PÓTLÁSOK A VEKTOR-TANHOZ ÉS AZ ELEKTRO-MÁGNESSÉG TANÁHOZ.

FARKAS GYULA l. tagtól.

(Székfoglaló értekezés.)

TÁRGYMUTATÓ.

I. 1. A vektoroknak arról a parameteres kifejezéséről, a melyben egy skaláris potencziál és egy vektor-potencziál a parameterek. 2. A hely függvényének bizonyos tulajdonságai, mint egyértékűségének a föltételei. 3. A STOKES-féle integrál-tétel; bizonyos érvényességi föltételeinek analytikai megállapítása. 4. A vektoroknak arról a parameteres kifejezéséről, a melyben két skaláris potencziál és egy multiplicator a parameterek: e parameterek tetszőlegességi körének meghatározása. 5. Ugyanezen parameterek egy functionalis korlátozottságának föltüntetése. 6. A hely függvényének, mint két más függvény függvényének bizonyos végtelenségi tulajdonságáról.

II. 1. A MAXWELL-HEAVISIDE-féle egyenletek vezérmennyiségeire (elektromos erő és mágneses erő) kirovandó függvénytani tulajdonságok. 2. Ez egyenletekben a mágneses erő függvénytani viszonya az elektromos erőhöz izotrop és nyugvó közegek esetében. 3. Ugyanaz általában kristályos és mozgó közegek esetében. 4. Ugyanaz a HALL-féle jelenség tekintetbe vételével. 5. A permanens mágnességtől származó mágneses erő meghatározásáról.

III. 1. Egy általános elv kimutatása, a mely a lokális elektromotoros erő és lokális inductio kifejezéseihez vezetett. 2. Ez elvnek az eddiginél teljesebb fölhasználása. 3. Annak a kimutatása, hogy ez a teljesebb eljárás a MAXWELL-HEAVISIDE-féle egyenletek tapasztalásszerű kiegészítéséhez juttat. 4. Észrevétel a mozgó közegek elektro-mágnességi egyenleteinek fölállítására.

I. *A vektor-tanhoz.*

Clebsch kezdése óta nagy használatban vannak a vektorok számára a következő alakú kifejezések:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial O}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ Y &= \frac{\partial O}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ Z &= \frac{\partial O}{\partial z} + \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned} \tag{1}$$

valamint:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\partial F}{\partial x} + H\frac{\partial G}{\partial x} \\ Y &= \frac{\partial F}{\partial y} + H\frac{\partial G}{\partial y} \\ Z &= \frac{\partial F}{\partial z} + H\frac{\partial G}{\partial z}, \end{aligned} \tag{2}$$

a melyek minden oly tér-részben lehetségesek, a melyben az (X, Y, Z) vektor a hely (x, y, z) deriválható folytonos függvénye.*

Oly speczialisabb vektorok szembeszökő összetételei e kifejezések, a melyek önállóan is sűrűn fordulnak elő a mathematikai physikában, ú. m.:

$$(2)_{H=0} \quad \text{vagy} \quad (1)_{L=0,\, M=0,\, N=0} \tag{3}$$

$$(1)_{O=0} \tag{4}$$

$$(2)_{F=0} \tag{5}$$

és úgy tekinthetők, mint bizonyos parcziális differencziális egyenletek parameteres kifejezései. Ezek az egyenletek a következők:

---

* Clebsch, Crelle Journ. LVI. 1859. LXI. 1863.
Stokes, Trans. Cambridge 1849.
Voigt, Komp. d. th. Phys. I. 188—193. l.

$$\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=0 \qquad \text{ad (3)}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0 \qquad \text{ad (4)}$$

$$X\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+Y\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)=0 \qquad \text{ad (5)}$$

mint æquivalensek a (3), (4), (5) alatti functionalis állításokkal.

Egy különös esetben kiváló jelentőséggel bír tudni, hogy (1), (2), (3), (4), (5)-ben alkalmazhatók-e bizonyos tulajdonságú parameter-függvények (O, L, M, N, F, G, H) a vektor (X, Y, Z) megengedett általánosságának csorbítása nélkül. Mielőtt ezt a kijelentésemet részletesen meghatároznám, bevezetek egy elnevezést.

Ha egy függvény, mint a hely függvénye bír a következő tulajdonságokkal: véges, folytonos, egyértékű, deriválható az egész térben és első coordinata-deriváltjai is végesek, folytonosak, egyértékűek, deriválhatók az egész térben, továbbá a végtelenben maga a függvény legalább elsőrendűen, első coordinata-deriváltjai legalább másodrendűen eltünnek (amaz legalább úgy, mint a távolság fordított értéke, emezek legalább úgy, mint a távolság fordított értékének négyzete), akkor a függvényt Newton-féle függvénynek nevezem. A Green-féle tétel szerint az ily függvény közönséges térfogati potencziál alakjával bír.

Fontos alkalmazások tekintetéből kiváló jelentőséggel bír tudni, hogy ha X, Y, Z Newton-féle függvények, lehetnek-e az O, L, M, N illetőleg F, G, H parameterek is mindig szintén Newton-féle függvények. Abban a föltevésben ugyanis, hogy ezek a parameterek ilyen függvények, könnyű szerrel vonhatók bizonyos fontos következtetések, a melyek különben nem tehetők.

1. Az (1), (3), (4) alakokat illetően a kérdés teljesen el van intézve. Ha a következő jelöléseket használjuk:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\equiv 4\pi u,\quad \frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial x}\equiv 4\pi v,\quad \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\equiv 4\pi w, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\equiv 4\pi k, \qquad (6)$$

akkor

$$-4\pi\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial k}{\partial x}\right)\equiv \Delta X, \quad \text{stb.}$$

Következőleg, mivel X, Y, Z NEWTON-féle függvények, a GREEN-féle tétel szerint:

$$X=-\int\left(\frac{\partial k}{\partial a}+\frac{\partial w}{\partial b}-\frac{\partial v}{\partial c}\right)\frac{D\tau}{r}, \quad \text{stb.},$$

a hol $D\tau$ az a, b, c helyen lévő térelemet jelent és r ennek az x, y, z helytől való távola. Így

$$X=-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{k}{r}D\tau+\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{w}{r}D\tau-\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{v}{r}D\tau \quad \text{stb.}$$

tehát mégfelelnek:

$$O=-\int\frac{k}{r}D\tau, \quad L=\int\frac{u}{r}D\tau, \quad M=\int\frac{v}{r}D\tau, \quad N=\int\frac{w}{r}D\tau \quad (7)$$

még pedig folytonos, véges, egyértékű, deriválható k, u, v, w sűrűségszerű mennyiségekkel. A (3), illetőleg (4) alatti speczialis esetben egyszerűen $u=0$, $v=0$, $w=0$, illetőleg $k=0$ szolgáltatja az eredményben a kérdés megoldását.

Tegyük ehhez most még a következő észrevételt.

Ha k, u, v, w csak véges távolokban nem tünnek el mindenütt, úgy a (7) alatti kifejezések értelmében O, L, M, N a végtelenben legalább elsőrendűen eltűnnek, X, Y, Z legalább másodrendűen, utóbbiak első coordinata-deriváltjai legalább harmadrendűen. Feltéve pedig, hogy X, Y, Z másodrendűnél magasabb renddel tűnnek el a végtelenben, szükségképen

$$\int kD\tau=0, \quad \int uD\tau=0, \quad \int vD\tau=0, \quad \int wD\tau=0. \quad (8)$$

Ugyanis, ha a végtelenbe nyúló R vektor iránycosinusai α, β, γ, akkor a végtelenben

$$R^2X=\alpha\int kD\tau-\beta\int wD\tau+\gamma\int vD\tau, \quad \text{stb.}$$

Abban a föltevésben, hogy X, Y, Z a végtelenben másodrendűnél magasabb renddel tűnnek el, ezek a határ kifejezések minden α, β, γ iránycosinusok mellett eltűnnek, tehát megkövetelik a (8) alatti egyenleteket. Továbbá egyszersmind ugyanebben a föltevésben az O, L, M, N függvények, azaz

$$-\int \frac{k}{r} D\tau \equiv -4\pi \int \left(\frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial b} + \frac{\partial Z}{\partial c} \right) \frac{D\tau}{r},$$

$$\int \frac{u}{r} D\tau = 4\pi \int \left(\frac{\partial Z}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial c} \right) \frac{D\tau}{r}, \quad \text{stb.}$$

parcziális integrálás alkalmazásával ilyetén alakokra vezethetők:

$$\begin{aligned} O &= 4\pi \int \left(X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \right) D\tau, \\ L &= -4\pi \int \left(Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} - Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} \right) D\tau, \quad \text{stb.} \end{aligned} \tag{9}$$

2. Legyen e helyütt megjegyezve, hogy ha úgy definiálunk függvényt, mikép a NEWTON-féle függvény definitiojában a függvény egyértékűsége helyett a második deriváltak végességét követeljük, NEWTON-féle függvényt definiálunk: ha egy függvény, mint a hely függvénye a tér egy egyszeresen összefüggő részében véges, folytonos, deriválható, és első coordinata-deriváltjai végesek, folytonosak, egyértékűek, deriválhatók, második coordinata-deriváltjai végesek, már maga a függvény egyértékű is.

Ugyanis ha ψ függvény bír azokkal a tulajdonságokkal valamely egyszeresen összefüggő tér-részben, akkor ez a vonalas integrál:

$$\int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz \right)$$

bármely kétszeresen összefüggő vonalon vezetve, olyanon, a mely egészen a tér-rész belsejében van, eltűnik. Kilátszik ez abból, hogy a ψ függvény ama tulajdonságai megengedik, mikép az integrál STOKES tantétele szerint oly felületi integrállá alakíttassék, a mely a kétszeresen összefüggő vonaltól szegélyezett kétoldalú felületre terjeszkedik ki, és ennek a felületi integrálnak minden eleme eltűnik.

MAXWELL az ő nagy munkájában, az első kötet elején (19. Ar.) minden föltétel említése nélkül bizonyítja, hogy a hely függvényei a tér egyszeresen összefüggő részeiben egyértékűek. Minthogy azonban az állítás érvényessége oly föltételekhez van kötve, a melyek MAXWELL fogalmazásában implicite sem tartalmazvák, természetesen a bizonyítás helyessége sem általános. Nevezetesen megkívánja, hogy a $\psi =$ const. felületek oly vonalban ne messék egymást, a mely a számba vett egyszeresen összefüggő tér-részen áthalad.

3. A ψ függvényre, mint a hely függvényére előz szabott tulajdonságok (végesség, folytonosság, deriválhatóság, az első deriváltak végessége, folytonossága, egyértékűsége, deriválhatósága s a második deriváltak végessége) elégségesek a STOKES-féle theorema érvényes alkalmazásához. Igen világosan kitűnik ez a theoremának következő azt hiszem új levezetéséből, a mely térfogati integrálnak felületivé alakításán alapszik.

