A GÁZ-DIFFUSIO KIRCHHOFF-FÉLE EGYENLETEINEK REDUCTIOJA.

FARKAS GYULÁ-tól.

KIRCHHOFF két gáz szabad diffusiojának következő egyenleteit vezette le az ő kinetikus gáz-elméletéből (Vorlesungen, Theorie der Wärme, 1894. 196. és 197. l.):

$$\begin{aligned}
\mu_1 X &= \mu_1 \frac{du_1}{d_1 t} - \varkappa \mu_1 \mu_2 (u_2 - u_1) + \frac{\partial p_1}{\partial x} \\
\mu_1 Y &= \mu_1 \frac{dv_1}{d_1 t} - \varkappa \mu_1 \mu_2 (v_2 - v_1) + \frac{\partial p_1}{\partial y} \\
\mu\, Z &= \mu_1 \frac{dw_1}{d_1 t} - \varkappa \mu_1 \mu_2 (w_2 - w_1) + \frac{\partial p_1}{\partial z}
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 X &= \mu_2 \frac{du_2}{d_2 t} - \varkappa \mu_2 \mu_1 (u_1 - u_2) + \frac{\partial p_2}{\partial x} \\
\mu_2 Y &= \mu_2 \frac{dv_2}{d_2 t} - \varkappa \mu_2 \mu_1 (v_1 - v_2) + \frac{\partial p_2}{\partial y} \\
\mu_2 Z &= \mu_2 \frac{dw_2}{d_2 t} - \varkappa \mu_2 \mu_1 (w_1 - w_2) + \frac{\partial p_2}{\partial z}
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \frac{\partial \mu_1 u_1}{\partial x} + \frac{\partial \mu_1 v_1}{\partial y} + \frac{\partial \mu_1 w_1}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \mu_2}{\partial t} + \frac{\partial \mu_2 u_2}{\partial x} + \frac{\partial \mu_2 v_2}{\partial y} + \frac{\partial \mu_2 w_2}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

a hol μ_1 és μ_2 a két gáz sűrűsége, p_1 és p_2 a nyomása, $(u_1 v_1 w_1)$ és $(u_2 v_2 w_2)$ a sebessége, (XYZ) azonosnak föltételezett szabad gyorsulása: az x, y, z helyen t pillanatban; $\varkappa$ igen nagy positiv együttható (a sűrűségek és nyomások függvénye) és

$$\frac{d}{d_1 t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_1 \frac{\partial}{\partial y} + w_1 \frac{\partial}{\partial z} \tag{1)'}$$

$$\frac{d}{d_2 t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + w_2 \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2)'}$$

Föltételezem a következőket: 1. Kezdetben mindkét gáz nyugalomban van, egyenletes és egyenlő hőfokú, egyező nyomású és a ritkább egészen a sűrűbb fölött van. 2. A két gáz összeeresztése horizontális nyilás létrehozása által történik s a környezet hőfoka egyenletes és állandó az elegyedés folyamata alatt. 3. Csak a nehézségi szabad gyorsulás tesz számot.

Főkép azt szándékozom itt kimutatni, hogy a két nyomás (p_1 és p_2) e föltételek alatt nagy megközelítéssel ugyanannak a differencziál-egyenletnek tesz eleget, mint a szokásos — és KIRCHHOFFtól is követett — korlátozóbb föltételek alatt, miként ugyani nincs szabad gyorsulás és hogy az itt kitűztem föltételekhez csatlakozik még, hogy a két gáz vertikális henger-edényben vagyon, kezdetben igen vékony horizontális sík-lap választja el őket és ez a választék a gázok összeeresztésekor a henger egész keresztmetszetében egyszerre s zavaró hatás nélkül szűnik meg.

