

# ÁLTALÁNOS MECHANIKAI ELVEK AZ ÆTHER SZÁMÁRA.

FARKAS GYULA 1. tagtól.

A mechanika tudományos tárgyalása nem érte el még azt az általánosságot, a mely megilleti. Különböző szempontokból lehetséges az általánosság fokozása s hasznos az a ponderabilis anyagi rendszerek körében is; oly jelenségek mechanikai interpretatiojában pedig, a melyek az æther hypothesisére utaltak, okvetetlenül szükséges.

Ezúttal az általánosítás három különböző módjára szándékozom reámutatni. Mind a három a virtuális elmozdulások principiumához fűződik. Még pedig nem a specialisabb jelentésű egyenlőségi elvet értem ez alatt, hanem az először FOURIER-től, később GAUSS-tól formulázott egyenlőtlenségi elvet. Ez már a maga eredeti fogalmazása szerint is tartalmasabb, mert ha egyenlőtlenségek állanak fenn a virtuális elmozdulások componensei között, úgy a nyugalom vagy mozgás számára a határozott egyenleteken kívül határozott egyenlőtlenségeket is szolgáltat: nyugalomban a határozott egyenletek és egyenlőtlenségek rendszere foglalja magában a nyugalom szükséges és elégséges föltételeit; mozgásban a határozott egyenletek rendszere leírja a mozgást s a határozott egyenlőtlenségek rendszere magában foglalja azokat a szükséges és elégséges föltételeket, a melyek alatt a mozgás valóban az egyenletek szerint történik.

a) De úgy az egyenlőtlenségi, mint az egyenlőségi elv, a maga eredeti fogalmazásában közönségesen csak akkor bír elfogadható értelemmel, a midőn nincs környezeti ellenállás és nincs surlódás, mert a szabad erők fogalma a kényszer abstractiojában

gyökeredzik, a melylyel közönségesen elválaszthatatlanul együtt jár annak a módosulatnak az abstractioja, a melyet a kényszer körülményei a környezeti ellenállásban létesítenek és a kényszer-től föltételezett surlódásnak az abstractioja. Az I. fejezetben olyképen általánosítom az egyenlőtlenégi elvet, hogy a kényszernek e két járulékára is kiterjedjen az.

*b)* Egy más általánosítás (II. fejezet) a kényszer analitikai definitiójára vonatkozik. Közönségesen fölteszik, hogy a kényszer kifejezését egyetlen relatio-rendszer szolgáltatja, nevezetesen homogen egész és lineáris egyenletek és egyenlőtleniségek egyetlen rendszere. Azonban ez a föltevés kelleténél szűkebbre szorítja a mechanika tartalmát. Egészen egyszerű esetek is megjelölhetők, olyanok, a melyekben egynél több relatio-rendszer szükséges a virtualis elmozdulások meghatározására. (Anyagi pont egy ellenálló prisma valamelyik élén stb.)

*c)* A két első fejezet különlevő tömegpontok rendszerére vonatkozik. A III. fejezet a folytonos térfoglaláshoz való áttérés földadatát intézi el s e képen útát nyit az infinitesimalis számítás módszereinek. Ehhez egy harmadik általánosítás kapcsolódik, a mely a testeknek oly alkatrészekből való összetételét illeti, a melyek különböző szabad erőket és kényszereket uralnak. Föltehető ugyanis, hogy a különböző alkatrészek között átalakulások léteznek, olyszerűek, mint pl. a halmazállapotok változásában vagy az allotropicus modificatiókban, vagy a vegyfolyamatokban. A kényszer változhatóságának egy sajátos módja jön ezáltal tekintetbe.

*d)* A IV. fejezet annak a hypothesisnek a befogadásával foglalkozik, hogy független anyagi rendszerben a koordinatengyelyek bizonyos helyzetei mellett szabad erők nem hatnak, és utalásokat tartalmaz az előadottaknak az aethert illető alkalmazásaira.

## I.

1. §. Az  $m(x, y, z)$  tömegpontra  $(X, Y, Z)$  szabad erő és  $(X', Y', Z')$  ellenállási erő hasson, úgy, hogy  $m\ddot{x} = X + X'$  stb., tehát, ha  $(\overline{\partial x}, \overline{\partial y}, \overline{\partial z})$  egészen tetszésszerű elemi elmozdulás, akkor  $n$  tömegpontból álló anyagi rendszert illetőleg:

$$\sum^{(n)} [(m\ddot{x} - X) \delta x + \dots] = \sum^{(n)} (X' \delta x + \dots)$$

vagy más jelölés-móddal élve:

$$\sum_{i=1}^{i=3n} (m_i \ddot{p}_i - P_i) \overline{\delta p}_i = \sum_{i=1}^{i=3n} P'_i \delta p_i. \quad (1)$$

A virtualis elmozdulások componenseit  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  illetőleg  $\delta p$ -vel jelölvén, ezek meghatározására a következő relatiorendszer szolgáljon:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=3n} A_{1i} \delta p_i &\equiv a_1 = 0, & \sum_{i=1}^{i=3n} A_{2i} \delta p_i &\equiv a_2 = 0, \dots, & \sum_{i=1}^{i=3n} A_{li} \delta p_i &\equiv a_l = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=3n} B_{1i} \delta p_i &\equiv \beta_1 \geq 0, & \sum_{i=1}^{i=3n} B_{2i} \delta p_i &\equiv \beta_2 \geq 0, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

A ( $P'$ ) vagyis ( $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$ ) erőket úgy bontsuk két összetevőre ( $H$ ) és ( $\mathfrak{B}$ ) vagyis ( $\Xi$ ,  $H$ ,  $Z$ ) és ( $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$ ), hogy az előbbi összetevők kielégítsék a

$$\sum_{i=1}^{i=3n} H_i \delta p_i \geq 0 \quad (3)$$

egyenlőtlenséget, az utóbbiak pedig ellenkezőre változtatott előjellel kielégítsék a virtuális elmozdulások relatióit, azaz, hogy

$$-\sum_{i=1}^{i=3n} A_{1i} \mathfrak{B}_i = 0, \text{ stb.} \quad -\sum_{i=1}^{i=3n} B_{1i} \mathfrak{B}_i \geq 0, \text{ stb.} \quad (4)$$

legyen.

Ez a fölbontás mindig lehetséges.

1. A lehetőség bebizonyítása végett fölteszem, hogy (2) alatt minden egyenlet független a többi egyenletek rendszerétől, továbbá, hogy a (2) alatti egyenlőtlenségekből nem következtethető olyan egyenlőtlenség, a melynek a baloldala vagy identikusan vagy az egyenletek alapján eltűnik. Mindenesetre olyan alakra vezethető a relatiorendszer, hogy ezek a föltételek teljesüljenek. Ugyanis egyenlőtlenségekből csak nem-negatív multiplicatorok szerint való összeadással következtethetők más egyenlőtlenségek; \* ha azon-

---

\* «A FOURIER-féle mechanikai elv alkalmazásának algebrai alapja». Math. és természettud. Értesítő XVI. 1898.

ban identikusan, vagy az egyenletek értelmében

$$\mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2 + \dots = 0, \quad (\mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \dots),$$

akkor a mely  $\mu$  nem zérus, annak a  $\beta$  szorzója zérus, a miatt, hogy egy  $\beta$  sem lehet negatív; tehát a zérustól különböző  $\mu$  multiplicatorok  $\beta$  szorzóira (2)-ben kirótt  $\geq 0$  követelés helyett  $= 0$  követelés róható ki (2)-ben. E módon elérhető, hogy az egyenlőtlenségek baloldalai nem-negatív (és nem csupa eltűnő) multiplicatorok szerint nem szolgáltathatnak többé oly összeget, a mely vagy identikusan, vagy az egyenletek következtében eltűnik. A mennyiben pedig az egyenletek rendszere nem teljesítené a reájuk szabott föltételt, egy vagy több egyenlet törlése után teljesíteni fogja a nélkül, hogy a tartalma változást szenvedne.