Legyen egy kétoldalú felület egyenlete $\Omega = 0$. Ennek egy egyszeresen összefüggő részét vegyük tekintetbe, a mely rész közelében az Ω a hely deriválható folytonos függvénye s deriváltjai véges folytonos, egyértékű deriválható függvények legyenek. Az Ω folytonos változtatásával a felületünkhöz sorakozó

$$\Omega = \text{const.} = DS$$

felületek nem metszik a kiválasztott felület-részt, legalább a míg a DS értéke kisebb, mint valamely igen kis DS értéke, mert Ω deriváltjai a felületrész táján végesek. Ekként azok közt a hengerfelületek közt, a melyek megválasztott felületrészünket az $\Omega = 0$ felületből kivágják, van olyan, a mely mindenütt merőlegesen metszi az $\Omega = DS$ felületeket, legalább a míg DS értéke bizonyos kicsinél kisebb. Ilyen $\Omega = DS$ felület, továbbá az $\Omega = 0$ felület, meg a merőlegesen metsző hengerfelület közt foglalt térrészt jelentsen τ, vékony térréteget. A kiválasztott felületrészt σ_0 jelölje.

Ha (ξ, η, ζ) véges, folytonos, egyértékű, deriválható, mint a hely függvénye, és első deriváltjai végesek a τ térrészben, tehát a σ_0 felületrész táján, akkor

$$\int\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial b}-\frac{\partial\eta}{\partial c}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial a}+\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}-\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial b}+\left(\frac{\partial\eta}{\partial a}-\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)\frac{\partial\Omega}{\partial c}\right]D\tau$$
$$=\int\left[\xi\left(\frac{\partial\Omega}{\partial c}\beta-\frac{\partial\Omega}{\partial b}\gamma\right)+\eta\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\gamma-\frac{\partial\Omega}{\partial c}\alpha\right)+\zeta\left(\frac{\partial\Omega}{\partial b}\alpha-\frac{\partial\Omega}{\partial a}\beta\right)\right]D\sigma$$

a hol a baloldali integrál a τ térre, a jobboldali ennek egész felületére σ terjesztendő ki; α, β, γ a $D\sigma$ felületelem befelé mutató normálisának iránycosinusai. Minthogy a τ térnek az $\Omega=0$ és $\Omega=DS$ felületén

$$\frac{\partial\Omega}{\partial a}:\frac{\partial\Omega}{\partial b}:\frac{\partial\Omega}{\partial c}=\alpha:\beta:\gamma,$$

így a felületi integrál arra a részre redukálódik, a mely a hengeres felületre szól, a vékony térréteg szegélyező felület-szalagjára. Ha most a, b, c helyen Dn a réteg vastagsága, s a mennyiben e hely a σ_0 szélén van, a σ_0 szegélyvonalának egy eleme azon a helyen $D\lambda$, elenyésző Dn-et tartva szem előtt, tehető

$$D\tau=D\sigma_0 Dn,\quad D\sigma=D\lambda Dn.$$

Számba véve azt is, hogy

$$(Dn)^2=(DS)^2:\left[\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial b}\right)^2+\left(\frac{\partial\Omega}{\partial c}\right)^2\right],$$

és $D\sigma_0$ egyik normálisának az iránycosinusait α_0, β_0, γ_0 betűkkel jelölve, integrál-egyenletünket ekkép jegyezhetjük:

$$\int\left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial b}-\frac{\partial\eta}{\partial c}\right)\alpha_0+\left(\frac{\partial\xi}{\partial c}-\frac{\partial\zeta}{\partial a}\right)\beta_0+\left(\frac{\partial\eta}{\partial a}-\frac{\partial\xi}{\partial b}\right)\gamma_0\right]D\sigma_0$$
$$=\int[\xi(\beta\gamma_0-\gamma\beta_0)+\eta(\gamma\alpha_0-\alpha\gamma_0)+\zeta(\alpha\beta_0-\beta\alpha_0)]\,D\lambda$$

a hol az első integrál a σ_0 felületre, a második ennek λ szegélyvonalára terjed ki; $\beta\gamma_0-\gamma\beta_0$ stb. a szegélyvonal egyik irányulásának az iránycosinusai, könnyen meghatározható, hogy melyiké, az α_0, β_0, γ_0 normális irányrendszerhez viszonyítva.

4. Valamelyes megismerést szerzendők a (2) és (5) alatti vektor-kifejezések parametereit F, G, H illetőleg, vizsgáljuk e függvények tetszőlegességi viszonyait.

Adott X, Y, Z függvényhez tartozó F, G, H függvény egyike legyen F_0, G_0, H_0 a (2) alatti egyenletekben. A többit f, g, h-val való additivus kiegészítés szolgáltassa:

$$F=F_0+f, \quad G=G_0+g, \quad H=H_0+h.$$

Beirván ezeket (2)-be X, Y, Z számára, és tekintetbe vévén, hogy F_0, G_0, H_0 is megfelelnek, a következő egyenletekhez jutunk, mint f, g, h egyenleteihez:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}+(h+H_0)\frac{\partial g}{\partial x}+h\frac{\partial G_0}{\partial x}&=0\\
\frac{\partial f}{\partial y}+(h+H_0)\frac{\partial g}{\partial y}+h\frac{\partial G_0}{\partial y}&=0\\
\frac{\partial f}{\partial z}+(h+H_0)\frac{\partial g}{\partial z}+h\frac{\partial G_0}{\partial z}&=0.
\end{aligned} \tag{10}$$

Ez egyenletek szerint az f, g, G_0 függvények JACOBI-féle determinansa eltűnik: f mint g és G_0 függvénye fogható fel. Következőleg egyenleteink így is irhatók:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial f}{\partial g}+h+H_0\right)\frac{\partial g}{\partial x}+\left(\frac{\partial f}{\partial G_0}+h\right)\frac{\partial G_0}{\partial x}&=0\\
\left(\frac{\partial f}{\partial g}+h+H_0\right)\frac{\partial g}{\partial y}+\left(\frac{\partial f}{\partial G_0}+h\right)\frac{\partial G_0}{\partial y}&=0\\
\left(\frac{\partial f}{\partial g}+h+H_0\right)\frac{\partial g}{\partial z}+\left(\frac{\partial f}{\partial G_0}+h\right)\frac{\partial G_0}{\partial z}&=0.
\end{aligned}$$

E szerint vagy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial g}+h+H_0&=0\\
\frac{\partial f}{\partial G_0}+h&=0
\end{aligned} \tag{11}$$

vagy pedig g és G_0 három JACOBI-féle determinansa eltűnik, tehát g és már vele együtt f is, mint G_0 függvénye fogható fel, minek rendén (10)-ből folyólag

$$\frac{df}{dG_0}+(h+H_0)\frac{dg}{dG_0}+h=0. \tag{12}$$

Megfelelően vagy

$$
\begin{aligned}
&F_0+f\equiv F=F_0'+f(g,\,G_0)\\
&G_0+g\equiv G=G_0+g\\
&H_0+h\equiv H=-\frac{\partial f}{\partial g} \qquad\qquad (11')\\
&\frac{\partial f}{\partial G_0}-\frac{\partial f}{\partial g}=H_0
\end{aligned}
$$

vagy pedig

$$
\begin{aligned}
&F_0+f\equiv F=F_0+f(G_0)\\
&G_0+g\equiv G=G_0+g(G_0)=G(G_0) \qquad\qquad (12)'\\
&H_0+h\equiv H=\left(H_0-\frac{df}{dG_0}\right):\frac{dG}{dG_0}.
\end{aligned}
$$

De a (11)' tartalmát más alakban czélszerű számba venni. A (11)' utolsó egyenlete szerint g mint G_0 és H_0 függvénye jelentkezik. Ennek következtében f és G is mint G_0 és H_0 függvénye jöhet tekintetbe. Ilyenekül használva azokat, a megfelelő infinitesimális átalakítás segélyével (11)' helyett találjuk:

$$
\begin{aligned}
&F_0+f\equiv F=F_0+f(G_0,\,H_0)\\
&G_0+g\equiv G=G(G_0,\,H_0)\\
&H_0+h\equiv H=-\frac{\partial f}{\partial H_0}:\frac{\partial G}{\partial H_0} \qquad\qquad (12)''\\
&\frac{\partial f}{\partial G_0}\frac{\partial G}{\partial H_0}-\frac{\partial f}{\partial H_0}\frac{\partial G}{\partial G_0}=H_0\frac{\partial G}{\partial H_0}.
\end{aligned}
$$

Vagy az f vagy a G (utóbbi g helyett) a G_0 és H_0 tetszőleges függvénye gyanánt választható meg itt; a másik meghatározására a negyedik egyenlet szolgál. Az előbbi (12)' kifejezésekben a G és f is a G_0 tetszőleges függvénye.

Az (5) alatti specziális kifejezést illetően ($F=0$) hasonló eljárás a következő egyetlen lehetőséghez juttat:

$$
\begin{aligned}
&G_0+g\equiv G=G(G_0)\\
&H_0+h\equiv H=H_0:\frac{dG}{dG_0}. \qquad\qquad (13)
\end{aligned}
$$

5. Ha az F, G, H parameterek által (2)-ben vagy a G, H parameterek által (5)-ben kifejezett X, Y, Z függvények NEWTON-féle függvények is, a parameterek mégsem lehetnek mindig NEWTON-féle függvények; azaz ha kikötnők, hogy (2)-ben F, G, H mindegyike NEWTON-féle függvény legyen, akkor az általuk meghatározott X, Y, Z függvények a NEWTON-félék egy osztályát képeznék csupán, és ha kikötnők, hogy (5)-ben úgy G, mint H NEWTON-féle függvény legyen, akkor az ott egyáltalán lehetséges NEWTON-féle függvények osztályát is megcsonkítanók.

Nevezetesen előfordulhat, hogy a G_0 függvénynek egyes vonalak körül cyklometrikus többértékűsége van, azaz constans különbözetű többértékűsége, és azért a

$$H_0 \frac{\partial G_0}{\partial x}, \qquad H_0 \frac{\partial G_0}{\partial y}, \qquad H_0 \frac{\partial G_0}{\partial z}$$

szorzatok mégis NEWTON-féle függvények, részint azért, mert G_0 deriváltjai már nem többértékűek, részint azért, mert a mely felületeken, vonalakon, pontokban ezek a deriváltak végtelenné válnak, ott a H_0 elég magasrendűen eltűnik, valamint a végtelenben is. Nincs könnyebb dolog, mint ilyetén G_0 és H_0 függvények összeválasztása, még pedig olyanoké is, hogy G_0 incommensurabilis constansok szerint legyen többértékű; pl. Φ-vel tetszőleges NEWTON-féle függvényt, a-val és b-vel két incommensurabilis constans értéket, n-nel pozitiv számot jelölvén:

$$G_0 = a \text{ arc sin } \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + b \text{ arc tg } \frac{y}{z}$$

$$H_0 = (x^2+y^2)(y^2+z^2)\,\Phi^{1+n}.$$

Hogyha azonban G_0 incommensurabilis periodusokkal többértékű, akkor (12)' és (12)'', illetőleg (13) szerint már valamennyi analytikai G függvény többértékű, a mely t. i. ugyanazt az (X, Y, Z) vektort szolgáltatja, mint a G_0 és H_0.

