Theorie der einfachen Ungleichungen.

(Von Herrn *Julius Farkas* in Kolozsvár (Klausenburg).)

Die naturgemässe und zugleich systematische Behandlung der analytischen Mechanik muss das zuerst von *Fourier**) und dann später von *Gauss***) formulirte Ungleichheitsprincip der virtuellen Verschiebungen zur Grundlage haben.

Die Möglichkeit einer solchen Behandlung erfordert aber gewisse Kenntnisse über die homogenen linearen ganzen Ungleichungen, welche bisher so zu sagen gänzlich gefehlt haben.

Fourier hat sich selbst vielfach um Ungleichungen bemüht***), aber ohne erheblichen Erfolg. Später befasste sich der russische Mathematiker *Ostrogradsky* mit diesem Gegenstande.†) Seine Betrachtungen passen aber nur auf den Fall, dass die Anzahl der Ungleichungen, welche zum Ausdrucke des mechanischen Zwanges dienen, diejenige der Componenten der virtuellen Verschiebungen nicht übertrifft. Andere Publicationen, welche über dieses Thema noch erschienen sind, zeigen auch keinen wesentlichen Fortschritt.

*) „Sur la Statique". I. de l'Éc. polyt. II. An VI. (1798). Oeuvres, Tome II. pp. 477—521. 1890.

**) „Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik". Dieses Journal, IV. 1829. Werke V. 1877.

„Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii". Comm. soc. reg. scient. Gotting. rec. Vol. VII. 1830. Werke V. 1877.

***) Oeuvres, Tome II. pp. 317—328. 1890. (1823, 1824).

†) „Considérations générales sur les momens des forces". Mém. de l'Ac. imp. des Sc. de St. Pétersbourg 1834.

Während der letzten sieben Jahre habe ich mich wiederholt mit Ungleichungen beschäftigt und aus dem Gesichtspunkte der Anwendungen eine vorläufig abgeschlossene Theorie derselben zu Stande gebracht. Meine vereinzelt erschienenen Publicationen*) sind aber nicht geeignet, ein klares und zusammenhängendes Bild des Ganzen zu liefern, und davon abgesehen, ist ihre Zugänglichkeit auch beschränkt. Darum nehme ich mir die Freiheit, hier eine systematische Darstellung, nebst einigen Ergänzungen, dieser Arbeiten vorzulegen. Ich habe die Absicht, in einer späteren Abhandlung die Verallgemeinerung der Anwendungen zu behandeln.

I. Definitionen.

Eine homogene lineare ganze Function nenne ich kurz einfache Function. Ist Θ eine einfache Function der reellen Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_n$, so nenne ich die Gleichung $\Theta = 0$ eine einfache Gleichung, und die Ungleichung $\Theta \geqq 0$ oder $-\Theta \leqq 0$ eine einfache Ungleichung, jede eine einfache Relation zwischen den Variablen u. Die einfachen Ungleichungen werde ich immer in der Form $\Theta \geqq 0$ schreiben und betrachten.

Sind $\Theta'_1, \Theta'_2, \ldots, \Theta_1, \Theta_2, \ldots$ einfache Functionen der Variablen u, und wird der Werthbereich dieser Variablen durch die einfachen Relationen

$$\Theta'_1 = 0, \qquad \Theta'_2 = 0, \ldots, \qquad \Theta_1 \geqq 0, \qquad \Theta_2 \geqq 0, \ldots$$

eingeschränkt, so nenne ich die Gesammtheit dieser Relationen ein einfaches Relationssystem. Werthsysteme u, welche diesem Relationssysteme genügen, nenne ich Lösungen desselben.

Besteht für alle Lösungen eines einfachen Relationssystems die einfache Gleichung $\Theta' = 0$, so nenne ich dieselbe eine consecutive Gleichung des Systems. Besteht für alle Lösungen eines einfachen Relationssystems die einfache Ungleichung $\Theta \geqq 0$, so nenne ich dieselbe eine consecutive Ungleichung des Systems. Ich nenne die Gleichung $\Theta' = 0$ und die Ungleichung $\Theta \geqq 0$ eine consecutive Relation des Systems. Es ist klar, dass eine jede Relation, welche in einem einfachen Relationssysteme vorkommt,

---

*) „Ueber die Anwendungen des mechanischen Princips von *Fourier*". Math. und Naturw. Berichte aus Ungarn XII. 1895.

„Die algebraischen Grundlagen der Anwendungen des *Fourier*schen Princips in der Mechanik". Ebenda XV. 1898.

„Die algebraische Grundlage der Anwendungen des mechanischen Princips von *Fourier*". Ebenda XVI. 1899.

„Allgemeine Principien für die Mechanik des Aethers". Archives Néerlandaises, Série II. T. IV. (Jubelband, H. A. Lorentz.)

eine consecutive Relation des Systems ist. Von einer jeden Relation, welche in einem einfachen Relationssysteme vorkommt, sage ich, dass dieselbe explicite in dem Systeme enthalten ist. Von den übrigen consecutiven Relationen sage ich, dass dieselben implicite in dem Systeme enthalten sind.

Ist ein gegebenes Relationssystem so beschaffen, dass, sobald eine Relation aus demselben entnommen wird, durch das System der zurückgebliebenen Relationen der Werthbereich der Variablen nicht mehr in solchem Maasse eingeschränkt wird, wie durch das ganze System, so sage ich von den gegebenen Relationen, dass dieselben unabhängig von einander sind; und ihr System, d. h. das ganze gegebene System nenne ich dann ein *Stammsystem.*

II. Ueber die mögliche Anzahl der von einander unabhängigen einfachen Ungleichungen.

Sobald die Anzahl der Variablen zwei übertrifft, ist die mögliche Anzahl der in einem Stammsystem explicite enthaltenen Ungleichungen unbegrenzt. Es ist offenbar genügend, den Beweis für den Fall von drei Variablen zu führen.

Diese drei Variablen x, y, z sollen die geradlinigen, rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes bedeuten, welcher seinerseits nicht ausserhalb des Raumes einer gewöhnlichen Pyramide fallen soll, d. h. einer solchen, welche keine Hohlwinkel aufweist. Die Seiten der Pyramide erstrecken sich in die Unendlichkeit. In den Ungleichungen

$$(*) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z \geqq 0, \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z \geqq 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

sollen die Coefficienten α, β, γ die Richtungscosinus der nach dem Inneren der Pyramide gerichteten Normalen der Seitenflächen bedeuten, und die Spitze der Pyramide soll sich im Anfangspunkte des Coordinatensystems befinden. Durch das System (*) wird in diesem Falle die Verfügung über den Ort des Punktes x, y, z ausgedrückt. Wie viel Seiten auch die Pyramide habe, also aus wie vielen Ungleichungen auch das System (*) bestehe, eine jede Ungleichung ist unabhängig von dem Systeme der anderen, weil, sobald eine Ungleichung beseitigt wird, hiermit auch eine Seitenfläche der Pyramide beseitigt wird, und der Rauminhalt derselben vermehrt sich dadurch um denjenigen einer dreiseitigen Pyramide, folglich gewinnt der Ort des

Punktes an Freiheit, und der Bereich der Auflösungen des Systems vergrössert sich.

Nur *wenn die Anzahl der Variablen nicht zwei übertrifft, ist der Umfang der Stammsysteme beschränkt. In dem Falle von zwei Variablen kann ein Stammsystem höchstens vier Ungleichungen explicite enthalten*, und enthält es deren vier, so kann es immer auf zwei Gleichungen reducirt werden; enthält es drei Ungleichungen, so kann es immer auf eine Gleichung und auf eine Ungleichung zurückgeführt werden. Man überzeugt sich davon leicht durch eine geometrische Anschauung, indem man die zwei Variablen als Coordinaten eines Punktes in einer Ebene betrachtet und die Coefficienten paarweise als Richtungscosinus von Strahlen auffasst, deren Mittelpunkt sich in dem Anfangspunkte der Coordinaten befindet.

III. Ueber die Superposition von Lösungen.

1. Es sei

$$(1.)\quad \begin{cases} A'_{11}u_1 + A'_{12}u_2 + \cdots + A'_{1n}u_n = 0, \\ A'_{21}u_1 + A'_{22}u_2 + \cdots + A'_{2n}u_n = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ A'_{l1}u_1 + A'_{l2}u_2 + \cdots + A'_{ln}u_n = 0, \\ A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1n}u_n \geqq 0, \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2n}u_n \geqq 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{cases}$$

unser System von einfachen Relationen. *Genügen diesem Systeme die Werthe*

$$\begin{array}{llll} u_1 = a_1, & u_2 = a_2, & \ldots, & u_n = a_n; \\ u_1 = b_1, & u_2 = b_2, & \ldots, & u_n = b_n; \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}$$

so genügen demselben auch die Werthe

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + b_1 + \cdots, \\ u_2 &= a_2 + b_2 + \cdots, \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ u_n &= a_n + b_n + \cdots; \end{aligned}$$

denn aus

$$\begin{aligned} A'_{i1}a_1 + A'_{i2}a_2 + \cdots + A'_{in}a_n &= 0, \\ A'_{i1}b_1 + A'_{i2}b_2 + \cdots + A'_{in}b_n &= 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned}$$

$$A_{k1}a_1 + A_{k2}a_2 + \cdots + A_{kn}a_n \geqq 0,$$
$$A_{k1}b_1 + A_{k2}b_2 + \cdots + A_{kn}b_n \geqq 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

folgt offenbar

$$A'_{i1}(a_1 + b_1 + \cdots) + A'_{i2}(a_2 + b_2 + \cdots) + \cdots + A'_{in}(a_n + b_n + \cdots) = 0,$$
$$A_{k1}(a_1 + b_1 + \cdots) + A_{k2}(a_2 + b_2 + \cdots) + \cdots + A_{kn}(a_n + b_n + \cdots) \geqq 0.$$

2. Es mögen $p_1, p_2, \ldots$ einfache Functionen der Variablen u bedeuten und diese Variablen ausser dem Systeme (1.), noch dem Systeme

(2.) $$p_1 \geqq 0, \qquad p_2 \geqq 0, \ldots$$

unterworfen sein; *wenn nun keine Function p in dem vereinigten Systeme* (1.) *und* (2.) *in der Weise beschränkt vorkommt, dass dieselbe nur den Werth Null annehmen kann, so können alle Functionen p gleichzeitig grösser als Null sein.* Denn gesetzt, man hätte für $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2, \ldots$: $p_1 > 0$, für $u_1 = b_1$, $u_2 = b_2, \ldots$: $p_2 > 0$, u. s. w., so bekäme man für $u_1 = a_1 + b_1 + \cdots$, $u_2 = a_2 + b_2 + \cdots$, u. s. w.: $p_1 > 0$, $p_2 > 0, \ldots$

IV. Grundsatz der einfachen Ungleichungen.

Es sei

(1.) $$\begin{cases} A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1n}u_n \equiv \Theta_1 \geqq 0, \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2n}u_n \equiv \Theta_2 \geqq 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

das gegebene System von Ungleichungen, und in jeder Lösung desselben möge

(2.) $$A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_nu_n \equiv \vartheta \geqq 0$$

bestehen.

