

# A FOURIER-FÉLE MECHANIKAI ELV ALKALMAZÁSÁNAK ALGEBRAI ALAPJA.

FARKAS GYULA I. tagtól.

Már két közleményben következtettem ezt. Most ebben a harmadikban aránylag igen egyszerű módon teszem, a melynél egyszerűbbet találni aligha lehetséges, a mennyiben t. i. számon tartjuk, hogy akárhány egymástól független homogen, lineáris egyenlőtlenség rendelhető össze, mihelyt a vezérmennyiségek száma kettőnél nagyobb. Nem számol ezzel az eshetőséggel egy újabb időben közölt e tárgyú német dolgozat sem (HENNEBERG, Crelle Jour. 1894). Pedig leginkább ennek az általánosságnak a szempontjából hasznos az alkalmazás általános analitikai módszere.

Legyen

$$\begin{aligned}
 A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \dots + A_{1n}u_n &\equiv \theta_1 \geq 0 \\
 A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \dots + A_{2n}u_n &\equiv \theta_2 \geq 0 \\
 \dots &\dots \\
 \dots &\dots
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

egyenlőtlenségi rendszerünk, és ennek minden megoldásában teljesüljön:

$$A_1u_1 + A_2u_2 + \dots + A_nu_n \equiv \vartheta \geq 0.
 \tag{2}$$

A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapját a következő tantétel képezi: mindig léteznek olyan nem negatív, az  $u$  vezérmennyiségektől független multiplierok  $\lambda$ , hogy

$$\vartheta \equiv \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \dots
 \tag{3}$$

E tantétel lehető legegyszerűbb, egészen szigorú és teljes bebizonyítását szándékozom adni a következőkben.

\*

A (2)-ben lévő  $A_n$ oefficiens legyen 0-tól különböző. Számítsuk ki a (2)-ből az  $u_n$  vezérmennyiséget, mint a többi  $u$  és mint  $\vartheta$  függvényét, azután (1)-ben helyettesítsük mindenütt ezzel a függvényvel. Ez is megtörténvén, osszszuk el az egyes egyenlőtlenségeket a  $\vartheta$  bennük lévőoefficiensének abszolút értékével (a mennyiben az 0-tól különbözik). Az eljárás eredménye legyen:

$$\begin{aligned} \vartheta + p_1 &\equiv \theta_{p_1} \geq 0, & \vartheta + p_2 &\equiv \theta_{p_2} \geq 0, \dots \\ r_1 &\equiv \theta_{r_1} \geq 0, & r_2 &\equiv \theta_{r_2} \geq 0, \dots \\ -\vartheta + q_1 &\equiv \theta_{q_1} \geq 0, & -\vartheta + q_2 &\equiv \theta_{q_2} \geq 0, \dots \end{aligned} \quad (1)'$$

a hol  $p_1, p_2, \dots, r_1, r_2, \dots, q_1, q_2, \dots$  az  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  vezérmennyiségek lineáris homogen, egész függvényeit jelentik.

A föltevés szerint e rendszernek minden megoldásában, azaz minden öt kielégítő  $\vartheta, u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  értékrendszerben

$$\vartheta \geq 0. \quad (2)'$$

Az (1)' első sorában szükségképen létezik legalább egy egyenlőtlenség, mert ha az első sor nem léteznék, akkor lehetne  $\vartheta < 0$ .

Most az (1)' rendszer helyett egy más t irok fel, a mely abban különbözik ettől, hogy ennek a harmadik sora helyett oly egyenlőtlenségeket tartalmaz, a melyek (1)'-ből a  $\vartheta$  eliminálásai által keletkeznek:

$$\begin{aligned} \vartheta + p_1 &\equiv \theta_{p_1} \geq 0, & \vartheta + p_2 &\equiv \theta_{p_2} \geq 0, \dots \\ r_1 &\equiv \theta_{r_1} \geq 0, & r_2 &\equiv \theta_{r_2} \geq 0, \dots \\ p_1 + q_1 &\equiv \theta_{p_1} + \theta_{q_1} \geq 0, & p_1 + q_2 &\equiv \theta_{p_1} + \theta_{q_2} \geq 0, \dots \\ p_2 + q_1 &\equiv \theta_{p_2} + \theta_{q_1} \geq 0, & p_2 + q_2 &\equiv \theta_{p_2} + \theta_{q_2} \geq 0, \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{aligned} \quad (1)''$$

