

Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung n^{ten} Grades.

Von JULIUS KÖNIG in Budapest.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Beweise des folgenden Satzes: *Sei $f(x) = 0$ eine beliebige algebraische Gleichung, (mit reellen Coefficienten), und*

$$\frac{1}{f(x)} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots$$

die entsprechende recurrirende Reihe, deren Coefficienten mit denen der Gleichung zugleich bekannt sind. Bezeichnet man sodann die Anzahl der Zeichenwechsel in den Coefficienten dieser Reihe bis zum n^{ten} Gliede mit w_n , so ist die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel dieser Gleichung:

$$x = r_1 (\cos \omega_1 \pm i \sin \omega_1)$$

durch folgende Werthe gegeben. Es ist:

$$\frac{\omega_1}{\pi} = \left(\frac{w_n}{n} \right)_{n=\infty},$$

$$r_1 = \text{mod} \frac{1}{(\sqrt[n]{\gamma_n})_{n=\infty}}.$$

Der Ausdruck des Satzes erleidet nur dann eine geringe Modification, wenn es Wurzeln von gleichem absoluten Betrag giebt, die weder gleich noch conjugirt sind. Der Beweis beruht dem Wesen nach auf einem Hilfssatz (1.), der den Werth eines Winkels φ aus den Vorzeichen der Reihe:

$$1, \cos \varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \dots,$$

durch den obigen Grenzausdruck bestimmt. Nach einer genauen Untersuchung des Werthes, dem sich jener Ausdruck für unendliche n wirklich nähert (2.) und einigen für das folgende nothwendigen Verallgemeinerungen (3.), gehe ich dazu über, aus den bekannten Relationen zwischen den Coefficienten γ und den Wurzeln der Gleichung jene Bestimmung der ihrem absoluten Betrage nach kleinsten Wurzel wirklich abzuleiten (4.). Eine kurze Betrachtung genügt dann, um

die Bedeutung des erwähnten Ausnahmefalles klar zu stellen, der sich übrigens durch die Unbestimmtheit des Ausdrucks für ω immer selbst anzeigt.

1.

Es soll zunächst gezeigt werden, wie der Werth eines Winkels φ sich vollständig bestimmen lässt, wenn die Vorzeichen der Glieder in der unendlichen Reihe:

$$1, \cos \varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \dots\dots\dots$$

bekannt sind.

Da, abgesehen von Vielfachen von 2π der obigen Reihe jedenfalls die beiden Werthe φ und $2\pi - \varphi$ entsprechen, dürfen wir voraussetzen, dass der zu bestimmende Werth von φ zwischen den Grenzen 0 und π liegt. Seien nun:

$$\begin{aligned} 1, \cos \varphi, \dots\dots, \cos (\lambda_1 - 1)\varphi & \text{ positiv,} \\ \cos \lambda_1 \varphi, \dots\dots, \cos (\lambda_2 - 1)\varphi & \text{ negativ,} \\ \cos \lambda_2 \varphi, \dots\dots, \cos (\lambda_3 - 1)\varphi & \text{ positiv,} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{aligned}$$

und im Allgemeinen:

$$\cos \lambda_{m-1} \varphi, \dots\dots, \cos (\lambda_m - 1)\varphi,$$

von gleichem Vorzeichen mit $(-1)^{m-1}$. Es sind in diesen Ausdrücken:

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\dots$$

positive ganze Zahlen, die fortwährend wachsen und m bedeutet die Anzahl der Zeichenwechsel, welche in der unendlichen Reihe bis zum Gliede $\cos \lambda_m \varphi$: d. i. bis zum $\lambda_m + 1^{\text{ten}}$ Gliede vorkommen*).