6. A következendő alkalmazások szükségletéből még egy analytikai viselkedésre utalok, a melynek a számba vételét különben egyéb alkalmazások is kirójják.

Legyen, hogy a helynek egy deriválható függvénye φ úgy fogandó fel, mint a hely két adott alakú deriválható függvényének, u-nak és v-nek a függvénye:

$$
\begin{aligned}
&\varphi=\varphi(u,\, v),\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Állítom: a hol φ, u, v első coordinata-deriváltjai végesek, de φ-nek valamelyik parameter (u vagy v) vagy mindkettő szerint való első deriváltja végtelen, ott a két parameter JACOBI-féle determinansai eltünnek. Abban a föltevésben, hogy φ-nek u szerint képzett deriváltja x, y, z helyen végtelen, szorozzuk meg (14) harmadik egyenletét $\partial v : \partial y$, második egyenletét $\partial v : \partial z$ deriválttal, azután vonjuk ki egyik egyenletet a másikból. Két más hasonló eljárást is követve találjuk:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\quad\text{stb.}$$

A föltevés szerint a baloldalok végesek és a jobboldalakon $\partial\varphi : \partial u$ végtelen. Így

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}=0\quad\text{stb.}$$

Állítom továbbá: a hol φ és u első coordinata-deriváltjai végesek, de $\partial\varphi : \partial u$ végtelen és a vidéken mindenütt

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}=0,$$

ott u deriváltjai eltünnek. Szorozzuk meg a (14) alatti egyenleteket rendre u deriváltjaival és azután adjuk össze őket:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right].$$

A föltevések értelmében a baloldal véges és a jobboldalon $\partial\varphi : \partial u$ végtelen lévén az x, y, z helyen, következőleg

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

II. *Az elektromágneses tér Maxwell-Heaviside-féle egyenleteinek Hertz-féle definitiojáról.*

1. MAXWELL elektromágnességi egyenletei HEAVISIDE formulázása által alapegyenletek jelentőségére tettek szert főkép HERTZ tárgyalásában.*

BOLTZMANN azonban kifogásokat tesz HERTZ bevezető definitioi ellen,** a melyek az egyenletek vezérmennyiségeire, az ú. n. elektromos és mágneses erőre vonatkoznak. Ez ellenvetések értelmében azok a definitiok részint fölöslegesek, részint hibásak is. Jogosak és alaposan meg is okolvák az ellenvetések.

Ámde okvetetlenül szükségesek némely olyatén elemek a definitiokban, a minők a HERTZ-félékben implicite bent foglaltatnak. Még pedig bizonyos functionális tulajdonságok előre kirovandók az elektromos és mágneses erőkre, HERTZ jelölései szerint (X, Y, Z) és (L, M, N) vektorokra. Tulajdonságok, a melyeknek előzetes kiszabása nélkül a következtetések rendszerébe tartozó partikuláris integrálások nem szükségképen valók, hypothetikusak, illetőleg a posteriori csúsztatnak be definitionális megszorításokat.

Számba véve, hogy az ú. n. felületi és kettős felületi elektromosság, felületi mágnesség, felületi áramlás, vonalas áramlás fogalma csak formális határfogalmaknak tekinthetők, előre kirovandó az elektromos és mágneses erő componenseire X, Y, Z és L, M, N, hogy azok a hely NEWTON-féle függvényei legyenek, még pedig a végtelenben való viselkedést illetőleg, az elektromos

---

* HERTZ, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. 1892.

** BOLTZMANN, Vorlesungen über MAXWELL's Theorie der Electricität und des Lichtes. 1893. II. Th. §. 3.

erő legalább másodrendűen, a mágneses erő legalább harmadrendűen tünjék el a végtelenben.

Csak így vonhatók az elektromosság, mágnesség, áramlás - tapasztalati jelenségeivel egyező partikuláris következtetések az (I. 1.)-ben jellemzett és egyéb módokon, mint szükségképen valók, azaz, mint kizárólagosan helyesek.

2. Hertz jelölései szerint izotrop nyugvó közegben az elektromágnességi tér egyenletei (l. c. 21). l.):

$$\begin{aligned} A\mu \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \\ A\mu \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \\ A\mu \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi A\lambda (X-X') &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \\ A\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi A\lambda (Y-Y') &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} \\ A\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi A\lambda (Z-Z') &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2}$$

Boltzmann a mágneses erőnek (L, M, N) előzetes mechanikai definitioját fölöslegesnek tartja (l. c. 15. l.), mert az már (1) által definiálva van, föltéve, hogy igen hosszú idő előtt mindenütt semmi volt; továbbá azt mondja szerző: «Dass sie (a componenseket érti) den Kräften proportional sind, welche auf einen Solenoidpol wirken, kann dann später aus den Gleichungen bewiesen werden. Stahlmagnete sind dann als Körper aufzufassen, in denen unbekannte kleine Ströme fliessen».

Azonban (L, M, N) meghatározását illetőleg az (1) alatti egyenletekre és ehhez képest igen hosszú idő előtti semmikre utalni, a Hertz-féle egyenletek keretében túlos eljárásnak kell nyilvánítanom. Az (1) alatti jobboldalaknak az egész igen hosszú idő alatt egymásután rendezkedő értéksorozatára szorul az, és pl. egy változatlan állapotba tartozó (L, M, N) vektor meghatározása végett bizonyos mertékben szüksége van neki ez állapot létrejöttének a történetére. Azonkívül a permanens mágnesség helyén substituált «ismeretlen áramlásoknak» számba kell jönniök a (2) alatti egyenletekben és ott a $-4\pi A\lambda(X', Y', Z')$ áramláshoz számítandók, tehát az egyenletek határozottsága végett kellőkép adva kell lenniök.

Ezzel szemben itt ki fogom mutatni, hogy a permanens mágnesség és a pillanatnyi elektromos erő meghatározzák az egyenletekből a pillanatnyi mágneses erőt.

Legyen, hogy kétféle mágneses erő van olyan, a mely az egyenleteket adott elektromos erők és adott permanens mágnesség mellett kielégíti, ú. m. (L, M, N) és (L_0, M_0, N_0). Ha

$$L-L_0\equiv L', \quad M-M_0\equiv M', \quad N-N_0\equiv N' \tag{3}$$

jelölésekkel élünk, úgy a (2) alatti egyenletek szerint

$$\frac{\partial M'}{\partial z}-\frac{\partial N'}{\partial y}=0, \quad \frac{\partial N'}{\partial x}-\frac{\partial L'}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial L'}{\partial y}-\frac{\partial M'}{\partial x}=0, \tag{4}$$

mert (2)-ben (X, Y, Z), (X', Y', Z'), $A\varepsilon$, $A\lambda$ advák. Továbbá, mivel a permanens mágnesség is adva van, így

$$\frac{\partial \mu L'}{\partial x}+\frac{\partial \mu M'}{\partial y}+\frac{\partial \mu N'}{\partial z}=0; \tag{5}$$

ugyanis a Poisson szabálya szerint indukált mágnességen kívül csakis permanens mágnesség tartozik az elméletbe, tehát ennek a sűrűsége az x, y, z helyen

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mu L'}{\partial x}+\frac{\partial \mu M'}{\partial y}+\frac{\partial \mu N'}{\partial z}\right),$$

mint t. i. a teljes (szabad) sűrűségnek és a Poisson-féle látszólagos, indukált sűrűségnek a különbsége: tényleg az (1) alatti egyenletek rendre x, y, z szerint deriválva, aztán összeadva, ezt változatlannak tüntetik föl.

A (4) alatti egyenletek szerint az (L', M', N') különbségi erővektornak van skaláris potencziálja. Abban az előzetes föltevésben azonban, hogy a mágnesi erő componensei L, M, N, valamint L_0, M_0, N_0 Newton-féle függvények (II. 1.), az L', M', N' különbségi componensek is azok (3), tehát a potencziáljuk is az (I, 1). Ekként az (5) alatti egyenletből (a potencziállal való szorzás és az egész térre kiterjedő parcziális integrálás segélyével kitetsző módon) folyólag

$$L'=0, \quad M'=0, \quad N'=0.$$

Így tehát (3) jelentése szerint, a pillanatnyi elektromos erő és a permanens mágnesség izotrop nyugvó közegek esetében tényleg teljesen meghatározzák az alapegyenletekből (1) és (2) a pillanatnyi mágneses erőt.

3. Hasonló módon következik, hogy nem izotrop nyugvó testek jelenlétében is meghatározza a pillanatnyi elektromos erő és a permanens mágnesség a pillanatnyi mágneses erőt, és hogy tömegmozgás esetében ugyanezek és a pillanatnyi mozgási sebességek meghatározzák: HERTZnek általános (I*b*) egyenleteiből (l. c. 261. l.) ez adatok kapcsán szintén az itteni (4) alatti egyenletek folynak, és ha (3) analogiájára «a mágneses polarisatiot» vagy más néven «mágneses erővonalak számát» $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ illetően

$$\mathfrak{L}-\mathfrak{L}_0\equiv\mathfrak{L}', \quad \mathfrak{M}-\mathfrak{M}_0\equiv\mathfrak{M}', \quad \mathfrak{N}-\mathfrak{N}_0\equiv\mathfrak{N}'$$

írjuk, úgy HERTZnek (I*a*) egyenletei szerint (l. c. 261. l.) adott permanens mágnességhez

$$\frac{\partial\mathfrak{L}'}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}'}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}'}{\partial z}=0, \tag{5}$$

mert amaz egyenletekből

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}\right)+$$
$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha\,.+\frac{\partial}{\partial y}\beta\,.+\frac{\partial}{\partial z}\gamma\,.\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}\right)=0,$$

már pedig ebben a baloldal nem más, mint ennek a mennyiségnek:

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}$$

a totális változási sebessége (α, β, γ lévén a tömegmozgás sebességének a componensei) és e mennyiség 4π-ed része a permanens mágnesség sűrűsége (HERTZ l. c. 266. és 267. l.). Izotrop közegek esetében az $\overline{(5)}$ alatti egyenlet összeesik az (5) alattival és így a bizonyítás alapját ismét (4) és (5) képezi egészen azon a módon, mint elébb.

Anizotrop közegek esetében is olyszerű a bizonyítás, csakhogy érvényessége az anizotropia bizonyos tulajdonságát föltételezi, mely különben minden eddigi tapasztalás szerint általánosnak tekinthető.*

4. A (2) alatti egyenletek baloldalaival, mint componensekkel képezett vektort nevezik elektromos áramlásnak nyugvó izotrop közegek esetében. Általánosan a HERTZ-féle (*Ib*) egyenletek baloldalai kiegészítve a jobboldalok utolsó tagjával (l. c. 261. l.) képezik azt a vektort, a mely HERTZ tárgyalásában az elektromos áramlás fogalmának felel meg.

