

A GAMMAFÜGGVÉNYEK ELEMI TÁRGYALÁSA.

A gammafüggvények elmélete vagy végtelen szorzat alakjukból indul ki GAUSS szerint vagy pedig LEGENDRE tárgyalását követve a határozott integrált tekinti e függvények első értelmezésének. Ha ugyanis u pozitív, akkor a részletes tárgyalásból kitűnik, hogy

$$\int_0^{\infty} e^{-z} z^{u-1} dz$$

véges meghatározott érték, mely természetesen u -tól függ; az integrál e paraméternek úgynevezett gammafüggvénye, a szokásos jelöléssel: $\Gamma(u)$.

Bár függvénytanai szempontból az első értelmezés a természetesebb és általánosabb, mégis tekintettel a gammafüggvények számos alkalmazására a geometriában, mechanikában s ú. t. előforduló alakokra, melyek miatt leginkább szükséges őket a kézikönyvek rendes anyagába besorozni, a második értelmezés ajánlkozik leginkább didaktikai szempontból. A többszörös integrálok egyik nagy osztályának kiszámítása gammafüggvények segítségével történik, és e szempontból ezek ép oly alapfüggvényeknek tekintendők, mint a logaritmus vagy a cyclometria függvényei. Kíváncos tehát, hogy ama határozott integráltól minél elemibb úton jussunk el mindazon tételekhez, melyek a gammafüggvények táblájának elkészítéséhez szükségesek. Ez történik a következő lapokon, nemcsak minden a függvénytanból vagy a többszörös integrálok elméletéből vett meggondolás teljes mellőzésével, de a mellett magában is igen egyszerű úton.*

* Ugyane szempontból dolgozta föl PRINGSHEIM a «Mathematische Annalen» 31. kötetében (475—481. l.) a gammafüggvények elméletét; tárgyalása

1. Ha u pozitív, akkor az integrálszámítás első elemei szerint:

$$\int_0^1 x^{u-1} dx = \frac{1}{u};$$

és ebből ismét:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{u-1} (1-x) dx &= \int_0^1 x^{u-1} dx - \int_0^1 x^u dx = \\ &= \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} = \frac{1}{u(u+1)}. \end{aligned}$$

Ugyanígy tovább menve:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{u-1} (1-x)(1-x) dx &= \int_0^1 x^{u-1} (1-x) dx - \int_0^1 x^u (1-x) dx = \\ &= \frac{1}{u(u+1)} - \frac{1}{(u+1)(u+2)} = \frac{2}{u(u+1)(u+2)}. \end{aligned}$$

Az integrálandó kifejezéshez újból és újból hozzácsatolva az $1-x$ szorzót, minden nehézség nélkül fölismerjük képletünk általános alakát, mely szerint:

$$\int_0^1 x^{u-1} (1-x)^n dx = \frac{n!}{u(u+1) \dots (u+n)} \quad (\text{I.})$$

($u > 0$; n poz. eg. szám)

Az n ről $n+1$ -re való következtetés e képletet minden pozitív egész n -re érvényesnek bizonyítja; mert

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{u-1} (1-x)^{n+1} dx &= \int_0^1 x^{u-1} (1-x)^n dx - \int_0^1 x^u (1-x)^n dx = \\ &= \frac{n!}{u(u+1) \dots (u+n)} - \frac{n!}{(u+1) \dots (u+n+1)} = \\ &= \frac{n!}{(u+1) \dots (u+n)} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+n+1} \right) = \frac{(n+1)!}{u(u+1) \dots (u+n+1)}. \end{aligned}$$

elemi jellegű, de még mindig elég bonyolódott, melylyel szemben az itt bemutatandó, előadásaim számára régebben kidolgozott, különben egészen eltérő módszerek lényeges egyszerűsítést adnak.

2. Az (I.) alatt álló képlet további átalakítására az e^{-nx} és $(1-x)^n$ kifejezések értékkülönbségét kell tanulmányoznunk, ha, mint amaz integrálokban

$$0 \leq x \leq 1.$$

Ekkor először is

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

oly sor lévén, melyben a tagok abszolút értéke folyton kisebbedik, míg az előjelek váltakoznak, mindenesetre:

$$e^{-x} \geq 1-x,$$

és ebből, n -ik hatványra emelve:

$$e^{-nx} \geq (1-x)^n.$$

Lássuk most már, hogy a

$$D = e^{-nx} - (1-x)^n$$

különbségnek, mely soha sem negatív, a 0 és 1 közt fekvő x helyekre nézve mi a legnagyobb értéke? Ezt csak oly helyen érheti el, hol differenciálhányadosa eltűnik, tehát ott, hol