Es giebt immer solche nicht-negativen, von den Variablen u unabhängigen Multiplicatoren λ, dass

(3.) $$\vartheta \equiv \lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \cdots$$

ist.

Beweis.

Der in (2.) befindliche Coefficient A_n sei von 0 verschieden. Berechnen wir aus (2.) die Variable u_n, als Function der übrigen u und ϑ, und substituiren wir sie dann überall in (1.) durch diese Function. Wenn dies geschehen, dividiren wir die einzelnen Ungleichungen mit dem absoluten Werthe des Coefficienten des in ihnen befindlichen ϑ (insofern derselbe von 0 verschieden ist). Das Resultat des Vorganges sei

$$(1'.)\quad \begin{cases} \vartheta + p_1 \equiv \Theta_{p_1} \geqq 0, & \vartheta + p_2 \equiv \Theta_{p_2} \geqq 0, \ldots \\ r_1 \equiv \Theta_{r_1} \geqq 0, & r_2 \equiv \Theta_{r_2} \geqq 0, \ldots \\ -\vartheta + q_1 \equiv \Theta_{q_1} \geqq 0, & -\vartheta + q_2 \equiv \Theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \end{cases}$$

wo $p_1, p_2, \ldots, r_1, r_2, \ldots$ einfache Functionen der Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ bedeuten.

Nach der Voraussetzung ist

$$(2'.)\qquad \vartheta \geqq 0$$

eine consecutive Ungleichung des Systems (1'.).

In der ersten Zeile von (1'.) ist nothwendiger Weise wenigstens eine Ungleichung, denn wenn die erste Zeile nicht bestände, so könnte $\vartheta < 0$ sein.

Jetzt schreibe ich anstatt des Systems (1'.) ein anderes auf, welches sich von diesem darin unterscheidet, dass es anstatt der dritten Zeile solche Ungleichungen enthält, welche aus (1'.) durch Eliminationen der Grösse ϑ entstehen

$$(1''.)\quad \begin{cases} \vartheta + p_1 \equiv \Theta_{p_1} \geqq 0, & \vartheta + p_2 \equiv \Theta_{p_2} \geqq 0, \ldots \\ r_1 \equiv \Theta_{r_1} \geqq 0, & r_2 \equiv \Theta_{r_2} \geqq 0, \ldots \\ p_1 + q_1 \equiv \Theta_{p_1} + \Theta_{q_1} \geqq 0, & p_1 + q_2 \equiv \Theta_{p_1} + \Theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \\ p_2 + q_1 \equiv \Theta_{p_2} + \Theta_{q_1} \geqq 0, & p_2 + q_2 \equiv \Theta_{p_2} + \Theta_{q_2} \geqq 0, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Auch in jeder Lösung dieses Systems ist

$$(2''.)\qquad \vartheta \geqq 0.$$

Setzen wir nämlich voraus, dass hier $\vartheta < 0$ sein kann. Dann folgt aus der ersten Zeile, dass jedes $p > 0$. Ist p_1 das kleinste p, so kann darin ϑ noch den Werth $-p_1$ haben. So aber wird nach der dritten Zeile von (1''.) auch die dritte Zeile von (1'.) erfüllt sein, also auch das ganze System (1'.) Nun kann dies aber nach der Voraussetzung nur für nichtnegative Werthe von ϑ befriedigt werden: also kann auch bei jeder Lösung von (1''.) nur $\vartheta \geqq 0$ sein.

Nach dieser Begründung beschränken wir uns vor der Hand auf jene speciellen Lösungen von (1''.), in welchen kein p negativ ist, in welchen also

$$
(1_1.) \quad \begin{cases}
p_1 \geqq 0, & p_2 \geqq 0, \ldots \\
r_1 \geqq 0, & r_2 \geqq 0, \ldots \\
p_1 + q_1 \geqq 0, & p_1 + q_2 \geqq 0, \ldots \\
p_2 + q_1 \geqq 0, & p_2 + q_2 \geqq 0, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots & \\
\ldots\ldots\ldots &
\end{cases}
$$

Jedenfalls existirt eine solche Lösung von ($1''$.), welche (1_1.) befriedigt (nämlich wenigstens dadurch, dass alle p, q, r verschwinden).

In (1_1.) ist wenigstens ein gewisses p stets $= 0$; widrigenfalls könnten alle p auf einmal > 0 sein (III. 2.), und dann könnte ϑ in ($1''$.) negative Werthe annehmen.

Es sei nun in jeder Lösung von (1_1.) $p_1 = 0$, also in allen

$$
(2_1.) \qquad -p_1 \geqq 0,
$$

und setzen wir voraus, dass im Falle von $n-1$ Variablen der zu beweisende Satz besteht. Dann besteht er in Bezug auf (1_1.) und (2_1.), denn in diesen kommen nur die Variablen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ vor. Es existiren daher solche nicht-negativen Multiplicatoren P, Q, R, dass

$$
(3_1.) \quad \begin{cases}
-p_1 \equiv P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + R_1 r_1 + R_2 r_2 + \cdots \\
\qquad + Q_{11}(p_1 + q_1) + Q_{12}(p_1 + q_2) + \cdots \\
\qquad + Q_{21}(p_2 + q_1) + Q_{22}(p_2 + q_2) + \cdots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

Mit Hülfe dieser Identität kann man aber im Falle von n Variablen auch schliessen auf die Richtigkeit des Grundsatzes, das heisst, man kann schliessen auf (3.). Aus ($1''$.) lässt sich nämlich mit Rücksichtnahme auf (3_1.) nach leicht erkennbaren Operationen schliessen, dass

$$
\begin{aligned}
&(1 + P_1)\Theta_{p_1} + P_2 \Theta_{p_2} + \cdots + R_1 \Theta_{r_1} + R_2 \Theta_{r_2} + \cdots \\
&+ Q_{11}(\Theta_{p_1} + \Theta_{q_1}) + Q_{12}(\Theta_{p_1} + \Theta_{q_2}) + \cdots \\
&+ Q_{21}(\Theta_{p_2} + \Theta_{q_1}) + Q_{22}(\Theta_{p_2} + \Theta_{q_2}) + \cdots \\
&+ \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot \equiv (1 + P_1 + P_2 + \cdots)\,\vartheta.
\end{aligned}
$$

V. Grundsatz der einfachen Relationen.

Hat man das System von einfachen Relationen

$$(1.)\quad \begin{cases} A'_{11}u_1 + A'_{12}u_2 + \cdots + A'_{1n}u_n \equiv \Theta'_1 = 0, \\ A'_{21}u_1 + A'_{22}u_2 + \cdots + A'_{2n}u_n \equiv \Theta'_2 = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A'_{l1}u_1 + A'_{l2}u_2 + \cdots + A'_{ln}u_n \equiv \Theta'_l = 0, \\ A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1n}u_n \equiv \Theta_1 \geqq 0, \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2n}u_n \equiv \Theta_2 \geqq 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \end{cases}$$

und besteht in allen Lösungen dieses Systems die Ungleichung

$$(2.)\qquad A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_nu_n \equiv \vartheta \geqq 0,$$

so giebt es immer solche Multiplicatoren λ' und solche nicht-negativen Multiplicatoren λ, dass

$$(3.)\qquad \vartheta \equiv \lambda'_1\Theta'_1 + \lambda'_2\Theta'_2 + \cdots + \lambda'_l\Theta'_l + \lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \cdots$$

Um dies einzusehen, haben wir nur die Gleichungen durch zwei entgegengesetzte Ungleichungen ($\Theta'_i \geqq 0$, $-\Theta'_i \geqq 0$) auszudrücken und dann den Grundsatz (IV.) anzuwenden.

In ausführlicher Entwicklung haben wir

$$(4.)\quad \begin{cases} A_1 = \lambda'_1A'_{11} + \lambda'_2A'_{21} + \cdots + \lambda'_lA'_{l1} + \lambda_1A_{11} + \lambda_2A_{21} + \cdots, \\ A_2 = \lambda'_1A'_{12} + \lambda'_2A'_{22} + \cdots + \lambda'_lA'_{l2} + \lambda_1A_{12} + \lambda_2A_{22} + \cdots, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ A_n = \lambda'_1A'_{1n} + \lambda'_2A'_{2n} + \cdots + \lambda'_lA'_{ln} + \lambda_1A_{1n} + \lambda_2A_{2n} + \cdots \\ \qquad (\lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0, \ldots) \end{cases}$$

Ist $\vartheta = 0$ eine consecutive Gleichung des Systems (1.), *so ist $\vartheta \geqq 0$ und $-\vartheta \geqq 0$ eine consecutive Ungleichung desselben, es giebt also Multiplicatoren λ' und nicht-negative Multipticatoren λ, mit welchen die Identität* (3.) *besteht, und zugleich giebt es Multiplicatoren μ' und nicht-positive Multiplicatoren $-\mu$, welche an Stelle der Multiplicatoren λ' und λ die Identität* (3.) *erfüllen* . . .