Ebben az értelemben: már a pillanatnyi elektromos áramlás és a permanens mágnesség meghatározzák a pillanatnyi mágneses erőt az alapegyenletekből az előző czikk bizonyítása szerint.

Ha azonban a HALL-féle jelenséget is számba akarjuk venni, akkor az alapegyenletekben az áramlás componensei bizonyos tagokkal kiegészítendők. VOIGT elméletében a kiegészítő componensek eredetileg izotrop közegben (l. c. 302. és 303. l.):

$$\begin{gathered}\theta\,.(ZM-YN)\\ \theta\,.(XN-ZL)\\ \theta\,.(YL-XM),\end{gathered}$$

a hol a θ megközelítőleg független az elektromágneses állapotoktól.

E kiegészítő áramlási componensek tekintetbe vételével a (4) alatti egyenletek helyébe a következők állítandók:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N'}{\partial y}-\frac{\partial M'}{\partial z}&=\theta\,.(ZM'-YN')\\ \frac{\partial L'}{\partial z}-\frac{\partial N'}{\partial x}&=\theta\,.(XN'-ZL')\\ \frac{\partial M'}{\partial x}-\frac{\partial L'}{\partial y}&=\theta\,.(YL'-XM').\end{aligned}$$

* VOIGT, Komp. d. th. Phys. II. 1896. 184. és 185. l.

Belőlük könnyen fölismerhető módon

$$\left(\frac{\partial N'}{\partial y}-\frac{\partial M'}{\partial z}\right)L'+\left(\frac{\partial L'}{\partial z}-\frac{\partial N'}{\partial x}\right)M'+\left(\frac{\partial M'}{\partial x}-\frac{\partial L'}{\partial y}\right)N'=0$$

következik. Így az $(L'\ M'\ N')$ különbségi vektor oly alakú, hogy

$$L'=\rho\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial x},\quad M'=\rho\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial y},\quad N'=\rho\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial z}.$$

Ha már most abból, hogy L', M', N' NEWTON-féle függvények, szükségképen következnék, hogy $\bar{\omega}$ is az, és ρ véges, folytonos, egyértékű deriválható függvény, akkor az (5) alatti egyenlet alapján következtethető volna, hogy $\bar{\omega}$ deriváltjai mindenütt eltünnek, tehát, hogy számot tevő HALL-féle effektus esetében is teljesen meghatározottnak tekinthető a pillanatnyi mágneses erő a pillanatnyi elektromos erő és a permanens mágnesség által.

Ámde az (I. 5.)-ben előadottak miatt ez a következtetés elesik, és a HALL-féle jelenségnek megfelelően VOIGT egyszerű hypothesise nyomán kiegészített HERTZ-féle egyenletek irányában a BOLTZMANNtól indikált meghatározás lép előtérbe (II. 2.).

5. A permanens mágnesség meghatározására az a mód szolgálhat, a melyet HERTZ a mágneses erő definiálására használ, mert összefér a magneto-strictio kifejezéseivel és mert a permanens mágnesség elektromos erőktől függetlenül jöhet tekintetbe, t. i. oly viszonyok létesitésével, a melyeket megilletnek az (1) és (2) alatti egyenletek s olyképen, hogy az (1) alattiak jobboldalai s a (2) alattiak baloldalai eltűnnek pl. amiatt, hogy az $(X'\ Y',\ Z')$ vektornak van potencziálja és az $(X,\ Y,\ Z)$ elektromos erő emezzel egyenlő változatlan vektor mindenütt.

Azonban kérdés, hogy HERTZ szerint a tényleges mechanikai hatások helyett másokat substituálván, vajjon nem partikuláris-e a meghatározás, azaz a tényleges mechanikai (tömegmozgató) hatással nem fér-e össze többféle $(L,\ M,\ N)$ függvény mint «mágneses erő», mert ha igen, akkor az a meghatározás fölösleges megszorítást tartalmaz.

Most kizárólag izotrop közegeket tarthatván szem előtt, ha a következő jelölésekkel élünk:

$$\frac{\partial \mu L}{\partial x} + \frac{\partial \mu M}{\partial y} + \frac{\partial \mu N}{\partial z} \equiv 4\pi k \tag{6}$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} \equiv 4\pi i_x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z} = 4\pi i_y, \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \equiv 4\pi i_z \tag{7}$$

$$L^2 + M^2 + N^2 = F^2, \tag{8}$$

akkor a tényleges mechanikai erő componensei térfogat-egységre a MAXWELL-féle magneto-strictio egyenleteiből számítva ezek: *

$$\begin{aligned} kL &- \frac{1}{8\pi}\frac{\partial \mu}{\partial x} F^2 + \mu(Mi_z - Ni_y) \\ kM &- \frac{1}{8\pi}\frac{\partial \mu}{\partial y} F^2 + \mu(Ni_x - Li_z) \\ kN &- \frac{1}{8\pi}\frac{\partial \mu}{\partial z} F^2 + \mu(Li_y - Mi_x). \end{aligned} \tag{9}$$

Az $(i_x i_y i_z)$ vektor az elektromos áramlás. De elektromos áramlás hiányában ugyanaz lévén a permanens mágnesség és attól megszabadítható is lévén, az ettől független egyenletekre szorítkozhatunk. Föltéve pedig, hogy

$$i_x = 0, \quad i_y = 0, \quad i_z = 0, \tag{10}$$

a mágneses erőnek (L, M, N) van skaláris potencziálja (7). Jelölje ezt ψ, úgy, hogy

$$L = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad M = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad N = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{11}$$

legyen. Akkor (6), (8):

$$-4\pi k = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) \tag{11'}$$

$$F^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \tag{11''}$$

* Kifejtett teljes formuláikkal mindeddig csak VOIGT Kompendiumában találkoztam. Ott más, jóval komplikáltabb alakú kifejezéseik jegyezvék (II. 273. l.), de egyszerű átszámítás mutatja, hogy tartalomra az itteniekkel egyezők.

és a mechanikai erő componensei ezek:

$$\begin{aligned}
&-\left(k\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{8\pi}F^2\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\\
&-\left(k\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{1}{8\pi}F^2\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)\qquad (12)\\
&-\left(k\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{1}{8\pi}F^2\frac{\partial\mu}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

A határ-rétegekben μ deriváltjai igen nagyok lehetnek, jóllehet maga a μ (a mágneses polarisatio coëfficiense) mindenütt kicsit különbözik egy constanstól és a mágnesek belsejében deriváltjai is kicsinyek. Így a mechanikai erő kifejezéseinek második tagjától eltekinteni (12) az általánosság sérelme nélkül nem lehet.

A legközelebbiek annak az eldöntését czélozzák, hogy adott tényleges mechanikai erőnek (12) a ψ potencziál mily tetszőlegességgel felel meg. A tárgyalás némi bonyodalommal jár amiatt, hogy quadratikus differencziális egyenletekkel van dolga, ennélfogva röviden nem intézhető el.

6. Tegyük fel, hogy egy bizonyos mechanikai erőnek (12) kétféle mágneses erő felel meg, a melyek egyikének a potencziálja ψ_0, a másiké ψ. A (12)-ből folyólag

$$\begin{aligned}
k\frac{\partial\psi}{\partial x}-k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial x}+\frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial x}&=0\\
k\frac{\partial\psi}{\partial y}-k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial y}+\frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial y}&=0\qquad (13)\\
k\frac{\partial\psi}{\partial z}-k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial y}+\frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial z}&=0.
\end{aligned}$$

Két főcsoport lehetséges. Vagy

$$k=0,\quad k_0=0,\quad F^2-F_0^2=0 \qquad (14)$$

vagy a ψ, ψ_0, μ függvények JACOBI-féle determinansa eltűnik, tehát ezek a függvények két közös változó függvényeinek tekinthetők:

$$\psi=\psi(p,q),\quad \psi_0=\psi_0(p,q),\quad \mu=\mu(p,q), \qquad (15)$$

mihez képest (13)-ból

$$\left(k\frac{\partial\psi}{\partial p}-k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial p}+\frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)\frac{\partial p}{\partial x}+$$
$$+\left(k\frac{\partial\psi}{\partial q}-k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial q}+\frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial q}\right)\frac{\partial q}{\partial x}=0,\quad\text{stb.}$$

Ez a második főeset két aleset lehetőségét tartalmazza. Ugyanis ebben a főesetben vagy

$$\left.\begin{aligned}k\frac{\partial\psi}{\partial p}-k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial p}+\frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial p}&=0\\ k\frac{\partial\psi}{\partial q}-k_0\frac{\partial\psi_0}{\partial q}+\frac{F^2-F_0^2}{8\pi}\frac{\partial\mu}{\partial q}&=0,\end{aligned}\right\}\tag{15$'$}$$

vagy pedig a p és q függvény három JACOBI-féle determinansa eltűnik, tehát úgy fogható fel ez a két függvény, mint egyetlen közös változó függvényei és így nemkülönben ψ, ψ_0, μ is úgy foghatók fel:

$$\psi=\psi(\varsigma),\quad \psi_0=\psi_0(\varsigma),\quad \mu=\mu(\varsigma),\tag{16}$$

minek kapcsán

$$k\frac{d\psi}{d\varsigma}-k_0\frac{d\psi_0}{d\varsigma}+\frac{F^2-F_0^2}{4\pi}\frac{d\mu}{d\varsigma}=0.\tag{16$'$}$$

De számon tartandó az a lehetőség is, hogy a tér egy-egy részében az összesen háromféle eset egyike, másokban egy-egy másika fordul elő.

Nyilvánvaló, hogy a (15), (15)' esetben a (16), (16)' is bent foglaltatik. De az eszközlendő következtetések czéljából a (15), (15)'-ben a p és q változók gyanánt a ψ_0 és ψ függvényt választom, midőn (15), (15)' ebbe megyen át:

$$\left.\begin{aligned}\mu&=\mu(\psi,\psi_0)\\ 8\pi k+(F^2-F_0^2)\frac{\partial\mu}{\partial\psi}&=0\\ 8\pi k_0-(F^2-F_0^2)\frac{\partial\mu}{\partial\psi_0}&=0.\end{aligned}\right.\tag{17}$$

Csakhogy innen ki van zárva egy olyan eset, a mely (15), (15)'-ben bent foglaltatik és sem (14)-ben, sem (16), (16)'-ban nem foglaltatik bent, t. i. az az eset, a melyben $F^2 = F_0^2$ és egyúttal a ψ_0 meg ψ potencziáloknak, mint p és q függvényeinek a JACOBI-féle determinansa eltűnik. Számba veendő tehát még mint külön eset:

$$\begin{gathered}\psi = \psi(\varsigma), \quad \psi_0 = \psi_0(\varsigma) \\ F^2 - F_0^2 = 0 \\ k\frac{d\psi}{d\varsigma} - k_0\frac{d\psi_0}{d\varsigma} = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Ellenben (16), (16)'-tól, mint (17)-ben és (18)-ban bent foglaltatótól eltekinthetünk: a (17) és (18) teljesen magában foglalja a (15), (15)' alá tartózható specziális esetek összeségét, ha ugyan nem zárkozunk el annak a lehetőségétől, hogy $\partial\mu : \partial\psi_0$ és $\partial\iota : \partial\psi$ egyes pontokban, vonalakon, felületeken végtelen.

