_0 = Dr_T \overset{T}{\text{grad}} t,$$

a hol a jobboldalon a t mint r és T függvénye van. Következően

$$\begin{aligned} Dr &= Dr_T - (Dr_T \overset{T}{\text{grad}} t) \dot{t}, \\ Dr_T &= Dr + \frac{Dr \overset{T}{\text{grad}} t}{1 - \dot{t} \text{grad } t}. \end{aligned} \quad (97)$$

25. Ha az (r', t') rendszerben képezett rotatiót, divergentiát rot' , div' jelöli, akkor

$$\text{rot}' \mathfrak{U} - \frac{\partial [\mathfrak{n}\mathfrak{U}]}{\partial t'} = \text{rot} \mathfrak{U} + \frac{\partial [\mathfrak{n}\mathfrak{U}]}{\partial t}, \quad (98)$$

$$\text{div}' \mathfrak{U} - \frac{\partial (\mathfrak{n}\mathfrak{U})}{\partial t'} = \text{div} \mathfrak{U} + \frac{\partial (\mathfrak{n}\mathfrak{U})}{\partial t}, \quad (99)$$

úgy hogy

$$\text{rot}' \mathfrak{U} = \text{rot} \times \{ \mathfrak{U} - (\mathfrak{n}\mathfrak{U}) w \} + w \text{div} \times [\mathfrak{n}\mathfrak{U}] + \frac{\partial \times [\mathfrak{n}\mathfrak{U}]}{\partial t}, \quad (98)_1$$

$$\text{div}' \mathfrak{U} = \text{div} \{ \mathfrak{U} + \times (\mathfrak{n}\mathfrak{U}) w \} + \frac{\partial \times (\mathfrak{n}\mathfrak{U})}{\partial t} \quad (99)_1$$

és a fordított kifejezések w és n helyett $-w$ és $-n$ szerint. Továbbá

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t'} = \frac{\partial \mathbf{x} \mathbf{u}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{x} [\mathbf{w} \mathbf{u}] + \mathbf{w} \text{ div } \mathbf{x} \mathbf{u}, \quad (100)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t'} = \frac{\partial \mathbf{x} h}{\partial t} + \text{div } \mathbf{x} h \mathbf{w} \quad] \quad (101)$$

és a fordított kifejezések \mathbf{w} helyett $-\mathbf{w}$ szerint.

26. Ha a ϕ scalaris invariáns deriválható függvénye r -nek és t -nek, vagy ha nem invariáns ugyan, de őt magát nem transformáljuk, hanem csak a deriválását transformáljuk, akkor $-\text{grad } \phi$ és $\partial \phi : \partial t$ úgy transformálódik mint r és t . Ezt általánosan

$$\left(-\text{grad } \phi, \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\psi} \sim (r, t) \quad (102)$$

jelentse. Következik például, hogy ha az (r', t') rendszerben a gradienst grad' jelöli, akkor

$$\text{grad } \phi \text{ grad } \phi - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{grad}' \phi \text{ grad}' \phi - \frac{\partial \phi}{\partial t'} \frac{\partial \phi}{\partial t'} \quad (102)_1$$

és ha

$$(g, g) \sim (r, t), \quad (103)_0$$

akkor

$$g \text{ grad } \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial t} = g' \text{ grad}' \phi + g' \frac{\partial \phi}{\partial t'} \quad (103)$$

Ha továbbá u és u deriválható függvénye a helynek és időnek és

$$(g, g) \sim (u, u) \sim (r, t), \quad (104)_0$$

$$(g \text{ grad } u_x, g \text{ grad } u_y, g \text{ grad } u_z)_{\text{vector}} \equiv g \text{ grad } u,$$

akkor (103)-ból folyólag

$$\left(g \text{ grad } u + g \frac{\partial u}{\partial t}, g \text{ grad } u + g \frac{\partial u}{\partial t} \right) \sim (r, t). \quad (104)$$

27. Ha a p scalaris invariáns, vagy nem invariáns ugyan, de nem transformáljuk, akkor a p szerint való deriváltak úgy transformálódnak, mint a deriválandó függvények. Ha tehát g_i és g_i deriválható függvénye a p -nek és vagy invariáns a p , vagy nem transformáljuk azt és

$$(g_i, g_i) \sim (r, t), \quad (105)_0$$

akkor $r\partial g_i : \partial p$ és $\partial g_i : \partial p$ is úgy transformálódik, mint r és t :

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial p}, \frac{\partial g_i}{\partial p} \right)_p \sim (r, t). \quad (105)$$

Következik például, hogy ha g_2 és g_2 deriválható függvénye q -nak:

$$\frac{\partial g_1}{\partial p} \frac{\partial g_2}{\partial q} - \frac{\partial g_1}{\partial p} \frac{\partial g_2}{\partial q} = \frac{\partial g_1'}{\partial p} \frac{\partial g_2'}{\partial q} - \frac{\partial g_1'}{\partial p} \frac{\partial g_2'}{\partial q}. \quad (105)_1$$

28. Ha g_i és g_i deriválható függvénye a helynek és időnek és g_i componenseit $g_{i\alpha}$ stb. jelöli, akkor (103) szerint

$$\begin{aligned} & \sum_p^{x, y, z} \left(\text{grad } g_{1p} \cdot \text{grad } g_{2p} - \frac{\partial g_{1p}}{\partial t} \frac{\partial g_{2p}}{\partial t} \right) - \\ & \quad - \left(\text{grad } g_1 \cdot \text{grad } g_2 - \frac{\partial g_1}{\partial t} \frac{\partial g_2}{\partial t} \right) = \\ & = \sum_p^{x, y, z} \left(\text{grad}' g_{1p} \cdot \text{grad}' g_{2p} - \frac{\partial g_{1p}}{\partial t'} \frac{\partial g_{2p}}{\partial t'} \right) - \\ & \quad - \left(\text{grad}' g_1 \cdot \text{grad}' g_2 - \frac{\partial g_1}{\partial t'} \frac{\partial g_2}{\partial t'} \right). \end{aligned}$$

Kissé más alakban írva:

$$\begin{aligned} & \sum_p^{x, y, z} \left(\frac{\partial g_1}{\partial p} \frac{\partial g_2}{\partial p} - \frac{\partial g_1}{\partial p} \frac{\partial g_2}{\partial p} \right) - \left(\frac{\partial g_1}{\partial t} \frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial g_1}{\partial t} \frac{\partial g_2}{\partial t} \right) = \\ & = \sum_{p'}^{x', y', z'} \left(\frac{\partial g_1}{\partial p'} \frac{\partial g_2}{\partial p'} - \frac{\partial g_1}{\partial p'} \frac{\partial g_2}{\partial p'} \right) - \left(\frac{\partial g_1}{\partial t'} \frac{\partial g_2}{\partial t'} - \frac{\partial g_1}{\partial t'} \frac{\partial g_2}{\partial t'} \right). \end{aligned}$$

Ha már most

$$(g_1, g_1) \sim (g_2, g_2) \sim (r, t), \quad (106)_0$$

akkor (105)₁ értelmében egyenlőségünk jobboldalában a deriválható függvények helyett beírhatjuk a vesszős rendszerbe tartozó g_1' , g_1' , g_1' , g_2' függvényeket, tehát

$$\sum_p^{x, y, z} \left(\frac{\partial g_1}{\partial p} \frac{\partial g_2}{\partial p} - \frac{\partial g_1}{\partial p} \frac{\partial g_2}{\partial p} \right) - \left(\frac{\partial g_1}{\partial t} \frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial g_1}{\partial t} \frac{\partial g_2}{\partial t} \right) = \text{Inv.} \quad (106)$$

29. Ha \mathfrak{R} és \mathfrak{U} a hely és idő olyan deriválható függvénye, hogy (78) értelmében

akkor
$$(\mathfrak{N}, \mathfrak{U}) \sim (r_{12}, t_{12}), \quad (107)_0$$

$$\left(\text{rot } \mathfrak{N} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t}, \text{div } \mathfrak{U} \right) \sim (r, t) \quad (107)$$

és következıleg

$$\left(\text{rot } \mathfrak{N} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} \right)^2 - (\text{div } \mathfrak{U})^2 = \text{Inv.} \quad (107)_1$$

30. Ha $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{U}_1, \mathfrak{N}_2, \mathfrak{U}_2$ a hely és idı deriválható függvénye és

$$\begin{aligned} & (\mathfrak{N}_1, \mathfrak{U}_1) \sim (\mathfrak{N}_2, \mathfrak{U}_2) \sim (r_{12}, t_{12}), \\ & \left(\mathfrak{N}_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial x} - \mathfrak{U}_1 \frac{\partial \mathfrak{U}_2}{\partial x}, \mathfrak{N}_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial y} - \mathfrak{U}_1 \frac{\partial \mathfrak{U}_2}{\partial y}, \mathfrak{N}_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial z} - \mathfrak{U}_1 \frac{\partial \mathfrak{U}_2}{\partial z} \right)_{\text{vector}} \equiv \mathfrak{G}. \\ & \mathfrak{N}_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial t} - \mathfrak{U}_1 \frac{\partial \mathfrak{U}_2}{\partial t} \equiv G, \end{aligned} \quad (108)_0$$

akkor

$$(\mathfrak{G}, G) \sim (r, t). \quad (108)$$

31. Ha \mathfrak{g} és g olyan deriválható függvénye a helynek és idınek, hogy

$$(\mathfrak{g}, g) \sim (r, t), \quad (109)_0$$

akkor

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \text{div } \mathfrak{g} = \text{Inv.} \quad (109)$$