2. A bizonyításra térve, vegyük figyelembe, hogy a (3) alatti egyenlőtlenség a (2) alatti rendszer minden megoldásában teljesülni tartozik. Ebből folyólag kell létezniök oly  $\lambda$  és  $\mu$  multiplicatoroknak, hogy

$$H_i = \sum_{k=1}^{k=l} A_{ki} \lambda_k + \sum_{k=1}^{k=\dots} B_{ki} \mu_k, \quad (\mu_k \geq 0, i=1, 2, \dots, 3n). \quad (5)$$

Mivel  $H = P' - \mathfrak{F}$ , így azt kell bebizonyítani, hogy a  $\mathfrak{F}$  componentek a (4) alatti relatiókon kívül még a következőknek is eleget tehetnek:

$$-\mathfrak{F}_i = -P'_i + \sum_{k=1}^{k=l} A_{ki} \lambda_k + \sum_{k=1}^{k=\dots} B_{ki} \mu_k, \quad (\mu_k \geq 0, i=1, 2, \dots, 3n). \quad (6)$$

Beírva ezeket a kifejezéseket (4)-be a  $\mathfrak{F}$ -k helyett, a  $\lambda$  és  $\mu$  multiplicatorok között fönnálló relatiókhöz jutunk, és már csak azt kell megmutatni, hogy lehetnek olyanok a  $\lambda$  multiplicatorok s lehetnek oly nem-negatívok a  $\mu$  multiplicatorok, hogy kielégítik azokat a relatiókat.

Éljünk a következő jelölésekkel:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=3n} A_{ki} A_{hi} &\equiv (AA)_{kh}, & \sum_{i=1}^{i=3n} B_{ki} B_{hi} &\equiv (BB)_{kh}, \\ \sum_{i=1}^{i=3n} A_{ki} B_{hi} &\equiv (AB)_{kh} \equiv (BA)_{hk}. \end{aligned} \quad (7)$$

Akkor a kitűzött helyettesítések után a (4) alatti relatiók így jegyezhetők:

$$\begin{aligned}
 &L_h + (AA)_{h1} \lambda_1 + (AA)_{h2} \lambda_2 + \dots + (AA)_{hl} \lambda_l + \\
 &\quad + (AB)_{h1} \mu_1 + (AB)_{h2} \mu_2 + \dots = 0, \\
 &M_k + (AB)_{1k} \lambda_1 + (AB)_{2k} \lambda_2 + \dots + (AB)_{lk} \lambda_l + \\
 &\quad + (BB)_{1k} \mu_1 + (BB)_{2k} \mu_2 + \dots \geq 0, \\
 &\quad \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \dots \\
 &\quad (h=1, 2, \dots, l, k=1, 2, \dots)
 \end{aligned} \tag{8}$$

a hol az  $L$  és  $M$ -féle tagok függetlenek a  $\lambda$  és  $\mu$  multiplicatoroktól. Itt a  $\lambda$  multiplicatorok az egyenletekből kiszámíthatók a  $\mu$  multiplicatorok függvényei gyanánt, mert az egyenleteknek a  $\lambda$  határozatlanok mellől képezett determinánsa (négyzetek összege) nem tűnik el, t. i. ellenkező esetben nem állana, hogy a (2) alatti egyenletek mindegyike független a többitől, már pedig ez föl van tételezve (1!). A  $\lambda$  multiplicatorok előzetesen semmi megszorításnak sincsenek alávetve. Ha tehát kiszámítván azokat az egyenletekből mint a  $\mu$  multiplicatorok függvényeit, függvényalakjaikat bejegyezzük az egyenlőtlenségekbe, úgy annak bebizonyítása marad hátra, hogy a  $\mu$  nem-negatív multiplicatorok meghatározhatók az egyenlőtlenségek követelése szerint.

Használjuk a következő determinans-jelölést:

$$\begin{vmatrix}
 (BB)_{ki} & (BA)_{k1} & (BA)_{k2} & \dots & (BA)_{kl} \\
 (AB)_{1i} & (AA)_{11} & (AA)_{12} & \dots & (AA)_{1l} \\
 (AB)_{2i} & (AA)_{21} & (AA)_{22} & \dots & (AA)_{2l} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 (AB)_{li} & (AA)_{l1} & (AA)_{l2} & \dots & (AA)_{ll}
 \end{vmatrix} \equiv a_{ki}$$

E jelölés alkalmazásával így írhatók azok az egyenlőtlenségek, a melyek (8)-ban a  $\lambda$  multiplicatorok említett kiszámítása és helyettesítése után jelentkeznek:

$$N_k + a_{k1} \mu_1 + a_{k2} \mu_2 + \dots \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \dots \tag{9}$$

(k=1, 2, ...)

a hol az  $N$ -féle tagok függetlenek a multiplicatoroktól.

3. Annak a bebizonyítása van hátra, hogy a  $\mu$  multiplicatorok mindig megválaszthatók úgy, hogy ezek az egyenlőtlenségek teljesüljenek.

Ha ebben az önkényes követelésben :

$$a_{k1}\mu_1 + a_{k2}\mu_2 + \dots \equiv \theta_k \geq 0, \mu_1 \geq 0, \mu_2 \geq 0, \dots \quad (10)$$

(k=1, 2, ...)

egyetlen  $\theta$  sem olyan, hogy csak zérus lehet, akkor úgy is megválaszthatók (10)-ben a  $\mu$  határozatlanok, hogy minden  $\theta$  nagyobb legyen a zérusnál, mert ha a  $\mu$  határozatlanok  $\mu'_1, \mu'_2, \dots$  értékrendszerében  $\theta_1 > 0, \mu''_1, \mu''_2, \dots$  értékrendszerében  $\theta_2 > 0$ , s i. t., akkor a  $\mu$  határozatlanok  $\mu'_1 + \mu'_2 + \dots, \mu''_1 + \mu''_2 + \dots, \dots$  értékrendszerében  $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$ , s i. t. Mihelyt azonban lehetnek olyanok a  $\mu$  mennyiségek (10)-ben, hogy minden  $\theta$  nagyobb mint zérus, már akkor nyilvánképen lehetnek olyanok, hogy a (9) megálljon.