6_1. Föltéve, hogy az egész térben teljesül (14), annak a két első egyenletéből a (11)' rendén ismeretes módon következik, hogy

$$\psi_0 = 0, \quad \psi = 0$$

az egész térben, mert az előzetes functionalis kirovások értelmében (II. 1.) a ψ_0 és ψ függvény bír azokkal a tulajdonságokkal, a melyek ehhez a következtetéshez szükségesek.

Így a (14) alatti esetnek az egész térben való érvényesülése kizártnak tekintendő.

6_2. A (17) alatti két differencziális egyenletet egyszer adjuk össze, egyszer vonjuk ki egymásból. Ha aztán élünk ezzel a jelöléssel:

$$\psi - \psi_0 = \psi_1, \quad \psi + \psi_0 = \psi_2 \tag{19}$$

és a ψ_1 meg ψ_2 függvényeket vezetjük be a ψ_0 és ψ helyett argumentumok gyanánt, akkor (11)' és (11)'' alapján egyenleteink ezt az alakot öltik:

$$4\pi k_1 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\psi_2} = 0$$

$$4\pi k_2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)\frac{\partial\mu}{\partial\psi_1} = 0$$

a hol k_1 és k_2 a ψ_1 és ψ_2 által épen úgy fejezvék ki, mint (11)'-ben a k a ψ által. Behelyettesítvén érettük a kifejezéseiket, egyenleteink a következőleg jelennek meg:

$$
\begin{aligned}
F_1^2 \frac{\partial \mu}{\partial \psi_1} + \mu \Delta \psi_1 = 0 \\
F_2^2 \frac{\partial \mu}{\partial \psi_2} + \mu \Delta \psi_2 = 0,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

a hol F_1^2 és F_2^2 ugyanúgy határozvák meg ψ_1 és ψ_2 által, mint (11)''-ben F^2 a ψ által.

A (20) alatti első egyenletet megszorozván a ψ_1-nek egyelőre határozatlan függvényével $\Phi(\psi_1)$ és $D\tau$ térelemmel, és elosztván μ-vel, integráljuk az egész térre. A baloldal második tagján parcziális integrálást végezvén találjuk:

$$
\int \left(\frac{d\Phi}{d\psi_1} - \frac{\Phi}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \psi_1} \right) F_1^2 D\tau = 0, \tag{21}
$$

ha ugyan a Φ függvény úgy van választva, hogy mindenütt véges, folytonos, egyértékű, deriválható és deriváltja $d\Phi : d\psi_1$ mindenütt véges. Ugyanis $F_1^2 \partial \mu : \partial \psi_1$ mindenütt véges a (20) egyenletből folyólag.

Ha $\partial \mu : \partial \psi_1$ maga is véges, akkor megválasztható úgy a Φ függvény a reá rótt követelmények keretében, hogy az integrálban F_1^2 faktora mindenütt pozitiv. Beválik pl.

$$
\Phi = \psi_1^{2m+1},
$$

hacsak m bizonyos véges számnál nagyobb pozitiv egész számot jelent. Mert akkor az integrálban az F_1^2 factora ez:

$$
\left(2m + 1 - \frac{\psi_1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \psi_1} \right) \psi_1^{2m}.
$$

Szintén beválik

$$
\Phi = \psi_1^3 e^{-m : \psi_1^2}
$$

a midőn az integrálban F_1^2 faktora ez:

$$\left(2m+3\psi_1^2 \quad \frac{\psi_1^3}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\psi_1}\right)$$

stb. E szerint mindenütt $F_1=0$, vagyis $\psi_1=$const. és következőleg

$$\psi-\psi_0=\text{const.}=0.$$

Számolnunk kell azonban azzal az eshetőséggel is, hogy $\partial\mu:\partial\psi_1$ egyes pontokban, vonalakon, felületeken végtelen. Természetesen (20)-ból kitetszőleg azokon a helyeken szükségképen $F_1=0$. Most igen kis gömböket, igen vékony csöveket, igen vékony rétegeket zárjunk ki az integrálás teréből vagyis a végtelen térből, olyanokat t. i., a melyek ezeket a pontokat, vonalakat, felületeket tartalmazzák.

Ekkor (21) baloldalához felületi integrálok is csatlakoznak, a melyek ily alakúak:

$$\int \Phi\frac{\partial\psi_1}{\partial n}D\sigma.$$

a hol az n betű a $D\sigma$ felületelem kifelé mutató normálisát jelenti. Az ilyen integrál, a mennyiben igen kis gömbnek vagy igen vékony csőnek a felületére szól, már csak azért is igen kicsiny, mert a felület területe igen kicsiny; a mennyiben pedig igen vékony rétegnek a felületére szól, már csak azért is igen kicsiny, mert lehet a réteg oly vékony, hogy az integrálandó függvénynek $\Phi\partial\psi_1:\partial n$ átellenes felületi pontokhoz tartozó értékei tetszőleges kicsit különböznek absolut értékre egymástól, holott előjel dolgában ellentétesek az n normális ellentétessége miatt. Amiatt azonban, hogy a kizáró felületektől befogott pontokban, vonalakon, felületeken $F_1=0$, lehetnek oly kicsinyek a gömbök és oly vékonyak a csövek és rétegek, hogy (11)″ értelmében a felületeiken $\partial\psi_1:\partial n$ mindenütt kisebb, mint egy tetszőlegesen kicsiny mennyiség. Így most is, a tér minden pontjában

$$\psi-\psi_0=\text{const.}=0.$$

Hasonlóképen következik a (20) alatti második egyenletből, a ψ és ψ_0 általános functionális tulajdonságai (II. 1.) alapján, hogy ψ_2 azaz $\psi+\psi_0$

$$\psi+\psi_0=\text{const.}=0$$

mindenütt. Igy $\psi_0=0$, $\psi=0$ következik a (20) alatti egyenletekből, mint az egész végtelen térben érvényesekből minden ponthely számára.

Kizártnak tekintendő tehát (20)-nak az egész térben való helyessége is.

6_3. A (18) alatt jegyzett esetben

$$F^2-F_0^2\equiv\left[\left(\frac{d\psi}{d\varsigma}\right)^2-\left(\frac{d\psi_0}{d\varsigma}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial\varsigma}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varsigma}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varsigma}{\partial z}\right)^2\right]=0$$

a (11)″ szerint.

Föltéve tehát, hogy az egész térben a (18) érvényes, belőle legalább vagy

$$\psi-\psi_0=\text{const.}=0$$

vagy

$$\psi+\psi_0=\text{const.}=0$$

következik, miáltal már teljesül (18)-nak az utolsó egyenlete is.

E szerint, ha definitioszerüleg kizárjuk a

$$d\psi+d\psi_0=0$$

esetet, akkor mindenütt

$$\psi=\psi_0.$$

6_4. Számot kell vetnünk azzal a lehetőséggel is, hogy a tér egyes részeiben (14), másokban (17) vagy (18) érvényes.

Egyelőre csupán (14) és (17) kapcsolásáról legyen a szó, vagyis arról az esetről, hogy a tér némely részeiben (14), némelyekben (17) érvényes.

A (14)-ből folyólag

$$k-k_0=0,\quad k+k_0=0,$$

tehát a (19) alatti jelölések alkalmazásával (11)′ értelmében:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)=0\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\psi_2}{\partial z}\right)=0.\end{aligned}\right\}\quad(22)'$$

Továbbá (14) harmadik egyenletéből (11″) értelmében

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\frac{\partial \psi_2}{\partial x}+\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\frac{\partial \psi_2}{\partial y}+\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\frac{\partial \psi_2}{\partial z}=0. \qquad (22)''$$

Oly felületen, a melyen (14) tere a (17) terével határos, még a μ csupán mint ψ_1 és ψ_2 függvénye fogható fel. Jelölje μ_0 e két argumentum olyan pozitiv függvényét

$$\mu_0 = \mu_0(\psi_1, \psi_2),$$

a mely véges, folytonos, egyértékű a (14) terében, valamint első coordinata deriváltjai is, és a mely μ_0 a (14) és (17) közös határfelületein μ-vel egyezik. Továbbá Φ ugyanolyan tulajdonságú függvénye legyen ψ_1-nek, mint (6_3)-ban.

Megszorozván a (22)′ alatti első egyenletet $\Phi:\mu_0$ hányadossal és $D\tau$ térelemmel, végezzünk rajta parcziális integrálást, kiterjeszkedőt oly τ térre, a melyben (14) érvényes és annak a felületére. Tekintettel (22)″-re találjuk:

$$\int\limits_\tau \frac{\mu}{\mu_0}\left(\frac{d\Phi}{d\psi_1}-\frac{\Phi}{\mu_0}\frac{\partial \mu_0}{\partial \psi_1}\right)F_1^2 D\tau+\int\limits_\sigma \Phi\frac{\partial \psi_1}{\partial n}D\sigma=0, \qquad (23)$$

lévén n a $D\sigma$ felület-elemnek τ-ba mutató normálisa. Ugyanis ott, a hol a τ tér a (17) terével érintkezik, $\mu_0=\mu$ a felületi integrálban; ez integrálnak esetleg a végtelenbe tartozó része pedig eltűnik ψ_1-nek a (II. 1.) definitioiból folyó tulajdonságai miatt (I. 1.).

Most azt a τ-val határos tért T vévén figyelembe, a melyben (17) érvényes, szorozzuk meg a (20) alatti első egyenletet Φ-vel és $D\tau$ térelemmel és oszszuk el μ-vel, azután végezzünk rajta parcziális integrálást, kiterjeszkedőt a T térre és ennek a felületére S:

$$\int\limits_T \left(\frac{d\Phi}{d\psi_1}-\frac{\Phi}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \psi_1}\right)F_1^2 D\tau+\int\limits_S \Phi\frac{\partial \psi_1}{\partial N}D\sigma=0, \qquad (24)$$

a hol N a $D\sigma$ felületelemnek a T-be mutató normálisa.

Hasonló egyenleteink vannak minden τ és T tért illetőleg. Valamennyinek a képviselője legyen (23) és (24).