32. Ha \mathfrak{g}, g, u, u a hely és idı deriválható függvénye és

$$(\mathfrak{g}, g) \sim (u, u) \sim (r, t), \quad (110)_0$$

akkor

$$\left(\sum_p^{x, y, z} \frac{\partial u \mathfrak{g}_p}{\partial p} + \frac{\partial u g}{\partial t}, \sum_p^{x, y, z} \frac{\partial u \mathfrak{g}_p}{\partial p} + \frac{\partial u g}{\partial t} \right) \sim (r, t). \quad (110)$$

Kitünik ez abból, hogy ha \mathfrak{g} grad u azt jelenti, a mit (104)₀ alatt, akkor (110) baloldalán a vector \equiv

$$\left(\text{div } \mathfrak{g} + \frac{\partial g}{\partial t} \right) u + \mathfrak{g} \text{ grad } u + g \frac{\partial u}{\partial t}$$

és a scalaris \equiv

$$\left(\text{div } \mathfrak{g} + \frac{\partial g}{\partial t} \right) u + \mathfrak{g} \text{ grad } u + g \frac{\partial u}{\partial t},$$

tehát (109), (104) és (67)₁ nyomán (110) csakugyan következik.

VIII. Az elektromos momentum s a mágneses momentum Lorentz-féle transzformációja azok kinematikai jelentményén.

Most formásabban végezhetem ezt a transzformációt, mint előbbi közleményem V. cikkében.

1. Az \bar{r}_i elektromos eltolódás az I. szakasz elején adott definitiója szerint oly vector, a mely egy testelem t pillanati r_i^0 helyéből egy végtelen közeli testelem t pillanati r_i helyébe nyúlik (abból, a melyből eltolódott, abba, a melybe eltolódott valamely ρ_i sűrűségű elektromos quantumelem). Ha tehát az r_i helyű testelem sebessége v_0 , akkor (88) mintája szerint

$$(r_i - r_i^0) \equiv \bar{r}_i \sim (r - v_0 t). \quad (111)$$

Ha továbbá az \bar{r}_i eltolódással eltolódott ρ_i sűrűségű elektromos quantumelem sebessége a t pillanatban \dot{r}_i , akkor $\dot{\bar{r}}_i = d(r_i - r_i^0) : dt$, a hol $dr_i^0 : dt$ az r_i^0 helyű testelem sebessége, tehát végtelen nagy pontossággal írható, hogy

$$\dot{\bar{r}}_i = \dot{r}_i - v_0, \quad (112)_0$$

tehát (92) értelmében

$$\rho_i (\dot{r}_i - v_0) = (\rho_i \dot{\bar{r}}_i) \sim (r - v_0 t). \quad (112)$$

2. Írjuk most, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2}} \equiv k_0, \quad (113)_0$$

$$\bar{r}_i + k_0^2 (v_0 \bar{r}_i) v_0 \equiv g_i, \quad k_0^2 (v_0 \bar{r}_i) = (v_0 g_i) \equiv g_i,$$

$$\rho_i \dot{\bar{r}}_i + k_0^2 (v_0 \rho_i \dot{\bar{r}}_i) v_0 \equiv a_i, \quad k_0^2 (v_0 \rho_i \dot{\bar{r}}_i) = (v_0 a_i) \equiv a_i.$$

Akkor (76) értelmében (111) és (112) alapján

$$(g_i, g_i) \sim (a_i, a_i) \sim (r, t). \quad (113)$$

De azon föltevésünkben, hogy a (11) alattiak végtelen kicsinyek,

$$\sum_i \rho_i \{ (v_0 \bar{r}_i) \dot{\bar{r}}_i + (v_0 \dot{\bar{r}}_i) \bar{r}_i \}$$

végtelen kicsiny, tehát a \mathfrak{P} és \mathfrak{M} definitiója, ú. m. :

$$\mathfrak{P} \equiv \sum_i \rho_i \bar{r}_i, \quad \mathfrak{M} \equiv \frac{1}{2} \sum_i \rho_i [\bar{r}_i \dot{\bar{r}}_i] + \sum_i \rho_i [\bar{r}_i v_0],$$

így is írható:

$$\mathfrak{P} = \sum_i (\rho_i \mathfrak{g}_i - g_i \rho_i \dot{\mathfrak{r}}_i) + \frac{1}{2} \sum_i (g_i a_i - a_i g_i),$$

$$\mathfrak{M} = \sum_i [\mathfrak{g}_i \rho_i \dot{\mathfrak{r}}_i] + \frac{1}{2} \sum_i [a_i g_i].$$

Azonban (113), (91)₁, (79), (80) alapján:

$$(\rho_i \mathfrak{g}_i - g_i \rho_i \dot{\mathfrak{r}}_i, [\mathfrak{g}_i \rho_i \dot{\mathfrak{r}}_i]) \sim \left(\frac{g_i a_i - a_i g_i}{2}, \frac{[a_i g_i]}{2} \right) \sim (r_{12}, t_{12}),$$

tehát (81)₁ szerint

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{M}) \sim (r_{12}, t_{12}) \quad (114)$$

a \mathfrak{P} elektromos momentum és a (MINKOWSKI-féle) \mathfrak{M} mágneses momentum transformatio-szabálya.

3. Könnyű szerrel részletesen kimutatható most az is, hogy azon föltevésünkben, hogy a (11) alatt foglalt kifejezések végtelen kicsinyek, az (r', t') rendszerben hasonlóan képezett

$$\sum_i \rho'_i \frac{d\vec{x}'_i}{dt'}, \text{ stb.} \quad (115)$$

kifejezések szintén végtelen kicsinyek (tehát az elektromos áramlásnak az I. cikkben végzett tagolása az (r', t') rendszerben is érvényes).

Ugyanis a (115), ú. m. szétbontva

$$\sum_i \vec{r}'_i \cdot \rho'_i \frac{d\vec{x}'_i}{dt'} + \sum_i \vec{x}'_i \cdot \rho'_i \frac{d\vec{r}'_i}{dt'}, \text{ stb.}$$

a (111) és (112) alapján (72) alkalmazásával =

$$\sum_i \left(\vec{r}_i + (w\vec{r}_i) \frac{v_0 - n}{1 - wv_0} \right) \left(\rho_i \dot{\vec{x}}_i + (w\rho_i \dot{\vec{r}}_i) \frac{v_{0x} - n_x}{1 - wv_0} \right) +$$

$$+ \sum_i \left(\vec{x}_i + (w\vec{r}_i) \frac{v_{0x} - n_x}{1 - wv_0} \right) \left(\rho \dot{\vec{r}}_i + (w\rho_i \dot{\vec{r}}_i) \frac{v_0 - n}{1 - wv_0} \right), \text{ stb.}$$

Másodrendű végtelen kicsinyeket mellőzve =

$$\sum_i \rho_i \frac{d}{dt} \left\{ \left(\vec{r}_i + (w\vec{r}_i) \frac{v_0 - n}{1 - wv_0} \right) \left(\vec{x}_i + (w\vec{r}_i) \frac{v_{0x} - n_x}{1 - wv_0} \right) \right\}, \text{ stb.}$$

Ezen összegek pedig a (11) alattiak végtelen kicsiségénél fogva végtelen kicsinyek.

IX. Elektromosságok mozgása mozgó matériában.

1. *Elektromosságok mozgása nyugvó testben.* Az (r', t') téridőrendszerben nyugvó izotrop testben számos elektromos és mágneses jelenség magyarázatát tartalmazza a

$$P'_i \ddot{x}'_i + A'_i \text{rot}' a'_i \dot{x}'_i + B'_i \dot{x}'_i + C'_i x'_i = - \frac{\rho'_i}{k'_i} \{ \mathfrak{C}'_{0i} + \mathfrak{C}'_{i0} + [\dot{x}'_i \mathfrak{B}] - (\dot{x}'_i \mathfrak{C}') x'_i \} \quad (i=1, 2, \dots), \quad (116)$$

$$k'_i = 1 : \sqrt{1 - \dot{x}'_i{}^2}$$

egyenletrendszer, a melyben r' helyen t' pillanatban egy elektromos quantumelem tömötsége (materiális sűrűsége) P'_i , elektromos sűrűsége ρ'_i , sebessége \dot{x}'_i , gyorsulása \ddot{x}'_i , eltolódása x'_i és az A'_i , a'_i , B'_i , C'_i , \mathfrak{C}'_{0i} együtthatók a materiális minőségnek és állapotnak (az utolsó ezen minőség és állapot egyenletlenségének) s ezeken kívül a ρ'_i sűrűségeknek s az \dot{x}'_i sebességek és x'_i eltolódások nagyságainak a függvényei. Valamivel általánosabb rendelkezések ezek mint a VI. cikkben lévők.