Azt kell tehát kideríteni, hogy (10)-ben nincs olyan  $\theta$ , a mely ott csak zérus lehet. Ez valóban így vagon. Tegyük fel ugyanis, hogy a (10)-ben  $\theta_1$  csak  $=0$  lehet. Akkor állítható, hogy (10) minden megoldásában beválik ez az egyenlőtlenség:  $-\theta_1 \geq 0$ . Kell tehát létezniök oly nem-negatív multiplicatoroknak  $\nu_1 - 1, \nu_2, \nu_3, \dots, \varrho_1, \varrho_2, \dots$ , hogy szerintük

$$(\nu_1 - 1)\theta_1 + \nu_2\theta_2 + \dots + \varrho_1\mu_1 + \varrho_2\mu_2 + \dots \equiv -\theta_1,$$

vagyis

$$\varrho_1 + \nu_1 a_{11} + \nu_2 a_{21} + \dots = 0$$

$$\varrho_2 + \nu_1 a_{12} + \nu_2 a_{22} + \dots = 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$(\nu_1 \geq 1, \nu_2 \geq 0, \nu_3 \geq 0, \dots, \varrho_1 \geq 0, \varrho_2 \geq 0, \dots)$$

A  $\nu$  mennyiségek és  $\mu$  mennyiségek száma egyezik, mert mindegyik akkora, a mekkora (2)-ben az egyenlőtlenségek száma. Szorozzuk meg a mostani egyenleteket rendre a  $\nu_1, \nu_2, \dots$  multiplicatorokkal s azután adjuk össze azokat. Az eredmény ebben az alakban állítható elő:

$$\left. \begin{array}{cccc} \nu_1 \varrho_1 + \nu_2 \varrho_2 + \dots + & & & \\ \Sigma \Sigma (BB)_{ki} \nu_k \nu_i & \Sigma (BA)_{k1} \nu_k & \Sigma (BA)_{k2} \nu_k & \dots \Sigma (BA)_{kl} \nu_k \\ \Sigma (AB)_{1i} \nu_i & (AA)_{11} & (AA)_{12} & \dots (AA)_{1l} \\ \Sigma (AB)_{2i} \nu_i & (AA)_{21} & (AA)_{22} & \dots (AA)_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots \cdot \\ \Sigma (AB)_{li} \nu_i & (AA)_{l1} & (AA)_{l2} & \dots (AA)_{ll} \end{array} \right| = 0.$$

A determinans négyzetek összege. Ugyanis ha ebből a rendszerből :

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma B_{k1} \nu_k, \quad A_{11}, \quad A_{21}, \quad \dots, \quad A_{l1} \\ \Sigma B_{k2} \nu_k, \quad A_{12}, \quad A_{22}, \quad \dots, \quad A_{l2} \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\ \Sigma B_{k3n} \nu_k, \quad A_{13n}, \quad A_{23n}, \quad \dots, \quad A_{l3n} \end{array} \right\} \nu_k \geq 0$$

a teljes sorok fölhasználásával minden  $(l+1)$ -ed fokú determinanst megalkotunk, azután második hatványra emeljük és összeadjuk azokat, úgy eljutunk az egyenlet determinans-tagjához, t. i.  $l < 3n$ , mert (2) alatt az egyenletek száma kisebb mint a  $\delta p$  variációk száma az 1. alatt kiszabott első alaki megszorítás értelmében. Minthogy az  $\nu_1 \rho_1 + \nu_2 \rho_2 + \dots$  összeg csupa nem-negatív tagokat tartalmaz, az  $(l+1)$ -ed fokú determinansoknak el kellene tűnniök. Ez azonban az 1. alatt kiszabott alaki megszorítások miatt nem lehetséges, mert  $\nu_1 \geq 1$ ,  $\nu_2 \geq 0$ ,  $\nu_3 \geq 0$ , ...

4. Ez a bizonyítás nem illeti meg azt az esetet, hogy az 1. alatt kiszabott alaki megszorítás mellett (2)-ben csak egyenlőtlenségek foglaltatnak, tehát, hogy (2)-ben egyenletek sem explicite, sem implicite elő nem fordulnak. Ekkor ugyanis a (8) alatti rendszert csupán csak az egyenlőtlenségek alkotják :

$$M_k + (BB)_{1k} \mu_1 + (BB)_{2k} \mu_2 + \dots \geq 0, \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0, \dots$$

(k=1, 2, ...)

Hogyha azonban ezekre az egyenlőtlenségekre ugyanazt az eljárást alkalmazzuk, a melyet 3-ban a (9) alatti egyenlőtlenségekre alkalmaztunk, úgy azt találjuk, hogy ezek a kifejezések :

$$(BB)_{1k} \mu_1 + (BB)_{2k} \mu_2 + \dots,$$

(k=1, 2, ...)

egyszerre mind lehetnek nagyobbak mint zérus, mert máskülönben ezek az összegek:  $\Sigma B_{k1} \nu_k$ ,  $\Sigma B_{k2} \nu_k$ , ... egyszerre mind eltűnhetnének, jöllehet a nem-negatív  $\nu_k$  multiplicatorok nem mind zérusok. Ez pedig ellenkezik azzal az alaki föltevással, hogy (2) alatt implicite sem foglaltatnak egyenletek.

2. §. Ahhoz a tisztán mathematikai tételhez jutottunk, hogy ha a  $(\partial x, \partial y, \partial z)$  virtualis elmozdulások a

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1 (a\delta x + b\delta y + c\delta z) &= 0, \\
 \Sigma_2 (a\delta x + b\delta y + c\delta z) &= 0, \dots \\
 \Sigma_1 (a\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z) &\geq 0, \\
 \Sigma_2 (a\delta x + \beta\delta y + \gamma\delta z) &\geq 0, \dots
 \end{aligned} \tag{11}$$

relatióknak vannak alávetve, akkor léteznek olyan erők ( $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$ ), a melyekkel

$$\begin{aligned}
 \Sigma [(m\ddot{x} - X - \mathfrak{X}) \delta x + (m\ddot{y} - Y - \mathfrak{Y}) \delta y + (m\ddot{z} - Z - \mathfrak{Z}) \delta z] &\geq 0, \tag{12} \\
 -\Sigma_1 (a\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + c\mathfrak{Z}) &= 0, \\
 -\Sigma_2 (a\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + c\mathfrak{Z}) &= 0, \dots \\
 -\Sigma_1 (a\mathfrak{X} + \beta\mathfrak{Y} + \gamma\mathfrak{Z}) &\geq 0, \\
 -\Sigma_2 (a\mathfrak{X} + \beta\mathfrak{Y} + \gamma\mathfrak{Z}) &\geq 0, \dots
 \end{aligned} \tag{13}$$

Ez a magában véve tisztán matematikai tétel mechanikai alaptétellé válik, mihelyt valamely tapasztalati meghatározás járul az ( $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$ ) erők analtikái meghatározásához.

Az a mechanikai jelentőség tulajdonítható pedig ez ( $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$ ) erőknek, hogy azok a környezeti ellenállásnak a kényszer körülményeiből származó módosulását és a kényszertől föltételezett surlódást, szóval a (11) alatt kifejezett kényszer járulékait juttatják számbavételhez, hogy tehát a ( $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$ ) erők a kényszer-járulékok reactióját jelenthetik.

Ebben az értelemben tartalmazza (12) a virtualis elmozdulások elvének általánosítását.

## II.

Számolnunk kell azzal a lehetőséggel, hogy a kényszer nem fejezhető ki egyetlen homogen és linearis relatio-rendszerrel, hanem egynél több ilyen rendszer szükséges a kifejezéséhez, úgy hogy mindazok az elemi elmozdulások virtualis elmozdulások, a melyek az egyes rendszerekkel külön-külön megférnek, jöllehet egyetlen relatio-rendszerrel nem határozhatók meg.

Ez esetben a megállapított tétel egyenkint valamennyi relatio-rendszert megilleti, vagyis mindegyik (11)-féle relatio-rendszerhez tartoznak megfelelő módon (12) és (13)-féle relatiók. Az ( $\mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{Y}$ ,  $\mathfrak{Z}$ ) erők pedig a különböző (12) és (13)-féle relatio-rendsze-



esetében is használatba vette a multiplierok módszerét, de eljárásának jogosultságát semmivel sem igazolta. Már pedig kételyek támaszthatók az ellen. Nevezetesen azzal a tárgyra tartozó föltevessel, hogy a virtualis elmozdulások a hely deriválható függvényei, új korlátozás hárul rájuk, ámde a változók érték-tartományának járulékos megszorításai következtében általában megszűnik a multiplieros módszer érvényessége.