Lässt man in (3.) die Multiplicatoren λ' und die nicht-negativen Multiplicatoren λ unbestimmt, so repräsentirt die Ungleichung $\vartheta \geqq 0$ offenbar alle möglichen consecutiven Ungleichungen des Systems (1.), und die Gesammtheit der Ungleichungen $\vartheta \geqq 0$ vereinigt in sich alle einfachen Relationen, welche in (1.) explicite oder implicite enthalten sind: *die Gleichungen* (4.) *mit unbestimmten Multiplicatoren λ' und mit unbestimmten nicht-negativen Multiplicatoren λ genommen, liefern die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ aller möglichen in* (1.) *explicite oder implicite enthaltenen einfachen Relationen.*

VI. Parametrische Auflösung einfacher Relationssysteme.

Ich beabsichtige jetzt die Variablen u in der Weise als einfache Functionen theilweise beliebiger nicht-negativer, theilweise ganz beliebiger neuer Variablen zu bestimmen, dass durch diese Bestimmung alle unter (V. 1.) (explicite und implicite) *enthaltenen Relationen, und nur diese, identisch erfüllt sein sollen.*

1. Zu diesem Ende schreiben wir die Gleichungen noch einmal auf und fügen möglichst viele derartige Ungleichungen hinzu, in denen die linken Seiten von einander und von den linken Seiten der Gleichungen unabhängig sind, so dass keine dieser linken Seiten als einfache Function der übrigen ausdrückbar ist. Nehmen wir an, dass die k ersten auf einander folgenden Ungleichungen diese Eigenschaft haben. Durch Einführung neuer Variablen $s_1, s_2, \ldots, s_k$ kann der gemeinte Theil des Systems (V. 1.) in folgender Weise geschrieben werden:

$$(5.)\quad \begin{cases} \Theta_1' = 0, \quad \Theta_2' = 0, \ldots, \quad \Theta_l' = 0, \quad \Theta_1 = s_1, \quad \Theta_2 = s_2, \ldots, \quad \Theta_k = s_k, \\ \qquad\qquad s_1 \geqq 0, \quad s_2 \geqq 0, \ldots, \quad s_k \geqq 0. \end{cases}$$

Die Anzahl sämmtlicher von einander unabhängigen linken Seiten kann höchstens n sein, d. h. gleich der Anzahl der Variablen. Berechnen wir jetzt ebenso viele Variablen u als einfache Functionen der übrigen und der s nicht-negativen Grössen, wie die Anzahl der von einander unabhängigen linken Seiten beträgt. Die Resultate der Rechnung geben ersichtlicher Weise solche Ausdrücke für die berechneten Variablen u, durch welche der Theil (5.) des Systems und, nur dieses, und die consecutiven Relationen desselben identisch erfüllbar sind, insofern man die übrigen Variablen u als ganz beliebig, die Variablen s aber als beliebige, nicht negative betrachtet. Diese übrigen Variablen u und die s sind die Parameter der für den Systemtheil (5.) benutzten parametrischen Ausdrücke.

2. Jetzt harren nur noch der Erledigung die vom Systeme (V. 1.) zurückgebliebenen Ungleichungen. Da die linken Seiten dieser Ungleichungen von den linken Seiten der übrigen Relationen in (V. 1.) nicht unabhängig, sondern ihre einfachen Functionen sind, so sind sie einfache Functionen der Grössen s.

Die zurückgebliebenen und der Erledigung harrenden Relationen können daher wie folgt geschrieben werden:

$$(6.)\quad \begin{cases} C_{11}s_1 + C_{12}s_2 + \cdots + C_{1k}s_k \geqq 0, \\ C_{21}s_1 + C_{22}s_2 + \cdots + C_{2k}s_k \geqq 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s_1 \geqq 0, \quad s_2 \geqq 0, \ldots, \quad s_k \geqq 0, \end{cases}$$

und jetzt sind noch die Grössen s als einfache Functionen neuer Variablen in der Weise zu bestimmen, dass dadurch die Ungleichungen (6.), und nur diese, und ihre Consecutiven identisch erfüllt sind.

Um unsere Erörterung zu vereinfachen, wollen wir zuerst nur die erste Ungleichung betrachten, d. h. wir wollen die Grössen s als neue einfache Functionen in der Weise ausdrücken, dass

$$(7.)\quad \begin{cases} C_{11}s_1 + C_{12}s_2 + \cdots + C_{1k}s_k \geqq 0, \\ s_1 \geqq 0, \quad s_2 \geqq 0, \ldots, \quad s_k \geqq 0, \end{cases}$$

und dass andere einfache Relationen als diese und ihre Consecutiven nicht erfüllbar sein sollen.

3. Wären die Coefficienten $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1k}$ alle nicht negativ, so hätten wir mit (7.) nichts zu thun, denn dann wären sie durch beliebige, nicht-negative Grössen s befriedigt, — und wir könnten uns mit Hinweglassung der ersten Ungleichung in (6.) zur zweiten wenden. Aber setzen wir voraus, dass unter den Coefffcienten $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1k}$ negative vorhanden sind.

Wenn in diesem Falle nur einer von ihnen positiv ist, dann können wir auf leichte Weise zum Ziele gelangen. Es sei nämlich nur C_{11} positiv. Bedeuten in diesem Falle die Grössen $s_2, s_3, \ldots, s_k$ und die neue Grösse r beliebige nicht-negative, und bestimmt man dann s_1 in der Weise, dass

$$C_{11}s_1 = r - C_{12}s_2 - C_{13}s_3 - \cdots - C_{1k}s_k,$$

dann sind wir schon am Ziele, denn dann ist, wie ersichtlich, (7.) erfüllt *und weder mehr noch weniger, als* das System (7.) enthält.

4. Die Sache ist aber nicht so leicht, wenn unter den Coefficienten $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{1k}$ mehr als einer positiv ist. Es seien

$$C_{11} = P_1, \quad C_{12} = P_2, \ldots, \quad C_{1,\nu} = P_\nu$$

die positiven

$$C_{1,\nu+1} = -Q_1, \quad C_{1,\nu+2} = -Q_2, \ldots, \quad C_{1,\nu+\mu} = -Q_\mu$$

die negativen; die übrigen seien $= 0$. Schreiben wir noch um die Bezeichnungen zu vereinbaren

$$s_1 = p_1, \quad s_2 = p_2, \ldots, \quad s_\nu = p_\nu,$$
$$s_{\nu+1} = q_1, \quad s_{\nu+2} = q_2, \ldots, \quad s_{\nu+\mu} = q_\mu,$$

wodurch das System (7.) die Form

$$(7'.) \quad \begin{cases} P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_\nu p_\nu - Q_1 q_1 - Q_2 q_2 - \cdots - Q_\mu q_\mu \geqq 0, \\ p_1 \geqq 0, \quad p_2 \geqq 0, \ldots, \quad p_\nu \geqq 0, \\ q_1 \geqq 0, \quad q_2 \geqq 0, \ldots, \quad q_\mu \geqq 0 \end{cases}$$

annimmt.

Ich behaupte: *Wenn jede Grösse r in*

$$(8_1.) \quad \begin{cases} P_1 p_1 = r_1 + r_{11} + r_{12} + \cdots + r_{1\mu}, \\ P_2 p_2 = r_2 + r_{21} + r_{22} + \cdots + r_{2\mu}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ P_\nu p_\nu = r_\nu + r_{\nu 1} + r_{\nu 2} + \cdots + r_{\nu\mu}; \end{cases}$$

$$(8_2.) \quad \begin{cases} Q_1 q_1 = \quad r_{11} + r_{21} + \cdots + r_{\nu 1}, \\ Q_2 q_2 = \quad r_{12} + r_{22} + \cdots + r_{\nu 2}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ Q_\mu q_\mu = \quad r_{1\mu} + r_{2\mu} + \cdots + r_{\nu\mu} \end{cases}$$

beliebig nicht-negativ ist, dann haben wir in der Weise neue Parameter (r) eingeführt, dass (7'.) also zugleich die Ungleichungen in (7.) erfüllt sind, und andere Relationen als diese und solche, welche ihre Consecutiven sind, nicht befriedigt werden können.

Beweis. Einleuchtend ist, dass vermöge (8_1.) und (8_2.) durch die nicht-negativen Variablen r (7'.) identisch befriedigt wird. Durch Substitution in der ersten Ungleichung in (7'.) entsteht nämlich

$$r_1 + r_2 + \cdots r_\nu \geqq 0,$$

was mit Rücksicht darauf, dass kein r negativ ist, eine Identität bildet. Die übrigen Ungleichungen in (7'.) werden aber, da jede Grösse P und Q positiv, und dadurch dass kein r negativ ist, wegen (8_1.) und (8_2.) ersichtlicher Weise ebenfalls identisch befriedigt. Es bleibt uns noch übrig jenen schwierigeren Theil des Beweises zu liefern, dass (8_1.) und (8_2.) andere einfache Relationen, wie (7'.) und solche, welche daraus folgen, identisch nicht befriedigt, d. h. durch beliebige nicht-negative Grössen r.