Man kann nun für φ folgende Reihe von Grenzbedingungen entwickeln. Es ist zunächst:

$$0 < \varphi < \pi.$$

Ist nun $\cos \varphi$ positiv, so wird auch:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$$

sein; ist auch $\cos 2\varphi$ positiv, so wird, da nach dem Vorhergehenden:

$$2\varphi < \pi$$

ist, auch

$$0 < 2\varphi < \frac{\pi}{2}$$

sein. In dieser Weise fortschliessend, erhält man endlich:

*) Die Zeichenwechsel ebenso gezählt, wie diess in der Theorie der Gleichungen z. B. bei der Descartes'schen Zeichenregel der Fall ist.

$$(1) \quad 0 < (\lambda_1 - 1) \varphi < \frac{\pi}{2},$$

nun ist $\cos \lambda_1 \varphi$ negativ, φ selbst aber zwischen 0 und π enthalten, also:

$$(2) \quad \frac{\pi}{2} < \lambda_1 \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

Aus diesen letzten Relationen erhält man unmittelbar:

$$(3) \quad \frac{1}{2\lambda_1} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{1}{2(\lambda_1 - 1)}.$$

Für $(\lambda_1 + 1)\varphi$ hat man vor allem aus: $\varphi < \pi$

$$\frac{\pi}{2} < (\lambda_1 + 1)\varphi < \frac{5\pi}{2},$$

und da $\cos (\lambda_1 + 1)\varphi$ negativ ist:

$$\frac{\pi}{2} < (\lambda_1 + 1)\varphi < \frac{3\pi}{2};$$

ferner wird, wenn auch $\cos (\lambda_1 + 2)\varphi$ negativ ist, da jedenfalls:

$$(\lambda_1 + 2)\varphi < \frac{5\pi}{2},$$

auch

$$\frac{\pi}{2} < (\lambda_1 + 2)\varphi < \frac{3\pi}{2}$$

sein, und so erhält man endlich:

$$(4) \quad \frac{\pi}{2} < (\lambda_2 - 1)\varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

Dann ist wieder:

$$\frac{\pi}{2} < \lambda_2 \varphi < \frac{5\pi}{2},$$

und mit Berücksichtigung dessen, dass $\cos \lambda_2 \varphi$ positiv ist:

$$(5) \quad \frac{3\pi}{2} < \lambda_2 \varphi < \frac{5\pi}{2},$$

woraus sich für $\frac{\varphi}{\pi}$ die folgenden Bedingungen ergeben;

$$(6) \quad \frac{3}{2\lambda_2} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{3}{2(\lambda_2 - 1)}.$$

Durch Fortsetzung dieser Schlussreihe kann man für $\frac{\varphi}{\pi}$ eine Reihe von einschliessenden Werthen finden, deren Bildungsgesetz sehr einfach ist, und von m auf $m + 1$ schliessend, leicht allgemein verificirt werden kann. Dieses System von Ungleichungen ist das folgende:

$$\frac{1}{2\lambda_1} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{1}{2(\lambda_1 - 1)},$$

$$\frac{3}{2\lambda_2} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{3}{2(\lambda_2 - 1)},$$

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{5}{2\lambda_3} &< \frac{\varphi}{\pi} < \frac{5}{2(\lambda_3-1)} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{2m-1}{2\lambda_m} &< \frac{\varphi}{\pi} < \frac{2m-1}{2(\lambda_m-1)}, \\ \frac{2m+1}{2\lambda_{m+1}} &< \frac{\varphi}{\pi} < \frac{2m+1}{2(\lambda_{m+1}-1)}. \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Wenn nun die angenommene Zeichenreihe, d. i. die Reihe der Zahlen λ einem Werthe von φ wirklich entsprechen, müssen diese Bedingungen sämmtlich mit einander verträglich sein und man überzeugt sich leicht, dass die aufeinanderfolgenden Ungleichungen den Werth von $\frac{\varphi}{\pi}$ in immer engere Grenzen einschliessen. Man kann z. B. die vorletzte des Systems in folgender Weise schreiben:

$$\frac{m}{\lambda_m} - \frac{1}{2\lambda_m} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{\frac{m}{\lambda_m} - \frac{1}{2\lambda_m}}{1 - \frac{1}{\lambda_m}}.$$

