

## EINSTEIN-FÉLE GRAVITATIO RÉGI ELMÉLETBŐL.

FARKAS GYULA r. tagtól.

Régi elméleten itt a speciális relativitás elméletét értem, a melyből egy eredete szerint még régibb elv, az inertia-erők virtualis munkájának az elve alapján az egytestproblemát szándékozom kifejteni.

Ebből az elvből indulva, a négy méretű siktérben egy pontnak egy háromméretű forgásfelületre utalt kényszermozgása olyan alakban állítható elő és azután a forgásfelületnek egyszerű phænomenologiai föltevésével olyan alak tulajdonítható, hogy az előkerült geodæsiai mozgásnak a mi mindenkori háromméretű empirikus terünkbe tartozó komponense épen az EINSTEIN-féle gravitációnak felel meg. Az erre alkalmas speciális felületek seregével megadott kényszer definiálja a négy méretű térben a physikai tér-állapotot.

1. *Jelölések.* Egy pont négy derékszögű koordinátáját  $x, y, z, s$  jelölje a négy méretű siktérben. Ezek sorában a három első jelentse a pontnak a mi mindenkori háromméretű empirikus terünkben lévő koordinátáit. Az  $x, y, z$  komponensű vektort röviden  $w$ -vel jelöljük:  $w \equiv (x, y, z)$ , ennek a nagyságát pedig  $r$ -rel:  $\text{abs } w \equiv r$ . A mi empirikus  $x, y, z$ -terünk egyméretű normálisán imaginarius időkoordinátát jelentsen  $s$ , tehát  $s_i s_j \leq 0$ , minél fogva a LORENTZ-transzformációban

$$w_i w_j + s_i s_j \equiv x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j + s_i s_j = \text{inv.}$$

Tekintsük  $n$  számú tömegpont független rendszerét az  $m_1, \dots, m_n$  invariáns és állandó („nyugalmi») tömegekkel a  $w_1, s_1; \dots; w_n, s_n$  változtatható helyeken. A  $(w_1, s_1), \dots, (w_n, s_n)$  négyes vektorokat egy és ugyanannak a  $\theta$  skalárisnak, mint in-

varians valós időparaméternek a függvényeként számítsuk. Minden a  $\theta$  paramétértől függő mennyiségnek a  $\theta$  szerint képezett totális deriváltjait jelöljük a mennyiség fölé irt pontokkal, például az  $(m_i)$  tömegpontnak a «sebességét» és «gyorsulását» a  $\theta$  időparaméter értelmében  $(\dot{w}_i, \dot{s}_i)$ , illetőleg  $(\ddot{w}_i, \ddot{s}_i)$  alakban írjuk:

$$\frac{d}{d\theta}(w_i, s_i) \equiv (\dot{w}_i, \dot{s}_i), \quad \frac{d^2}{d\theta^2}(w_i, s_i) \equiv (\ddot{w}_i, \ddot{s}_i);$$

és írjuk a  $w_i$  nagyságára,  $r_i$ -re vonatkozóan

$$\frac{dr_i}{d\theta} \equiv \dot{r}_i = \frac{w_i \dot{w}_i}{r_i}, \quad (r_i^2 \equiv w_i^2 \equiv x_i^2 + y_i^2 + z_i^2);$$

$$\frac{d^2 r_i}{d\theta^2} \equiv \ddot{r}_i = \frac{d}{d\theta} \frac{w_i \dot{w}_i}{r_i} = \frac{w_i \ddot{w}_i + \dot{w}_i^2}{r_i} - \frac{w_i \dot{w}_i}{r_i^2} \dot{r}_i = \frac{w_i \ddot{w}_i + \dot{w}_i^2 - \dot{r}_i^2}{r_i}.$$