Um dies zu beweisen, wollen wir vor allem anderen sehen, was für Relationen man als aus (7'.) folgende einfache Relationen betrachten kann. Ist eine solche Relation die folgende Ungleichung:

$$L_1 p_1 + L_2 p_2 + \cdots + L_\nu p_\nu + M_1 q_1 + M_2 q_2 + \cdots + M_\mu q_\mu \geqq 0,$$

dann muss sie durch alle p und q Grössen erfüllt werden, welche (7'.) befriedigen. Wird sie aber von allen diesen p und q erfüllt, dann muss es solche nicht-negativen Multiplicatoren σ, π und χ geben, dass

$$L_1 = \pi_1 + \sigma P_1, \quad L_2 = \pi_2 + \sigma P_2, \ldots, \quad L_\nu = \pi_\nu + \sigma P_\nu,$$
$$M_1 = \chi_1 - \sigma Q_1, \quad M_2 = \chi_2 - \sigma Q_2, \ldots, \quad M_\mu = \chi_\mu - \sigma Q_\mu.$$

Eine aus (7'.) folgende Ungleichung kann daher nur die Form

$$(9.)\quad \begin{cases} (\pi_1 + \sigma P_1) p_1 + (\pi_2 + \sigma P_2) p_2 + \cdots + (\pi_\nu + \sigma P_\nu) p_\nu + \\ (\chi_1 - \sigma Q_1) q_1 + (\chi_2 - \sigma Q_2) q_2 + \ldots + (\chi_\mu - \sigma Q_\mu) q_\mu \geqq 0 \end{cases}$$

haben, wo $\sigma \geqq 0$, und ebenso

$$\pi_1 \geqq 0, \quad \pi_2 \geqq 0, \ldots, \quad \pi_\nu \geqq 0,$$
$$\chi_1 \geqq 0, \quad \chi_2 \geqq 0, \ldots, \quad \chi_\mu \geqq 0.$$

Durch zweckmässige Wahl der nicht-negativen Multiplicatoren σ, π, χ ist jede consecutive Ungleichung in (9.) enthalten, so dass (9.) alle jene einfachen Ungleichungen enthält, welche in (7'.) implicite oder explicite enthalten sind.

Es ist zu zeigen, dass wir in Folge dessen, dass die Grössen r beliebig nicht-negativ sind, aus den Grössen p und q nur solche einfachen Relationen construiren können, welche man auf die Form (9.) bringen kann.

φ und ψ sollen vor der Hand ganz beliebige Grössen bedeuten, mit welchen wir, als mit Multiplicatoren, die Ausdrücke (8_1.) und (8_2.) in Verbindung bringen

$$\varphi_1 P_1 p_1 + \varphi_2 P_2 p_2 + \cdots + \varphi_\nu P_\nu p_\nu +$$
$$\psi_1 Q_1 q_1 + \psi_2 Q_2 q_2 + \cdots + \psi_\mu Q_\mu q_\mu =$$

$$(10.)\quad \begin{cases} = \varphi_1 r_1 + \varphi_2 r_2 + \cdots + \varphi_\nu r_\nu, \\ + (\varphi_1 + \psi_1) r_{11} + (\varphi_1 + \psi_2) r_{12} + \cdots + (\varphi_1 + \psi_\mu) r_{1\mu}, \\ + (\varphi_2 + \psi_1) r_{21} + (\varphi_2 + \psi_2) r_{22} + \cdots + (\varphi_2 + \psi_\mu) r_{2\mu}, \\ + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ + (\varphi_\nu + \psi_1) r_{\nu 1} + (\varphi_\nu + \psi_2) r_{\nu 2} + \cdots + (\varphi_\nu + \psi_\mu) r_{\nu\mu}. \end{cases}$$

Damit dies in Bezug auf die Grössen p und q eine einfache Relation bedeutet, ist nothwendig und hinreichend, dass die Multiplicatoren φ und ψ derartig seien, dass für alle nicht-negativen Werthe von r die rechte Seite $\geqq 0$ werde.

Diese rechte Seite wird aber für alle nicht-negativen r nur dann $\geqq 0$, wenn

$$
(11.)\quad \begin{cases}
\varphi_1 \geqq 0, & \varphi_2 \geqq 0, \ldots, & \varphi_\nu \geqq 0, \\
\varphi_1 + \psi_1 \geqq 0, & \varphi_1 + \psi_2 \geqq 0, \ldots, & \varphi_1 + \psi_\mu \geqq 0, \\
\varphi_2 + \psi_1 \geqq 0, & \varphi_2 + \psi_2 \geqq 0, \ldots, & \varphi_2 + \psi_\mu \geqq 0, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\varphi_\nu + \psi_1 \geqq 0, & \varphi_\nu + \psi_2 \geqq 0, \ldots, & \varphi_\nu + \psi_\mu \geqq 0;
\end{cases}
$$

also wird nur unter dieser Bedingung aus (8_1.) und (8_2.) die homogene ganze lineare Ungleichung

$$
(11'.)\quad \begin{cases}
\varphi_1 P_1 p_1 + \varphi_2 P_2 p_2 + \cdots + \varphi_\nu P_\nu p_\nu + \\
\psi_\nu Q_1 q_1 + \psi_2 Q_2 q_2 + \cdots + \psi_\mu Q_\mu q_\mu \geqq 0
\end{cases}
$$

folgen. Sobald aber (11.) besteht, kann schon die Ungleichung (11'.) auf die Form (9.) gebracht werden, d. h. die nicht-negativen Grössen σ, π, χ können so bestimmt werden, dass

$$
\varphi_1 P_1 = \pi_1 + \sigma P_1, \qquad \varphi_2 P_2 = \pi_2 + \sigma P_2, \ldots, \qquad \varphi_\nu P_\nu = \pi_\nu + \sigma P_\nu,
$$
$$
\psi_1 Q_1 = \chi_1 - \sigma Q_1, \qquad \psi_2 Q_2 = \chi_2 - \sigma Q_2, \ldots, \qquad \psi_\mu Q_\mu = \chi_\mu - \sigma Q_\mu;
$$

denn mit Rücksicht darauf, dass jedes P und Q positiv ist, bilden gerade die Beziehungen (11.) die Bedingung der Möglichkeit dieser Gleichungen. In der That, ist jedes ψ nicht-negativ, dann wird, wenn $\sigma = 0$ gesetzt, jedes χ und in Folge der ersten Zeile von (11.) auch jedes π nicht-negativ. Giebt es negative Werthe von ψ, so sei ψ_1 ein solcher, u. z. soll es keinen grösseren absoluten Werth unter den negativen ψ geben. Setzt man $\sigma = -\psi_1$, dann ist ersichtlich, dass jedes χ nicht-negativ ist; ferner folgt aus der ersten Zeile (11'.) für diesen Werth von σ:

$$
\pi_1 = (\varphi_1 + \psi_1) P_1, \qquad \pi_2 = (\varphi_2 + \psi_1) P_2,
$$

u. s. w., also folgt aus der ersten Colonne in (11.), dass auch jedes π nicht-negativ ist.

5. Nachdem wir schon die erste Ungleichung in (6.) mit Hülfe der nicht-negativen Parameter r in (8_1.), (8_2.) ausgedrückt haben, führen wir diese Ausdrücke sowohl in (5.), wie in die übrigen Ungleichungen von (6.) statt der Grössen s ein. Nachdem dies geschehen, haben wir jetzt anstatt (6.) ein ähnliches System, nur bezieht es sich jetzt anstatt auf die alten nicht-negativen Parameter s, auf die neuen nicht-negativen Parameter r, und enthält um eins weniger aus (1.) entnommene Ungleichungen. Auf

dieses System lässt sich dasselbe Verfahren anwenden u. s. f., bis alle Ungleichungen aus (1.) aufgebraucht sind.

Sind auf diese Weise die aus (5.) *berechneten Variablen u als einfache Functionen der übrigen Variablen u und einer gewissen Anzahl nicht-negativer Parameter bestimmt, so sind dieselben in der Weise bestimmt, dass sämmtliche Relationen* (1.), *und nur diese, und ihre Consecutiven identisch erfüllt sind.*

VII. Ueber die Beziehungen der Coefficienten.

1. Setzen wir voraus, dass wir das System (V. 1.) parametrisch aufgelöst haben, und bezeichnen wir in dieser Auflösung mit $v_1, v_2, \ldots$ die ganz willkürlichen mit $w_1, w_2, \ldots$, die willkürlichen, nicht-negativen Parameter, so dass die parametrische Auflösung in folgenden Ausdrücken besteht:

$$(1.)\qquad \begin{cases} u_1 = \beta_{11}v_1 + \beta_{12}v_2 + \cdots + \gamma_{11}w_1 + \gamma_{12}w_2 + \cdots, \\ u_2 = \beta_{21}v_1 + \beta_{22}v_2 + \cdots + \gamma_{21}w_1 + \gamma_{22}w_2 + \cdots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

wo natürlich die Coefficienten β und γ durch die Coefficienten des Systems (V. 1.) bestimmt sind.

Ist nun

$$(2.)\qquad A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_nu_n \geqq 0$$

eine consecutive Relation des Systems (V. 1.), so haben wir für alle denkbaren Werthe v, und für alle denkbaren nicht-negativen Werthe w:

$$\begin{gathered}(A_1\beta_{11} + A_2\beta_{21} + \cdots)v_1 + (A_1\beta_{12} + A_2\beta_{22} + \cdots)v_2 + \cdots \\ + (A_1\gamma_{11} + A_2\gamma_{21} + \cdots)w_1 + (A_1\gamma_{12} + A_2\gamma_{22} + \cdots)w_2 + \cdots \geqq 0.\end{gathered}$$

Daraus folgt

$$(3.)\qquad \begin{cases} \beta_{11}A_1 + \beta_{21}A_2 + \cdots + \beta_{n1}A_n = 0, \\ \beta_{12}A_1 + \beta_{22}A_2 + \cdots + \beta_{n2}A_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \gamma_{11}A_1 + \gamma_{21}A_2 + \cdots + \gamma_{n1}A_n \geqq 0, \\ \gamma_{12}A_1 + \gamma_{22}A_2 + \cdots + \gamma_{n2}A_n \geqq 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Man überzeugt sich davon, indem man alle Parameter, einen ausgenommen, gleich Null setzt.