Egy egyszerű, de jellemző esetet illetőleg meg fogom állapítani az érvényességet. Ez elégséges lesz arra, hogy mindazt a többi esetet is fölismerjük, a melyben alkalmazható a multiplierok módszere, és hogy e módszer alkalmazásának a megvalósítására is mindenkor képesek legyünk.

Az érvényesség megállapítása azon a lehetőségen alapszik, hogy a föltételezendő deriválhatóságoknak új változók fölvételével homogen lineáris egyenletek által tudunk kifejezést adni.

1. A  $\xi, \eta, \dots$  határozatlan változók  $T$  térben mindenütt differenciálható függvényei legyenek a helynek  $(x, y, z)$ , s e  $T$  tér belsejében mindenütt eleget tegyenek ez egyenlőtlenségnek:

$$A_0\xi + A_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \xi}{\partial z} + B_0\eta + \dots > 0, \quad (1)$$

a  $T$  tér határán,  $S$  fölületen pedig mindenütt eleget tegyenek ennek az egyenlőtlenségnek:

$$L\xi + M\eta + \dots \geq 0. \quad (2)$$

Ez egyenlőtlenségek minden megoldásában teljesüljön a következő integrál-egyenlőtlenség:

$$\int_T \left( X_0\xi + X_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + X_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + X_3 \frac{\partial \xi}{\partial z} + Y_0\eta + \dots \right) D\tau \geq 0. \quad (3)$$

E mellett az  $A_0, B_0, \dots, X_0, Y_0, \dots$  együtthatók a hely folytonos függvényeit, az  $A_1, A_2, A_3, B_1, \dots, X_1, X_2, X_3, Y_1, \dots$  együtthatók a hely differenciálható függvényeit jelentsék a  $T$  térben, és az  $L, M, \dots$  együtthatók a hely folytonos függvényei legyenek a  $T$  tér határán, vagyis az  $S$  fölületen. Az integrál minden egyes  $\xi, \eta, \dots$  függvény-alak esetén teljesen határozott értékkel

bir, mert a mely változók a hely differenciálható függvényei egy térben, azoknak a coordináták szerint képezett partialis deriváltjai szükségképen folytonosak abban a térben.

2. Ez a propositio a következővel helyettesíthető.

Oszszuk a  $T$  tért szorosan a határáig  $S$  fölületig igen kis congruens hasábokra olyképen, hogy a coordináta-síkokhoz igen sűrűen párhuzamos síkokat fektetünk a  $T$  téren keresztül. E hasábok élei  $Dx$ ,  $Dy$ ,  $Dz$  hosszúságúak legyenek a szerint, a mint az  $x$ ,  $y$  vagy  $z$  tengelylyel párhuzamosak. A hely előforduló függvényei mind a hasábok centrumaira  $(x, y, z)$  vonatkozzanak a  $T$  tér belsejében, s majd a következő rövidített jelöléseket használjuk:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(x, y, z) &\equiv \hat{\xi}, \\ \hat{\xi}(x + Dx, y, z) &\equiv \hat{\xi}_I, \quad \hat{\xi}(x, y + Dy, z) \equiv \hat{\xi}_{II}, \quad \hat{\xi}(x, y, z + Dz) \equiv \hat{\xi}_{III}, \\ &\text{stb.} \end{aligned}$$

A  $T$  tér  $S$  határfölületét igen kis  $D\sigma$  részekre osztják a hasábképző síkok. A  $D\sigma$  fölületrészekhez rendelt függvényértékek mindig egy legközelebbi hasáb-centrumra vonatkozzanak.

Legyen már most, hogy a  $Dx$ ,  $Dy$ ,  $Dz$  hosszúságok megválaszthatók oly kicsinyeknek, hogy mihelyt még kisebbek, már tettség szerint megadott kicsinynél kisebb hibával minden hasáb-centrumban:

$$\begin{aligned} A_0 \hat{\xi} + A_1 \frac{\hat{\xi}_I - \hat{\xi}}{Dx} + A_2 \frac{\hat{\xi}_{II} - \hat{\xi}}{Dy} + A_3 \frac{\hat{\xi}_{III} - \hat{\xi}}{Dz} + B_0 \eta + \dots &\geq 0 \quad (4) \\ \left( \frac{\hat{\xi}_I - \hat{\xi}}{Dx} \right)_I - \frac{\hat{\xi}_I - \hat{\xi}}{Dx} &= a'_1 u'_1 \\ \left( \frac{\hat{\xi}_{II} - \hat{\xi}}{Dy} \right)_I - \frac{\hat{\xi}_{II} - \hat{\xi}}{Dy} &= a''_1 u''_1 \\ \left( \frac{\hat{\xi}_{III} - \hat{\xi}}{Dz} \right)_I - \frac{\hat{\xi}_{III} - \hat{\xi}}{Dz} &= a'''_1 u'''_1 \\ \left( \frac{\hat{\xi}_I - \hat{\xi}}{Dx} \right)_{II} - \frac{\hat{\xi}_I - \hat{\xi}}{Dx} &= a'_2 u'_2 \\ \dots &\dots \\ \left( \frac{\eta_I - \eta}{Dx} \right)_I - \frac{\eta_I - \eta}{Dx} &= b'_1 v'_1 \\ \dots &\dots \\ \dots &\dots \end{aligned}$$



Ha még más olyatén korlátozó relatiók is léteznek, mint (1) és (2), úgy ez az identitás áll fenn :

$$\begin{aligned} \sum_T \left( \xi \Sigma A_0 \varphi + \frac{\xi_1 - \xi}{Dx} \Sigma A_1 \varphi + \dots \right) D\tau + \sum_S (\xi \Sigma L \varrho + \dots) D\sigma &\equiv \\ &\equiv \sum_T \left( X_0 \xi + X_1 \frac{\xi_1 - \xi}{Dx} + \dots \right) D\tau, \end{aligned} \quad (8)$$

a hol a belső summálások a különböző (1) és (2)-féle relatiók szerint valók.

A  $Dx$ ,  $Dy$ ,  $Dz$  hosszúságok végtelen kisebbitésével (5) értelmében  $(\xi_1 - \xi) : Dx$  stb. partialis deriváltakká válnak, és pedig az egész  $T$  térben a hely folytonos függvényeit képező deriváltakká. A (8) alatti identitás jobb oldala pedig teljesen határozott tér-integrálba megy át, a mely részleges quadraturákkal olyan tér-integrál és fölületi integrál összegévé alakítható, a melyekben már a  $\xi$ ,  $\eta$ , . . . változók deriváltjai nem fordulnak elő. A (8) alatti identitás baloldalának is birnia kell ezzel a tulajdonsággal. A részleges quadraturák elvégzése után így jelentkezik ez az identitás :

$$\begin{aligned} &\int_T \left[ \left( \Sigma A_0 \varphi - \frac{\partial}{\partial x} \Sigma A_1 \varphi - \frac{\partial}{\partial y} \Sigma A_2 \varphi - \frac{\partial}{\partial z} \Sigma A_3 \varphi \right) \xi + \dots \right] D\tau + \\ &+ \int_S \left[ \Sigma L \varrho - a \Sigma A_1 \varphi - \beta \Sigma A_2 \varphi - \gamma \Sigma A_3 \varphi \right] \xi + \dots D\sigma \equiv \\ &\equiv \int_T \left[ \left( X_0 - \frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial X_3}{\partial z} \right) \xi + \dots \right] D\tau - \\ &- \int_S \left[ (X_1 a + X_2 \beta + X_3 \gamma) \xi + \dots \right] D\sigma, \end{aligned} \quad (9)$$

a hol  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  a  $D\sigma$  fölület-elem befelé mutató normálisának az irány-cosinusai.