Da nun m die Anzahl der Zeichenwechsel bis zum $\lambda_m + 1^{\text{ten}}$ Gliede ($\cos \lambda_m \varphi$) ist, so hat man jedenfalls:

$$m < \lambda_m;$$

also ist $\frac{m}{\lambda_m}$ für jedes m kleiner als 1. Da nun λ_m , die Anzahl der Glieder beliebig gross gemacht werden kann, so nähert sich die obere und untere Grenze von $\frac{\varphi}{\pi}$ beliebig dem Werthe von $\frac{m}{\lambda_m}$ für eine unendlich wachsende Gliederzahl. Dieser Quotient kann auch noch in andrer Weise geschrieben werden; setzt man nämlich die Gliederzahl: $\lambda_m + 1 = n$ und m , die Anzahl der Zeichenwechsel in den ersten n Gliedern gleich w_n , so wird derselbe $\frac{w_n}{n}$ und man hat:

$$(8) \quad \frac{\varphi}{\pi} = \lim \left(\frac{w_n}{n} \right)_{n=\infty}.$$

2.

Als nothwendige Ergänzung des Vorhergehenden muss noch gezeigt werden, dass (natürlich immer unter der Voraussetzung, dass die gegebenen Verhältnisse wirklich einem Werthe des φ entsprechen) $\frac{w_n}{n}$ sich bei wachsendem n in der That einem bestimmten Grenzwerte nähert.

Diess ist zunächst sehr leicht zu zeigen, wenn $\frac{\varphi}{\pi}$ einen rationalen Werth: $\frac{a}{b}$ besitzt. Dann ist

$$\varphi = \frac{a}{b} \pi,$$

und jedenfalls schon

$$2b\varphi = 2a\pi,$$

also:

$$\cos(2b+r)\varphi = \cos r\varphi.$$

Zwei Glieder, deren Stellenzeiger um $2b$ verschieden sind, haben in diesem Falle nicht nur gleiches Vorzeichen, sondern völlig übereinstimmende Werthe. Die Reihe der Vorzeichen hat also, wie man sich ausdrücken kann, eine endliche Periode; sie treten längstens nach dem $2b^{\text{ten}}$ in derselben Reihenfolge wieder auf. Seien nun bis zum $2b^{\text{ten}}$ Gliede k Zeichenwechsel vorhanden, von diesem zum $4b^{\text{ten}}$ k' , (wo sich k von k' um 1 unterscheiden kann, wenn vom $2b^{\text{ten}}$ auf das $2b+1^{\text{te}}$ Glied ein Zeichenwechsel stattfindet). Dann ist auch im Allgemeinen die Zahl der Zeichenwechsel vom $2rb^{\text{ten}}$ bis zum $2(r+1)b^{\text{ten}}$ gleich k' . Gehen wir nun bis zu einem beliebigen n^{ten} Gliede. Dann ist:

$$n = 2bs + \beta,$$

wo $\beta < 2b$; und die Anzahl der Zeichenwechsel bis zu diesem:

$$w_n = sk + \alpha,$$

wo wieder α höchstens gleich k ist. Also hat man:

$$\frac{w_n}{n} = \frac{sk + \alpha}{2bs + \beta},$$

was bei unendlich wachsenden n oder s in $\frac{k}{2b}$ übergeht. Man sieht leicht, dass:

$$k = 2a$$

ist; also nähert sich $\frac{w_n}{n}$ in der That dem festen Werthe $\frac{a}{b}$.