Das Bestehen dieses Systems (3.) *ist offenbar die nothwendige und auch hinreichende Bedingung dafür, dass die Relation* (2.) *eine consecutive Ungleichung* *des Systems* (V. 1.) *darstellt.* Dass es auch hinreichende Bedingung ist, erhellt, wenn die Relationen (3.) der Reihe nach mit den ganz willkürlichen Parametern v, beziehungsweise mit den willkürlichen nicht-negativen Parametern w multiplicirt und dann addirt werden, und dem zu Folge eine Substitution nach (1.) vorgenommen wird.

Die Relationen (3.) *sind eben aequivalent mit den multiplicatorischen Ausdrücken* (V. 4.), *deren System als parametrische Auflösung des Systems* (3.), — *mit den Multiplicatoren als Parametern* — *erscheint.* Sobald eine Ungleichung eine consecutive Relation des Systems (V. 1.) bildet, befolgen die Coefficienten derselben die bestimmten Gleichungen und Ungleichungen (3.) und umgekehrt.

2. Wenn man in den parametrischen Ausdrücken (1.) alle nicht negativen Parameter (w) gleich Null setzt, so gelangt man in (3.) lediglich zu den bestimmten Gleichungen.

Indem man aber alle w gleich Null setzt, setzt man zugleich alle s in (VI. 5) gleich Null, weil, wie leicht ersichtlich, die Parameter s einfache Functionen der Parameter w sind. Da nun alle linken Seiten in (V. 1.) einfache Functionen der linken Seiten in (VI. 5.) sind, so kann man die bestimmten Gleichungen in (3.) auch dadurch erhalten, dass man alle linken Seiten in (V. 1.) gleich Null setzt, und dann die Ungleichung (2.) als consecutive Relation des hiermit fingirten Gleichungssystems behandelt. Das entgegengesetzte von (2.) ist aber auch eine consecutive Ungleichung des fingirten Systems, weil alle Lösungen dieses Systems mit veränderten Vorzeichen auch Lösungen desselben vorstellen.

Verändert man also das System (V. 1.) *in der Weise, dass man anstatt aller Ungleichungen Gleichungen schreibt, so kann man auch alle consecutiven Ungleichungen auf ähnliche Weise verändern, und von den fingirten Relationen ausgehend, gelangt man immer zu denselben bestimmten Gleichungen für die Beziehungen der Coefficienten, welche aus den wirklichen Relationen folgen. Man bekommt aber nicht die Ungleichungen, welche in* (3.) *zwischen den Coefficienten weitere Beziehungen vorstellen.*

VIII. Zusammensetzung verschiedener einschränkender Systeme.

Nehmen wir an, dass die Ungleichung

$$(\vartheta.)\qquad A_1u_1 + A_2u_2 + \cdots + A_nu_n \equiv \vartheta \geqq 0$$

so beschaffen ist, dass dieselbe für alle Lösungen des Systems

$$(\theta,\ \theta'.)\quad \left\{\begin{array}{l} A'_{11}u_1 + A'_{12}u_2 + \cdots + A'_{1n}u_n \equiv \theta'_1 = 0, \\ A'_{21}u_1 + A'_{22}u_2 + \cdots + A'_{2n}u_n \equiv \theta'_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A'_{l1}u_1 + A'_{l2}u_2 + \cdots + A'_{ln}u_n \equiv \theta'_n = 0, \\ A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + \cdots + A_{1n}u_n \equiv \theta_1 \geqq 0, \\ A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + \cdots + A_{2n}u_n \equiv \theta_2 \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

bestehen soll. Dann müssen die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ das System (VII. 3) befriedigen.

Ist aber vorgeschrieben, dass die Ungleichung (ϑ) bloss für dasjenige Werthgebiet der Variablen u bestehen soll, welches ausser der Einschränkung (θ, θ') noch einer anderen unterworfen ist, dann kommt den Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ im allgemeinen eine grössere Freiheit zu.

Unterwirft man z. B. die Variablen u ausser dem Systeme (θ, θ') noch dem folgenden:

$$(\varpi,\ \varpi'.)\quad \left\{\begin{array}{l} B'_{11}u_1 + B'_{12}u_2 + \cdots + B'_{1n}u_n \equiv \varpi'_1 = 0, \\ B'_{21}u_1 + B'_{22}u_2 + \cdots + B'_{2n}u_n \equiv \varpi'_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B'_{m1}u_1 + B'_{m2}u_2 + \cdots + B'_{mn}u_n \equiv \varpi'_m = 0, \\ B_{11}u_1 + B_{12}u_2 + \cdots + B_{1n}u_n \equiv \varpi_1 \geqq 0, \\ B_{21}u_1 + B_{22}u_2 + \cdots + B_{2n}u_n \equiv \varpi_2 \geqq 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

so dürfen die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ alle die Werthe annehmen, welche bei unbestimmten nicht-negativen Multiplicatoren λ, μ, und bei vollends unbestimmten Multiplicatoren λ', μ', durch die Ausdrücke

$$\begin{aligned} A_1 &= A'_{11}\lambda'_1 + A'_{21}\lambda'_2 + \cdots + B'_{11}\mu'_1 + B'_{21}\mu'_2 + \cdots + \\ &\quad + A_{11}\lambda_1 + A_{21}\lambda_2 + \cdots + B_{11}\mu_1 + B_{21}\mu_2 + \cdots, \\ A_2 &= A'_{12}\lambda'_1 + A'_{22}\lambda'_2 + \cdots + B'_{12}\mu'_1 + B'_{22}\mu'_2 + \cdots + \\ &\quad + A_{12}\lambda_1 + A_{22}\lambda_2 + \cdots + B_{12}\mu_1 + B_{22}\mu_2 + \cdots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

gegeben sind. Sind aber die Variablen u nur dem Systeme (θ, θ') untergeordnet, so sind diese Ausdrücke nur für $\mu' = 0$, $\mu = 0$ gültig.

Es ist jedoch möglich, dass durch eine neue Einschränkung des Werthgebietes u die Freiheit der Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ gar nicht erweitert wird.

Betrachten wir nämlich die parametrischen Auflösungen des Systems (θ, θ')

$$u_1 = \beta_{11} v_1 + \beta_{12} v_2 + \cdots + \gamma_{11} w_1 + \gamma_{12} w_2 + \cdots,$$
$$u_2 = \beta_{21} v_1 + \beta_{22} v_2 + \cdots + \gamma_{21} w_1 + \gamma_{22} w_2 + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(w_1 \geqq 0, \quad w_2 \geqq 0, \ldots),$$

woraus die Relationen (VII. 3.) für die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots$ folgen. Verengert man nun z. B. auf solche Art das Werthgebiet u, dass man für die Parameter v die drei Werthe $-\varepsilon, 0, \varepsilon$ und für die Parameter w die zwei Werthe $0, \varepsilon$ vorschreibt, wo ε irgend eine gegebene positive Grösse bedeutet, so folgen noch immer die Relationen (VII. 3.). Man überzeugt sich davon leicht, indem man eine der Variablen v einmal gleich $-\varepsilon$, einmal gleich ε, und alle übrigen Parameter v und w gleich Null setzt, dann eine der Variablen w gleich ε und alle übrigen Parameter v und w gleich Null setzt.

Ein wichtiger Fall dieser Art ist der, in welchem den absoluten Werthen der Variablen u eine obere Grenze zugewiesen ist. *Wie klein auch diese obere Grenze sein mag, die Coefficienten A_1, A_2, u. s. w. müssen die Relationen* (VII. 3.) *befriedigen.* Nach dem vorhergehenden Beispiele ist dies leicht einzusehen.

IX. Infinitesimale Systeme.

1. Die unbestimmten Veränderlichen $\xi, \eta, \ldots$ sollen in dem Raume T überall differentiirbare Functionen des Ortes (x, y, z) sein, überall im Inneren dieses Raumes der Ungleichung

$$(1.) \qquad A_0 \xi + A_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \xi}{\partial z} + B_0 \eta + \cdots \geqq 0$$

genügen, und auf der Oberfläche S dieses Raumes die Ungleichung

$$(2.) \qquad L\xi + M\eta + \cdots \geqq 0$$

befriedigen. Durch alle Lösungen dieser Ungleichungen soll die Integral-Ungleichung

$$(3.) \qquad \int_T \left(X_0 \xi + X_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + X_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + X_3 \frac{\partial \xi}{\partial z} + Y_0 \eta + \cdots \right) D\tau \geqq 0$$

erfüllt werden. Dabei bedeuten die Coefficienten $A_0, B_0, \ldots, X_0, Y_0, \ldots$ stetige Functionen, die Coefficienten $A_1, A_2, A_3, B_1, \ldots, X_1, X_2, X_3, Y_1, \ldots$ differentiirbare Functionen des Ortes im Raume T, und die Coefficienten $L, M, \ldots$ stetige Functionen auf der Oberfläche S dieses Raumes. — Das Integral ist wohl bestimmt, weil Functionen des Ortes, welche in einem Raume überall differentiirbar sind, nothwendig die Eigenschaft besitzen, dass ihre nach den Coordinaten genommenen partiellen Derivirten in dem betreffenden Raume stetig sind.

2. Diese Voraussetzung kann durch die folgende ersetzt werden.

Theilen wir das Innere des Raumes T bis zur Grenze S in sehr kleine congruente Prismen durch Ebenen, welche parallel zu den Coordinaten-Ebenen gelegt werden. Die Kanten dieser Prismen sollen die Längen Dx, Dy, Dz haben, je nachdem dieselben der x- oder y- oder z-Achse parallel sind. Die vorkommenden Functionen des Ortes sollen sich im Inneren des Raumes T auf die Centren (x, y, z) der Prismen beziehen, und folgende Bezeichnungen sollen benutzt werden:

$$\xi(x, y, z) \equiv \xi, \qquad \xi(x+Dx, y, z) \equiv \xi_{\mathrm{I}}, \qquad \xi(x, y+Dy, z) \equiv \xi_{\mathrm{II}},$$
$$\xi(x, y, z+Dz) \equiv \xi_{\mathrm{III}}, \qquad \text{u. s. w.}$$

Die Oberfläche S des Raumes T wird von den Ebenen in sehr kleine Theile $D\sigma$ getheilt. Bei diesen Theilen $D\sigma$ werden die Functionen des Ortes auf je ein nächstes Prismen-Centrum bezogen.