Ebből folyólag a  $T$  tér belsejében mindenütt

$$\begin{aligned} X_0 - \left( \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z} \right) &= \Sigma A_0 \varphi - \\ &- \left( \frac{\partial}{\partial x} \Sigma A_1 \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \Sigma A_2 \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \Sigma A_3 \varphi \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_0 - \left( \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} + \frac{\partial Y_3}{\partial z} \right) &= \Sigma B_0 \varphi - \\
 - \left( \frac{\partial}{\partial x} \Sigma B_1 \varphi + \frac{\partial}{\partial y} \Sigma B_2 \varphi + \frac{\partial}{\partial z} \Sigma B_3 \varphi \right), & \quad (10)
 \end{aligned}$$

. . . . .

és e tér határán, vagyis az  $S$  fölületen mindenütt

$$\begin{aligned}
 N_1 a + N_2 \beta + N_3 \gamma &= -\Sigma L \varrho + a \Sigma A_1 \varphi + \beta \Sigma A_2 \varphi + \gamma \Sigma A_3 \varphi, \\
 Y_1 a + Y_2 \beta + Y_3 \gamma &= -\Sigma M \varrho + a \Sigma B_1 \varphi + \beta \Sigma B_2 \varphi + \gamma \Sigma B_3 \varphi,
 \end{aligned} \quad (11)$$

. . . . .

4. Mivel a föltevés szerint az adott korlátozó relatiók, vagyis az (1) és (2)-féle relatiók csupa egyenlőtlenségekből állottak, így a  $\varphi$  és  $\varrho$ -féle multiplicatorok nem-negatív mennyiségeket jelentenek. Ha egyenletek is fordulnának elő közöttük, vagy ha csupa egyenletekből állnának, akkor csupán abban a tekintetben módosul az egész eljárás, hogy az egyenletek multiplicatorai semmi előzetes megszorítást nem viselnek.

Ha némely előforduló függvények bizonyos fölületeken folytonosság-szakadást szenvednének a  $T$  térben, úgy ez a körülmény a részleges quadraturák végzésében figyelembe veendő. A mennyiben azonban a  $\xi, \gamma, \dots$  határozatlanok számára közönséges folytonosság-szakadási fölületek volnának előírva, általában véve az ilyen fölületekhez is tartoznak korlátozó relatiók a  $\xi, \gamma, \dots$  határozatlanok között. Ezek a relatiók a  $\xi, \gamma, \dots$  határozatlanoknak a különös fölületek egyik és másik oldalát megillető értékei között állanak fenn a fölületek pontjaiban. Természetesen ezek a relatiók is (9)-be iktatandók multiplicatoros fölületi integratiók útján, oly módon, mint a határ-fölülethez tartozó relatiók.

2. §. A folytonos térfoglaláshoz térve, tegyük föl egyszersemind, hogy alkotó részeket kell megkülönböztetnünk az anyagi rendszerben, a melyek folytonosságban ugyanazt a tért töltik ki, de különböző kényszereknek és szabad erőeknek vannak alávetve.

Ezentúl a  $\Sigma$  összegelesi jelvény azokra a különböző alkatrészekre vonatkozzék, a melyek mint egy testben foglalt anyagi összetevők jönnek tekintetbe és  $S$  összegelesi jelvény vonatkozzék azokra a különböző testekre, a melyek az anyagi rendszert képe-

zik. Az egyes testekben minden előforduló változó a hely és idő folytonos függvényét jelentse.

Elhöz képest I. (12) helyett némely ottani jelölések megváltoztatásával, a következő egyenlőtlenségünk legyen :

$$\begin{aligned} & S \int_{\tau} [(k\bar{x} - X - \mathfrak{X}) \delta x + (k\bar{y} - Y - \mathfrak{Y}) \delta y + (k\bar{z} - Z - \mathfrak{Z}) \delta z] D\tau \\ & + S \int_{\sigma} [(P + \mathfrak{P}) \delta x + (Q + \mathfrak{Q}) \delta y + (R + \mathfrak{R}) \delta z] D\sigma > 0, \end{aligned} \quad (12)$$

a hol a fölületi integrálok részleges quadraturákból származottaknak tekintendők, azaz úgy fogandók föl, hogy ha  $\alpha, \beta, \gamma$  a  $D\sigma$  fölület-elem befelé mutató normalisának az iránycosinusai, úgy

$$\begin{aligned} P &= P_1 \alpha + P_2 \beta + P_3 \gamma, \\ \mathfrak{P} &= \mathfrak{P}_1 \alpha + \mathfrak{P}_2 \beta + \mathfrak{P}_3 \gamma, \text{ stb.} \end{aligned}$$

és eredetileg az ennek megfelelő tér-integrálok foglaltak helyet az egyenlőtlenségben a fölületi integrálok helyett.

A kényszer kifejezései a testektől elfoglalt  $\tau$  terek számára homogen és linearis relatiók az anyagi összetevőkbe tartozó virtualis elmozdulások, elfordulások és deformatiók (kiterjedések és elferdülések) componensei között. A kényszer kifejezései a testek  $\sigma$  határfölületei számára homogen és linearis relatiók az anyagi összetevőknek a  $D\sigma$  fölületelemekkel határos elemi részeinek a virtualis elmozdulási componensei között.

Az a követelés, hogy a kényszer járulékaiból (surlódás stb.) származó erők — a mostani jelölés szerint  $(\mathfrak{X}/\tau, \mathfrak{Y}/\tau, \mathfrak{Z}/\tau)$  és  $(\mathfrak{P}/\sigma, \mathfrak{Q}/\sigma, \mathfrak{R}/\sigma)$  — megváltoztatott előjellel kielégítsék a virtualis elmozdulások relatióit, ezúttal a térbeli  $(\mathfrak{X}/\tau, \mathfrak{Y}/\tau, \mathfrak{Z}/\tau)$  erőket illetőleg általában véve nem bír értelemmel, mert általában a virtualis elmozdulások deriváltjait tartalmazzák azok a relatiók, már pedig bizonyos, hogy az  $\mathfrak{X}/\tau$  stb. componensek nem minden esetre deriválhatók, t. i. a miatt, hogy a  $D\tau$  térelemek tetszés szerint választhatók. Most az  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$  és  $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R})$  vectorokra rójjuk ki, hogy megváltoztatott előjellel véve kielégítsék a virtualis elmozdulások relatióit. Ez a rendelkezés nem ellenkezik az I. fejezet megállapításával, mert a  $D\tau$  térelemek olyatén megválasztásában, hogy egyenlő térfogatúak legyenek azok, nyilvánképen telje-

sen megegyezik ama megállapítással. A  $(\mathfrak{P}/\sigma, \mathfrak{Q}/\sigma, \mathfrak{R}/\sigma)$  fölületi erőket illetőleg a mostani rendelkezés és az I. fejezet megállapítása egészen általánosan megegyezik, mert a  $\mathfrak{P}/\sigma$  stb. féle componensekkel képezett fölületi kényszer-relatiókból a  $D\sigma$  fölület-elem törölhető.