Um nun von rationalen Werthen des $\frac{\varphi}{\pi}$ zu irrationalen überzugehen, beweisen wir zuerst den folgenden Satz:

Wenn φ irgend einen Werth zwischen 0 und π besitzt, und δ ein positiver Werth von der Beschaffenheit, dass auch $\varphi + \delta$ zwischen diesen Grenzen liegt, so ist die Zahl der Zeichenwechsel bis zu einem beliebigen Gliede in der Reihe:

$$1, \cos(\varphi + \delta), \cos 2(\varphi + \delta), \cos 3(\varphi + \delta), \dots,$$

nie kleiner als die Zahl der Zeichenwechsel bis zum entsprechenden Gliede in der Reihe:

$$1, \cos \varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \dots$$

Gehen wir z. B. bis zu einem Gliede $\cos r\varphi$, so liegt $r\varphi$ zwischen zwei ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} < r\varphi < \frac{(2k+3)\pi}{2},$$

und die Zahl der Zeichenwechsel bis $\cos r\varphi$ ist dann $k+1$. Man kann nämlich die Werthe:

$$0, \varphi, 2\varphi, 3\varphi, \dots$$

nach den Intervallen 0 bis $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$, u. s. f. eintheilen, und man sieht dann unmittelbar, dass ein Zeichenwechsel nur dann eintritt, wenn man von einem Intervall in das nächste gelangt. Da aber der Werth von φ kleiner als π ist, liegt in jedem solchen Intervall wenigstens ein Vielfaches von φ , woraus man ersieht, dass die Zahl der Zeichenwechsel in der That gleich $k+1$ ist.

Ebenso sei nun:

$$\frac{(2k'+1)\pi}{2} < r(\varphi+\delta) < \frac{(2k'+3)\pi}{2}.$$

Dann ist die Zahl der Zeichenwechsel für die nach Vielfachen von $\varphi+\delta$ fortschreitende Reihe bis zum Gliede $\cos r(\varphi+\delta)$ gleich $k'+1$ und aus

$$r(\varphi+\delta) > r\varphi$$

folgt, wie es der oben ausgesprochene Satz verlangt:

$$k' \geq k.$$

Ist nun $\frac{\varphi}{\pi}$ ein irrationaler Werth, so kann man bekanntlich zwei rationale Zahlen bestimmen, die jenen in beliebig enge Grenzen einschliessen, z. B.:

$$\frac{a'}{b'} < \frac{\varphi}{\pi} < \frac{a''}{b''},$$

oder auch

$$\varphi' < \varphi < \varphi'',$$

wenn

$$\varphi' = \frac{a'}{b'}\pi, \quad \varphi'' = \frac{a''}{b''}\pi$$

gesetzt wird. Betrachten wir nun die drei Reihen:

$$1, \cos \varphi', \cos 2\varphi', \cos 3\varphi', \dots$$

$$1, \cos \varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \dots$$

$$1, \cos \varphi'', \cos 2\varphi'', \cos 3\varphi'', \dots$$

und bezeichnen die Anzahl der Zeichenwechsel bis zum n^{ten} Gliede in denselben mit w_n' , w_n und w_n'' , dann ist nach obigem Satze:

$$w_n' \leq w_n \leq w_n'',$$

also auch:

$$\frac{w_n'}{n} \leq \frac{w_n}{n} \leq \frac{w_n''}{n}$$

für jedes n . Geht man nun zur Grenze über, so wird:

$$\lim \left(\frac{w_n'}{n} \right)_{n=\infty} = \frac{a'}{b'},$$

$$\lim \left(\frac{w_n''}{n} \right)_{n=\infty} = \frac{a''}{b''},$$

und man erhält:

$$\frac{a'}{b'} \leq \lim \left(\frac{w_n}{n} \right)_{n=\infty} \leq \frac{a''}{b''}.$$

Da nun $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{a''}{b''}$ einander beliebig nahe gebracht werden können, so muss also $\frac{w_n}{n}$ sich auch dann einem bestimmten Grenzwert h nähern, wenn $\frac{\varphi}{\pi}$ einen irrationalen Werth besitzt.

3.