2. Az *inertia-erők virtuális munkájának elve a négyméretű síktérben* tömegpontok független rendszeréről azt állítja, hogy a négyes tengelyrendszernek és a  $(w_1, s_1)$  stb. négyes vektorok  $\theta$  paraméterének a megválasztása lehet olyszerű, hogy a  $-m_1(\ddot{w}_1, \ddot{s}_1)$  stb. négyes inertia-erőknek mindig minden virtuális munkája eltűnik:

$$\sum_1^n m_i (\ddot{w}_i \delta w_i + \ddot{s}_i \delta s_i) = 0,$$

a hol  $(\delta w_1, \delta s_1)$  stb. képviselik a közös  $\theta$  közös  $d\theta$  megváltozásához az összes virtuális elmozdulásokat (a melyeken a lehetséges és a tényleges elemi elmozdulások különbségei értendő).

Ezentúl két tömegpont független rendszerére szorítkozunk, még pedig azzal a kikötéssel, hogy az egyiknek a tömege igen nagy legyen a másiknak a tömegéhez képest,  $m_1$  igen nagy az  $m_2$ -höz képest, úgy hogy  $m_2$  az  $m_1$  mellett ne tegyen számot. *Felteszünk, hogy ez esetben egy oly négyes tengelyrendszerben, amelyben az  $(m_1)$  tömegpont állandó négyes sebességgel mozog, igen pontosan áll a két pont rendszerére elvi egyenletünk:*

$$m_1 (\ddot{w}_1 \delta w_1 + \ddot{s}_1 \delta s_1) + m_2 (\ddot{w}_2 \delta w_2 + \ddot{s}_2 \delta s_2) = 0.$$

A *physikai térállapot hatása az  $(m_2)$  tömegpontra abból álljon igen pontosan, hogy ennek a mozgása egy háromméretű*

*forogásfelületre van utalva, olyanra, a melynek a tengelye az ( $m_1$ ) tömegpont pályavonalára. Utóbbin legyen az origo.*

Ezek szerint a tengelyrendszer megválasztására a következő invariáns követelésünk van (t. i. invariáns a LORENTZ-transzformációban):

$$(\dot{w}_1, \dot{s}_1) = \text{const.}$$

Van továbbá az invariáns

$$\dot{w}_1 w_2 + \dot{s}_1 s_2 = \varphi(w_2^2 + s_2^2)$$

kényszeregyenletünk valamely invariáns alakú  $\varphi$  függvény szerint, az ( $m_2$ ) tömegpont mozgására.

Egyszerűsítésül az  $s$ -ek tengelyét az ( $m_1$ ) tömegpont pályavonalába helyeztük legyen, tehát

$$w_1 = 0, \dot{s}_1 = \text{const}; \quad (1)$$

a kettes indexet pedig mellőzzük:

$$m_2 \equiv m, \quad w_2 \equiv w, \quad s_2 \equiv s.$$

Most kényszeregyenletünk ebbe rudukálódik:

$$\dot{s}_1 s = \varphi(w^2 + s^2),$$

minélfogva  $s$  a  $w$  nagyságának  $r$ -nek a függvényeként teszi a kényszerfeltételt:

$$s = \psi(r). \quad (2)$$

Elvi egyenletünk ezekben az alakokban jelentkezik már most:

$$\begin{aligned} \ddot{w} \delta w + \ddot{s} \delta s &\equiv \ddot{w} \delta w + \ddot{\psi} \psi' \delta r \equiv \ddot{w} \delta w + \ddot{\psi} \psi' \frac{w \delta w}{r} \equiv \\ &\equiv \left( \ddot{w} + \ddot{\psi} \psi' \frac{w}{r} \right) \delta w = 0, \quad \left( \psi' \equiv \frac{d\psi}{dr} \right). \end{aligned}$$

Mint hogy  $\delta w$  szabadon adható, innen a

$$\ddot{w} + \ddot{\psi} \psi' \frac{w}{r} = 0 \quad (3)$$

mozgásegyenletünk van.