Nun sollen die Längen Dx, Dy, Dz so klein gewählt werden können, dass sobald dieselben noch kleiner sind, in den Centren der Prismen zwischen den Variablen $\xi, \eta, \ldots$ und den neuen Unbestimmten $u, \ldots,$ welche nur mit endlichen Werthen in Betracht kommen sollen, mit Fehlern, die unterhalb einer willkürlich gegebenen Grenze bleiben, folgende Relationen bestehen:

$$(4.) \qquad A_0\xi + A_1\frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{Dx} + A_2\frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{Dy} + A_3\frac{\xi_{\mathrm{III}}-\xi}{Dz} + B_0 y + \cdots \geqq 0,$$

$$(5.) \qquad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{Dx}\right)_{\mathrm{I}} - \frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{Dx} = a_1' \, u_1', \\ &\left(\frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{Dy}\right)_{\mathrm{I}} - \frac{\xi_{\mathrm{II}}-\xi}{Dy} = a_1'' \, u_1'', \\ &\left(\frac{\xi_{\mathrm{III}}-\xi}{Dz}\right)_{\mathrm{I}} - \frac{\xi_{\mathrm{III}}-\xi}{Dz} = a_1''' \, u_1''', \\ &\left(\frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{Dx}\right)_{\mathrm{II}} - \frac{\xi_{\mathrm{I}}-\xi}{Dx} = a_2' \, u_2', \\ &\qquad\qquad \text{u. s. w.,} \end{aligned}\right.$$

wo die Coefficienten a_1', a_1'', u. s. w. mit Dx, die Coefficienten a_2', a_2'', u. s. w. mit Dy, die Coefficienten a_3', a_3'', u. s. w. mit Dz nach Null convergiren, — an der Oberfläche S aber in den nächsten Centren

$$(6.) \qquad L\xi + M\eta + \cdots \geqq 0,$$

und für sämmtliche Lösungen dieser Relationen

$$(7.)\qquad \sum_T \Big(X_0\xi + X_1\frac{\xi_1-\xi}{Dx}+\cdots\Big)D\tau \geqq 0, \qquad (D\tau \equiv Dx\,Dy\,Dz)$$

ist. Die Coefficienten $A, B, \ldots, L, M, \ldots, X, \ldots$ sollen dabei die in (1.) aufgezählten Eigenschaften besitzen.

3. Es muss Multiplicatoren geben für die Gleichungen (5.) und nicht-negative Multiplicatoren für die Ungleichungen (4.) und (6.), so dass diese Relationen mit jenen Multiplicatoren versehen und addirt die Ungleichung (7.) identisch ergeben. Da aber in der Relation (7.) die Unbestimmten $u_1, \ldots$ nicht vorkommen, fällt der von (5.) herstammende Theil gänzlich aus der Identität heraus. Bezeichnen wir daher mit $\varphi D\tau$ die nicht-negativen Multiplicatoren von (4.) und mit $\varrho D\sigma$ diejenigen von (6.), so haben wir

$$\sum_T \Big(A_0\xi + A_1\frac{\xi_1-\xi}{Dx}+\cdots\Big)\varphi D\tau + \sum_S (L\xi+\cdots)\varrho D\sigma \equiv \sum_T \Big(X_0\xi + X_1\frac{\xi_1-\xi}{Dx}+\cdots\Big)D\tau.$$

Giebt es noch andere einschränkende Relationen von der Form (1.) und (2.), so haben wir

$$(8.)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_T \Big(\xi\Sigma A_0\varphi + \frac{\xi_1-\xi}{Dx}\Sigma A_1\varphi+\cdots\Big)D\tau + \sum_S(\xi\Sigma L\varrho+\cdots)D\sigma \equiv \\ &\qquad\qquad \sum_T \Big(X_0\xi + X_1\frac{\xi_1-\xi}{Dx}+\cdots\Big)D\tau. \end{aligned}\right.$$

Bei unendlicher Verkleinerung der Längen Dx, Dy, Dz verwandeln sich die Differenzen-Quotienten laut (5.) in partielle Derivirte, welche sich als im Raume T überall stetige Functionen des Ortes ergeben. Die rechte Seite der Identität (8.) geht in ein wohl bestimmtes Raum-Integral über, welches durch partielle Quadraturen als die Summe eines Raum- und eines Oberflächen-Integrals dargestellt werden kann, wo dann Derivirte der Variablen $\xi, \eta, \ldots$ nicht mehr vorkommen. Der linken Seite der Identität (8.) muss nothwendig dieselbe Beschaffenheit zukommen. Wir haben also nach Ausführung der partiellen Quadraturen

$$(9.)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_T \Big[\Big(\Sigma A_0\varphi - \frac{\partial}{\partial x}\Sigma A_1\varphi - \frac{\partial}{\partial y}\Sigma A_2\varphi - \frac{\partial}{\partial z}\Sigma A_3\varphi\Big)\xi+\cdots\Big]D\tau + \\ &\int_S [(\Sigma L\varrho - \alpha\Sigma A_1\varphi - \beta\Sigma A_2\varphi - \gamma\Sigma A_3\varphi)\xi+\cdots]D\sigma \equiv \\ &\int_T \Big[\Big(X_0 - \frac{\partial X_1}{\partial x} - \frac{\partial X_2}{\partial y} - \frac{\partial X_3}{\partial z}\Big)\xi+\cdots\Big]D\tau - \\ &\int_S [(X_1\alpha + X_2\beta + X_3\gamma)\xi+\cdots]D\sigma, \end{aligned}\right.$$

wo α, β, γ die Richtungs-Cosinus der nach dem Inneren des Raumes T gerichteten Normalen bezeichnen.

Daraus folgt, dass es nicht-negative Multiplicatoren φ und ϱ giebt, für welche im Inneren des Raumes T

$$(10.)\quad \begin{cases} X_0 - \dfrac{\partial X_1}{\partial x} - \dfrac{\partial X_2}{\partial y} - \dfrac{\partial X_3}{\partial z} = \Sigma A_0\varphi - \dfrac{\partial}{\partial x}\Sigma A_1\varphi - \dfrac{\partial}{\partial y}\Sigma A_2\varphi - \dfrac{\partial}{\partial z}\Sigma A_3\varphi, \\ Y_0 - \dfrac{\partial Y_1}{\partial x} - \dfrac{\partial Y_2}{\partial y} - \dfrac{\partial Y_3}{\partial z} = \Sigma B_0\varphi - \dfrac{\partial}{\partial x}\Sigma B_1\varphi - \dfrac{\partial}{\partial y}\Sigma B_2\varphi - \dfrac{\partial}{\partial z}\Sigma B_3\varphi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

und auf der Oberfläche S dieses Raumes

$$(11.)\quad \begin{cases} X_1\alpha + X_2\beta + X_3\gamma = -\Sigma L\varrho + \alpha\Sigma A_1\varphi + \beta\Sigma A_2\varphi + \gamma\Sigma A_3\varphi, \\ Y_1\alpha + Y_2\beta + Y_3\gamma = -\Sigma M\varrho + \alpha\Sigma B_1\varphi + \beta\Sigma B_2\varphi + \gamma\Sigma B_3\varphi, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

4. Da hier nach der Voraussetzung die gegebenen einschränkenden Relationen aus lauter Ungleichungen bestanden, bedeuten alle Multiplicatoren φ und ϱ nicht-negative Grössen. *Wenn auch Gleichungen, oder bloss Gleichungen unter den gegebenen einschränkenden Relationen vorkommen, so erleiden die ausgeführten Betrachtungen nur insofern eine Abänderung, als die Multiplicatoren der Gleichungen a priori keiner Beschränkung unterworfen sind.*

Wenn in dem Raume T gewisse Flächen für gewisse Functionen des Ortes Unstetigkeits-Oerter bilden, so muss dieser Umstand bei den partiellen Quadraturen in Betracht gezogen werden. Insofern aber für die Unbestimmten ξ, η, ... gewöhnliche Unstetigkeits-Flächen vorhanden sind, hat man für solche Flächen im allgemeinen auch einschränkende Relationen zwischen diesen Unbestimmten. Diese Relationen beziehen sich überall auf die zwei verschiedenen Werthe, welche den Unbestimmten an der einen und anderen Seite der Flächen zukommen. Diese Relationen müssen natürlich multiplicatorisch auch in Rechnung gezogen werden.

X. Zusätze.

§ 1. *Bedingung dafür, dass in einem einfachen Relations-Systeme eine Ungleichung eine Gleichung ist.*

Wenn in dem Systeme einfacher Relationen

$$\theta_1' = 0, \qquad \theta_2' = 0, \dots, \qquad \theta_l' = 0,$$
$$\theta_1 \geqq 0, \qquad \theta_2 \geqq 0, \dots\dots\dots\dots$$

die linke Seite θ_1 der ersten Ungleichung nur den Werth Null annehmen kann, so ist die Gleichung $\theta_1 = 0$ offenbar eine consecutive Gleichung des

Systems. Folglich muss es Multiplicatoren $-\mu'$ und nicht-positive Multiplicatoren $-\mu$ geben (V.), mit welchen die Identität

$$\theta \equiv -\mu'_1\theta'_1 - \mu'_2\theta'_2 - \cdots - \mu'_l\theta'_l - \mu_1\theta_1 - \mu_2\theta_2 - \cdots$$

besteht. *Die Identität*

$$\mu'_1\theta'_1 + \mu'_2\theta'_2 + \cdots + \mu'_l\theta'_l + (1+\mu_1)\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \cdots \equiv 0$$
$$(\mu_1 \geqq 0, \quad \mu_2 \geqq 0, \ldots)$$

ist also eine nothwendige Bedingung dafür, dass in dem gegebenen Systeme die linke Seite θ_1 der ersten Ungleichung nur den Werth Null annehmen kann. Diese Identität ist auch eine hinreichende Bedingung; denn mit Rücksicht auf die Gleichungen $\theta' = 0$ des Systems entnimmt man aus der Identität die Gleichung

$$(1+\mu_1)\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \cdots = 0,$$

woraus in Betracht dessen, dass alle Functionen θ und alle Multiplicatoren μ nicht negative Grössen sind, die Gleichung $\theta_1 = 0$ sich ergiebt.