Az experimentum és a theoria a nyomások egyenletében fér egymáshoz. Azonban az edény-alak ilyetén kiszabása kisérleti nehézségeket okoz, nevezetesen a két gáz érintkezésének teljes henger-átmetszeten való elég szabatos létrehozásában.* Ezenkívül azért, mert a diffusio mindenütt a henger teljes átmetszetében megy végbe, nem oly lassú, hogy bizonyos számítási elhanyagolások a mérések pontossági fokán alul ne maradjanak. Kitűnvén a következendőkből, hogy az edény alakja közömbös az experimentumot és a theoriát egymáshoz viszonyító egyenletekre nézve, az elébbi biztosabban és azonfölül változatosabban is lesz az elmélet szempontjából végezhető.

---

* OBERMAYER: Sitzungsber. der Ak. der Wiss. Wien, LXXXI. Bd. II. Abth. 1880. (1104. l.).

Az a korlátozó föltevés, hogy nincs szabad gyorsulás, a kisérlet és elmélet egymásra vonatkoztatásában voltaképen elhanyagolást jelent és azzal a föltevéssel æquivalens, hogy az (1) és (2) alatti egyenletekben $\mu_1 X$, $\mu_2 X$ stb. nem tesznek számot. Azonban ezek az egyenletek úgy combinálhatók háromféleképen új vonalas egyenletekké, hogy az újakról már nem állítható, mikép a szabad gyorsulás azokból is kártalanul kihagyható; mihelyt egy parameter nem elegendő a helytől való függések jellemzésére, már ez az elhanyagolás a következtetések rovására esik. Az (1) és (2) egyező sorhelyű egyenleteinek összeadása juttat ezekhez az új egyenletekhez amiatt, hogy összeadásaik rendén az igen nagy $\varkappa$ cëofficiensű tagok kiesnek. De a tárgyalás teljességéhez még az is szükséges, hogy ez új egyenletekből az (1) és (2) alatti jobb oldalok első tagjait ne hagyjuk ki egészen, mint Kirchhoff tette, hanem csak az (1)′ és (2)′ értelmében másodrendűen kicsi részeiket mellőzzük.

I. Minthogy kezdetben a sűrűbb gáz egészen alul van, hőfokaik egyenletesek és egyenlők, nyomásaik is egyezők és közlekedésük horizontális nyilásban indul meg: az elegyedés nagyon lassan megy végbe. Kivált folyton és mindenütt igen lassú leszen a mozgás, ha az edény helyenkint szűkületes és ha az elválasztás helye az elegyedés megindulása előtt szűkületben volt. Ekkor teljes megbizhatósággal egy közönséges T furatú csap lehet az elkülönítés eszköze, a melynek a furata összeeresztés előtt valamelyik gázzal állandó közlekedésben volt.

A mozgás nagy lassúsága miatt végkép kihagyhatók az (1) és (2) alatti jobb oldalokból az első tagoknak coordinata-derivátumos részei, a melyeket

$$\mu_1\left(u_1\frac{\partial}{\partial x}+v_1\frac{\partial}{\partial y}+w_1\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\mu_2\left(u_2\frac{\partial}{\partial x}+v_2\frac{\partial}{\partial y}+w_2\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

symbolumok határoznak meg. Ennek megfelelően (1) és (2) helyett irjuk:

$$\mu_1\left(X-\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)+\varkappa\mu_1\mu_2(u_2-u_1)=\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

$$\mu_1\left(Y-\frac{\partial v_1}{\partial t}\right)+\varkappa\mu_1\mu_2(v_2-v_1)=\frac{\partial p_1}{\partial y} \tag{5}$$

$$\mu_1\left(Z-\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)+\varkappa\mu_1\mu_2(w_2-w_1)=\frac{\partial p_1}{\partial z}$$

$$\mu_2\left(X-\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)+\varkappa\mu_2\mu_1(u_1-u_2)=\frac{\partial p_2}{\partial x}$$

$$\mu_2\left(Y-\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)+\varkappa\mu_2\mu_1(v_1-v_2)=\frac{\partial p_2}{\partial y} \tag{6}$$

$$\mu_2\left(Z-\frac{\partial w_2}{\partial t}\right)+\varkappa\mu_2\mu_1(w_1-w_2)=\frac{\partial p_2}{\partial z}\,.$$