3. A  $\theta$  időparaméter mint az ( $m$ ) tömegpont Minkowski-féle egyéni időjelzője. A (3) előtt irt elvi egyenlet a tényleges elemi el-

mozdulásokra alkalmazva:  $\ddot{w}dw + \dot{s}ds = 0$ , tehát  $\dot{w}^2 + \dot{s}^2 = \text{const}$ . Ezt az állandót egyszersmindenkorra negatívnak tegyük meg (ami módunkban áll, mert  $\dot{s}^2 \leq 0$ ). Ezáltal specziálisan MINKOWSKI második «axiomája» teljesül. Minthogy pedig elvi egyenletünk  $k\theta$  paraméterrel is érvényes, ha  $\theta$  paraméterrel érvényes és ha  $k$  állandó, onnélfogva  $\theta$  megválasztható úgy, hogy ama negatív integrációs állandónk a negatív egység legyen, tehát hogy legyen:

$$\dot{w}^2 + \dot{s}^2 \equiv \dot{w}^2 + \phi'^2 \dot{r}^2 = -1. \quad (4)$$

A (3) mozgásegyenlet részletes kifejtése végezt felhasználjuk ezt az egyenletet, de felhasználjuk a (3) többi első integrálját is. Az utóbbiakat a (3)-nak  $w$  vektorral való vektori szorzata szolgáltatja, vagyis a  $[w\ddot{w}] = 0$  egyenlet, amelyből valamely a állandó három komponensű vektor szerint  $[w\ddot{w}] = a$ . Ezt négyzeteléssel alkalmazzuk:

$$[w\ddot{w}]^2 \equiv w^2 \ddot{w}^2 - (w\ddot{w})^2 \equiv (\dot{w}^2 - \dot{r}^2) r^2 = a^2. \quad (5)$$

E két egyenletből ugyanis a területi sebesség és  $r$  hányadosára meg az  $\dot{r}$ -ra

$$\dot{w}^2 - \dot{r}^2 = \left(\frac{a}{r}\right)^2, \quad \dot{r}^2 = -\frac{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2}{1 + \phi'^2} \quad (6)$$

kifejezéseink vannak, mint  $r$  függvényeire.

4. A mozgásegyenlet kifejtése. A (3) alatt előforduló  $\ddot{\phi}$  deriváltat lépésről-lépésre ezekben az alakokban kapjuk:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} &\equiv \frac{d(\phi'\dot{r})}{d\theta} \equiv \phi''\dot{r}^2 + \phi' \frac{d}{d\theta} \frac{w\dot{w}}{r} \equiv \phi''\dot{r}^2 + \phi' \left( \frac{w\ddot{w} + \dot{w}^2}{r} - \frac{w\dot{w}}{r^2} \dot{r} \right) \equiv \\ &\equiv \phi''\dot{r}^2 + \phi' \frac{w\ddot{w} + \dot{w}^2 - \dot{r}^2}{r}. \end{aligned}$$

E szerint a (3) alól a  $\ddot{w}$  gyorsulás kifejezése ezt az alakot ölti:

$$\ddot{w} = - \left( \phi' \phi'' \dot{r}^2 + \phi'^2 \frac{w\ddot{w} + \dot{w}^2 - \dot{r}^2}{r} \right) \frac{w}{r}.$$

Hogy innen a jobboldalon lévő  $w\ddot{w}$  skaláris szorzatot eliminálhassuk, szorozzuk át skaláris módon a  $w$  vektorral:

$$w\ddot{w} = - \left( \phi' \phi'' \dot{r}^2 + \phi'^2 \frac{w\ddot{w} + \dot{w}^2 - \dot{r}^2}{r} \right) r,$$

tehát

$$\frac{w\ddot{w}}{r} = - \frac{\phi' \phi'' \dot{r}^2 + \phi'^2 \frac{\dot{w}^2 - \dot{r}^2}{r}}{1 + \phi'^2}.$$