A σ és S felületeknek csupán az egymással érintkező részeit szükséges számítani, mert ψ_1 első coordinata-deriváltjai a végtelenben harmadrendűen eltünnek (II. 1.). Továbbra csakis ezeket a részeket jelentsék (23)-ban és (24)-ben σ és S.

Minthogy σ és S közös $D\sigma$ elemeinek az integrálokban lévő factorai

$$\Phi \frac{\partial\psi_1}{\partial n} \quad \text{és} \quad \Phi \frac{\partial\psi_1}{\partial N}$$

ellentétesen egyenlők a normálisok ellentétessége miatt, így nyilvánvaló, hogy az egész végtelen térre vonatkozó összegelések rendén

$$\sum_\tau \int + \sum_T \int = 0. \tag{25}$$

Ha már most $\partial\mu_0 : \partial\psi_1$ és $\partial\mu : \partial\psi_1$ mindenütt véges, úgy (25)-ből épen úgy következtethető, mikép $\psi_1 = 0$, mint a (6_2)-ben a (21)-ből.

Továbbá abban a föltevésben, hogy ezek a deriváltak egyes pontokban, vonalakon, felületeken végtelenek, szintén azzal a következtetéssel állapítható meg, mint (6_2)-ben, hogy $\psi_1 = 0$. Még pedig teljesen azzal, mert valamint $\partial\mu : \partial\psi_1$ végtelenségi helyein (20) szerint F_1 eltünik, épúgy $\partial\mu_0 : \partial\psi_1$ végtelenségi helyein (22)'' miatt szintén eltűnik. (I. 6.!)

Hasonló módon győződhetni meg, hogy (14) és (17) kapcsolásában nemkülönben $\psi_2 = 0$ mindenütt.

Ezek szerint (14) és (17) kapcsolásában épúgy, mint midőn elkülönítve jönnek tekintetbe:

$$\psi_0 = 0, \quad \psi = 0$$

az egész végetlen térben. Kizártnak itélendő tehát ez a kettős kapcsolás is.

6_5. Végre a τ és T-féle terek mellett oly terek létezését is vegyük számba, a melyekben (18) érvényes.

A (18)-ból, annak bármely érvényességi terére vonatkozólag következik a (6_3)-ban lévő főegyenlet szerint, hogy legalább is vagy $\psi - \psi_0 =$ const. vagy $\psi + \psi_0 =$ const., tehát vagy ψ_1 vagy ψ_2 constans.

Legyen, hogy a (18) tereiben mindenütt $\psi_1 =$ const. A (14) és (17) tereit illetőleg most is helyes a (25) alatti integrál-egyenlet. Igaz ugyan, hogy kiegészítendő volna azokkal a felületi integrálokkal, a melyek a τ és T tereknek a (18) terével való érintkezésükből származnak, vagyis ez érintkezések felületeire terjeszkednek ki; de ψ_1 deriváltjai ezeken a felületeken, mint (18)-hoz is tartozókon eltünnek, és így a kiegészítéshez szükséges felületi integrálok is eltünnek.

Így, ha (18) tereiben mindenütt a $\psi-\psi_0=$ const. megoldás érvényes és sehol sem a másik ($\psi+\psi_0=$const.), akkor mindhárom eset (14), (17), (18) kapcsolásában szükségképen

$$\psi=\psi_0.$$

6'. Mindent összevetve analysisünk ahhoz az eredményhez vezetett tehát, hogy csupán $d\psi_0$ és $d\psi$ ellentétességét rekesztjük ki azzal a követeléssel, hogy a tényleges mechanikai erőknek bizonyos egyetlen (L, M, N) ú. n. mágneses erő feleljen meg.

A mágneses erőnek (5) bekezdésében jelzett kiegészitő (a permanens mágnességet illető) meghatározása nem zár ki más lehetséges mágneses erőket, mint olyanokat, a melyek vagy az egész térben, vagy annak egyes részeiben a meghatározottakkal ellentétesek.

III. *Az elektromágneses tér Maxwell-Heaviside-féle egyenleteinek elvszerű kiegészítése.*

1*a*. Maxwell tetszőleges közegekben indukált lokális elektromotoros erő (a mai nevén egyszerűen elektromos erő) componenseit abból az integrál-kifejezésből írja ki, a mely változatlan és nyugvó zárt vonalas vezetőben indukált vonalas elektromotoros erő jelölésére szolgál.* Ezt azzal az általánossággal teszi, a melyet egy függvény-elem zártvonalú integráljának az eltünése enged. Így egy egyelőre határozatlan függvény coordinata-deriváltjait iktatja be additive a lokális elektromotoros erő componenseibe.

* Maxwell nagy munkájának Weinstein-féle német fordításában a II. kötetben ily czím alatt: «Általános egyenletek az egységnyi időben indukált elektromotoros erő számára» 287. l.

Az eképen megalkotott kifejezés-rendszerről azt mondja (l. c. «Lokális inductio» czím alatt 290. l.), hogy ez «az elektromotoros erő legáltalánosabb alakja, midőn változó testek változó elektromágneses térben mozognak».

Azt az elvet követi tehát MAXWELL a lokális elektromotoros erő kifejezéseinek a megalkotásában, hogy változatlan és nyugvó zárt vonalas vezetőkre alkalmazva azokat, a tapasztalásszerűleg használt kifejezést szolgáltassák.

Ezt az elvet követi HELMHOLZ is az ő saját elektromágnesi elméletében.*

KIRCHHOFF, a ki vezetőkre nézve, azaz conductio-áramlásokat illetőleg először állított föl kifejezéseket a lokális elektromotoros erő számára, s ekkor WEBER «törvényére» támaszkodott,** később az egyetemi előadásaiban szintén amazt az elvet követte, miután észrevette formuláinak azt a hibáját, a melyet HELMHOLTZ részletesen kimutatott, hogy t. i. labilis elektrostatikai állapotokat feltételeznek. Ő előadásainak PLANCK-tól kiadott III. kötetében a vezetőket illető lokális inductio számára felírt kifejezésekhez ezt a kijelentést fűzi: «Die Berechtigung hierzu liegt darin, dass wenn wir diese Gleichungen auf den Fall anwenden, dass die inducirende Ströme geschlossen sind und der inducirte Strom linear und geschlossen ist, wir zu dem vorher angegebenen Gesetze kommen». Aztán bebizonyítja ezt és még megjegyzi: «Daraus folgt freilich noch nicht, dass diese allgemeinen Formeln die richtigen sein müssen; sie wiedersprechen aber keiner der bis jetzt vorliegenden Erfahrungen» (218. l.). Ezeket az egyenleteket használja fel előadásainak egy későbbi szakaszában (223. l.) a dielektricumokban indukált elektromos momentumok és polarisatio-áramlások kifejezéseinek a megszerkesztésére is. A lokális elektromotoros erőnek ez a KIRCHHOFF-tól használt definitioja is úgy, mint a régebbi, egészen speciális, csakhogy ment a régebbi-

* «Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität für ruhende Körper» Borch. Journ. LXXII. 1870. Ges. Abh. I. 545. l., továbbá «Die elektrodynamischen Kräfte in bewegten Leitern» Borch. Journ. LXXVIII. 1874. Ges. Abh. I. 702. l.

** «Ueber die Bewegung der Electricität in Leitern». Pogg. Ann. CII. 1857. Ges. Abh. 154. l.

nek a hibájától, mert megenged stabilis elektrostatikai állapotokat.

MAXWELL és HELMHOLTZ a jelzett elvet követve, mindegyik abból az általánosságból indul ki a maga elméletében, a mely függvény-elem zártvonalú integráljának eltünésén alapszik. Azonban az elv, ha nem korlátozzuk izotropiás állapotokra, hanem aeolotropiás állapotokra kiterjedni is engedjük, nagyobb általánosságot foglal magában. Ha nem rekesztjük ki akár bevallottan, akár hallgatagon aeolotropiák lehetőségét, úgy az elvből vonható következtetések más sokféleséggel is történhetnek, a mely, jóllehet analytikai eredetére nézve még primitivebb, mint amaz, mégis jelentőséggel bír, mert a fény elektromágnesi elméletében a magneto-optikai jelenségek felöleléséhez juttat.

A sokféleségnek ez az osztálya az emlegetett zárt vonalú integrál elemeinek olyanokkal való kiegészítésén alapszik, a melyek egyenkint eltünnek.

1*b*. Ehhez a sokféleséghez egy más természetűnek az osztálya csatolható. Utóbbi azokban az egyenletekben sarkallik, a melyek az elektromotoros erő analytikai fogalmának a physikai tartalmat adják meg, t. i. az áraminductio egyenleteiben, a mik az áramlási componensek és az elektromotoros erő componensei közti összefüggéseket határozzák meg és nyugvó, változatlan közegek esetében is két egyenlet-rendszerből állanak, a melyek egyike a conductio-áramlásra, másika a polarisatio-(MAXWELL-nél eltolódási) áramlásra vonatkozik. A conductio-áramlásra vonatkozók megalkotásában hallgatagon, vagy kifejezetten, mint KIRCHHOFF, szintén azt az elvet követik a szerzők, hogy egyenleteik nyugvó, változatlan vonalas és zárt vezetők áramaira alkalmazva, az ismeretes tapasztalásszerű egyenletek typusára redukálódjanak.

Azonban ez eljárásban sem aknázzák ki teljesen a kinálkozó általánosságokat. A conductio-áram és az elektromotoros erő irányát már a priori egyezőnek nézik és ezáltal aeolotropiás állapotok tekintetbe vételét ismét kizárják. Egyenleteik pedig a tőlük követett elv körében tehetők általánosabbakká, úgy egészítvén ki azokat, hogy zárt vonalas vezetők áramára való alkalmazásban az áramintenenzitást kifejező integrálnak a kiegészítésből származó elemei eltűnjenek. Ezáltal a kiegészités által a HALL-féle effectus számbavételéhez jutunk el.

Ha pedig megfontoljuk, hogy a tapasztalás csak véges vékonyságú vezetőkre szólhat, mert a vonalasság eszményi határfogalom, még egy elvszerű lépéssel tovább mehetünk, úgy is kiegészitvén az egyenleteket, hogy azok véges vékonyságú áramcsövek számára nagy megközelitéssel ugyanazt a kifejezést szolgáltassák, mint kiegészités nélkül az eredetiek. Ekkor természetesen az eredeti egyenletek csak átlagos érvényűeknek tekinthetők, a melyek t. i. a tényleges jelenségeknek csak valamely átlagosait tüntetik fel. Az így kiegészitett egyenletektől már előzetesen várható, hogy oly közegekre is illenek, a melyek chemiai képletében számot tevően foglaltatnak asymmetrikus összetételek; tehát reményelhető, hogy a «természetes» asymmetriás közegeket s a «természetes» aeolotropiát is megilletik. Valóban ezzel az általánositással az egyenletek a fényközegek ú. n. optikai aktivitására is kiterjeszkednek.