Ezekhez csatlakoznak még (3) és (4) s az idetartozó hőtani egyenletek. Minthogy az elegyedés megindulása előtt egyenletes és egyenlő volt a két gáz hőfoka és az edény környezetében folyvást egyenletes és állandó a hőfok, a gázmozgás pedig igen lassú: nagy megközelítéssel isothermikus a folyamat. Így nagy megközelítéssel tehető:

$$p_1=n_1\mu_1,\quad p_2=n_2\mu_2 \tag{7}$$

azzal a kirovással, hogy n_1 és n_2 az uralkodó hőfoknál az illető gázokra nézve jellemző constansok, úgy a helytől, mint az időtől függetlenek. Tekintetbe veendő leszen az is, hogy n_1 és n_2 igen nagyok, a mennyiben $\sqrt{n_1}$ és $\sqrt{n_2}$ nagy sebességek, olyszerű nagyok, mint az illető gázokban a hang-terjedés sebessége.

Majd (3), (4), (5), (6) helyett a következő eljárásokkal képezzünk új egyenlet-rendszert: Az (5) alatti egyenleteket n_1 osztóval a (6) alattiakat n_2 osztóval rendre összeadjuk; másszor egyszerűen adjuk össze; a (3) és (4) alatti egyenleteket egyszer n_1 és n_2 szorzóval, másszor egyszerűen adjuk össze. E módon nyolcz olyan egyenlethez jutunk, a melyek rendszere æquivalens az eredeti nyolcz egyenlet rendszerével, mert abból viszont emez következtethető. Mielőtt azonban e műveleteket elvégeznők, czélszerű lesz már előre bizonyos új változókat bevezetni.

II. Az együttes sűrűséget jelölje μ, az együttes nyomást p az x, y, z helyen a t idő-pillanatban:

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu \tag{8}$$

$$p_1 + p_2 = p. \tag{9}$$

Írjuk továbbá:

$$\left.\begin{aligned} p_1 u_1 + p_2 u_2 &= pu \\ p_1 v_1 + p_2 v_2 &= pv \\ p_1 w_1 + p_2 w_2 &= pw. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

A (7) értelmében egyszersmind

$$n_2 p_1 + n_1 p_2 = n_1 n_2 \mu \tag{8$'$}$$

$$n_1 \mu_1 + n_2 \mu_2 = p \tag{9$'$}$$

$$\left.\begin{aligned} n_1 \mu_1 u_1 + n_2 \mu_2 u_2 &= pu \\ n_1 \mu_1 v_1 + n_2 \mu_2 v_2 &= pv \\ n_1 \mu_1 w_1 + n_2 \mu_2 w_2 &= pw. \end{aligned}\right\} \tag{10$'$}$$

A (8) és (9)$'$ összevetéséből folyólag

$$\mu_1 = \frac{n_2 \mu - p}{n_2 - n_1}, \quad \mu_2 = \frac{n_1 \mu - p}{n_1 - n_2}. \tag{11}$$

A (9) és (8)$'$ vagy (7) és (11) szerint pedig

$$p_1 = n_1 \frac{n_2 \mu - p}{n_2 - n_1}, \quad p_2 = n_2 \frac{n_1 \mu - p}{n_1 - n_2}. \tag{12}$$