Ha különböző anyagi összetevők között átalakulások folynak, úgy némely összetevők tömege növekedik, másoké fogy, tehát az úgynevezett continuitási egyenlet nem illeti meg külön-külön az egyes anyagi összetevőket, hanem csak azok bizonyos halmazaira vonatkoztatható.

#### IV.

1. §. Abban a hypothesisben, hogy a coordinata-tengelyek mindenkori helyzete megválasztható olyképp, hogy egy független anyagi rendszerben szabad erők ne hassanak, jelöljék  $(\partial x, \partial y, \partial z)$  a lehetséges elmozdulásokat. Tekintetbe véve, hogy független anyagi rendszerben folytonosság-szakadási fölületek nem fordulnak elő, III. (12) helyét a következő egyenlőtlenség foglalja el:

$$\Sigma \int_T [(k\ddot{x} - \mathfrak{X}) \partial x + (k\ddot{y} - \mathfrak{Y}) \partial y + (k\ddot{z} - \mathfrak{Z}) \partial z] D\tau > 0, \quad (1)$$

a hol  $T$  a független anyagi rendszertől betöltött tért jelenti.

Az a föltevés, hogy nem fordulnak elő folytonosság-szakadási fölületek, azon a szükségességen alapszik, hogy egy független anyagi rendszerbe a testek határ-rétegei föltétlenül bele számíthatók: a határ-rétegek kirekesztésével számba vett rendszer nem tekinthető függetlennek, mert számottevő mértékben függ az a határ-rétegektől, bármi vékony térközök tulajdoníthatók is ezeknek térfogat gyanánt; a határ-rétegek kirekesztésével megmaradt rendszerben már szabad fölületi erők nyilvánulnak, t. i. azokon a fölületeken, a melyek a kirekesztett határ-rétegek geometriai jelvényei. Egy egyszerű példa elégséges lesz ennek analitikus formában való fölismerésére. Tegyük föl, hogy a kényszert a független rendszer terében mindenütt ez az egyetlen egyenlőtlenség fejezi ki:

$$\Sigma \left( A_0 \delta x + A_1 \frac{\partial \delta x}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \delta x}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \delta x}{\partial z} + \dots + B_0 \delta y + \dots + C_0 \delta z + \dots \right) D\tau > 0,$$

a hol az összegelés a  $\Sigma$  jegy értelményének megfelelően az egy helyen együtt lévő anyagi componensek megkülönböztetése szerint gondolandó. Ekkor a  $T$  térben minden egyes anyagi összetevő számára ilyen egyenleteink vannak:

$$\begin{aligned} k\ddot{x} &= \mathcal{X} + \lambda A_0 - \left( \frac{\partial \lambda A_1}{\partial x} + \frac{\partial \lambda A_2}{\partial y} + \frac{\partial \lambda A_3}{\partial z} \right), \\ k\ddot{y} &= \mathcal{Y} + \lambda B_0 - \left( \frac{\partial \lambda B_1}{\partial x} + \frac{\partial \lambda B_2}{\partial y} + \frac{\partial \lambda B_3}{\partial z} \right), \\ k\ddot{z} &= \mathcal{Z} + \lambda C_0 - \left( \frac{\partial \lambda C_1}{\partial x} + \frac{\partial \lambda C_2}{\partial y} + \frac{\partial \lambda C_3}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Szorozzuk meg ezeket az egyenleteket rendre  $\delta x D\tau$ ,  $\delta y D\tau$ ,  $\delta z D\tau$ -val, azután adjuk össze és integráljuk a határ-rétegek térközeinek a kirekesztésével a  $T$  térre kiterjedőleg. Részleges quadraturák végzésével, az  $S$  összegelési jelnek az előbbi fejezetben tulajdonított értelmény szerint ehhez az egyenlethez jutunk:

$$\begin{aligned} & S \Sigma \int_{\tau} [(kx - \mathcal{X}) \delta x + \dots + \dots] D\tau = \\ & = S \Sigma \int_{\tau} \left( A_0 \delta x + A_1 \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \dots \right) \lambda D\tau + \\ & - S \Sigma \int_{\tau} [A_1 \alpha + A_2 \beta + A_3 \gamma] \delta x + \dots + \dots \lambda D\sigma, \end{aligned}$$

tehát a kényszer-relatio értelmében most (1) helyett a következő alap-egyenlőtlenségünk nagyon

$$\begin{aligned} & S \Sigma \int_{\tau} [(k\ddot{x} - \mathcal{X}) \delta x + \dots + \dots] D\tau - \\ & S \Sigma \int_{\sigma} [(A_1 \alpha + A_2 \beta + A_3 \gamma) \delta x + \dots + \dots] \lambda D\sigma > 0, \end{aligned}$$

a hol

$$\begin{aligned} & (A_1 \alpha + A_2 \beta + A_3 \gamma) D\sigma \\ & (B_1 \alpha + B_2 \beta + B_3 \gamma) D\sigma \\ & (C_1 \alpha + C_2 \beta + C_3 \gamma) D\sigma \end{aligned}$$

mint fölületi szabad erők componensei jelentkeznek.

A közönséges mechanikához úgy jutunk el, ha a határ-rétegeken kívül még egyes anyagi összetevőket is kirekesztünk a független rendszerből (egyebek közt az æther), másokat pedig a lehetséges elmozdulások képzésében mozdulatlanul hagyunk, csupán azokat a lehetséges elmozdulásokat tartva számon, a melyek ez anyagi részek mozdulatlansága mellett lehetségesek, s ezek a virtualis elmozdulások. A kirekesztett anyagi részt külső rendszernek, a többit belső rendszernek nevezzük el. Hogy már most eljuthassunk a közönséges mechanikához, válasszunk ki a kényszer relatiói közül azokat, a melyek csak a belső rendszerbe tartozó elmozdulásoktól függenek. Ezek vagy készen vannak a relatiók között, vagy a külső rendszerbe tartozó elmozdulások componentseinek eliminálásával multiplicatoros összeadások által állíthatók elé. Összességük azonban mindazokat az elmozdulásokat szolgáltatja, a melyek a belső rendszerben egyáltalán lehetségesek.

Ennek az állításnak a bebizonyítása végett írjuk:

$$\begin{aligned} A'_{i1} u_1 + A'_{i2} u_2 + \dots + A'_{im} u_m &\equiv U'_i, \\ A_{i1} u_1 + A_{i2} u_2 + \dots + A_{im} u_m &\equiv U_i, \\ B'_{i1} v_1 + B'_{i2} v_2 + \dots + B'_{in} v_n &\equiv V'_i, \\ B_{i1} v_1 + B_{i2} v_2 + \dots + B_{in} v_n &\equiv V_i \end{aligned}$$

és vegyük tekintetbe a következő relatio-rendszert:

$$\begin{aligned} U'_1 + V'_1 = 0, & \quad U'_2 + V'_2 = 0, \dots \\ U_1 + V_1 > 0, & \quad U_2 + V_2 > 0, \dots \end{aligned}$$

1. Ha ez a rendszer készen tartalmaz oly relatiókat, a melyekben  $u$  nem fordul elő, vagy legalább következtethetők belőle ilyen relatiók, azaz implicite tartalmaz ilyeneket, akkor léteznek olyan  $\lambda'$  multiplicatorok és  $\lambda$  nem-negatív multiplicatorok, nem csupa zérusok, hogy

$$\sum \lambda' U' + \sum \lambda U \equiv 0$$

még pedig oly számú ( $\lambda'$ ,  $\lambda$ ) rendszer létezik, a mely számú az explicite és implicite létező  $u$ -talan relatio. Az explicite előforduló  $u$ -talan relatiókat illetőleg evidens ennek az állításnak a helyesége. Az implicite előfordulókat illetőleg pedig azonnal belátjuk

azt, ha megfontoljuk, hogy minden következményes relatio baloldala kifejezhető az egyenletek baloldalainak multiplicatorok és az egyenlőtlenségek baloldalainak nem-negatív multiplicatorok szerint való összeadásával, tehát ha  $V_0 > 0$  vagy  $V_0 = 0$  implicite tartalmazott relatióknak van, úgy létezik oly  $(\lambda', \lambda)$  multiplicator-rendszer, hogy

$$\Sigma(U' + V')\lambda' + \Sigma(U + V)\lambda \equiv V_0,$$

honnan a fentebbi identitás következik.