1c. Az elvszerű általánositásnak ezektől különböző faját kihasználta DRUDE lipcsei professor, a mennyiben nem csupán közönséges conductio-áramlásokat, hanem vezetőknek dielektrikumokon keresztül történő oscillatoricus kisüléseit is szem előtt tartotta. Az ilyenekre nézve legelőször KIRCHHOFF-tól fölállitott lineáris formulával egyezőleg szerkesztette meg a lokális inductio egyenleteit (Physik des Aethers 1894. 518—524. l.), minek rendén az egyenletek felölelik a dispersio jelenségeit (l. c. 524. l.). Ez az általánositás az elébbiekben jelzettek folytatásaként is eszközölhető, mint amazok további kiegészitője, vagy fordítva amazok ennek a megtörténte után végezhetők.

Én itt a MAXWELL-féle alakokból fogok kiindulni s azokat fogom a bejelentett elvszerűségek betartásával általánositani. A kristályos testeket azonban mellőzöm, és azonkívül nyugvó közegekre szorítkozom: az áttérés kristályos testekre és a közegmozgás számbavétele utólagosan mindenesetre akadálytalanul megejthető, valamint a DRUDE-féle általánositás is. Ezúttal a MAXWELL-féle jelölésekkel élek majd és pedig abban a tekintetben is, hogy az előbbi czikkben (II.) használt coordinatarendszerre nézve invers-rendszert alkalmazok. Nem csupán azért teszem ezt az alakváltoztatást, hogy közvetlen kapcsolatban maradjak MAXWELL könyvével, hanem azért is, hogy az elérendő eredmények a másoktól (GOLDHAMMER, DRUDE stb.) empirikusan fölállított kiegészítésekkel directe összehasonlíthatók legyenek, mihez képest egy különben is igen általános szokást követve, az elektromotoros erőt és elektromos áramlást elektromos egységekkel, a mágneses erőt egységekkel számítom, az utóbbi és előbbi egység hányadosát A betűvel jelölve.

2a. A térfogat-egységre számított lokális elektromotoros erő MAXWELL-féle componensein P, Q, R olyanok értendők, a melyekkel a vonalas elektromotoros erőnek a kifejezése:

$$\int (PDx+QDy+RDz) \equiv E$$

nyugvó változatlan zárt vezetőt a tapasztalásszerű kifejezéssel egyezőleg megillet.

Minthogy az integrálás zárt vonalon vezetendő, ha P, Q, R-hez rendre egy szabályos függvény coordinata-deriváltjait adjuk, ez által az E-nek az értéke nem változik meg. A MAXWELL-féle P, Q, R componensekbe ily tagok máris bele értendők. (Bizonyos megszorításokat némely tapasztalati viszonyok szükségessé tesznek, a milyen pl. elektrostatikai állapotok stabilisságát követeli, miként azt HELMHOLTZ kimutatta.)

De ezzel a betoldással még nem kapjuk meg (P, Q, R)-nek azt a legáltalánosabb alakját, a mely mellett az E változatlan marad. Mihelyt p, q, r az idő és hely olyan függvényei, hogy a velük, mint componensekkel meghatározott vektor mindenütt és folyvást merőleges az áramlás irányára, akkor

$$P+p \equiv X, \quad Q+q \equiv Y, \quad R+r \equiv Z \tag{1}$$

használtatván P, Q, R helyett, az E vonalas elektromotoros erő értéke szintén változatlan marad. Sőt az integrál minden eleme megtartja régi értékét, mert (p, q, r) merőleges a (Dx, Dy, Dz) integratiós pálya-elemre és így

$$pDx+qDy+rDz=0.$$

Az áramlás componenseit jelöljük u, v, w betűkkel. Minthogy a (p, q, r) vektor mindenütt és mindig merőleges reá, ennélfogva így fejezhető ki:

$$\begin{aligned} p &\equiv bw-cv \\ q &\equiv cu-aw \\ r &\equiv av-bu, \end{aligned}$$

a hol a, b, c időjellegű határozatlanok. De tekintettel arra, hogy nyugvó és változatlan vonalas vezető képezi a kiindulás alapját, az imént felírt egyenlet akkor is helyes marad, ha abban (p, q, r) helyett ennek tetszőleges rendű idő-deriváltját használjuk. Úgy jelölvén az idő deriváltakat, hogy a betű lábához jegyezzük a derivatio rendjét, nemkülönben írhatjuk:

$$p_i Dx + q_i Dy + r_i Dz = 0.$$

Használható tehát p, q, r gyanánt:

$$\begin{aligned} p &= \Sigma(bw-cv)_i \\ q &= \Sigma(cu-aw)_i \\ r &= \Sigma(av-bu)_i\,, \end{aligned} \tag{2}$$

a hol az i index szintén deriváltat jelent és az összeg-tagok az a, b, c coëfficiensek szerint is különbözhetnek.

Ez az általánosítás az elektromágnesi tér MAXWELL-féle egyenletei közül csupán az áraminductio egyenleteit módosítja, a mennyiben ezekbe (P, Q, R) helyett az (X, Y, Z) irandó. Izotrop közegekre nézve MAXWELL szerint az áram-inductio egyenletei ezek:

$$\begin{aligned} u &= CP + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial P}{\partial t} \\ v &= CQ + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Q}{\partial t} \\ w &= CR + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial R}{\partial t} \end{aligned}$$

vagy kipótolva HERTZ módjára az inhomogeneitás miatt bizonyos (P', Q', R') elektromotoros erővel (l. c. 218. és 219. l.)

$$u = C(P-P') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial P}{\partial t} \quad \text{stb.}$$

Az első tagok az áramlás conductiós részének, a másodikak polarisatiós (eltolásos) részének felelnek meg. Az utóbbiak voltaképen merőben hypothetikus eredetűek. Már most ezekbe az egyenletekbe (P, Q, R) helyett (X, Y, Z) jegyzendő, mint majd alább következik.

Az elektromágneses tér többi MAXWELL-féle egyenletei változatlanul maradnak, ú. m.

$$\begin{aligned} 4\pi A u &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z} \\ 4\pi A v &= \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x} \\ 4\pi A w &= \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}, \end{aligned} \qquad (A)$$

a melyekben az elektromotoros erő explicite elő sem fordul; továbbá

$$\begin{aligned} A\mu\frac{\partial\alpha}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \\ A\mu\frac{\partial\beta}{\partial t} &= \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \\ A\mu\frac{\partial\gamma}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \end{aligned} \qquad (B)$$

a melyek, vagy az æquivalens integrál-egyenletek épen a MAXWELL-féle elektromotoros erő definitioinak tekintendők.

Ezekhez már most, mint az áram-inductio egyenletei, az előzmények szerint

$$u = C(X - P') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} \quad \text{stb.}$$

csatlakoznak. De az $(1b)$-ben bejelentett további elvszerű általánosítások kilátásba helyezése végett fügeszszük még hozzájok egy utólag jellemezendő vektor componenseit ξ, η, ζ:

$$\begin{aligned} u &= C(X - P') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \xi \\ v &= C(Y - Q') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t} + \eta \\ w &= C(Z - R') + \frac{K}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t} + \zeta. \end{aligned} \qquad (C)$$

$2b$. Egy vékony áramcsövet szeljünk át egy felülettel, s ebből a felületből az áramcső vágjon ki σ részt. A σ egy elemének a területe legyen $D\sigma$, s ez elem normálisának iránycosinusai l, m, n legyenek. Concedáljuk, hogy a (C) rendszer a ξ, η, ζ nélkül is elég pontosan fejezi ki az áramcső számára az áramintenzitást,

$$I \equiv \int_\sigma (ul + vm + wn)\, D\sigma$$

áramintenzitást, a melynek a határértéke $(\sigma = 0;\, u, v, w = \infty)$ teszi áramvonal számára az áramintenzitást. A (C) alatti kifejezések tekintetvén (ξ, η, ζ megtartásával) a teljesen helyeseknek, csak úgy lehetséges az, mikép (ξ, η, ζ) nélkül is megfelelnek, hogy

$$\int_\sigma (\xi l + \eta m + \zeta n)\, D\sigma = 0. \tag{*}$$

Olyannak föltételezem a vékony csövet, hogy σ kerülete merőleges lehessen mindenütt az áramlás helyi irányára a nélkül, hogy csavarvonalat képezne, vagyis a nélkül, hogy a σ felület csavarfelület volna. Válaszszuk is így a σ felületet és most $(1b)$ két kiegészítésmódját együtt tárgyalandók, írjuk:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2. \tag{3}$$

Itt a (ξ_1, η_1, ζ_1) résztől követeljük, hogy merőleges legyen az áramlásra és így legyen

$$\begin{aligned} \xi_1 &= b'w - c'v \\ \eta_1 &= c'u - a'w \\ \zeta_1 &= a'v - b'u, \end{aligned} \tag{4}$$

a hol a', b', c' jellegtelen határozatlanok.

Már most a $(*)$ egyenletben csak (ξ_2, η_2, ζ_2) marad, mert l, m, n az áramlás iránycosinusai. Ennek oly másszerű megválasztását kivánjuk, hogy $(*)$ értelmében

$$\int_\sigma (\xi_2 l + \eta_2 m + \zeta_2 n)\, D\alpha = 0$$

legyen. E végből írjuk:

$$\begin{aligned}\xi_2 &= \frac{\partial\chi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial z}\\ \eta_2 &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\chi}{\partial x}\\ \zeta_2 &= \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y},\end{aligned} \tag{5}$$

azután végezzünk STOKES-féle integrálást. Ha σ szegélyvonalának egy eleme (Dx, Dy, Dz) vektor, akkor követelésül találjuk a szegélyvonalra való kiterjesztéssel:

$$\int(\varphi Dx+\psi Dy+\chi Dz)=0.$$

Úgy is teljesülhet tehát a (*), hogy

$$\varphi Dx+\psi Dy+\chi Dz=0.$$

Minthogy a (Dx, Dy, Dz) vektor merőleges mindenütt a helyi áramlásra, így beválnak

$$\varphi=-\rho u, \quad \psi=-\rho v, \quad \chi=-\rho w, \tag{6}$$

a hol ρ a megoldásnak még fenmaradt, hosszúság-jellegű határozatlana.