A (116) alatti egyenletek együtthatóinak alkalmasan választott függvényalakjai s az egyenletek alkalmas összekapcsolásai juttatnak el számos jelenség leírásához az (r', t') rendszerben nyugvó izotrop testben; azután az egyenletek összekapcsolásaiából származó vonatkozások LORENTZ-féle transzformációjával előkerülnek a mozgó matériába tartozó vonatkozások. Ezek megállapítása járt úton halad. Azonban most módunkban van magukon a (116) alatti egyenleteken hajtani végre a transzformációt. Az eredménye pedig oly alakra vezethető, a mely bármiként mozgó matériában teljesíti a viszonyosság (relativitás) törvényét.

A matéria «elektromótoros erejének», ú. m. az \mathfrak{C}'_{0i} vectoroknak a transzformációjára természetesen külön hypothesisre szorultunk. Ilyenül kínálkozik például, hogy $(\mathfrak{C}'_{0i}) \sim (\dot{x}'_i)$. Egyelőre azonban olyan testről legyen csak a szó, a melyben $\mathfrak{C}'_{0i} = 0$ tehető.

Élve a következő jelölésekkel:

$$P'_i = P, \quad \rho'_i = \rho, \quad \dot{x}'_i = \dot{x}', \quad \ddot{x}'_i = \ddot{x}', \quad k'_i = k',$$

$$A'_i = \frac{A}{k'}, \quad a'_i = k' a, \quad B'_i = \frac{B}{k'}, \quad C'_i = \frac{C}{k'}, \quad (117)_o$$

a (116) alatti egyenletrendszer (C' = 0) esetére)

$$P'k\ddot{\mathbf{r}} + A \operatorname{rot}' a k'\dot{\mathbf{r}} + B\ddot{\mathbf{r}} + C\dot{\mathbf{r}} = \rho' \{ \mathfrak{C}' + [\dot{\mathbf{r}}\mathfrak{B}'] - (\dot{\mathbf{r}}\mathfrak{C}') \dot{\mathbf{r}} \} \quad (117)$$

képviseleti, a melyben az A , a , B , C együtthatók a materiális minőségnek és állapotnak, a ρ' -féle sűrűségeknek és az $\dot{\mathbf{r}}'$ és $\ddot{\mathbf{r}}'$ -féle vectorok nagyságainak a függvényei.

2. *A transformatio.* Számítsuk át a vesszős mennyiségeket a VII. ezikkből (91)₃, (98)₁, (85)₁, (78)₃, (91)₁, (82), (73), (66), (72) alatt rendelkezésünkre lévő formulák és (111) segítségével az (\mathbf{r}, t) rendszerbe, a melyre nézve a test és egyszersmind az (\mathbf{r}', t') rendszer v_0 állandó sebességgel haladó mozgásban legyen. Jelölje az átszámítás után (117) baloldalát röviden \mathfrak{f}_b , a jobb- oldalát \mathfrak{f}_j , úgy hogy az átszámítás után röviden $\mathfrak{f}_b = \mathfrak{f}_j$ képviseli egyenletrendszerünket. Nyilvánvaló, hogy a $\mathfrak{f}_b = \mathfrak{f}_j$ egyenlettel æquivalens egyenlet a következő:

$$\mathfrak{f}_b - k_0(v_0\mathfrak{f}_b) \left(\dot{\mathbf{r}} - \frac{k_0}{k_0+1} v_0 \right) = \mathfrak{f}_j - k_0(v_0\mathfrak{f}_j) \left(\dot{\mathbf{r}} - \frac{k_0}{k_0+1} v_0 \right),$$

$$k_0 \equiv 1 : \sqrt{1-v_0^2}.$$

Részletesen írva pedig ezen egyenletet, azt kapjuk (117) transzformáltja gyanánt, hogy

$$P k \ddot{\mathbf{r}} + A \left\{ \operatorname{rot} a k_0 \dot{\mathbf{r}} (\dot{\mathbf{r}} - v_0) - \frac{\partial a k_0 k [\dot{\mathbf{r}} v_0]}{\partial t} - \dot{\mathbf{r}} \operatorname{div} a k_0 k [\dot{\mathbf{r}} v_0] \right\} +$$

$$+ B k_0 (\dot{\mathbf{r}} - v_0) + C \left\{ \ddot{\mathbf{r}} - k_0^2 (v_0 \ddot{\mathbf{r}}) (\dot{\mathbf{r}} - v_0) \right\} = \rho' \{ \mathfrak{C} + [\dot{\mathbf{r}}\mathfrak{B}] - (\dot{\mathbf{r}}\mathfrak{C}) \dot{\mathbf{r}} \}, \quad (118)$$

$$(k_0 \equiv 1 : \sqrt{1-v_0^2})$$

az A , a , B , C együtthatók bármelyikét jelölje Φ , ha ennek az elektromosságoktól függését (t. i. a ρ' -féle sűrűségek, az $\dot{\mathbf{r}}'$ -féle sebességek és $\ddot{\mathbf{r}}'$ -féle eltolódások nagyságaitól való függését) a (117)-ben

$$\Phi = \Phi(\rho, k', \dot{\mathbf{r}}'^2) \quad (119)_0$$

szemlélteti, akkor (91)₁, (85), (111), (66) és (72) szerint

$$\Phi = \Phi(k_0 \rho - k_0 v_0 \rho \dot{\mathbf{r}}, k_0 k - k_0 v_0 k \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}'^2 + k_0^2 (v_0 \dot{\mathbf{r}})^2). \quad (119)$$

3. *Elektromosságok mozgása mozgó matériában a viszonyosság elvén.* A viszonyosság törvénye megengedi, hogy az (\mathbf{r}, t)

rendszerben v_0 sebesség szerint mozgó materiában (117)₀ értelmében az A, a, B, C együtthatóknak (119) alatt gondolt függvényalakjával a (118) által képviselt egyenleteket tekintjük az egyszerűbb elektromágneses jelenségek alapegyenleteinek, és pedig még akkor is, ha a materiában a v_0 sebesség hely és idő szerint változó vector, de egyedül jellemzi a matéria mozgását. Ennek a kimutatása következik itt.

Az A, a, B, C együtthatók az elektromágneses állapot invariáns függvényei, mert a Φ -ben (119) alatt kiírt argumentumok invariánsok, és pedig az első a (91)₁ és (67), a második a (85) és (67), a harmadik a (111) és (76)₁ tanúsága szerint. A (118) egyéb tartalmát illetőleg vegyük figyelembe, hogy (118) baloldalának az első tagja (91)₃ szerint, a jobboldala pedig (78)₃, (91)₁, (82) és (73) szerint $\sim (r-it)$. Ha tehát A, B, C szorzóját rendre a_1, a_2, a_3 jelöli a (118)-ban, akkor azt kívánja a viszonyosság törvénye, hogy

$$(a_1) \sim (a_2) \sim (a_3) \sim (r-it)$$

legyen. Sorjában ki fog tűnni most, hogy valóban így van.

(a₁). Minthogy (85) szerint

$$(ak\dot{r}, ak) \sim (k\dot{r}, k) \sim (k_0v_0, k_0) \sim (r, t),$$

ennélfogva A szorzójában, a_1 -ban (79) és (80) szerint

$$(ak_0k[\dot{r}v_0], ak_0k(\dot{r}-v_0)) \sim (t_{12}, r_{12}).$$

Következőleg (107) szerint

$$\left(\text{rot } ak_0k(\dot{r}-v_0) - \frac{\partial ak_0k[\dot{r}v_0]}{\partial t}, \text{div } ak_0k[\dot{r}v_0] \right) \sim (r, t),$$

a miből már (73) nyomán $(a_1) \sim (r-it)$ látható.

(a₂). Abból, hogy $(k_0v_0, k_0) \sim (r, t)$, a (73) rendén egyenesen következik, hogy B szorzója, vagyis $(a_2) \sim (r-it)$.

(a₃). A (111) és (76) értelmében

$$(\bar{r} + k_0^2(v_0\bar{r})v_0, k_0^2(v_0\bar{r})) \sim (r, t),$$

tehát (73) következtében $(a_3) \sim (r-it)$.

Ha a matéria «elektromótoros ereje» \mathfrak{E}'_0 nem hanyagolható el és fölteszszük, hogy

$$(\mathfrak{E}'_0) \sim (\mathfrak{r} - v_0 t), \quad (120)_0$$

akkor (118) jobboldalához a viszonyosság elvén

$$k_0 \rho (1 - v_0 \dot{\mathfrak{r}}) \{ \mathfrak{E}'_0 - k_0^2 (v_0 \mathfrak{E}'_0) (\dot{\mathfrak{r}} - v_0) \} \quad (120)$$

járuul $\sim (\mathfrak{r} - \dot{\mathfrak{r}} t)$.