Ily identitás hiányában nemcsak explicite nem foglaltatik  $u$ -talan relatio az adott rendszerben, de implicite sem, azaz nem eliminálhatók az  $u$  határozók a rendszerben foglalt relatiók között.

Ebben az esetben, vagyis ha  $u$ -talan relatiók sem explicite, sem implicite nem foglaltatnak az adott rendszerben, a  $v$  határozatlanok minden gondolható értéket fölvehetnek, ezek értéktartományára nem ró ki semmi megszorítást a rendszer. Számítsunk ki ugyanis az  $(U' + V' = 0)$  adott egyenletekből annyi  $u$  mennyiséget a többi  $u$ -knak és a  $v$ -knek a függvényei gyanánt, a mennyit csak lehet. Azután helyettesítsük be az  $(U + V = 0)$  adott egyenlőtlenségekbe a kiszámított  $u$  mennyiségek kifejezéseit. Ily módon oly rendszert fognak képezni ezek az egyenlőtlenségek, a mely æquivalens az egész adott rendszerrel. Írjuk így a helyettesítésekkel előállított egyenlőtlenségi rendszert:

$$U_1 + V_1 > 0, \quad U_2 + V_2 > 0, \dots$$

Mínt hogy a föltevés szerint nem eliminálhatók az  $u$  mennyiségek, így nem léteznek oly nem-negatív multiplicatorok  $\lambda$ , a melyek mellett a  $\Sigma \lambda U$  összeg identikusan eltűnjék és következésképp egyszerre valamennyi  $U$  lehet zérusnál nagyobb, mint az I. 3. alatt lévő bizonyítás nyomán látható. Ebből folyólag bármely értékeket tulajdonítsunk is a  $v$  határozatlanoknak, megválaszthatók olyképen az  $U$  kifejezésekben még előforduló  $u$  határozatlanok értékei, hogy az  $U_1 + V_1 > 0$  stb. egyenlőtlenségek mind teljesüljenek, tehát a  $u$  határozatlanok bármely értékeket fölvehetnek.

2. Ha explicite vagy implicite tartalmaz oly relatiókat a rendszer, a melyekben nincs  $u$ , akkor pedig mindazokat az érté-

keket fölvehetik a  $v$  határozatlanok, a melyek ezeknek az  $u$ -talan relációknak az összességét kielégítik.

Hogy meggyőződést szerezzünk ennek az állításnak az igaz voltáról, számítsunk ki ismét annyi  $u$  mennyiséget az adott  $(I'' + I' = 0)$  egyenletekből, mint a többi  $u$ -knak és a  $u$ -knek a függvényét, a mennyit csak lehet. Azután helyettesítsük be a kiszámított  $u$  mennyiségek kifejezéseit minden adott egyenletbe és egyenlőtlenségbe. Lesz egy oly egyenlet-rendszerünk

$$I'_1 = 0, \quad \bar{V}'_2 = 0, \dots \quad (a)$$

a melyben  $u$  mennyiségek nem fordulnak elő, és lesz egy egyenlőtlenségi rendszerünk

$$\bar{U}_1 + \bar{V}_1 \geq 0, \quad \bar{U}_2 + \bar{V}_2 \geq 0, \dots \quad (b)$$

a melyben a kiszámított  $u$  mennyiségek nem fordulnak elő. Az  $(a)$  és  $(b)$  rendszer együtt æquivalens az eredeti rendszerrel.

Most egyelőre csak egy  $u$  mennyiséget elimináljunk a  $(b)$  alatti relációkból a bennük még előforduló  $u$  mennyiségek közül, s legyen ez az  $u_1$ . Erre a célra írjuk így azokat az egyenlőtlenségeket  $(b)$ -ben, a melyek tartalmazzák az  $u_1$  mennyiséget:

$$\begin{aligned} u_1 - P_1 \geq 0, & \quad u_1 - P_2 \geq 0, \dots \\ -u_1 + Q_1 \geq 0, & \quad -u_1 + Q_2 \geq 0, \dots \end{aligned} \quad (b')$$

a hol  $P_1, P_2$ , stb.  $Q_1, Q_2$ , stb. természetesen  $u_1$ -től nem függenek. A következő rendszer képezi az eliminálások eredményét:

$$\begin{aligned} Q_1 - P_1 \geq 0, & \quad Q_1 - P_2 \geq 0, \dots \\ Q_2 + P_1 \geq 0, & \quad Q_2 + P_2 \geq 0, \dots \\ \dots & \quad \dots \end{aligned} \quad (c)$$

Ki kell tennie, hogy eltekintve az  $(a)$  alatti egyenletektől és a  $(b)$ -ben  $u_1$ -től független egyenlőtlenségektől, az  $u_1$ -en kívül még előforduló határozatlanok, mindazokat az értékeket fölvehetik, a melyeknek a föl vételét a  $(c)$  alatti egyenlőtlenségek megengedik, a mi azt jelenti, hogy mindent számba véve, mindazt az értéket fölvehetik azok a határozatlanok, a melyek az  $(a)$  alatti egyenletekkel, a  $(b)$  alatti  $u_1$ -telen egyenlőtlenségekkel és a  $(c)$  alatti egyenlőtlenségekkel megférnek. Hogy pedig ez valóban így legyen, ki-

tetszik abból, hogy az  $u_1$  határozatlannak az értéke mindig megválasztható úgy, hogy ne legyen kisebb mint a legnagyobb  $P$ , és ne legyen nagyobb mint a legkisebb  $Q$ , mert  $(c)$  szerint nincs olyan  $Q$ , a mely kisebb volna, mint valamelyik  $P$ ; következésképp mihelyt  $(c)$  teljesül, már bármely értékekkel birjanak is különben a  $P$  és  $Q$  kifejezések,  $u_1$  értéke megválasztható úgy, hogy a  $(b')$  alatti rendszer teljesítve legyen.

Egy második, még előforduló  $u$  mennyiségnek az eliminációja hasonló eredményhez juttat s i. t. Ezzel a kimondott állítás be van bizonyítva.

3. Az előadott következtetések a III. fejezetben foglalt bizonyítás értelmében egy folytonos anyagi rendszer kényszer-kifejezőseire is alkalmazhatók. E szerint kiválasztván a kényszer-relatiók rendszeréből mindazokat a benne explicite vagy implicite foglalt relatiókat, a melyek csak a belső anyagi rendszerbe tartozó lehetséges elmozdulásoktól függenek, valóban csupán ezeknek a kiválasztott relatióknak a rendszere szolgál a belső anyagi rendszerben lehetséges elemi elmozdulások meghatározására, vagyis épen azok az elemi elmozdulások lehetségesek a belső anyagi rendszerben, a melyek ezekkel a kiválasztott relatiókkal megférnek.