Már most forduljunk az előző I. czikkely végén jelentett műveletekhez. Az első művelettel keletkező egyenletekben bent foglaltatnak az igen nagy $\varkappa$-val szorzott tagok, tehát ezekből az egyenletekből kihagyhatók a baloldalok többi tagjai, minek megfelelően lesz:

$$\varkappa\mu_1\mu_2(n_2-n_1)(u_2-u_1)=n_1n_2\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

$$\varkappa\mu_1\mu_2(n_2-n_1)(v_2-v_1)=n_1n_2\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

$$\varkappa\mu_1\mu_2(n_2-n_1)(w_2-w_1)=n_1n_2\frac{\partial\mu}{\partial z}.$$

Azonban

$$\mu_1\mu_2(n_2-n_1)(u_2-u_1)$$

$$=\mu_1\frac{n_2-n_1}{n_2}(n_2\mu_2u_2-n_2\mu_2u_1),$$

tehát (10)′ szerint

$$=\mu_1\frac{n_2-n_1}{n_2}[pu-(n_1\mu_1+n_2\mu_2)u_1]$$

és így egyszersmind (9)′ szerint

$$=\mu_1\frac{n_2-n_1}{n_2}p(u-u_1)$$

s hasonlóképen található, hogy nemkülönben

$$=\mu_2\frac{n_1-n_2}{n_1}p(u-u_2).$$

Így az első fönt jelzett művelet eredményei gyanánt a következő egyenleteink vannak:

$$\left.\begin{aligned}\varkappa(n_2-n_1)p\mu_1(u-u_1)&=n_1n_2^2\frac{\partial\mu}{\partial x}\\ \varkappa(n_2-n_1)p\mu_1(v-v_1)&=n_1n_2^2\frac{\partial\mu}{\partial y}\\ \varkappa(n_2-n_1)p\mu_1(w-w_1)&=n_1n_2^2\frac{\partial\mu}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(13)_1'$$

$$\left.\begin{aligned}\varkappa(n_1-n_2)p\mu_2(u-u_2)&=n_2n_1^2\frac{\partial\mu}{\partial x}\\ \varkappa(n_1-n_2)p\mu_2(v-v_2)&=n_2n_1^2\frac{\partial\mu}{\partial y}\\ \varkappa(n_1-n_2)p\mu_2(w-w_2)&=n_2n_1^2\frac{\partial\mu}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\qquad(13)_2'$$

Ezek az egyenletek arra szolgálnak, hogy általuk a két mozgási sebesség $(u_1 v_1 w_1)$ és $(u_2 v_2 w_2)$ a μ, p, u, v, w új változók segélyével fejezhető ki. Még pedig (11) tekintetbe vételével:

$$
\left.
\begin{aligned}
u_1 &= u - \frac{n_2}{n_2\mu - p} \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial x} \\
v_1 &= v - \frac{n_2}{n_2\mu - p} \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial y} \\
w_1 &= w - \frac{n_2}{n_2\mu - p} \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial z}
\end{aligned}
\right\} \qquad (13)_1''
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
u_2 &= u - \frac{n_1}{n_1\mu - p} \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial x} \\
v_2 &= v - \frac{n_1}{n_1\mu - p} \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial y} \\
w_2 &= w - \frac{n_1}{n_1\mu - p} \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial z} .
\end{aligned}
\right\} \qquad (13)_2''
$$

Ilyképen (11), (12), $(13)_1''$ és $(13)_2''$ kifejezik a μ_1, μ_2; p_1, p_2; u_1, v_1, w_1 és u_2, v_2, w_2 régi tíz változót a μ, p és u, v, w új öt változó segedelmével. A többi fönt I. végén jelzett műveletek az öt új változóra szóló öt egyenlethez juttatnak.

Legyen még megjegyezve a következendőkben való fölhasználás végett, hogy a $(13)_1'$ és $(13)_2'$ egyenletekből, az egyező sorhelyűek kivonása által (8) értelmében:

$$
\left.
\begin{aligned}
\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 &= \mu u - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial x} \\
\mu_1 v + \mu_2 v_2 &= \mu v - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial y} \\
\mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 &= \mu w - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial z} .
\end{aligned}
\right\} \qquad (13)
$$

egyenletek keletkeznek.