Ennek is minden megoldásában

$$\vartheta \geq 0. \quad (2)''$$

Tegyük fel ugyanis, hogy ebben lehet  $\vartheta < 0$ . Ekkor az első sorából folyólag minden  $p > 0$ . Ha  $p_1$  a legkisebb  $p$ , akkor a  $\vartheta$  birhat benne még  $-p_1$  értékkel is. Így azonban az (1)'' harmadik sora szerint az (1)' harmadik sora is teljesül, tehát az egész (1)' teljesül, már pedig a föltevés szerint ez csak nem negatív  $\vartheta$  értékek mellett elégíthető ki: az (1)'' minden megoldásában is csak  $\vartheta \geq 0$  lehet.

Ez meg lévén állapítva, szorítkozzunk most egyelőre (1)'' ama speciális megoldásaira, a melyekben egy  $p$  sem negatív, tehát a melyekben:

$$\begin{aligned}
 p_1 &\geq 0, & p_2 &\geq 0, \dots \\
 r_1 &\geq 0, & r_2 &\geq 0, \dots \\
 p_1 + q_1 &\geq 0, & p_1 + q_2 &\geq 0, \dots \\
 p_2 + q_1 &\geq 0, & p_2 + q_2 &\geq 0, \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{aligned} \tag{1}_1$$

Mindenesetre létezik (1)''-nek oly megoldása, a mely (1)<sub>1</sub>-nek eleget tesz (t. i. legalább is azzal, hogy minden  $p, q, r$  eltűnik).

Az (1)<sub>1</sub>-ben legalább egy bizonyos  $p$  mindig  $= 0$ ; mert ha minden  $p$  egyszerre  $> 0$ , akkor lehetne  $\vartheta < 0$  az (1)''-ben, továbbá ha nem egyszerre minden  $p$  lehetne  $> 0$ , akkor egyszerre is lehetne (mivel külön-külön helyes egyenlőtlenségek összege is helyes).

Legyen már most, hogy (1)<sub>1</sub> minden megoldásában  $p_1 = 0$ , tehát mindben

$$-p_1 \geq 0, \tag{2}_1$$

és tegyük fel, mikép  $n - 1$  vezérmennyiség esetében áll a bebizonyítandó tétel. Akkor (1)<sub>1</sub> és (2)<sub>1</sub> viszonyát illetőleg áll, mert ezekben már csak  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  fordulnak elő. Léteznek tehát olyan nem negatív  $P, Q, R$  multiplicatorok, hogy

$$\begin{aligned}
 -p_1 &\equiv P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + R_1 r_1 + R_2 r_2 + \dots \\
 &+ O_{11} (p_1 + q_1) + Q_{12} (p_1 + q_2) + \dots \\
 &+ O_{21} (p_2 + q_1) + Q_{22} (p_2 + q_2) + \dots \\
 &\dots \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{3}_1$$

Ennek a segedelmével pedig már  $n$  vezérmennyiség esetére is következtethető az alaptétel, vagyis következtethető a (3).

A (3)<sub>1</sub> tekintetbe vételével (1)''-ből könnyen fölismerhető műveletek rendén következik:

$$\begin{aligned}
 & (1 + P_1) \theta_{p_1} + P_2 \theta_{p_2} + \dots + R_1 \theta_{r_1} + R_2 \theta_{r_2} + \dots \\
 & + Q_{11} (\theta_{p_1} + \theta_{q_1}) + Q_{12} (\theta_{p_1} + \theta_{q_2}) + \dots \\
 & + Q_{21} (\theta_{p_2} + \theta_{q_1}) + Q_{22} (\theta_{p_2} + \theta_{q_2}) + \dots \\
 & + \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \equiv (1 + P_1 + P_2 + \dots) \theta.
 \end{aligned}$$

---

(A M. Tud. Akadémia III. osztályának 1898 október 17.-én tartott üléséből.)