Beírva ezt  $\ddot{w}$  kifejezésébe:

$$\ddot{w} = - \left( \frac{\phi' \phi''}{1 + \phi'^2} \dot{r}^2 + \frac{\phi'^2}{1 + \phi'^2} \cdot \frac{\dot{w}^2 - \dot{r}^2}{r} \right) \frac{w}{r}$$

Vezessük be ide (6) alól  $\dot{r}^2$  és  $\dot{w}^2 - \dot{r}^2$  kifejezését és kapjuk:

$$\ddot{w} = - \left\{ \frac{-\phi' \phi''}{(1 + \phi'^2)^2} + \frac{\alpha^2}{r^3} \left( \frac{\phi'^2}{1 + \phi'^2} - \frac{r \phi' \phi''}{(1 + \phi'^2)^2} \right) \right\} \cdot \frac{w}{r}. \quad (7)$$

5. *Phaenomenologiai föltevés a térállapot szorosabb meghatározására. Egyezés az EINSTEIN-féle gravitációval.* Azzal a feltevéssel legyen megszorítva  $\phi$ -nek (tehát egyben  $s$ -nek) az  $r$ -től való függése, hogy a gyorsulás (7) alatti kifejezésében az a területi sebességtől független összetevő a NEWTON-féle gyorsulás.

Ez a feltevés nyilvánképpen igen pontosan teljesül, ha tesszük

$$\frac{-\phi' \phi''}{(1 + \phi'^2)^2} = \frac{M}{r^2};$$

a hol  $M$  az  $m_1$  (nagyobb) tömegnek a gravitációs állandóval való szorzata. Azonban általánosabban is teljesíthető a feltevésünk, nevezetesen úgy is, hogy azzal a kikötéssel tesszük

$$\frac{-\phi' \phi''}{(1 + \phi'^2)^2} = \frac{M}{r^2} + f'(r), \quad (8)$$

hogy az  $f$  függvény essék ki a gyorsulás (7) alatt írt kifejezéséből. Ezt a meghatározást quadratura alá vetvén, de az integrációs állandót félegység híján az  $f$  függvénybe számítván:

$$\frac{1}{1 + \phi'^2} = - \frac{2M}{r} + 2f(r) + 1, \quad (8_1)$$

tehát egyszersmind

$$\frac{\phi'^2}{1 + \phi'^2} = \frac{2M}{r} - 2f(r). \quad (8_2)$$

A (7)-ben történt helyettesítésekkel és erre az  $f$ -et tartalmazó résznek 0-sal egyenlítése után, a következő alakban nyerjük a  $\ddot{w}$  gyorsulást:

$$\ddot{w} = - \frac{Mw}{r^3} \left( 1 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (9)$$

Az  $f$ -re háramló egyenlet pedig így írható:

$$\left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) f'(r) = 2 \frac{a^2}{r^3} f(r),$$

a melyből

$$f(r) = \frac{h \equiv \text{const}}{1 + \frac{a^2}{r^2}}. \quad (10)$$

EINSTEIN a Merkúr-bolygó perihelium-mozgását magyarázó emlékezetes közleményében e bolygó gyorsulására (egy nyomtatási hiba nélkül véve) a következő kifejezésekhez jutott:

$$\frac{d^2 x_\nu}{ds^2} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_\nu}, \quad \Phi = - \frac{a}{2r} \left( 1 + \frac{B^2}{r^2} \right),$$

a hol  $s$  az időparaméter,  $a$  a Nap tömegével meghatározott állandó,  $B$  a területi sebesség nagysága és  $\nu = 1, 2, 3$ .<sup>1</sup> Ha ezekben  $x_1, x_2, x_3$  helyett  $x, y, z$ ;  $s$  helyett  $\theta$ ;  $a$  helyett  $M$ ;  $B^2$  helyett  $a^2$  iratik, akkor a tartalmuk pontosan egyezik a (9) alatt előállított mozgás-egyenlettel.