III. Ezúttal azokat az egyenleteket fogjuk származtatni, a melyek az öt új változót, μ, p és u, v, w változókat illetik. Az I. végén bejelentett és még hátralévő három művelet juttat azokhoz.

A második műveletből (8) és (9) számbavételével:

$$\mu X - \left(\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\mu Y - \left(\mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\mu Z - \left(\mu_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Azonban ezek helyett:

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad \text{stb.}$$

másodrendű megközelítéssel írható

$$\frac{\partial \mu_1 u_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mu_2 u_2}{\partial t}, \quad \text{stb.}$$

mint (3) és (4) megtekintéséből kitűnik. Következőleg (13) alapján iménti három egyenletünk e módon jegyezhető:

$$\begin{aligned} \mu X - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu u - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \mu Y - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu v - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ \mu Z - \frac{\partial}{\partial t}\left(\mu w - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) &= \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{14}$$

A harmadik müveletből (9)′ és (10)′ fölhasználásával:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} + \frac{\partial p w}{\partial z} = 0. \tag{15}$$

Végre a negyedik müveletből (13) alapján:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu u - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu v - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial y}\right) + $$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu w - \frac{n_1 n_2}{\varkappa p} \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = 0. \tag{16}$$

A (14), (15), (16) alatt jegyzett öt egyenletünk vagyon μ, p és u, v, w öt változónk meghatározására, a mely öt változó (11), (12) meg $(13)_1''$ és $(13)_2''$ alatt közvetetlenül kifejezi a μ_1, μ_2, p_1, p_2 meg u_1, v_1, w_1 és u_2, v_2, w_2 régi tíz változót az eredeti tíz egyenlet: (3), (4), (5), (6), (7) értelmében,

Az ismételten előforduló

$$\frac{n_1 n_2}{\varkappa p} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\mu_1 \mu_2}{p_1 p_2} \frac{1}{p}$$

szorzó az ú. n. diffusio-coëfficiens. Közönségesen constansnak tekintik. Ha nem is az, de annyi bizonyos,* hogy úgy a helylyel, mint az idővel kis mértékben változik. Ezentúl jelölje mindig k betü:

$$\frac{n_1 n_2}{\varkappa p} = k. \tag{17}$$

Ezek:

$$\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial t}, \quad \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial x}, \quad \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial y}, \quad \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial z} \tag{17)'$$

mindenesetre mindig kicsinyek.

IV. Abban a föltevésünkben, hogy csak a nehézségi szabad gyorsulás tesz számot, állítsuk a helyhatározás z tengelyét vertikálisan lefelé. Ha g jelöli a nehézségi gyorsulás nagyságát, akkor most mindig és mindenütt

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g.$$

A szabad gyorsulás e meghatározása folytán a (14) alatti harmadik egyenlet baloldalából csak az első tagot μg szükséges megtartani; a hátralévő tag, a melynek eredeti kifejezése

$$\mu \frac{\partial w_1}{\partial t} + \mu_2 \frac{\partial w_2}{\partial t}$$

(mint III. elején látható), nem tesz amahhoz mérten számot. Így tehát a (14) alatti egyenletek jelenleg eképen írhatók:

---

* WINKELMANN: Handbuch der Physik I. 644. l.

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu u - k\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu v - k\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (18)_1$$
$$\mu g = \frac{\partial p}{\partial z} \qquad (18)_2$$

ha t. i. most már egyúttal a (17) alatti jelölést használjuk.

Minthogy az

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \frac{\partial \mu_2}{\partial t}\right)$$

kifejezés igen kicsiny, mint (3) és (4) mutatja, ennélfogva

$$\frac{\partial \mu u}{\partial t} \quad \text{és} \quad \frac{\partial \mu v}{\partial t} \qquad (19)'$$

helyett

$$\mu\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{és} \quad \mu\frac{\partial v}{\partial t} \qquad (19)''$$

jegyezhető. Továbbá ugyanabból az okból

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) \quad \text{és} \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(k\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) \qquad (20)'$$

helyett

$$\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) \quad \text{és} \quad \mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{k}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) \qquad (20)''$$

írható. Tényleg (19)′ és (20)′ helyett (19)″ és (20)″ tétetvén $(18)_1$ egyenleteibe:

$$-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(u - \frac{k}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial x}$$
$$-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(v - \frac{k}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (21)_1$$
$$\mu g = \frac{\partial p}{\partial z} \qquad (21)_2$$

egyenletekhez jutunk.