Ha már most az (1) alatti alaprelationak megfelelően az egész független rendszerre nézve megszerkesztjük a multiplicatoros kifejezéseket, mint föntebb egy speciális példában tettük, a midőn a határ-rétegek kirekesztéséről volt a szó, azután az egész külső rendszer kirekesztésével foglaljuk tér-integrálba ezeket a kifejezéseket, úgy mint előbb pusztán a határ-rétegek kirekesztésével tettük, tehát a belső anyagi rendszerbe tartozó gyorsulási componensek kifejezéseit egyesítjük egy tér-integrálba: partialis quadraturák végzése után s tekintettel a belső rendszerben lehetséges elemi elmozdulások összes relatióira oly relatióhoz jutunk alaprelatio gyanánt a belső rendszer számára, a milyen III (12), hol most  $(ND)_\tau$ ,  $(YD)_\tau$ ,  $(ZD)_\tau$  és  $(PD)_\sigma$ ,  $(QD)_\sigma$ ,  $(RD)_\sigma$  az egész független rendszerre vonatkozó kényszernek ama kifejezéseiből származnak, a melyek a külső rendszerbe tartozó elmozdulásoktól is függenek. Természetesen az eredeti kényszer-relatiókhöz hozzácsatolva kell gondolnunk azokat a relatiókat is, a melyek a külső rendszerbe tartozó lehetséges elmozdulások componenseinek az eliminálásá-

val származtathatók. Az ily módon előállított III (1<sup>2</sup>)-féle relatio a belső rendszerben lehetséges elemi elmozdulásokkal érvényes, mert azoknak a relatióknak az összességére való tekintettel nyeretett, a melyek csak a belső rendszerbe tartozó elemi elmozdulásoktól függenek s az egész független rendszer kényszerének a relatio rendszerében explicite vagy implicite foglaltatnak. Ezeknek a relatióknak megváltoztatott előjellel szükségképen eleget tenni kötelesek az (X, Y, Z) illetőleg (P, Q, R)-féle vectorok, a kényszerjárulékok ez erő-vectorai. Mind ebben föl van tételezve, hogy bizonyos módon van választva a coordinata-tengelyek mindenkori helyzete. Más helyzet esetében, ha változik az a régire nézve, általában mások lesznek a külső rendszertől származó (X)τ, (Y)τ, (Z)τ)-féle ú. n. szabad erők, úgy hogy részint a külső rendszertől, részint a koordinatategyelyek helyzetváltozásából származnak azok.

Ha azokra az elemi elmozdulásokra szorítkozunk a belső rendszerben, a melyek egy részének a mozdulatlansága mellett lehetségesek, akkor a másik részének ú. n. virtualis elmozdulásaival van dolgunk. Most a belső rendszer kényszer-relatiói, valamint a III (1<sup>2</sup>) relatio is, a melyek itt eredetileg a belső rendszer minden lehetséges kizavarására szólottak, csak a virtualis elmozdulások componenseit tartalmazzák, vagyis azoknak az elemi elmozdulásoknak a componenseit, a melyek az egyik rész (mellék-rész) mozdulatlansága mellett lehetségesek a másik részben (fő-rész). A mennyiben most az (X)τ, (Y)τ, (Z)τ és (P)σ, (Q)σ, (R)σ)-féle erőket a III. fejezet értelmében a kényszer új relatiói alá rendeljük, elvesztik ezek az erők eredeti jelentményüket, a melylyel t. i. (1)-ből folyólag bírtak, és most a kényszer azon járulékaiknak a reactióit jelentik, a melyek a mellék-rész mozdulatlansága mellett érvényesülnének.

2. §. Az æther mechanikájában belső anyagi rendszerek úgy választandók, hogy a külsők egészen a belsőtől elfoglalt téren kívül legyenek, vagyis a belső rendszer mindazt az anyagi összetevőt magában foglalja, a mely a tér egy részében létezik. Akkor csak megfelelő módon definiálandók kényszer-kifejezések a belső rendszer számára és szabad fölületi erők a belső rendszer határára.

E mellett egyszerűbb esetekben a belső rendszer egész pon-

derabilis része mellékrésznek számíthat, tehát az æther azon elemi megzavarásait szükséges csak tekintetbe venni, a melyek a belső rendszer ponderabilis részének a mozdulatlansága mellett lehetőségek. Ez pl. az ú. n. tiszta æthernek az esete, mert csak úgy juthatni logikai ellenmondástól mentes és a tapasztalással egyező kényszer-kifejezésekhez a «tiszta» æther számára, ha fölteszszük, hogy valósággal nem tiszta az, hanem mindenütt ponderabilis anyaggal elegyesen fordul elő.

A kényszer kifejezései természetesen kinematikus mennyiségekre vonatkoznak (III. 2.), a melyek vagy egyenesen a lehetséges, illetőleg virtualis elmozdulások számára képezve jelentkeznek, vagy tényleges kinematikus mennyiségek lehetséges, illetőleg virtualis megváltozásaival határozzák meg. A «tiszta» ætherbe tartozó electro-magnetikus mező mechanikai képéhez pl. úgy jutunk el, ha abból a föltevésből indulunk ki, hogy a «tiszta» æther elemi részeinek tényleges elfordulási szögei virtualis megváltozással nem nagyobbodhatnak.

Bizonyos testeket illetőleg föl kell tennünk, hogy azokban az æther oly részei, a melyek ugyanazt a tért foglalják el, különböző kényszereket uralnak, úgy, hogy ezek a testek mintegy különböző æther-összetevőket tartalmaznak. Azonkívül lehetségesnek kell tartani, hogy ezek közt az æther-összetevők közt átalakulások folynak, tehát egyeseknek a tömege mások tömegének a rovására növekszik vagy fordítva.

A tapasztalás arra mutat, hogy æther és ponderabilis testek közt a határregegekben nincs számot tevő surlódás, más szóval, hogy nincs köztük számot tévő fölületi surlódás. Ebből nem következik, hogy æther és ponderabilis testek közt nincs jelentékeny belső (térbeli) surlódás. Ennek a lehetősége is tekintetbe veendő, még pedig annál inkább, mert nem ellenkezik az azzal a LORENTZ-től követett föltevással sem, hogy az æther nem vesz részt a ponderabilis testek észlelhető mozgásaiban.

\*

A kényszerek nem értelmezhetők, a legelemiebbek sem, milyen pl. az összenyomhatatlanság, ép oly kevésbé magyarázhatók járulékaik, minő a surlódás. Analytikai kifejezéseik minden tovább

fürkésző kérdés kizárásával az anyagi minőség alapvető definitióinak tekintendők. Egy jelenség vagy jelenség-csoport magyarázata pedig abból áll, hogy oly mechanikai analogont szerzünk annak a jelképezésére, leírására, a melyben csupán a föltételezett kényszer és járuléka a IV. (1) illetőleg III. (12) elvi egyenlőtlenséggel egyetemben maradnak magyarázatlanul, de minden egyéb már logikai következetességgel fejthető ki ezekből a magyarázatlan kezdetekből, a melyek fölfogásaink végső alapzatának tekintendők.

•

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1900 december 17.-én tartott üléséből.)