4. *Mozgó matériában elektromosságok más mozgása a viszonyosság elvén.* Ha azt a változtatást teszszük a (117) alatti egyenleten, hogy a baloldalának első tagja helyett térfogategységre számított inertiaerő gyanánt a MINKOWSKI-félét $\left(P' \frac{d\mathfrak{k}' \dot{\mathfrak{r}}'}{dt'} \right)$ írjuk és a jobb oldalának utolsó tagját, ú. m. $-\rho' (\dot{\mathfrak{r}}' \mathfrak{E}') \dot{\mathfrak{r}}'$ elhagyjuk, azután az (\mathfrak{r}, t) rendszerbe transformálván az egyenletet, a bal- és jobboldalát azon művelet alá fogjuk, a melyet a következő kifejezés az α vectoron mutat:

$$\alpha - \begin{pmatrix} k_0 v_0 & - \dot{\mathfrak{r}} \\ 1 + k_0 & \\ & 1 - v_0 \dot{\mathfrak{r}} \end{pmatrix} \alpha - \alpha_0,$$

akkor a következő egyenletünk lesz:

$$P \frac{d\mathfrak{k} \dot{\mathfrak{r}}}{dt} + A \left(\mathfrak{G} + \frac{\dot{\mathfrak{r}} \mathfrak{G} - G}{\nu} - k_0 k v_0 \right) + B \frac{\nu \mathfrak{k} \dot{\mathfrak{r}} - k_0 v_0}{\nu^2} + \\ + C \left(\bar{\mathfrak{r}} + \frac{\bar{\mathfrak{r}} \dot{\mathfrak{r}}}{\nu} - k_0 k v_0 \right) = \rho (\mathfrak{E} + [\dot{\mathfrak{r}} \mathfrak{B}]), \quad (121)$$

a melyben

$$\begin{aligned} \nu &\equiv k_0 k (1 - v_0 \dot{\mathfrak{r}}), \\ G &\equiv \text{div } a k_0 k [\dot{\mathfrak{r}} v_0], \\ \mathfrak{G} &\equiv \text{rot } a k_0 k (\dot{\mathfrak{r}} - v_0) - \frac{\partial a k_0 k [\dot{\mathfrak{r}} v_0]}{\partial t}. \end{aligned} \quad (121)_0$$

Akár A , akár B , akár C szorzóját jelölje (121)-ben g , áll, hogy $(g, \dot{\mathfrak{r}} g) \sim (\mathfrak{r}, t)$ és épen ez most a viszonyosság föltétele, mert (121) jobboldala és baloldalának első tagja így transformálódik. Ezek felismerésére szolgáló képletek: (85), (67), (85)₂, (68), (87), (75), (78)_s, (82), (111).

X Ponderomótoros erő.

1. Pusztán rövidség kedvéért folyvást azon esetre szorítokozom, hogy a materiális rendszerek mozgását egyetlen sebesség jellemzi mint a hely és idő függvénye. Még pedig egyelőre csak oly testet gondolok, a mely az (r', t') téridőrendszerben állandó nyugalomban van.

Ezen test egy elemi részének a helyét r' , a térfogatát (a t' időszámítás értelmében a VII. 21. szerint) DV' jelölje a t' pillanatban s a testelemben e pillanatban a valóságos elektromos töltés sűrűsége $\rho'_{(v)}$, a conductiós áramlásban lévő elektromosságok sűrűsége $\rho'_{(1)}, \rho'_{(2)}, \dots$, sebessége $v'_{(1)}, v'_{(2)}, \dots$ legyen. A testelembe tolódtott dielektromos töltéseknek az eltolódása $\vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots$, sűrűsége ρ'_1, ρ'_2, \dots , sebessége v'_1, v'_2, \dots legyen t' pillanatban. Mindezeknek az elektromosságoknak a testelemben foglalt elemi részei DV' térfogatúak mint maga a testelem. Ellenben a testelemből eltolódott dielektromos töltéseknek a térfogata általában más; e töltéseknek a sűrűsége, sebessége, térfogata:

$$\begin{aligned} \rho_i^* &= \rho'_i + \vec{r}'_i \text{grad}' \rho'_i, \\ v_i^* &= v'_i + \vec{r}'_i \text{grad}' v'_i, \quad (i=1, 2, \dots) \\ DV_i^* &= (1 + \text{div}' \vec{r}'_i) DV' \end{aligned} \quad (122)$$

a t' pillanatban, a hol a középső kifejezés jobboldalán a második tag a $(104)_0$ második sorában föltüntetett értelemben gondolandó. Az elektromos térerősséget \mathfrak{C}' , a mágneses gerjesztést \mathfrak{B}' az r' helyen jelölvén, az $r' + \vec{r}'_i$ -féle helyeken, $(104)_0$ második sorának jelölésmódja szerint:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_i^* &= \mathfrak{C}' + \vec{r}'_i \text{grad}' \mathfrak{C}' \\ \mathfrak{B}_i^* &= \mathfrak{B}' + \vec{r}'_i \text{grad}' \mathfrak{B}' \end{aligned} \quad (123)$$

az elektromos térerősség, illetőleg a mágneses gerjesztés.

2. Abból indulok ki, hogy egy testelem ponderomótoros hatást az épen benne lévő valóságos töltés, a conductiós áramoknak épen benne lévő elemei és a belőle eltolódott dielektromos töltések révén visel az elektromágneses tertől. E mellett izotrop testekre szorítkozva fölteszem, hogy ha egy nyugvó izotrop testben az elektromosságok mozgásának az egyenleteit

(milyenek a (116) alatt gondoltak) a MINKOWSKI-féle inertia-erőkre vonatkoztatjuk, akkor a matériához való viszonyuk megfelel NEWTON reactio-törvényének. Általánosan

$$\rho' \frac{dk' \dot{r}'}{dt'} = \rho' (\mathfrak{E}' + [\dot{r}' \mathfrak{B}']) + \mathfrak{F}'_M$$

irván, MINKOWSKI-féle inertia-erő értelmében \mathfrak{F}'_M jelenti térfogat-egységre számítva a matériának a mozgató hatását a ρ' sűrűségű elektromosságon. Következőleg a NEWTON-féle lex tertia szerint, térfogategységre számítva

$$- \mathfrak{F}'_M = \rho' (\mathfrak{E}' + [\dot{r}' \mathfrak{B}']) - \rho' \frac{dk' \dot{r}'}{dt'}$$

az elektromágneses tér ponderomótoros hatása a ρ' sűrűségű elektromosság révén. Azonban csak azt az eshetőséget tekintem itt, hogy az elektromosságok inertia-ereje oly kicsiny, hogy figyelmen kívül maradhat.

Abból indulok ki tehát, hogy az (r', t') rendszerben nyugvó testnek a DV' térelemben lévő elemi része az elektromágneses tértől a

$$\begin{aligned} \rho'_{(v)} \mathfrak{E}' DV' + \sum_i \rho'_{(i)} (\mathfrak{E}' + [v'_{(i)} \mathfrak{B}']) DV' + \\ + \sum_i \rho'_i (\mathfrak{E}' + [v'_i \mathfrak{B}'_i]) DV'_i \equiv \mathfrak{K}' DV' \end{aligned} \quad (124)$$

ponderomótoros hatást viseli. Minthogy a test nyugalomban van az (r', t') rendszerben, közömbös, hogy közönséges mechanikai értelemben vagy MINKOWSKI-félében gondoljuk-e ezen erőt.

Ha \dot{r}'_i componenseit $\dot{x}'_i, \dot{y}'_i, \dot{z}'_i$ jelöli, akkor (122) és (123) rendén térfogategységre számítva

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}' = \rho'_{(v)} \mathfrak{E}' + \sum_i \rho'_{(i)} (\mathfrak{E}' + [v'_{(i)} \mathfrak{B}']) + \sum_i \rho'_i (\mathfrak{E}' + [v'_i \mathfrak{B}']) + \\ + \frac{\partial}{\partial x'} \sum_i \rho'_i (\mathfrak{E}' + [v'_i \mathfrak{B}']) \dot{x}'_i + \frac{\partial}{\partial y'} \sum_i \rho'_i (\mathfrak{E}' + [v'_i \mathfrak{B}']) \dot{y}'_i + \\ + \frac{\partial}{\partial z'} \sum_i \rho'_i (\mathfrak{E}' + [v'_i \mathfrak{B}']) \dot{z}'_i \end{aligned} \quad (125)$$

ezen erő $(i=1, 2, \dots)$.