Existirt keine Identität in der Form

$$\Sigma\lambda'\theta' + \Sigma\lambda\theta \equiv 0, \quad (\lambda \geqq 0)$$

mit wenigstens einem von Null verschiedenen Multiplicator λ, so können in dem gegebenen Systeme alle linken Seiten θ von Null verschiedene Werthe annehmen, und folglich können dieselben auch zugleich lauter positive (> 0) Werthe haben (III. 2.). Existirt aber eine solche Identität mit von Null verschiedenen Multiplicatoren λ, so können die Functionen θ, welche mit positiven (> 0) Multiplicatoren in der Identität vorkommen, nur den Werth Null in dem gegebenen Systeme annehmen.

§ 2. *Sätze über Eliminationen.*

Schreiben wir

$$A'_{i1}u_1 + A'_{i2}u_2 + \cdots + A'_{im}u_m \equiv U'_i,$$
$$A_{i1}u_1 + A_{i2}u_2 + \cdots + A_{im}u_m \equiv U_i,$$
$$B'_{i1}v_1 + B'_{i2}v_2 + \cdots + B'_{in}v_n \equiv V'_i,$$
$$B_{i1}v_1 + B_{i2}v_2 + \cdots + B_{in}v_n \equiv V_i,$$

und betrachten jetzt das System

$$U'_1 + V'_1 = 0, \qquad U'_2 + V'_2 = 0, \qquad \ldots$$
$$U_1 + V_1 \geqq 0, \qquad U_2 + V_2 > 0, \qquad \ldots.$$

1. Enthält das System implicite oder explicite Relationen, in welchen kein u vorkommt, so giebt es in gleicher Anzahl Systeme von Multiplicatoren λ' und nicht-negativen Multipliactoren λ, für welche

$$\Sigma\lambda' U' + \Sigma\lambda U \equiv 0.$$

Denn wenn V_0 in allen Lösungen des Systems $\geqq 0$ oder $= 0$ ist, so giebt es Multiplicatoren λ' und nicht-negative Multiplicatoren λ, für welche

$$\Sigma\lambda'(U'+V') + \Sigma\lambda(U+V) \equiv V_0,$$

woraus die behauptete Identität folgt.

Beim Mangel einer solchen Identität können also aus dem Systeme Relationen, in denen kein u vorkommt, nicht gefolgert werden; dann können die Variablen u nicht eliminirt werden.

In diesem Falle können die Variablen v alle denkbaren Werthe annehmen. Berechnet man nämlich aus den gegebenen Gleichungen $(U'+V'=0)$ so viele der Grössen u wie möglich als Functionen der übrigen und der Grössen v, und substituirt diese Functionen in die Ungleichungen $(U+V \geqq 0)$, so gehen letztere in ein System von Ungleichungen über, welches mit dem ganzen ursprünglichen Systeme aequivalent ist. Wir schreiben dieses System

$$\overline{U}_1+\overline{V}_1 \geqq 0, \qquad \overline{U}_2+\overline{V}_2 \geqq 0, \qquad \dots \quad .$$

Da die Variablen u, welche in diesem Systeme noch vorkommen, aus demselben nicht eliminirt werden können, giebt es keine nicht-negativen Multiplicatoren λ, bei welchen die Summe $\Sigma\lambda\overline{U}$ identisch verschwinden könnte, folglich kann zu gleicher Zeit $\overline{U}_1 > 0$, $\overline{U}_2 > 0, \dots$ gemacht werden (§ 1.). Die Grössen V, und hiermit die Variablen v können also nach Willkür alle denkbaren Werthe annehmen.

2. *Enthält das System implicite oder explicite Relationen, in welchen kein u vorkommt, so können die Variablen v alle die Werthe erhalten, welche sich mit der Gesammtheit dieser Relationen vertragen.*

Um uns davon zu überzeugen, berechnen wir wiederum aus den gegebenen Gleichungen $(U'+V'=0)$ so viele der Grössen u wie möglich als Functionen der übrigen und der Grössen v, und substituiren diese Functionen in alle Gleichungen und Ungleichungen. So erhalten wir im allgemeinen ein System von Gleichungen

$$\text{(a.)} \qquad \overline{V}_1'=0, \quad \overline{V}_2'=0, \quad \dots,$$

in welchem keine der Grössen u mehr vorkommt, und ein System von Ungleichungen

$$\text{(b.)} \qquad \overline{U}_1+\overline{V}_1 \geqq 0, \qquad \overline{U}_2+\overline{V}_2 \geqq 0, \qquad \dots,$$

in welchem die berechneten Variablen nicht mehr vorkommen. Wir setzen dabei voraus, dass die Grössen $u_{p+1}, u_{p+2}, \dots u_m$ die berechneten Variablen sind.

Eliminiren wir nun vorläufig nur eine der noch vorkommenden Variablen u, nämlich u_1 aus den Ungleichungen (b.). Zu diesem Zwecke sollen die Ungleichungen, welche die Variable u_1 enthalten, in der Form

$$\text{(b}'.\text{)} \qquad \begin{cases} u_1 - P_1 \geqq 0, & u_1 - P_2 \geqq 0, \dots \\ -u_1 + Q_1 \geqq 0, & -u_2 + Q_2 \geqq 0, \dots \end{cases}$$

geschrieben werden. Für das Resultat von Eliminationen erhalten wir das System

$$\text{(c.)} \qquad \begin{cases} Q_1 - P_1 \geqq 0, & Q_1 - P_2 \geqq 0, \dots \\ Q_2 - P_1 \geqq 0, & Q_2 - P_2 \geqq 0, \dots \\ \dots\dots & \dots\dots \end{cases}$$

Es ist zu zeigen, dass abgesehen von den Gleichungen (a.), und von jenen Ungleichungen (b.), welche die Variable u_1 nicht enthalten, die Variablen $u_2, u_3, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots$ alle die Werthe erhalten können, welche dieses System befriedigen. Dies ist aber offenbar der Fall, sobald der Werth der Grösse u_1 immer in der Weise gewählt werden kann, dass derselbe nicht kleiner als das grösste P und nicht grösser als das kleinste Q erscheint. Nun giebt es laut System (c.) keine Grössen Q, welche kleiner wären als die eine oder andere der Grössen P, — folglich kann jene Bedingung immer erfüllt werden.

Daraus folgt schon, dass die Variablen $u_2, u_3, \dots, u_p, v_1, v_2, \dots$ alle Werthe annehmen können, welche den Ungleichungen (c.), den Gleichungen (a.) und den von u_1 freien Ungleichungen unter (b.) genügen. Da in Bezug auf das System dieser Relationen die Elimination einer zweiten Variablen u, z. B. u_2, zu ähnlichem Ergebniss führt u. s. w., so ist der oben ausgesprochene Satz bewiesen.

§ 3. *Die Zerlegung eines Grössensystems in zwei andere auf Grundlage einfacher Relationen.*

Es soll das Grössensystem

$$\text{(1.)} \qquad P_1, P_2, \dots, P_n$$

und das System einfacher Relationen

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} \sum_{i=l}^{i=n} A_{1i} u_i = 0, & \sum_{i=1}^{i=n} A_{2i} u_i = 0, \dots, & \sum_{i=1}^{i=n} A_{li} u_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=n} B_{1i} u_i \geqq 0, & \sum_{i=1}^{i=n} B_{2i} u_i \geqq 0, \dots, & \dots \end{cases}$$

gegeben werden.

Ich behaupte: *das Grössensystem P (1.) kann immer derart in zwei Componenten Π und $\mathfrak{P}$ zerlegt werden ($P_i = \Pi_i + \mathfrak{P}_i$), dass für die ersteren*

$$(3.) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \Pi_i u_i \geqq 0$$

ist, und dass die letzteren mit willkürlich gewählten negativen Coefficienten $-p$ multiplicirt den Relationen (2.) *genügen:*

$$(4.) \quad -\sum_{i=1}^{i=n} A_{1i} p_i \mathfrak{P}_i = 0, \text{ u. s. w.}, \qquad -\sum_{i=1}^{i=n} B_{1i} p_i \mathfrak{P}_i \geqq 0, \text{ u. s. w.}$$

1) Für den Beweis dieser Behauptung setze ich voraus erstens, dass eine jede Gleichung in (2.) unabhängig ist von den übrigen Gleichungen, zweitens, dass aus den Ungleichungen (2.) nicht eine Ungleichung gefolgert werden kann, deren linke Seite identisch verschwindet oder durch die linken Seiten der Gleichungen ausgedrückt werden kann.

Die Relationen (2.) können immer auf eine dieser Voraussetzung entsprechende Form gebracht werden. Denn wenn die zweite Voraussetzung nicht zuträfe, so könnte man gewisse Ungleichungen durch Gleichungen ersetzen (§ 1.) und auf diese Weise die zweite Voraussetzung zu Stande bringen. Die Möglichkeit der ersten Voraussetzung ist evident.