A $(21)_1$ alatti egyenletek baloldalaiban a zárójelek tartalma (13) szerint oly rendű kicsiny, mint a mozgási sebességek. Azonkívül (8) és (9)′ értelmében

$$\frac{p}{\mu} = \frac{n_1\mu_1 + n_2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$$

nagy sebességnek a négyzete. Ekként $(21)_1$ nyomán

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{és} \quad \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial y}$$

másodrendű igen kicsinyek: p a helytől nagy megközelítésben csupán a z koordináta által függőnek tekinthető és ennek következtében $(21)_2$ szerint a μ is.* Ebből az okból $(17)'$ alatt különösen kicsinyek az x és y szerinti deriváltak. Minthogy már μ és k valódi értékei igen kis mértékben különböznek csak oly értékektől, a melyek csupán z és t függvényei, így $(21)_1$ alatt k és a deriválatlanul előforduló μ valódi értékei helyett ezek az értékek gondolhatók. Ebből folyólag pedig nagy megközelítéssel létezik olyan függvény φ, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{22}$$

Írjuk:

$$\int_{t_0}^{t} \varphi \partial t = \psi,$$

a hol a t_0 tetszésre választott időt jelentsen $(t_0 \lesseqgtr t)$. A (22)-ből következtethetőleg léteznek olyan ξ és η az időtől független functiok, hogy

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \xi, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} + \eta.$$

De igen nagy idő mulva u és v eltűnnek. Hogyha tehát t_0 igen nagy időt jelent, akkor ξ és η mellőzhető kicsinyek:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{23}$$

---

* Egyúttal tehát (11) és (12) értelmében nemkülönben a μ_1 és μ_2 sűrűségek s p_1 és p_2 nyomások (a vertikális mozgás oly lassú tehát, hogy a horizontális mozgás által a sűrűségek és nyomások a horizontális átmetszetekben folyvást nagy megközelítéssel kiegyenlítvék).

Megjegyzendő, hogy valamint φ, úgy ψ is additive z és t tetszőleges függvényét tartalmazhatja.

V. A (14) alatti egyenletekre vonatkozólag mindezek meg lévén állapítva, folyamodjunk most a (15) és (16) alatti egyenletekhez.

A következő jelölést használván:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta \tag{24}$$

és élve a (17) alatti jelöléssel is, továbbá számba véve, hogy IV. értelmében p, μ, k az x és y koordinátától igen kis mértékben függenek, így írhatjuk a (15) és (16) alatti egyenletet:

$$\frac{\partial p}{\partial z} w + p\theta + \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} w + \mu\theta + \frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial \mu}{\partial z}\right). \tag{26}$$

Most ki fogom mutatni, hogy (26) baljának két első tagja nem tesz számot. Ennek a kimutatása most még a legfőbb elintézni való.

a) Deriváljuk a (25) alatti egyenletet z szerint. Ha azután tekintetbe veszszük a $(21)_2$ egyenletet, ehhez jutunk:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{p}{g\mu}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial z} w + \theta + \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0. \tag{27}$$