3. Transzformáljuk ezt most az (r, t) rendszerbe, a melyben

a testet és egyben az (r', t') rendszert $v_0 (=w)$ állandó sebességgel haladó mozgásban lévőknek gondoljuk. A jobboldalon a VII. cikkben található formulák és (111) segítségével végrehajtva az átalakitást és élve a következő jelölésekkel:

$$\begin{aligned} \bar{r}_i + k_0^2 (v_0 \bar{r}_i) v_0 &\equiv \delta r_i, & k_0^2 (w_0 \bar{r}_i) &\equiv \delta t_i, & k_0 &\equiv 1 : \sqrt{1 - v_0^2}, & (126) \\ \rho_{(v)}(\mathfrak{C} + [v_0 \mathfrak{B}]) + \sum_i \rho_{(i)}(\mathfrak{C} + [v_{(i)} \mathfrak{B}]) + \sum_i \rho_i(\mathfrak{C} + [v_i \mathfrak{B}]) + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \sum_i \rho_i(\mathfrak{C} + [v_i \mathfrak{B}]) \delta t_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_i \rho_i(\mathfrak{C} + [v_i \mathfrak{B}]) \delta x_i + \cdot + \cdot &\equiv \bar{f}, \\ \rho_{(v)}(v_0 \mathfrak{C}) + \sum_i \rho_{(i)}(v_{(i)} \mathfrak{C}) + \sum_i \rho_i(v_i \mathfrak{C}) + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \sum \rho_i(v_i \mathfrak{C}) \delta t_i + \frac{\partial}{\partial x} \sum \rho_i(v_i \mathfrak{C}) \delta x_i + \cdot + \cdot &\equiv f, & (128) \end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy az (r, t) rendszerben az elektromágneses térből a testelemre ható ponderomótoros erő térfogategységre számítva, közönséges mechanikai értelemben =

$$\mathfrak{R} = -\frac{\bar{f} - f v_0}{k_0} \quad (129)$$

és a MINKOWSKI-féle inertia-erő értelmében

$$\mathfrak{R}_0 = \bar{f} + k_0^2 (v_0 \bar{f} - f) v_0 \quad (130)$$

föltéve, hogy az elektromosságok inertia-ereje nem tesz számot.

4. Most kimutatom, hogy a viszonyosság törvénye megengedi, hogy még oly matériában is a (129) (illetőleg a 130) alatt gondolt vector lehessen, térfogategységre számítva, az elektromágneses tér ponderomótoros hatása, a melyben az elemi részek v_0 sebessége hely és idő szerint változik, ha csak az elektromosságok inertia-ereje elhanyagolható.

A $(78)_g$, $(91)_1$, (82) és $(67)_1$ tanúsága szerint látható, hogy ha (127) első sorát g és (128) első sorát g jelöli, akkor $(g, g) \sim (r, t)$. A második sorokat (127 és 128 második sorát) illetőleg vegyük tekintetbe, hogy (126) értelmében (111) és (76) alapján $(\delta r_i, \delta t_i) \sim (r, t)$. Ilyen lévén a $(78)_g$ -nak, $(91)_1$ -nek és (82) -nek a foglalata szerint $(\rho_i \mathfrak{C} + \rho_i [v_i \mathfrak{B}], v_i \mathfrak{C})$ is, (110) alól az következik, hogy ha (127) második sorát a és (128) második sorát a jelöli, nem-

különben $(a, a) \sim (r, t)$. Minthogy $(g, g) \sim (a, a) \sim (r, t)$, ennél fogva $(67)_1$ nyomán

$$(\bar{f}, f) \sim (r, t). \quad (131)_0$$

Ebből pedig (129)-re (73) alapján

$$(k_0 \mathfrak{K}) \sim (r - v_0 t) \quad (131)_1$$

és (130)-ra (85) és (68) alapján

$$(\mathfrak{K}_0, v_0 \cdot \mathfrak{K}_0) \sim (r, t) \quad (131)_2$$

következik. Amaz a közönséges mechanika értelmében, emez a MINKOWSKI-féle mechanika értelmében valóban a viszonyosság föltétele a LORENTZ-féle transzformáció, mert a kétféle mechanika szerint térfogategységre számítva

$$\rho_0 \frac{dv_0}{dt}, \quad \text{illetőleg} \quad \rho_0 \frac{dk_0 v_0}{dt}$$

az inertia-erő, már pedig $(91)_3$, illetőleg $(19)_2$ alapján

$$\left(k_0 \rho_0 \frac{dv_0}{dt} \right) \sim (r - v_0 t), \quad \left(\rho_0 \frac{dk_0 v_0}{dt}, v_0 \rho_0 \frac{dk_0 v_0}{dt} \right) \sim (r, t).$$

Megjegyzendő, hogy a térelemek és következésképpen a sűrűségek, tömötségek is, itt mindig a t időszámítás szerint gondolandók a VII. cikk 21. pontjának értelmében, úgy hogy egy testelem pontjai az (r, t) rendszerben a t időszámítás szerint egyidejű pontok, az (r', t') rendszerben a t' időszámítás szerint egyidejű pontok.

5. Hátra van még az \bar{f} vector és f scalaris kifejezésének (127 és 128) az I. cikk módjára kellő kifejtése. Az I. cikk értelmében, most használt jelöléseink fenntartásával:

$$\sum \rho_i \bar{v}_i \equiv \mathfrak{P}, \quad \sum \rho_i \equiv \rho^{(l)}, \quad \sum \rho_i v_i \equiv \mathfrak{Q}, \quad \frac{1}{2} \sum \rho_i [\bar{v}_i v_i] \equiv \mathfrak{M},$$

$$\sum \rho_i \frac{dv_i \bar{x}_i}{dt}, \quad \sum \rho_i \frac{dv_i \bar{y}_i}{dt}, \quad \sum \rho_i \frac{dv_i \bar{z}_i}{dt} \quad \text{végtelen kicsinyek,} \quad (132)_1$$

$$\sum \rho_{(i)} v_{(i)} \equiv \mathfrak{S}, \quad \sum \rho_{(i)} \equiv 0, \quad \rho_v v_0 \equiv \mathfrak{R},$$

a hol \mathfrak{P} az elektromos momentum; $\rho^{(l)}$ a dielektromos töltések sűrűsége («látszatos» sűrűség); \mathfrak{Q} a dielektromos töltések áram-

lása; \mathfrak{M} a mágneses momentum (LOBENTZ-féle értelemben); \mathfrak{S} a conductió elektromos áramlás; ρ_v a «valóságos» sűrűség, illetőleg \mathfrak{S} a convectió elektromos áramlás (v_0 lévén a matéria sebessége); mindez az r helyen t pillanatban. A III. czikkből pedig

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} + \mathfrak{P} &\equiv \mathfrak{D}, & \mathfrak{B} - \mathfrak{M} &\equiv \mathfrak{H}, \\ \mathfrak{M} + [\mathfrak{P}v_0] &\equiv \mathfrak{M}, & \mathfrak{H} + [v_0\mathfrak{P}] &\equiv \mathfrak{H}, \end{aligned} \quad (132)_2$$

a hol \mathfrak{C} az elektromos térerősség, \mathfrak{D} az elektromos gerjesztés, \mathfrak{B} a mágneses gerjesztés, \mathfrak{H} a mágneses térerősség (LOBENTZ-féle értelemben), \mathfrak{M} a mágneses momentum MINKOWSKI-féle értelemben és \mathfrak{H} a mágneses térerősség MINKOWSKI-féle értelemben. Még a

$$\mathfrak{P} + [\mathfrak{M}v_0] \equiv \mathfrak{P} \quad (132)_3$$

jelöléssel is élve, írjuk, hogy

$$\begin{aligned} E &\equiv \operatorname{div} \{k_0^2 (\mathfrak{P}\mathfrak{C}) v_0 + [\mathfrak{H}\mathfrak{C}]\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left\{ k_0^2 (\mathfrak{P}\mathfrak{C}) - \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}}{2} - \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{C} + \mathfrak{M}\mathfrak{B}}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (133)_1$$

$$\begin{aligned} X_x &\equiv k_0^2 \{ (v_0\mathfrak{P}) \mathfrak{C}_x + [\mathfrak{P}\mathfrak{B}]_x \} v_{0x} + \mathfrak{C}_x \mathfrak{D}_x + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_x - \\ &\quad - \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{D} + \mathfrak{H}\mathfrak{B}}{2} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{C} + \mathfrak{M}\mathfrak{B}}{2}, \end{aligned}$$

$$X_y \equiv k_0^2 \{ (v_0\mathfrak{P}) \mathfrak{C}_x + [\mathfrak{P}\mathfrak{B}]_x \} v_{0y} + \mathfrak{C}_x \mathfrak{D}_y + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_y, \quad (133)_2$$

$$X_z \equiv k_0^2 \{ (v_0\mathfrak{P}) \mathfrak{C}_x + [\mathfrak{P}\mathfrak{B}]_x \} v_{0z} + \mathfrak{C}_x \mathfrak{D}_z + \mathfrak{H}_x \mathfrak{B}_z,$$

$$X_t \equiv k_0^2 \{ (v_0\mathfrak{P}) \mathfrak{C}_x + [\mathfrak{P}\mathfrak{B}]_x \} + \mathfrak{B}_y \mathfrak{D}_z - \mathfrak{B}_z \mathfrak{D}_y$$

és (133)₂-höz gondoljunk hasonló kifejezéseket Y_x stb., Z_x stb. számára az indexek megfelelő változtatásával.