Die im Vorhergehenden ausgeführte Bestimmung von φ aus den Vorzeichen der Reihe:

$$1, \cos \varphi, \cos 2\varphi, \cos 3\varphi, \dots$$

lässt sich noch in der Weise verallgemeinern, dass es genügt, wenn die Vorzeichen erst von einem bestimmten endlichen Gliede richtig angegeben sind. Hat man bis zu diesem statt der k wirklich vorkommenden Zeichenwechsel z. B. k' gezählt, so erhält man statt des wirklichen Werthes von w_n den folgenden: $w_n + k - k'$. Da aber $k - k'$ eine endliche Grösse ist, so nähert sich

$$\frac{w_n}{n} \text{ und } \frac{w_n + k - k'}{n}$$

derselben Grenze.

Eine weitere Verallgemeinerung des bisherigen Resultats besteht darin, dass der Werth von φ sich ebenso aus der allgemeineren Reihe

$$\cos \alpha, \cos (\alpha + \varphi), \cos (\alpha + 2\varphi), \cos (\alpha + 3\varphi), \dots$$

ergiebt, wo α einen beliebigen endlichen Werth besitzt.

Wir schliessen ähnlich wie früher, dass die Werthe $\alpha, \alpha + \varphi, \dots$ bis zu einem beliebigen $\alpha + r\varphi$ sich in die Intervalle 0 bis $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{3\pi}{2}$, $\dots$ $\frac{2k+1}{2}\pi$ bis $\frac{2k+3}{2}\pi$ eintheilen, von denen wegen α jedoch nun einige der ersten wegfallen können. Dann ist die Anzahl der Zeichenwechsel in obiger Reihe von k höchstens um eine bestimmte endliche Grösse verschieden. Wenn man nun ebenso die Werthe $0, \varphi, 2\varphi, \dots, r\varphi$ in Intervalle vertheilt, so liegt $r\varphi$

zwischen $\frac{2k'+1}{2}\pi$ und $\frac{2k'+3}{2}\pi$, und es ist $k \rightarrow k'$ ebenfalls eine bestimmte endliche, von α abhängige Zahl; insbesondere wenn $\alpha < \pi$, gleich 0 oder 1.

Man erhält also auch aus dieser Reihe

$$\lim \left(\frac{w_n}{n} \right)_{n=\infty} = \varphi.$$

4.

Wir gehen nun zur Betrachtung der allgemeinen Gleichung m^{ten} Grades über:

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m = 0.$$

Man hat dann in bekannter Weise:

$$\frac{1}{f(x)} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \dots$$

eine recurrirende Reihe, deren Coefficienten durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$\begin{aligned} a_m \gamma_0 &= 1, \\ a_{m-1} \gamma_0 + a_m \gamma_1 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ a_0 \gamma_i + a_1 \gamma_{i+1} + a_2 \gamma_{i+2} + \dots + a_m \gamma_{i+m} &= 0, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die Zahlen γ können mit Hülfe dieser Gleichungen der Reihe nach berechnet werden und sind demnach als bekannt zu betrachten. Dieselben lassen sich aber bekanntlich auch durch die Wurzeln der vorgelegten Gleichung ausdrücken, und zwar ist, wenn man diese mit:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

bezeichnet:

$$\gamma_n = A_1 \alpha_1^{-n} + A_2 \alpha_2^{-n} + \dots + A_m \alpha_m^{-n}$$

wo die Coefficienten A von dem Werthe der Wurzeln, nicht aber von n abhängen, also für alle γ dieselben bleiben. Setzen wir nun:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= r_j (\cos \omega_j + i \sin \omega_j), \\ A_j &= M_j (\cos \eta_j - i \sin \eta_j) \end{aligned}$$

und beachten, dass, wenn die Coefficienten der Gleichung als reell vorausgesetzt werden, auch die γ reelle Werthe erhalten müssen, also in ihrem Ausdrücke der mit i multiplicirte Theil verschwinden muss, so erhält man weiter:

$$\begin{aligned} (1) \quad \gamma_n &= M_1 r_1^{-n} \cos(\eta_1 + n \omega_1) + M_2 r_2^{-n} \cos(\eta_2 + n \omega_2) + \dots \\ &\quad + M_m r_m^{-n} \cos(\eta_m + n \omega_m). \end{aligned}$$