6. Pótlások. a) Az energia-egyenletről. Ha a (6) alatt lévő második egyenletbe beírjuk (8<sub>1</sub>) alól  $\psi'$  értékét, akkor azt kapjuk, hogy

$$\dot{r}^2 = \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \left( \frac{2M}{r} - 2f - 1 \right).$$

Innen  $f$ -nek (10) alatt található értékével

$$\dot{r}^2 = \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{a^2}{r^2} - (2h + 1) \quad (11)$$

<sup>1</sup> EINSTEIN: «Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie» Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wissensch. 1915. II. 837. 1.

«energia-egyenletre» teszünk szert.<sup>1</sup> Ebben, mint (9) egyik első integráljában, —  $(2h+1)$  képviseli az integratiós állandót. A (8) alatt betoldott  $f'(r)$  póttagnak köszönhető, hogy ez az integratiós állandó felmerült.

b) *A térállapot meghatározásáról.* A (8<sub>1</sub>) és (10) alól

$$\frac{1}{1+\psi'^2} = -\frac{2M}{r} + \frac{2h}{1+\frac{a^2}{r^2}} + 1,$$

honnan :

$$\psi'^2 = 2 \frac{M(a^2 + r^2) - hr^3}{(r - 2M)(a^2 + r^2) + 2hr^3}. \quad (12)$$

Elliptikus integrálok határozzák meg tehát a  $\psi$  függvényt s úgy a (2) alatt kiszabott  $s = \psi(r)$  forgásfelületet, azt a háromméretű felületet, a melyre az  $(m)$  tömegpont mozgása van utalva.

A (12) quadraturájának az állandója és az  $a^2$  és  $h$  állandók változtatásával áll elő (2)-ből az a háromméretű felületsereg, a mely itt a négyméretű térben a physikai állapot jellemzésére szolgál.

c) *A gyorsulás kifejezéséről.* A gyorsulás végső kifejezésének (9)-nek egy meghatározó eleme a (9)-nek, mint differenciálegyenletnek egyik első integráljához járult integratiós állandó, az  $a^2$  állandó. Ha ezt tekintet nélkül illetén jelentményére, sőt még tekintet nélkül állandó voltára is, a maga eredeti jelentménye szerint mint (5) valamelyik baloldalát írjuk be (9)-be, akkor absolut alakban kapjuk a gyorsulás kifejezését, például

$$\ddot{w} = -\frac{Mw}{r^3} \{1 + 3(a^2 - r^2)\}. \quad (13)$$

A sebességektől függő skaláris potenciál definitiójának értelmében<sup>2</sup> ehhez a vektoralakhoz az

$$Q \equiv \frac{M}{r} (1 + u^2 - r^2)$$

<sup>1</sup> H. WEYL: «Raum-Zeit-Materie» 4. kiadásában a 233. lapon az egyezés  $m=M$ ,  $E=2h+1$ ,  $b^2=a^2$  által, a hol  $m$ ,  $E$ ,  $b^2$  az ottani betűk.

<sup>2</sup> W. VOIGT: «Kompendium der theoretischen Physik» I. 1895. 24. lap.

függvény a skaláris potential.  $\Omega$  differentiálja ugyanis a következő alakban állítható elő:

$$d\Omega = \mathfrak{R}dw, \quad \mathfrak{R} \equiv -\frac{Mw}{r^3} \{1 + 3(w^2 - \dot{r}^2)\} - \frac{2M}{r^3} [w [w\ddot{w}]].$$

Ebből ama definitio szerint  $\ddot{w} = \mathfrak{R}$ . Azonban  $\mathfrak{R}$  kifejezésén könnyen megállapítható, hogy

$$[w\mathfrak{R}] = \frac{2M}{r} [w\ddot{w}], \quad \text{minélfogva} \quad [w\ddot{w}] = \frac{2M}{r} [w\ddot{w}];$$

és így  $[w\ddot{w}] = 0$ , tehát  $\mathfrak{R}$  kifejezése (13) jobboldalával egyenlő.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1921 október 3.-án tartott üléséből.)