Az I. czikknek a módjára az következik (128)-ból és (127)-ből, hogy

$$\begin{aligned} f &= E, \\ \hat{f}_x &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial X_t}{\partial t}, \\ \hat{f}_y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \frac{\partial Y_t}{\partial t}, \\ \hat{f}_z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{\partial Z_t}{\partial t}. \end{aligned} \quad (134)$$

A VII. cikk némely képletének a segítségével ezeken a kifejezéseken is könnyű szerrel mutatható ki $(131)_0$, a miből pedig a viszonyosság követelményeinek megfelelően $(131)_1$ és $(132)_2$ következik.

A (130) -ban meghatározott \mathfrak{K}_0 vector (134) -nek $(133)_1$ és $(133)_2$ szerint való jelentményénél fogva különbözik a MINKOWSKI-féle $K+(w\bar{K})w$ vectortól, de előnyösen különbözik annyiban, hogy a dielektromos áramlások révén is tartalmaz ponderomotoros hatást. A MINKOWSKI-féle vector ugyanis az \mathfrak{K}_0 vectorból úgy kerül elő, hogy $(133)_1$ és $(133)_2$ alól a k_0^2 szorzós tagokat és a $\mathfrak{B}\mathfrak{C}+\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ tartalmúakat elhagyjuk.

XI. A virtualis munka törvénye.

A tárgyalás alakjának az egyszerűsítése végett fölteszem, hogy a testek belsejében egyetlen sebesség jellemzi mint hely és idő függvénye a matéria minden lehetséges mozgását, úgy hogy legfeljebb a különböző testek érintkezési rétegeiben jellemzi két sebesség, a melyek egyike az érintkező testek egyikéhez, másika az érintkező testek másikához tartozik.

1. Ha T a LORENTZ-féle transformatióban invariáns időt jelent, akkor egy testelem T szerint való gyorsulásának a transformatióját meghatározza

$$\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dT^2}, \frac{d^2t}{dT^2} \right) \sim (\mathbf{r}, t), \quad (135)$$

MINKOWSKINÁL

$$T = \tau = \int_{t^0}^t \frac{dt}{k}, \quad \left(k \equiv 1 : \sqrt{1 - \dot{\mathbf{r}}^2}, \quad \dot{\mathbf{r}} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right), \quad (135)_1$$

a hol t^0 különböző testelemekhez általában különböző kezdeti idő és t is különböző, ha a testelemek egyidejűségét τ szerint gondoljuk. Jelölje (135) -ben \mathbf{r}^0 , w^0 a testelem kezdeti helyét, illetőleg sebességét. A végből, hogy t^0 legalább az origótól nem nagy $|\mathbf{r}^0|$ távolokban közönségesen igen kicsiny legyen, $t^0 = \mathbf{r}^0 w^0$ teszem. Ezzel τ invariáns volta nem csorbul meg (VII. 23.). Szerinte

$$t = w^0 r^0 + \int_0^{\tau} k d\tau, \quad \left(k = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2} \right). \quad (136)_2$$

Mint ahogy pedig

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = \frac{dk}{d\tau} = \frac{1}{k} \frac{dx}{d\tau} \frac{d^2 r}{d\tau^2} = \dot{i} \frac{d^2 r}{d\tau^2},$$

ennélfogva (135) értelmében

$$\left(\frac{d^2 r}{d\tau^2}, \dot{i} \frac{d^2 r}{d\tau^2} \right) \sim (r, t). \quad (137)$$

2. Másfelől, ha a testelemnek a ∂t időelemben valamely lehetséges elmozdulása ∂r , akkor a virtuális elmozdulását

$$\delta r \equiv \partial r - \dot{i} \partial t \quad (138)$$

kifejezéssel definiálom. Mint ahogy

$$(\partial r, \partial t) \sim (r, t), \quad (138)_0$$

ennélfogva (73) szerint

$$(\delta r) \sim (r - \dot{i} t). \quad (138)_1$$

3. A (137) és (138) következtében (77) szerint

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} \delta r = \text{Inv.} \quad (139)$$

Ha pedig a testelem tömegét $Dm (= \text{Inv.})$ jelöli s a reá ható szabad erő $\mathfrak{R}Dm$, akkor abban a föltevésben, hogy \mathfrak{R} transformatiója olyan, mint $d^2 r$ transformatiója, azaz, hogy

$$(\mathfrak{R}, \dot{i}\mathfrak{R}) \sim (r, t), \quad (140)_0$$

a (139) módjára ugyancsak

$$\mathfrak{R} \delta r = \text{Inv.} \quad (140)$$

Már most egy materiális rendszerben az S összegelést egy test elemi részeire s a \sum összegelést a különböző testekre vonatkoztatva

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum S \left(\frac{d^2 r}{d\tau^2} - \mathfrak{R} \right) \delta r \cdot Dm \right] d\tau \geq 0 \quad (141)$$



kinálkozik (a közönséges mechanika útmutatása szerint) a virtuális munka törvénye gyanánt, azzal a hozzáadással, hogy az S és Σ összegezésben minden tag ugyanazon τ pillanatban gondolandó. E mellett a virtuális kényszer oly tág értelemben gondolandó, hogy a surlódási kényszert is magában foglalja.

4. A következőkben mindig az oly $\partial t (=k\partial\tau)$ időelemekben lehetséges ∂r elemi elmozdulásokat hasonlítom össze, a mely ∂t időelemek rendén

$$k(\partial t - \dot{r}\partial r) = d\tau. \quad (142)$$

Ez az összehasonlítás lehetséges, mert (142) baloldala invariáns (mint $d\tau$) (85), (138)_o, (67) és egyezésben van a $dt = k d\tau$ vonatkozással, mert

$$k(dt - \dot{r}dr) \equiv \frac{dt}{k} = d\tau. \quad (143)$$

Azt írván pedig, hogy

$$\partial t - dt \equiv \delta t,$$

a (142)-ből és (143)-ból

$$\delta t = \dot{r}(\partial r - dr) \equiv \dot{r} \{ \partial r - \dot{r}\partial t + \dot{r}(\partial t - dt) \},$$

tehát (138)-at is figyelembe véve:

$$\delta t \equiv \partial t - dt = k^2(\dot{r}\partial r). \quad (144)$$

Másfelől, (138)-ból

$$\partial r \equiv \partial r - dr - \dot{r}(\partial t - dt)$$

lévén:

$$\begin{aligned} \partial r &\equiv \partial r - \dot{r}\partial t = \partial r - dr - (\dot{r}(\partial r - dr))\dot{r}, \\ \partial r - dr &= \partial r + k^2(\dot{r}\partial r)\dot{r}. \end{aligned} \quad (145)$$

5. Midőn a virtuális kényszerek kifejezéseiben (egyenletek, egyenlőtlenségek a virtuális elmozdulások között) a virtuális elmozdulások componenseinek deriváltjai fordulnak elő, akkor azon kifejezések multiplicatoros összefoglalása után partiális időbeli és térbeli integrációkat kell végezni. E végből figyelembe veendő, hogy a virtuális munka egyenletében (141)-ben meghatározásunk rendén a materiális pontok helyeinek egyidejűsége a τ időszámítás szerint való. Ennélfogva a kényszerkifejezések-

ben is a τ szerint számítandó az egyidejűség és a VII. szakasz 22. pontjának értelmében térelem gyanánt DV_{τ} használandó.

A következők a relativitás elvén a legegyszerűbb kényszererek definitióját tartalmazzák, ú. m. a merevség, surlódástalan izotrop folyékonyság, surlódástalan izotrop rugalmasság, surlódástalan érintkezés kényszerének a definitióját.