2c. Már most összegyűjtendő az eredményeket: behelyettesítem (1)-ből a P, Q, R helyébe $X-p$, $Y-q$, $Z-r$-et a (B) alatti egyenletekbe, azután p, q, r helyett a (2) alatti jobboldalakat irom azokban; továbbá a (C) alatti egyenletekbe bejegyzem (ξ, η, ζ)-nak (3), (4), (5) szerint való kifejezéseit, azután ott a következő jelölést használom:

$$a'+\frac{\partial\rho}{\partial x}\equiv \mathfrak{a}, \quad b'+\frac{\partial\rho}{\partial y}\equiv \mathfrak{b}, \quad c'+\frac{\partial\rho}{\partial z}\equiv \mathfrak{c}.$$

Ily módon az elektromágneses tér egyenletei nyugvó és izotrop meg aeolotrop közegek rendszerét illetően a következő alakban jelentkeznek:

$$\begin{aligned}4\pi A u &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\\ 4\pi A v &= \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\\ 4\pi A w &= \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\end{aligned} \tag{A}$$

$$\begin{aligned}
A\mu \frac{\partial \alpha}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} + \Sigma\left[\frac{\partial (aw-cu)}{\partial z} - \frac{\partial (bu-av)}{\partial y}\right]_i \\
A\mu \frac{\partial \beta}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} + \Sigma\left[\frac{\partial (bu-av)}{\partial x} - \frac{\partial (cv-bw)}{\partial z}\right]_i \qquad (B) \\
A\mu \frac{\partial \gamma}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} + \Sigma\left[\frac{\partial (cv-bw)}{\partial y} - \frac{\partial (aw-cu)}{\partial x}\right]_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= C(X-P')+\frac{K}{4\pi}\frac{\partial X}{\partial t} + \mathfrak{b}w-\mathfrak{c}v - \rho\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
v &= C(Y-Q')+\frac{K}{4\pi}\frac{\partial Y}{\partial t} + \mathfrak{c}u-\mathfrak{a}w - \rho\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (C) \\
w &= C(Z-Q')+\frac{K}{4\pi}\frac{\partial Z}{\partial t} + \mathfrak{a}v-\mathfrak{b}u - \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),
\end{aligned}$$

a hol az a, b, c; $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ és ρ coëfficiensek eredetükre nézve egymástól teljesen függetlenek.

3. A beiktatott új egyenleti tagok physikai értelmének a fölismerése végett csak összehasonlítások teendők oly elméletekkel, illetőleg empirikus formulákkal, a melyek részint a Hall-féle effectusra, részint a magneto-optikai jelenségekre, részint a «természetes» optikai aktivitásra vonatkozólag különböző szerzőktől felállítva lőnek.

Az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ coëfficiensű tagok a (C) egyenletek oly kiegészitőjét képezik, a mely a Hall-féle effectust tartalmazza. Épen ily részszel egészítette ki pl. ez effectus számára Lorentz az egyenleteket és aztán Goldhammer, a ki abból indult ki, hogy eredetileg izotrop közegek mágneseződés következtében aeolotropokká válnak (Wied. Ann. XXXI. «Ueber die Theorie des Hall'schen Phänomens»).

Az a, b, c coëfficiensű tagok a (B) egyenletek oly kiegészitői, a melyek a megfelelő határfelületi egyenletekkel kapcsolatosan a mágnesezett közegeken átmenő vagy visszavert fény polarisatio síkjának az elfordulásáról adnak számot. Erről a kiegészitésről ugyanis kimutatható, hogy első tagja (az, a mely nincs időderiválás alá vetve, lévén az i-je $= 0$) egyezik azzal a kiegészítéssel, a melyet Goldhammer és tőle függetlenül majdnem egyidejüleg Drude csatoltak be az egyenletekbe a magneto-rotatiós polarisatio és a Kerr-féle effectus föltüntetésére (Wied. Ann. «Ueber magneto-optische Erscheinungen», «Physik des Aethers» 584—589. l., stb.). Ugyanis, ha most az $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ és ρ együtthatós tagoktól eltekintünk és csupán fénytüneményekre és átlátszó közegekre szorítkozva, a C coëfficiensű tagot is mellőzzük a (C) alatti egyenletekből, azután a (B) alatti egyenletekbe u, v, w helyébe ezek (C) alatti kifejezéseit, a (C) alattiakba pedig ugyanazok (u, v, w) helyett az ő (A) alatti kifejezéseit vezetjük be, de a Σ alakok első tagját $(i=0)$ tartjuk csak meg, akkor ezekhez az egyenletekhez jutunk:

$$A\mu\frac{\partial a}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}K(aZ-cX)-\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}K(bX-aY),\quad \text{stb.}$$

$$AK\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z},\quad \text{stb.}$$

már pedig ezek teljesen oly alakúak, mint DRUDE ide tartozó egyenletei («Physik des Aethers» 586. l. stb.).

A mi végre a hátralévő (ρ faktorú) részt illeti, ez a közönséges rotatiós polarisatiot jelenti. Ennek a kiegészítő résznek magának a számbevétele végett, tekintsünk el most az a, b, c és $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ tartalmú tagoktól, és kizárólag fénytüneményekre és átlátszó közegekre szorítkozva hagyjuk ki (C)-ből a conductiós (C faktorú) tagokat is. Ezek után jegyezzük be (C)-be az (A)-ból az u, v, w áramlási componensek kifejezéseit. A mennyiben a közeg mágneseződés tekintetében homogennek számíthat, tehát a μ-je egyenletesnek,

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial z}=0.$$

Ezt is számon tartva találjuk:

$$A\mu\frac{\partial\alpha}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},\quad \text{stb.}$$

$$AK\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}-\rho\Delta\alpha,\quad \text{stb.}$$

Innen pedig, az elektromotoros erő (X, Y, Z) eliminálása által, a mennyiben K és ρ is egyenletesnek számíthat:

$$A^2K\mu\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}=\Delta\alpha-\rho\Delta\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right),\quad \text{stb.}$$

Hasonló egyenleteket találunk az elektromotoros erő számára, föltéve, hogy nincs a közegben valóságos elektromosság, tehát hogy

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.$$

Ugyanis ekkor a mágneses erőnek a hat egyenletből való eliminálásával:

$$A^2K\mu\,\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}=\Delta X-\rho\Delta\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\ \text{stb.},$$

Ezek az egyenletek csupán abban különböznek azoktól, a melyeket Drude talált a maga módján az aktiv testek számára (l. c. 541. l. 91. formula), hogy a dyssymmetrikus tagokban nála a Δ operatio helyett másodrendű időderiválás fordul elő, a mi tapasztalati észleleteink jelen korlátai között mellékes jelentőségű. Az itteni egyenletek azokkal a legelső formulákkal egyeznek, a melyek a fény rugalmasságtani elméletében a rotatiós polarisatio számára fölállíttatának, t. i. a Mac-Cullagh-félékkel. Hogy ha azonban fény-vektor gyanánt α, β, γ helyett

$$\alpha'\equiv\alpha-\rho\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right),\quad\text{stb.}$$

illetőleg X, Y, Z helyett

$$X'\equiv X-\rho\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right),\quad\text{stb.}$$

használjuk, úgy arra a közönséges esetre, hogy ρ oly kicsi egyenletes érték, mikép viszont

$$\alpha\equiv\alpha'-\rho\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)=\alpha'-\rho\left(\frac{\partial\gamma'}{\partial y}-\frac{\partial\beta'}{\partial z}\right)\quad\text{stb.}$$

$$X\equiv X'-\rho\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)=X'-\rho\left(\frac{\partial Z'}{\partial y}-\frac{\partial Y'}{\partial z}\right)\quad\text{stb.}$$

nagy megközelítéssel tehető, akkor egyenleteink egészen a Drude-félék alakját öltik, mert egyenleteink e kifejezések szerint helyettesítések rendén (tekintettel arra, hogy ρ egyenletes) a következőkbe mennek át:

$$A^2 K\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\alpha' + \rho\left(\frac{\partial\beta'}{\partial z} - \frac{\partial\gamma'}{\partial y}\right)\right] = \Delta\alpha' \quad \text{stb.}$$

$$A^2 K\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[X' + \rho\left(\frac{\partial Y'}{\partial z} - \frac{\partial Z'}{\partial y}\right)\right] = \Delta X' \quad \text{stb.}$$

4. A nyugvó közegekről mozgókra való áttérést kivánom végezetül egy kis észrevétellel kisérni.

Hertz a nyugvó közegek egyenleteiben foglalt változási sebességeket, ú. m. a mágneses és elektromos polarisatio változási sebességét, az ő jelölése szerint

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}, \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t}, \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}\right) \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\right)$$

bizonyos valószerű hypothesis alapján egészíti ki a mozgó közegekre illő kifejezésekké (l. c. 258., 259., 260. l.), a mit röviden így jellemez: «es sei der Einfluss der Bewegung derart, dass wenn er allein wirksam wäre, er die magnetischen Kraftlinien mit der Materie fortführen würde». Részletesebb megfogalmazását és fölhasználását illetőleg könyvére utalok, a melyben igen világosan van az, úgy mint minden más egyéb is, előadva. Amit itt megjegyezni akarok, az abban áll, hogy egyszerű módon definiálható oly materiális elemi vektor, mint a hely és idő függvénye, hogy változási sebességének az eltolódásos része (összetevője) épen a Hertz-féle meghatározásnak felel meg.

Ha a tömegmozgás sebessége az x, y, z helyen $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ componensekkel bír (Hertz-nél α, β, γ; továbbá nála a ∂ differencziáló jel helyett mindenütt d áll), úgy Hertz hypothesisének értelmében a nyugvó közegek Maxwell-Heaviside-féle egyenletei abban különböznek a nyugvó közegek megfelelő egyenleteitől, hogy utóbbiakban a $\partial\mathfrak{L}.\partial t$ stb. változási sebességek helyett

$$\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathfrak{L}\dot{y} - \mathfrak{M}\dot{x})}{\partial y} - \frac{\partial(\mathfrak{N}\dot{x} - \mathfrak{L}\dot{z})}{\partial z} + \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial z}\right)\dot{x} \quad \text{stb.}$$

$$\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{\partial(\mathfrak{X}\dot{y} - \mathfrak{Y}\dot{x})}{\partial y} - \frac{\partial(\mathfrak{Z}\dot{x} - \mathfrak{L}\dot{z})}{\partial z} + \left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\dot{x} \quad \text{stb.}$$

irandók.

Vegyünk számba egy materiális elemi vektort, a mely irányra mindenütt egyezik, nagyságra pedig arányos a mágneses vagy elektromos polarisatioval egy tetszésre választott t pillanatban, különben pedig mindenütt két igen közeli egyéni tömegpont távolsági vektorának és a materiális tömöttségnek a szorzatával van meghatározva.

Jelölje ezt a vektort (ξ, η, ζ). Componenseinek teljes változási sebessége

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\dot{z}, \quad \text{stb.}$$

Hogy ezekből kiválaszszuk az eltolódással járó részeket, ki kell vonnunk belőlük a távolsági vektor hosszának s irányának és multiplikáló tömöttségének a változási sebességével járókat. A két elsőfélék együtt:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x}\xi + \frac{\partial \dot{x}}{\partial y}\eta + \frac{\partial \dot{x}}{\partial z}\zeta, \quad \text{stb.}$$

míg a második féle:

$$-\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}\right)\xi, \quad \text{stb.}$$

mint a nem merev testek, kinematikája tanusítja. Elvégezvén a kivonásokat, az eredményes kifejezések könnyű szerrel vezethetők az imént följegyzett Hertz-féle kiegészítések alakjára vagy fordítva.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1898 október 17.-én tartott üléséből.)