

Ein Beweis des Multiplicationstheorems für Determinanten.

Von

JULIUS KÖNIG in Budapest.

Neben den verschiedenen Ableitungen des Multiplicationstheorems der Determinanten ist vielleicht auch der in den folgenden Zeilen mitgetheilte Beweis nicht überflüssig, da derselbe eine directe Ausführung der verlangten Operationen liefert, und dabei nur die elementarsten Transformationsregeln benützt.

Die Bemerkung, die dem Beweise zu Grunde liegt, ist ihrem Wesen nach die folgende. Soll die Determinante $\Delta = (b_{11} b_{22} \dots b_{nn})$ mit $D = (a_{11} a_{22} \dots a_{mm})$ multiplicirt werden, so lässt sich das Resultat leicht in die gewünschte Form überführen, wenn das Product von Δ mit einer ersten Unterdeterminante von D schon bekannt ist. Dann kann mit D in der gewöhnlichen Weise in einer Zeile multiplicirt werden, und nach einer einfachen Umwandlung hebt sich jene Unterdeterminante heraus und man erhält $D\Delta$ in der bekannten Form. Um also $D\Delta$ zu erhalten, multipliciren wir Δ der Reihe nach mit

$$a_{11}, (a_{11} a_{22}), (a_{11} a_{22} a_{33}), \dots (a_{11} a_{22} \dots a_{mm}),$$

und heben nach der 1^{ten}, 2^{ten}, $\dots$ m ^{ten} Multiplication die Factoren

$$1, a_{11}, (a_{11} a_{22}), \dots (a_{11} a_{22} \dots a_{m-1, m-1})$$

heraus. Das Schlussresultat ist $D\Delta$. Der Uebersichtlichkeit wegen sei

$$(a_{11} a_{22} \dots a_{ii}) = D^{(i)},$$

und für die Unterdeterminanten:

$$\frac{\partial D^{(i)}}{\partial a_{ki}} = A_{ki}^{(i)},$$

wo der obere Index die Determinante fixirt, auf welche sich die Bildung der Unterdeterminante bezieht. Man hat demnach

$$A_{ii}^{(i)} = D^{(i-1)}.$$

Wir erhalten zuerst:

$$a_{11} \cdot \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}, & a_{11}b_{12}, & \dots \\ b_{21}, & b_{22}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \dots \end{vmatrix}.$$

Addirt man hierin die mit a_{21} multiplicirten Elemente der zweiten Zeile zu den entsprechenden Elementen in der ersten Zeile, und multiplicirt hierauf in der zweiten Zeile mit $D^{(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, so erhält man

$$a_{11} D^{(2)} \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22}, & \dots \\ D^{(2)}b_{21}, & D^{(2)}b_{22}, & \dots \\ b_{31}, & b_{32}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \dots \end{vmatrix}.$$

Addirt man nun die mit a_{12} multiplicirten Elemente der ersten Zeile zur zweiten, berücksichtigt den Werth von $D^{(2)}$, so kann man a_{11} in der zweiten Zeile fortheben und hat

$$D^{(2)} \Delta = \begin{vmatrix} a_{12}b_{11} + a_{21}b_{21}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22}, & \dots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}, & \dots \\ b_{31}, & b_{32}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \dots \end{vmatrix}.$$

Hieraus erhalten wir wieder $D^{(3)} \Delta$. Zur ersten und zweiten Zeile werden die mit a_{31} , respective a_{32} multiplicirten Elemente der dritten Zeile addirt und diese dann mit $D^{(3)} = (a_{11}a_{22}a_{33})$ multiplicirt. Dies giebt:

$$D^{(2)} D^{(3)} \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}, & \dots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}, & \dots \\ D^{(3)}b_{31}, & D^{(3)}b_{32}, & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ b_{n1}, & b_{n2}, & \dots \end{vmatrix}.$$

Wenn wir nun die angeführte Bezeichnung für die Unterdeterminanten von $D^{(3)}$ benützen, so wird nach Subtraction der mit $A_{31}^{(3)}$, resp. $A_{32}^{(3)}$ multiplicirten Elemente der ersten und zweiten Zeile von der dritten, wegen

$$\begin{aligned} -a_{11}A_{31}^{(3)} - a_{12}A_{32}^{(3)} &= a_{13}A_{33}^{(3)} \\ -a_{21}A_{31}^{(3)} - a_{22}A_{32}^{(3)} &= a_{23}A_{33}^{(3)} \\ D^{(3)} - a_{31}A_{31}^{(3)} - a_{32}A_{32}^{(3)} &= a_{33}A_{33}^{(3)} \end{aligned}$$

und

$$A_{33} = D^{(2)}$$

in der dritten Zeile sich der Factor $D^{(2)}$ herausheben lassen und man erhält:

$$D^{(3)} \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{31}b_{31}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + a_{31}b_{32}, & \dots \\ a_{12}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{32}b_{31}, & a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{32}b_{32}, & \dots \\ a_{13}b_{11} + a_{23}b_{21} + a_{33}b_{31}, & a_{13}b_{12} + a_{23}b_{22} + a_{33}b_{32}, & \dots \\ & b_{41} & , & b_{42} & , & \dots \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix}.$$

So erhält man also für $i = 1, 2, 3$ die Formel

$$D^{(i)} \Delta = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + \dots + a_{i1}b_{i1}, & a_{11}b_{12} + a_{21}b_{22} + \dots + a_{i1}b_{i2}, & \dots \\ a_{1i}b_{11} + a_{2i}b_{21} + \dots + a_{ii}b_{ii}, & a_{1i}b_{12} + a_{2i}b_{22} + \dots + a_{ii}b_{i2}, & \dots \\ & b_{i+1,1} & , & b_{i+1,2} & , & \dots \\ . & . & . & . & . & . \end{vmatrix},$$

deren allgemeine Verification durch den Uebergang von i auf $i + 1$ leicht erfolgt. Die hiebei nothwendigen Operationen sind folgende. Man addirt die mit $a_{i+1,1}, a_{i+1,2}, \dots, a_{i+1,i}$ multiplicirten Elemente der $i + 1^{\text{ten}}$ Zeile zur ersten, zweiten, $\dots$, i^{ten} Zeile, — multiplicirt sodann die $i + 1^{\text{te}}$ Zeile mit $D^{(i+1)}$, — und zieht von dieser endlich die mit $A_{i+1,1}^{(i+1)}, A_{i+1,2}^{(i+1)}, \dots, A_{i+1,i}^{(i)}$ multiplicirten Elemente der ersten, zweiten, $\dots$, i^{ten} Zeile ab. Dann hebt sich wieder in der $i + 1^{\text{ten}}$ Zeile der Factor $A_{i+1,i+1}^{(i+1)} = D^{(i)}$ heraus, und man erhält das Multiplications-theorem für $D^{(i+1)} \Delta$, also für zwei Determinanten von beliebigem Grade.