XII. Merev test.

1. Merevnek mondok egy testet, ha van olyan téridőrendszer (\tilde{r}, \tilde{t}) , a melyben a τ időszámítás szerint a közönséges mechanika értelmében való merev test az, úgy hogy ha a test két pontja τ pillanatban \tilde{r}_1, \tilde{r}_2 helyen van, akkor

$$(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1)^2 \text{ változhatatlan.} \quad (146)$$

Mindjárt ki fog tűnni, hogy ez a meghatározás egyezésben van a viszonosság törvényével. Ha ugyanis olyan az (r, t) téridőrendszer, hogy benne az (\tilde{r}, \tilde{t}) teridőrendszer a τ időszámítás értelmében

$$\frac{w_0}{\sqrt{1-w_0^2}} \equiv x_0 w_0 \quad (147)$$

állandó sebességgel haladó mozgásban van és az origója $t=0$ pillanatban egybeesett az (\tilde{r}, \tilde{t}) rendszer origójával, akkor (136)₂ és (66) szerint

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= r - (n_0 r - t) x_0 w_0, & \left(n_0 \equiv \frac{x_0 w_0}{x_0 + 1} \right) \\ \tilde{t} &= x_0 (t - w_0 r). \end{aligned} \quad (148)$$

Ezek elsejéből

$$\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1 = r_2 - r_1 - (n_0 r_2 - n_0 r_1 - t_2 + t_1) x_0 w_0. \quad (149)$$

Azonban $(r_2 r_1, t_2 - t_1) \sim (r, t)$, tehát (149) jobboldalának a négyzete (71)-ből láthatóan invariáns a LORENTZ-féle transzformációban:

$$\{r_2 - r_1 - (n_0 r_2 - n_0 r_1 - t_2 + t_1) x_0 w_0\}^2 = \text{Inv.} \quad (150)$$

Az a követelés tehát, hogy (150) az (r, t) rendszerben változhatatlan legyen, a viszonosság törvényével összefér. Ha pedig az előforduló sebességek (a melyek mindig a fénysebességhez

viszonyítvák) kicsinyek, akkor (136)₂-ből folyólag a (149) másodrendű kicsinyben különbözik $r_2 - r_1$ négyzetétől, tehát a merevségnek (150)-hoz fűződő definíciója másodrendű kicsinyenyl tér el a közönséges mechanika definíciójától.

2. Ha ∂t_2 időelemben az r_2 pont lehetséges elmozdulása (142) értelmében ∂r_2 és ∂t_1 időelemben az r_1 pont lehetséges elmozdulása (142) értelmében ∂r_1 , akkor a $d\tau$ időelemre szóló differenciálással, (150) változhatatlanságánál fogva

$$\begin{cases} r_2 - r_1 - (n_0 r_2 - n_0 r_1 - t_2 + t_1) x_0 w_0 \\ \partial r_2 - \partial r_1 - (n_0 \partial r_2 - n_0 \partial r_1 - \partial t_2 + \partial t_1) x_0 w_0 \end{cases} = 0. \quad (151)$$

Származásánál fogva ennek a baloldala is invariáns a LORENTZ-féle transzformációban, de (71)-ből is látható, hogy invariáns. A (149) alapján rövidebben írva:

$$(\tilde{r}_2 - \tilde{r}_1) (\partial \tilde{r}_2 - \partial \tilde{r}_1) = 0. \quad (151)_1$$

Ezen egyenlet paramétrumos megoldása pedig

$$\partial \tilde{r} = \partial \tilde{u} + [\tilde{r} \partial \tilde{u}], \quad (151)_2$$

a hol $\partial \tilde{u}$ és $\partial \tilde{u}$ csupán a τ időtől függő parametrumok, különben a test belsejében tetszésszerű vectorok, és ha szabad a test, akkor a határán is. Hogy a τ idő függvényei gyanánt jelentkeznek, az szükségképen következik abból, hogy már (146)-ban a test pontjainak a helyei a τ időszámítás értelmében egyidejűek.

Azonban (148)-ból

$$\begin{aligned} \partial \tilde{r} - (n_0 \partial \tilde{r}) w_0 &= \partial r - w_0 \partial t, \\ [\tilde{r} \partial \tilde{u}] - (n_0 [\tilde{r} \partial \tilde{u}]) w_0 &= \left[(r - l x_0 w_0) \frac{\partial \tilde{u} + (n_0 \partial \tilde{u}) x_0 w_0}{x_0} \right]. \end{aligned}$$

Ha tehát azt írjuk, hogy

$$\begin{aligned} \partial \tilde{u} - (n_0 \partial \tilde{u}) w_0 &\equiv \partial u, \\ \partial \tilde{u} + (n_0 \partial \tilde{u}) x_0 w_0 &\equiv x_0 \partial u, \end{aligned}$$

akkor (151)₂ kifejtett alakja gyanánt ezt kapjuk:

$$\partial r - w_0 \partial t = \partial u + [(r - l x_0 w_0) \partial u], \quad (152)$$

a hol (148) és (136)₂, illetőleg (142) értelmében:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= x_0(t - w_0 r) = x_0 \left(\int_0^r k dt \tau + w_0 r^0 - w_0 r \right) (= \text{Inv.}), \\ \partial t &= (\dot{r} \partial r) + \frac{dr}{k}. \end{aligned} \quad (152)_1$$

3. Minthogy (73) szerint $(\partial r - w_0 \partial t) \sim (r - w_0 t)$ és a \bar{t} kifejezése (85) meg (67) szerint invariáns, (73) és (67)₁ szerint

$$(r - \bar{t} x_0 w_0, t - \bar{t} x_0) \equiv (r - \bar{t} x_0 w_0, w_0 (r - \bar{t} x_0 w_0)) \sim (r, t).$$

Ebből és abból, hogy $(\partial r - w_0 \partial t) \sim (r - w_0 t)$, könnyen megállapítható már a (152) alatt ∂a és ∂u transformatiója. Még pedig az következik, hogy

$$(\partial a) \sim (r - w_0 t), \quad (x_0 \partial u, x_0 w_0 \partial u) \sim (r, t). \quad (152)_3$$

4. A tényleges mozgásra az következik (152) alól, hogy

$$dr - w_0 dt \equiv (\dot{r} - w_0) dt \equiv \left(\frac{dr}{d\tau} - k w_0 \right) d\tau = da + [r - \bar{t} x_0 w_0] du, \quad (153)$$

a hol a da és du vectorok a τ időtől függő paraméterumok.

A virtuális elmozdulásokra pedig (152) és (153) különbségén (144) és (145) alkalmazásával azt kapjuk, hogy ha

$$\partial a - da \equiv \delta a, \quad \partial u - du = \delta u$$

írjuk, akkor

$$\partial r + \left(\frac{dr}{d\tau} - k w_0 \right) \left(\frac{dr}{d\tau} \partial r \right) = \delta a + [(r - \bar{t} x_0 w_0) \delta u], \quad (154)$$

a hol a δa és δu vectorok τ függvényei. Minthogy pedig (153)-ban a da és du szükségképen úgy transformálódik, mint (152)-ben a ∂a és ∂u , vagyis (152)₃ módjára transformálódik, ennél fogva $\partial a - da$ és $\partial u - du$, azaz δa és δu szintén úgy transformálódik, mert a (152)₃ lineáris homogén transformatiókat jelent.

XIII. Esményi folyós test.

Minthogy

$$(\partial r, \partial t) \sim (r, t),$$

következőleg (109) nyomán

$$\frac{\partial}{\partial t}(\partial t) + \operatorname{div}(\partial r) = \operatorname{Inv}. \quad (153)$$

Fölteszem, hogy a (142) alatt

$$k(\partial t - \dot{r}\partial r) = d\tau \quad (154)$$

rendén gondolandó $d\tau$ időelemben mint a helytől független időelemben minden olyan kizavarások lehetségesek a testben, hogy a (153) alatt írt invariáns, ú. m.:

$$\frac{1}{k} \frac{d}{d\tau}(\partial t) - \dot{r} \operatorname{grad}(\partial t) + \operatorname{div}(\partial r) \quad (155)$$

azzal, hogy $\partial t = dt$, $\partial r = dr$ teszszük, nem változik meg. Írjuk fel a tényleges mozgásra is, azután vonjuk ki (155)-ből a tényleges mozgásra szóló kifejezést. A (144) és (145) alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{d(k^2 \dot{r} \partial r)}{k d\tau} + k^2(\dot{r} \partial r) \operatorname{div} \dot{r} + \operatorname{div} \partial r = 0. \quad (156)$$

Eszményi folyós testen olyan testet értek, a melynek a belseje alávethető a (156)-tól megengedett virtuális kizavarásoknak.

XIV. Eszményi rugalmas test.

1. Ugyanazon τ egyéni időben tekintve egy «rugalmas» test elemi részeit is, (136)₂ alól

$$t = r^0 w^0 + \int_0^{\tau} k d\tau.$$

Másfelől képzeljünk egy merev pontrendszert (XII. értelmében), a melyet a rugalmas test törzsének nevezzünk és ennek az összes pontjait szintén a τ pillanatban tekintve, egy pontjának a helye r_m legyen a megfelelő t_m pillanatban, úgy hogy

$$t_m = r_m^0 w_m^0 + \int_0^{\tau} k_m d\tau.$$

A rugalmas test egy pontjának a helyét r jelentvén, írjuk, hogy

$$r = r_m + \check{r}. \quad (157)$$

Fölteszem, hogy minden r -hez tartozik olyan r_m , hogy

$$r^0 = r_m^0, \quad w^0 = w_m^0 \quad (157)_1$$

és hogy \check{r} , valamint $d\check{r} : d\tau$ is végtelen kicsiny.