In diesem Ausdrucke wollen wir die Glieder so geordnet denken, dass die absoluten Beträge der Wurzeln:

$$r_1, r_2, \dots, r_m$$

eine steigende Reihe bilden. Ausserdem mögen die etwaigen gleichen oder conjugirten Wurzeln entsprechenden Glieder als vereinigt gedacht werden; da diesen auch gleiche oder conjugirte Werthe von A entsprechen, ändert sich hierdurch M nun um einen Zahlenfactor.

Die weitere Untersuchung geschehe nun unter der Voraussetzung, dass nach Vereinigung der gleichen oder conjugirten Wurzeln entsprechenden Glieder die r sämmtlich untereinander verschieden sind, d. h. dass es ausser den erwähnten keine Wurzeln von gleichem absoluten Betrage giebt.

Dann wird von einem bestimmten Gliede an die Zahl der Zeichenwechsel in den Reihen:

$$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$$

und

$$(3) \quad \cos \eta_1, \cos (\eta_1 + \omega_1), \cos (\eta_1 + 2\omega_1), \cos (\eta_1 + 3\omega_1), \dots$$

vollständig übereinstimmen.

Schreibt man γ_n in folgender Form:

$$(4) \quad \gamma_n = M_1 r_1^{-n} \left(\cos(\eta_1 + n\omega_1) + \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^n \cos(\eta_2 + n\omega_2) + \dots \right. \\ \left. + \frac{M_m}{M_1} \left(\frac{r_m}{r_1} \right)^n \cos(\eta_m + n\omega_m) \right),$$

so kann der erste Factor $M_1 r_1^{-n}$, seiner Bedeutung nach eine positive Grösse, die das Zeichen von γ_n nicht ändert, völlig unbeachtet bleiben.

Da ferner $r_1 < r_2 < \dots < r_m$, kann man einen Exponenten n immer so bestimmen, dass die Glieder des eingeklammerten Factors in (4) vom zweiten ab, also auch deren Summe kleiner werde als eine beliebig gegebene Grösse ε ; wenn also $\cos(\eta_1 + n\omega_1)$ vom Zeichen abgesehen, grösser ist als ε , hat von einem bestimmten Exponenten n ab γ_n mit dieser Grösse gleiches Zeichen.

Es ist nun nur noch der Fall zu untersuchen, wo $\cos(\eta_1 + n\omega_1)$ kleiner wird, als eine beliebig klein angenommene Grösse ε . Diess kann aber nur dann der Fall sein, wenn $\eta_1 + n\omega_1$ sich um weniger als δ von einem ungeraden Vielfachen des $\frac{\pi}{2}$, z. B. $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ unterscheidet, wo δ eine Grösse ist, die mit ε zugleich verschwindet. Da aber ω_1 einen zwischen 0 und π befindlichen endlichen Werth bedeutet, so muss, wenn δ genügend klein gewählt wird, $\eta_1 + \overline{n-1}\omega_1$

in dem Intervalle zwischen $(2k-1)\frac{\pi}{2}$ und $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, hingegen $\eta_1 + \overline{n+1}\omega_1$ zwischen $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ und $(2k+3)\frac{\pi}{2}$ liegen; es haben also $\cos(\eta_1 + \overline{n-1}\omega_1)$ und $\cos(\eta_1 + \overline{n+1}\omega_1)$ entgegengesetztes Zeichen. Nun können aber weder $\cos(\eta_1 + \overline{n-1}\omega_1)$, noch $\cos(\eta_1 + \overline{n+1}\omega_1)$ dem eben behandelten Ausnahmefalle angehören, da beide bestimmte endliche Werthe besitzen. Das Zeichen von $\cos \eta_1 + n\omega_1$ hat in Folge dessen auf die Anzahl der Zeichenwechsel gar keinen Einfluss. Die benachbarten Glieder haben entgegengesetztes Zeichen: es können also in:

$$\gamma_{n-1}, \gamma_n, \gamma_{n+1}$$

nur die folgenden 4 Combinationen vorkommen:

$$+, \pm, - \text{ oder } -, \pm, +$$

deren jede *einen* Zeichenwechsel giebt.

Fasst man das Bisherige zusammen, so zeigt sich, dass die Reihen (2) und (3) in der That von einem endlichen Gliede dieselbe Anzahl von Zeichenwechsel darbieten, also die bekannte Reihe der γ zur Bestimmung von ω_1 gebraucht werden kann.

Bezeichnet man nun die Anzahl der Zeichenwechsel in dieser Reihe mit w_n , so wird in der That:

$$\frac{\omega_1}{\pi} = \left(\frac{w_n}{n} \right)_{n=\infty}.$$

Der Werth von r lässt sich als Grenze gleichfalls leicht aus dem unter (4) gegebenen Ausdruck von γ_n darstellen. Da M_1 so wie der in der Parenthese stehende Factor endliche Werthe besitzen, so erhält man*):

$$\text{mod } \sqrt[n]{\gamma_n} = r_1^{-1} (1 + \delta_1) (1 + \delta_2),$$

wo δ_1 und δ_2 positive oder negative Grössen sind, die bei unendlich wachsenden n verschwinden. Also ist:

$$r_1 = \text{mod } \frac{1}{\left(\sqrt[n]{\gamma_n} \right)_{n=\infty}},$$

wo das Zeichen mod nur so viel bedeutet, dass γ_n von seinen etwaigen negativen Zeichen zu befreien ist.

*) Es sind dabei jene sozusagen singulären Werthe des n auszuschliessen, für die der Factor in der Parenthese beliebig klein wird. Da diess dann für $n+1$ nicht der Fall ist, kann man jene Werthe von n als ausgeschlossen betrachten, für welche $\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}$ vom Zeichen abgesehen, grösser wird als eine beliebig angenommene Zahl.

5.

Um endlich noch den Ausnahmefall zu erledigen, wo auch solche Wurzeln von gleichem absoluten Betrage vorkommen, die weder gleich noch conjugirt sind, genügt die Substitution:

$$y = x - \delta,$$

wo δ eine beliebig kleine reelle Grösse bedeutet.

Die in Betracht zu ziehenden Wurzeln liegen bei der gewöhnlichen geometrischen Darstellung der complexen Zahlen auf einem Kreise um den Punkt $x = 0$, während die nächste Wurzel auf einem Kreise liegt, dessen Radius um ein endliches grösser ist. Verschiebt man den Mittelpunkt durch obige Substitution um δ nach rechts, so liegen von den früher gleich entfernten Punkten nur mehr die conjugirten in gleicher Entfernung. Nimmt man also den Kreis durch die zwei nächsten conjugirten Wurzelpunkte, so enthält derselbe, wenn nur δ genügend klein gewählt ist, keine andern, und die transformirte Gleichung ist also immer zur Bestimmung der Wurzeln geeignet.

Man ersieht hieraus auch, warum für $\delta = 0$ eine Unbestimmtheit eintreten muss. Bildet man nämlich die Gleichung und lässt δ beliebig, so ist der entwickelte Ausdruck der Wurzeln eine discontinuirliche Function von δ , die für endliche Intervalle, ohne ihren Werth zu ändern, denselben Werth der Wurzel giebt, für $\delta = 0$ jedoch sprunghaft in einen zweiten übergeht.