2) Um nun den gedachten Beweis zu liefern, beachten wir, dass die Ungleichung (3.) für alle Lösungen des Systems (2.) bestehen muss. Hieraus ergeben sich für die Componenten Π die Ausdrücke:

$$(5.) \quad \Pi_i = \sum_{k=1}^{k=l} A_{ki}\lambda_k + \sum_{k=1}^{k=\dots} B_{ki}\mu_k \qquad (\mu_k \geqq 0,\ i = 1, 2, \dots, n).$$

Da $\Pi_i = P_i - \mathfrak{P}_i$, ist also zu beweisen, dass die Componenten $\mathfrak{P}$ ausser den Relationen (4.) auch noch den folgenden Genüge leisten können:

$$(6.) \quad -\mathfrak{P}_i = -P_i + \sum_{k=1}^{k=l} A_{ki}\lambda_k + \sum_{k=1}^{k=\dots} B_{ki}\mu_k \qquad (\mu_k \geqq 0,\ i = 1, 2, \dots, n).$$

Setzt man diese Ausdrücke in (4.) ein, so erhält man Relationen für die Multiplicatoren λ und für die nicht-negativen Multiplicatoren μ, und es ist noch zu zeigen, dass diese Multiplicatoren Werthe erhalten können, durch welche diese Relationen befriedigt werden.

Setzen wir:

$$(7.) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^{i=n} A_{ki}A_{hi}p_i \equiv (AA)_{kh}, & \sum_{i=1}^{i=n} A_{ki}B_{hi}p_i \equiv (AB)_{kh} \equiv (BA)_{hk}, \\ & \sum_{i=1}^{i=n} B_{ki}B_{hi}p_i \equiv (BB)_{kh}, \end{array} \right.$$

so verwandeln sich die Relationen (4.) nach der gedachten Substitution in

$$(8.)\quad \begin{cases} L_h + (AA)_{h1}\lambda_1 + (AA)_{h2}\lambda_2 \\ \qquad\qquad + \cdots + (AA)_{hl}\lambda_l + (AB)_{h1}\mu_1 + (AB)_{h2}\mu_2 + \cdots = 0, \\ M_k + (AB)_{1k}\lambda_1 + (AB)_{2k}\lambda_2 \\ \qquad\qquad + \cdots + (AB)_{lk}\lambda_l + (BB)_{1k}\mu_1 + (BB)_{2k}\mu_2 + \cdots \geqq 0, \\ \mu_1 \geqq 0,\ \mu_2 \geqq 0,\ \ldots \\ \qquad (h = 1, 2, \ldots, l, \quad k = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

wo die Glieder L_h und M_k von den Multiplicatoren λ und μ unabhängig sind. Nun können die Multiplicatoren λ als Functionen der Multiplicatoren μ aus dem Systeme der Gleichungen berechnet werden, da die Determinante dieses Systems in Bezug auf die Unbestimmten λ, eine einfache Function von Quadraten mit positiven Coefficienten, wegen der ersten Voraussetzung in 1) nicht verschwindet. Diese Multiplicatoren λ sind vorläufig keinen Beschränkungen unterworfen. Berechnet man daher dieselben aus den Gleichungen als Functionen der Multiplicatoren μ, und substituirt diese Werthe dann in die Ungleichungen, so bleibt zu beweisen, dass die nicht-negativen Multiplicatoren μ den neuen Ungleichungen gemäss bestimmt werden können.

Setzen wir die Determinante:

$$\begin{vmatrix} (BB)_{ki} & (BA)_{k1} & (BA)_{k2} & \cdots & (BA)_{kl} \\ (AB)_{1i} & (AA)_{11} & (AA)_{12} & \cdots & (AA)_{1l} \\ (AB)_{2i} & (AA)_{21} & (AA)_{22} & \cdots & (AA)_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (AB)_{li} & (AA)_{l1} & (AA)_{l2} & \cdots & (AA)_{ll} \end{vmatrix} \equiv a_{ki},$$

so erhalten wir nach der Substitution:

$$(9.)\quad \begin{cases} N_k + a_{k1}\mu_1 + a_{k2}\mu_2 + \cdots \geqq 0, \quad \mu_1 \geqq 0, \quad \mu_2 \geqq 0, \quad \ldots \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

wo die Glieder N_k von den Multiplicatoren unabhängig sind.

3) Es ist zu beweisen, dass diese Ungleichungen immer erfüllt werden können. — Wenn in dem Ansatze:

$$(10.)\quad \begin{cases} a_{k1}\mu_1 + a_{k2}\mu_2 + \cdots \equiv \theta_k \geqq 0, \quad \mu_1 \geqq 0, \quad \mu_2 \geqq 0, \quad \ldots \\ \qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

keine linke Seite θ in der Weise beschränkt vorkommt, dass dieselbe nur den Werth Null annehmen kann, so können alle linken Seiten θ gleichzeitig grösser als Null sein (III. 2.). Dann können aber die Multiplicatoren μ offenbar so gewählt werden, dass die Ungleichungen (9.) befriedigt werden.

In (10.) ist in der That keine linke Seite θ vorhanden, welche ausschliesslich den Werth Null annehmen kann. Setzt man nämlich voraus, dass in (10.) die linke Seite θ_1 nur den Werth Null annehmen kann, so muss es nicht-negative Multiplicatoren $\nu_1 - 1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ geben, vermöge deren die Identität:

$$\nu_1\theta_1 + \nu_2\theta_2 + \nu_3\theta_3 + \cdots + \varrho_1\mu_1 + \varrho_2\mu_2 + \cdots \equiv 0$$

besteht (§ 1), das heisst:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho_1 + \nu_1 a_{11} + \nu_2 a_{21} + \cdots = 0, \\ \varrho_2 + \nu_1 a_{21} + \nu_2 a_{22} + \cdots = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \quad (\nu_1 \geqq 1,\ \nu_2 \geqq 0,\ \nu_3 \geqq 0,\ \ldots,\ \varrho_1 \geqq 0,\ \varrho_2 \geqq 0, \ldots)$$

ist. Multiplicirt man hier die erste Gleichung mit ν_1, die zweite mit ν_2 u. s. w. und addirt, so gelangt man zu einer Gleichung, welche auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\nu_1\varrho_1 + \nu_2\varrho_2 + \cdots + \begin{vmatrix} \Sigma\Sigma(BB)_{ki}\nu_k\nu_i & \Sigma(BA)_{k1}\nu_k & \Sigma(BA)_{k2}\nu_k & \cdots & \Sigma(BA)_{kl}\nu_k \\ \Sigma(AB)_{1i}\nu_i & (AA)_{11} & (AA)_{12} & \cdots & (AA)_{1l} \\ \Sigma(AB)_{2i}\nu_i & (AA)_{21} & (AA)_{22} & \cdots & (AA)_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \Sigma(AB)_{li}\nu_i & (AA)_{l1} & (AA)_{l2} & \cdots & (AA)_{ll} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinante ist eine einfache Function von Quadraten mit positiven Coefficienten. Bildet man nämlich aus dem Systeme

$$\left.\begin{array}{llll} \Sigma B_{k1}\nu_k, & A_{11}, & A_{21}, \cdots & A_{l1} \\ \Sigma B_{k2}\nu_k, & A_{12}, & A_{22}, \cdots & A_{l2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdots & \cdot \\ \Sigma B_{kn}\nu_k, & A_{1n}, & A_{2n} \cdots & A_{ln} \end{array}\right\} \quad (\nu_k \geqq 0),$$

nach den Zeilen alle Determinanten $(l+1)$-ten Grades, quadrirt dann und addirt dieselben mit gewissen positiven Coefficienten versehen, so gelangt man zu dem Determinantengliede der Gleichung. Da nun die Reihe $\nu_1\varrho_1 + \nu_2\varrho_2 + \cdots$ aus lauter nicht-negativen Gliedern besteht, so müssen die erwähnten Quadrate, und hiermit die erwähnten Determinanten $(l+1)$-ten Grades verschwinden. Dies widerspricht aber den Voraussetzungen in 1).

4) Dieser Beweis erstreckt sich aber nicht auf den Fall, dass in (2.) bloss Ungleichungen vorkommen und auch implicite keine Gleichungen darin enthalten sind. In diesem Falle besteht nämlich das System (8.) lediglich aus den Ungleichungen

$$M_k + (BB)_{1k}\mu_1 + (BB)_{2k}\mu_2 + \cdots \geqq 0, \quad \mu_1 \geqq 0, \quad \mu_2 \geqq 0, \quad \ldots \quad . \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots).}$$

Behandelt man aber diese Ungleichungen auf dieselbe Weise, wie in 3) die Ungleichungen (9.), so gelangt man zu dem Resultate, dass die Ausdrücke

$$(BB)_{1k}\mu_1 + (BB)_{2k}\mu_2 + \cdots, \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots)}$$

alle gleichzeitig Werthe über Null haben können, weil widrigenfalls die Summen $\Sigma B_{k1}\nu_k$, $\Sigma B_{k2}\nu_k, \ldots$, wo $\nu_k \geqq 0$, alle gleichzeitig verschwinden könnten, ohne dass alle Multiplicatoren ν_k verschwinden, im Widerspruche mit der gemachten Voraussetzung, dass die gegebenen Ungleichungen implicite keine Gleichungen enthalten sollen; denn multiplicirt man die Gleichungen

$$\Sigma B_{k1}\nu_k = 0, \quad \Sigma B_{k2}\nu_k = 0, \quad \ldots$$

der Reihe nach mit u_1, u_2, u. s. w. und addirt man dann dieselben, so gelangt man zu der Identität

$$\nu_1 \Sigma B_{1i} u_i + \nu_2 \Sigma B_{2i} u_i + \cdots = 0,$$

also zu der Bedingung dafür, dass in dem Systeme der gegebenen Ungleichungen wenigstens eine Gleichung implicite enthalten ist (§ 1.).

§ 4. Die Auseinandersetzungen der vorhergehenden drei Paragraphen stützen sich lediglich auf den Grundsatz der einfachen Relationen (V.). Zu Folge der Beweisführung in (IX.) ***können daher die hier begründeten Sätze auch auf infinitesimale Systeme angewendet werden.***