Az utolsó tag

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2}\left(\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \frac{\partial \mu_2}{\partial t}\right)$$

bizonyosan oly rendű kicsiny, mint

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \mu_1}{\partial t} \quad \text{és} \quad \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial \mu_2}{\partial t},$$

sem magasabb, sem alacsonyabb rendű. A (3) és (4) szerint* oly

* számértékre (vagyis hossz-egységgel szorozva)

rendű kicsiny tehát, mint a mozgási sebességek $(u_1 v_1 w_1)$ és $(u_2 v_2 w_2)$. Az u, v, w jelentményénél fogva pedig (27)-nek első, harmadik és negyedik tagja ** legalább olyrendű kicsiny, mint a mozgási sebességek. Így a hátralévő tag

$$\frac{p}{g\mu}\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

*legalább oly rendű kicsiny, mint a mozgási sebességek. De $p:\mu$ nagy sebesség négyzete (IV). Ekként

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}$$

**magasabb rendű kicsiny, mint a mozgási sebességek, tehát a θ nagy megközelítésben független a z koordinátától.

b) Ebből (25) segélyével az következtethető, hogy θ is magasabb rendű kicsiny, mint a mozgási sebességek. Ugyanis a (25) a $(21)_2$ alapján így van:

$$\frac{g\mu}{p}w + \theta + \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t} = 0. \qquad (25)'$$

Tegyük fel, hogy θ nem magasabb rendű kicsiny, mint a mozgási sebességek. Ekkor (25)' első tagja elhagyható, mert w legalább oly rendű kicsiny, mint a mozgási sebességek és $p:\mu$ nagy sebességnek a négyzete:

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t} + \theta = 0.$$

Mivel a θ nagy megközelítésben csak x, y, t függvénye, a p pedig másodrendű nagy megközelítésben csak z és t függvénye, így ebből az egyenletből folyólag, annak mindkét tagja csak t-től függ számot tevően abban a föltevésünkben, hogy θ nem magasabb rendű kicsiny, mint a mozgási sebességek. E szerint az edény egy térelemét $D\tau$-al jelölvén

$$\int \theta D\tau = \theta \int D\tau \qquad (28)$$

** számértékre (vagyis terület-egységgel szorozva) igen nagy megközelítéssel tehető. Ámde ha az integrálást az edény egész térfogatára kiterjesztjük, e térfogat felületének egy elemét $D\sigma$-val jelöljük és a $D\sigma$ kifelé mutató normálisának iránycosinusai α, β, γ, akkor (24) tekintetbe vételével

$$\int \theta D\tau = \int (\alpha u + \beta v + \gamma w)\, D\sigma.$$

Az u, v, w jelentménye szerint (10):

$$p(\alpha u + \beta v + \gamma w) =$$
$$= p_1(\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1) + p_2(\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2).$$

Itt a második sorban lévő két zárójel tartalma a két mozgási sebesség normális-menti componense, tehát mindegyik zárójel tartalma $= 0$. Következőleg

$$\int \theta D\tau = 0$$

és (28) szerint igen nagy megközelítéssel, nagyobbal, mint a mily nagy a mozgási sebességek kicsiségi rendje: $\theta = 0$, ellentmondásban azzal a föltevésünkkel, hogy θ nem magasabb rendű kicsiny, mint a mozgási sebességek.

c) Minthogy θ magasabb rendű kicsiny, mint a mozgási sebességek, ellenben $\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t}$ épen oly rendű kicsiny *a)*, így a (26) alatti egyenlet baljának második tagja törölhető. Töröltetvén, abból folyólag, hogy μ és k az x, y koordinátáktól számot tevően nem függenek (IV), az következik, hogy w sem függ számottevően az x és y koordinátától. Ebből pedig az következtethető, hogy w is magasabb rendű kicsiny, mint a sebességek.

Ugyanis magasabb rendű megközelítéssel, mint a milyen rendű kicsinyek a mozgási sebességek $\theta = 0$ *b)*, azaz (24):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Szorozzuk meg ezt az egyenletet ψ-vel (23) és $D\tau$ térelemmel, azután integráljuk az edény térfogatára. Partialis integrálás rendén

$$\int \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial z}\, w \right] D\tau = 0,$$

mert *b)* a felületen:

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

Minthogy a ψ additive az idő és a z koordináta tetszőleges függvényét tartalmazza, w pedig számottevően csak az idő és a z koordináta függvénye, bármely időpillanathoz meghatározható a ψ úgy, hogy

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} w$$

mindenütt pozitiv, és e mellett $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ ne kis értékű legyen. Következőleg másodrendű megközelítéssel $w = 0$ tehető.