A (157)₁-nél fogva

$$t - t_m = \int_0^{\check{r}} (k - k_m) d\tau.$$

Ámde

$$k - k_m \equiv \frac{k^2 - k_m^2}{k + k_m} = 2 \frac{dx_m}{d\tau} \frac{d\check{r}}{d\tau} : 2k_m = \frac{dx_m}{dt_m} \frac{d\check{r}}{d\tau}.$$

Arra az esetre szorítkozom, hogy a merev törzs csak haladó mozgást végezhet az (r, t) téridőrendszerben, és pedig csak állandó sebességgel valót végezhet valamely kényszerviszonyok következtében, mihez képest

$$\frac{dx_m}{dt_m} \equiv w_0 = \text{const.} \quad (157)_2$$

és más nem is lehet. E szerint és az előbbi meghatározás szerint

$$t - t_m = w_0 \check{r}. \quad (157)_3$$

Ebből kifejlik \check{r} transzformatiója: minthogy $(r_m, t_m) \sim (r, t)$, akkor $(r - r_m, t - t_m) \sim (r, t)$, tehát

$$(\check{r}, w_0 \check{r}) \sim (r, t). \quad (158)$$

A mi \check{r} lehetséges elemi megváltozásának, $\partial\check{r}$ -nek a transzformatióját illeti, kitűnik (158)-ből, hogy ugyancsak

$$(\partial\check{r}, w_0 \partial\check{r}) \sim (r, t). \quad (159)$$

De $\partial\check{r}$ kifejezhető úgy is, mint r virtuális megváltozásának, ∂r -nek a vonalas homogén függvénye. Ugyanis

$$\partial\check{r} \equiv \partial r - \partial r_m \equiv (\partial r - \check{r} \partial t) + (\check{r} \partial t - \partial r_m).$$

Azonban a merev törzsben ∂r_m csak $= dx_m = w_0 dt$ lehet, tehát

$$\partial\check{r} \equiv (\partial r - \check{r} \partial t) + w_0 (\partial t - dt) + \check{r} \partial t.$$

A (144) és (145) alkalmazásával és másodrendű végtelen kicsinyek elhanyagolásával

$$\begin{aligned} \partial\check{r} &= \partial r + k_0^2 (w_0 \partial r) w_0, & (k_0 \equiv 1 : \sqrt{1-w_0^2}) \\ \partial r &= \partial\check{r} - (w_0 \partial\check{r}) w_0. \end{aligned} \quad (160)$$

Ha pedig

$$\check{r} - (w_0 \check{r}) w_0 \equiv \check{r} \quad (161)$$

írjuk, akkor (158)-ból folyólag (73) szerint

$$(\check{r}) \sim (r - w_0 t), \quad (162)$$

valamint (160) nyomán (161) és (162) rendén

$$(\partial r) = (\partial\check{r} - (w_0 \partial\check{r}) w_0) \sim (r - w_0 t), \quad (163)$$

amikor különben (138)-ból is következik a miatt, hogy $\check{r} - w_0 = \check{r}$ a föltevés szerint végtelen kicsiny. Vegyük még figyelembe, hogy (162)-ből, illetőleg (163)-ból (85) és (83) értelmében

$$(k_0 [w_0 \check{r}], k_0 \check{r}) \sim (k_0 [w_0 \partial r], k_0 \partial r) \sim (r_{12}, t_{12}) \quad (164)$$

következik.

2. Ezek előrebocsátása után vegyük számba, hogy (164) és (107) meg (80) folytán

$$\left(\text{rot } k_0 \check{r} - \frac{\partial k_0 [\check{r} w_0]}{\partial t}, \text{div } k_0 [\check{r} w_0] \right) \sim (r, t),$$

tehát (67) szerint

$$I_1 \equiv \left(\text{rot } k_0 \check{r} - \frac{\partial k_0 [\check{r} w_0]}{\partial t} \right)^2 - (\text{div } k_0 [\check{r} w_0])^2 = \text{Inv.} \quad (165)_1$$

Másfelől (158) és (106), illetőleg (109) értelmében

$$\begin{aligned} I_2 \equiv \sum_p^{x, y, z} \left\{ \left(\frac{\partial \check{r}}{\partial p} \right)^2 - \left(\frac{\partial (w_0 \check{r})}{\partial p} \right)^2 \right\} - \\ - \left\{ \left(\frac{\partial \check{r}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial (w_0 \check{r})}{\partial t} \right)^2 \right\} = \text{Inv.}, \end{aligned} \quad (165)_2$$

$$I_3 \equiv \left\{ \frac{\partial (w_0 \check{r})}{\partial t} + \text{div } \check{r} \right\}^2 = \text{Inv.} \quad (165)_3$$

Olyan kényszert rovak ki a test belső pontjaira, hogy invariáns H és K constansok szerint a test belsejében

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{S(HI_1 - 2HI_2 + KI_3) Dm\} d\tau = \text{const},$$

legyen, azaz minden lehetséges \check{r} -hez ugyanaz legyen az értéke. Akkor

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{S(H\partial I_1 - 2H\partial I_2 + K\partial I_3) Dm\} d\tau = 0 \quad (166)$$

oly módon határozza meg az ideális rugalmas test kényszerét, hogy, ha csak igen kis sebességek fordulnak elő (t. i. a fénysebességhez mérten), akkor másodrendű kis eltérésekkel a közönséges mechanika klasszikus rugalmassági egyenletei kerülnek elő (166) alapján, illetőleg (160) segítségével (166) mint virtuális kényszer alapján.

XV. Érintkezési kényszer.

1. Két test érintkezési rétegében a τ invariáns időszámítás szerint egyidejű pontokkal gondolt materiális fölületen O pontból két szomszédos pontba nyuló materiális elemi vectorok legyenek Dr_I és Dr_{II} s az O ponthoz τ pillanatban a t időszámítás szerint t pillanat tartozzék. A Dr_I és Dr_{II} vector tangentiális irányú. Azt irván pedig a VII. czikk 20. pontjának értelmében, hogy

$$Dr_I \text{ grad } t \equiv Dt_I, \quad Dr_{II} \text{ grad } t \equiv Dt_{II}, \quad (167)$$

a két elemi vector transformatióját (89) módjára

$$(Dr_I, Dt_I) \sim (Dr_{II}, Dt_{II}) \sim (r, t) \quad (168)$$

határozza meg. Következöleg (79) és (80) alapján

$$([Dr_{II} Dr_I], Dt_I Dr_{II} - Dt_{II} Dr_I) \sim (t_{12}, r_{12}). \quad (169)$$

Ha továbbá az O pontnak mint az egyik testhez tartozónak a sebessége \check{r}_1 és mint a másikkhoz tartozónak \check{r}_2 a sebessége a t időszámítás szerint és

$$1 : \sqrt{1 - \dot{r}_1^2} \equiv k_1, \quad 1 : \sqrt{1 - \dot{r}_2^2} \equiv k_2, \quad (170)$$

akkor a τ közös időszámítás szerint $k_1 \dot{r}_1$ és $k_2 \dot{r}_2$ jelenti az O helyen a sebességeket. A virtuális elmozdulásokat pedig O helyen az egyik testben δr_1 a másikban δr_2 jelentvén, (138), (85), (83), (80) és (81) alapján

$$(k_2 \delta r_2 - k_1 \delta r_1, k_2 [\dot{r}_2 \delta r_2] - k_1 [\dot{r}_1 \delta r_1]) \sim (t_{12}, r_{12}). \quad (171)$$

2. Azt követelvén már most, hogy

$$[Dr_{II} Dr_I] (k_2 \delta r_2 - k_1 \delta r_1) - (Dt_I Dr_{II} - Dt_{II} Dr_I) (k_2 [\dot{r}_2 \delta r_2] - k_1 [\dot{r}_1 \delta r_1]) \geq 0 \quad (172)$$

legyen, ezen egyenlőtlenség baloldala (169), (171) és (81) értelmében invariáns a LORENTZ-féle transformatióban.

Abban a föltevésben tehát, hogy a két érintkező test nem hatolhat egymásba, de nem is surlódik, és azon rendelkezéssel, hogy a normális irányú $[Dr_{II} Dr_I]$ vector az 1 indexes testből a 2 indexesbe mutasson, ezen egyenlőtlenség a viszonyosság törvényével egyezően tekinthető az érintkezés virtuális kényszerének. Ha pedig az 1 indexes test merev és virtuálisan nem mozgatható (úgy hogy reá alkalmazván a (154)-et, $\delta a = 0$, $\delta u = 0$), akkor a másik test vele való érintkezésének a virtuális kényszerét a viszonyosság törvényével megférően

$$[Dr_{II} Dr_I] k_2 \delta r_2 - (Dt_I Dr_{II} - Dt_{II} Dr_I) k_2 [\dot{r}_2 \delta r_2] \geq 0 \quad (173)$$

fejezi ki.

Átosztván egyenlőtlenségeinket a (81) szerint invariáns

$$[Dr_{II} Dr_I]^2 - (Dt_I Dr_{II} - Dt_{II} Dr_I)^2$$

scaláris pozitív négyzetgyökével, baloldalaik invariánsok maradnak és együtthatóik véges nagygyá válnak.