VI. Ezek után a (26) alatti egyenlet így írható:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) \tag{29}$$

és a (25) egyenlet szerint

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} = -\left(\frac{1}{p} \frac{\partial \mu}{\partial z} w + \theta\right) \tag{30}$$

magasabb rendű kicsiny, mint a mozgási sebességek.

Az előbbi egyenletből könnyű szerrel levezethetők már az egyes gáz-nyomások p_1 és p_2 egyenletei. Ugyanis (12) szerint

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{n_1}{n_2 - n_1}\left(n_2 \frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{n_1}{n_2 - n_1}\left(n_2 \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}\right)$$

azaz, a második egyenletben $(21)_2$ is tekintetbe vétetvén:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{n_1 n_2 \mu}{n_2 - n_1}\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{1}{n_2 \mu} \frac{\partial p}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{n_1 n_2 \mu}{n_2 - n_1}\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{g}{n_2}\right).$$

Minthogy $n_2 \mu$ oly rendű mennyiség, mint p, az $\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t}$ pedig magasabb rendű kicsiny, mint a mozgási sebességek; minthogy továbbá n_2 igen nagy sebességnek a négyzete: a jobboldali második tagok elhagyhatók és

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}=\frac{n_1 n_2}{n_2-n_1}\frac{\partial \mu}{\partial t}$$
$$\frac{\partial p_1}{\partial z}=\frac{n_1 n_2}{n_2-n_1}\frac{\partial \mu}{\partial z}$$

írható. Ebből folyólag (29) értelmében ugyanaz az egyenlet illeti meg a p_1 nyomást, mint a μ sűrűséget:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial p_1}{\partial z}\right) \tag{31}$$

és ugyanez az egyenlet illeti meg a p_2 nyomást is, mindegyiket magasabb rendű megközelítéssel, mint a mily rendű kicsinyek a mozgási sebességek. Elég jó megközelítéssel, mint Kirchhoff-nál (nála vertikális oldalfalazatú edényt illetőleg):

$$\frac{\partial p_1}{\partial t}=k\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2}. \tag{32}$$

VII. A mennyiben csupán az V. czikkely végső egyenletének és a VI. czikkely egyenleteinek az előállítását akarjuk szem előtt tartani, a következő egyszerűbb eljárást végezhetjük:

Úgy, mint Kirchhoff, az (1) és (2) alatti egyenletek jobboldalaiból teljesen kihagyjuk az első

$$\mu_1\frac{du_1}{d_1 t}\text{ stb.,}\quad \mu_2\frac{du_2}{d_2 t}\text{ stb.}$$

tagokat. Akkor a IV. czikkelyben

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial p}{\partial z}=g\mu$$

egyenleteink vannak az ottaniak helyett. Ezek szerint p, tehát μ is csak z és t függvénye, a mi meg levén állapítva, most a IV. czikkely fejtegetései elesnek, az V. czikkely pedig úgy módosul, hogy abban *c)* alatt a másodrendű megközelítéssel helyes

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

egyenletet az ottani φ helyett a z és t oly függvényével szorozzuk meg, a melynek z szerint képzett deriváltja mindig és mindenütt oly előjelű, mint w. Most az edény térfogatára szóló partialis integrálás által másodrendű megközelítéssel,

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial z} w D\tau = 0$$

tehát, minthogy $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ lehet nem igen kicsiny, a w másodrendű igen kicsiny és így $w = 0$ használható.

Egyebekben a tárgyalás menete a régi.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1898 április 18.-án tartott üléséből.)