$$-ne^{-nx} + n(1-x)^{n-1} = 0,$$

vagyis a hol

$$e^{-nx} = (1-x)^{n-1}.$$

Ilyen hely a kérdéses számközben csakugyan van; mert a differenciálhányados értéke az $x=1$ helyen $-ne^{-n}$, negatív, tehát ott a függvény fogy: de nem fogyhatott mindig, mert D -nek értéke az $x=1$ helyen, e^{-n} nagyobb, mint az $x=0$ helyen, a hol t. i. zérus; tehát van oly x , hol a függvény növekedésből fogyásba megy át, azaz hol maximuma van. A hol maximum van, ott

$$e^{-nx} = (1-x)^{n-1}$$

és így ugyanott:

$$e^{-nx} - (1-x)^n = (1-x)^{n-1} - (1-x)^n.$$

De ebből következik, hogy $e^{-nx} - (1-x)^n$ legnagyobb értéke semmi esetre sem nagyobb az $(1-x)^{n-1} - (1-x)^n$ legnagyobb értékénél, melyet könnyű meghatározni.

Lesz ugyanis, ha $n \geq 2$, mint a jegyzetből látni: *

$$\left[(1-x)^{n-1} - (1-x)^n \right]_{\max.} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1},$$

$$(0 \leq x \leq 1.)$$

és így végre:

$$0 \leq e^{-nx} - (1-x)^n \leq \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n-1}$$

$$(0 \leq x \leq 1.)$$

Vagy rövidebben:

$$e^{-nx} - (1-x)^n = \frac{\vartheta_n}{n} \quad (\text{II.})$$

$$(0 \leq x \leq 1); \quad n \text{ poz. e. szám}$$

ha ϑ_n az n től ugyan függő, de 0-nál nem kisebb, 1-nél nem nagyobb értéket jelent. (Az e^{-x} sora mutatja, hogy a (II) $n=1$ esetében is érvényes.)

3. Ha most már az (I.) alatt felállított integrálképletbe $(1-x)^n$ -nek II. alatt álló értékét bevezetjük, lesz

* Az $(1-x)^{n-1} - (1-x)^n$ maximuma csak ott lehet, hol

$$-(n-1)(1-x)^{n-2} + n(1-x)^{n-1} = (1-x)^{n-2}(1-nx) = 0$$

tehát csak az $\frac{1}{n}$ és 1 helyeken. De az utóbbi nem felelhet meg; a függvény megfelelő értéke 0; és a 0-tól 1-ig terjedő számközben nem is lévén negatív értéke, ez csak minimum lehetne.

Ellenben a második differenciálhányadosnak

$$-(n-2)(1-x)^{n-3}(1-nx) - n(1-x)^{n-2}$$

értéke az $\frac{1}{n}$ helyen

$$-n \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n-2}$$

negatív, a mi csakugyan maximumnak felel meg. Ha $n=2$, akkor az $x=1$ megoldás egészen kiesik, de $x=\frac{1}{2}$ megtartja maximum jellegét.

$$\int_0^1 x^{u-1} \left(e^{-nx} - \frac{\vartheta_n}{n} \right) dx = \frac{n!}{u(u+1) \dots (u+n)}$$

vagyis

$$\int_0^1 x^{u-1} e^{-nx} dx = \frac{1}{n} \int_0^1 \vartheta_n x^{u-1} dx + \frac{n!}{u(u+1) \dots (u+n)}$$

vagy még a baloldali integrálban az $nx=z$ helyettesítést végezve, a jobboldaliban pedig a középérték tételét alkalmazva az x -től is függő ϑ_n helyett egy szintén 0-nál nem kisebb, 1-nél nem nagyobb θ_n értéket téve az integrál jele elé:

$$\frac{1}{n^u} \int_0^n z^{u-1} e^{-z} dz = \frac{\theta_n}{n} \frac{1}{u} + \frac{n!}{u(u+1) \dots (u+n)}.$$

vagy még:

$$\int_0^n z^{u-1} e^{-z} dz = \frac{\theta_n n^{u-1}}{u} + \frac{n!}{u(u+1) \dots (u+n)} n^u. \quad (\text{III.})$$

($u > 0$, n poz. eg. szám)

Ha e képletben most n -et a pozitív egész számok sorában minden határon túl növesztjük, akkor — egyelőre az $u < 1$ megszorítással, mely később azonban teljesen elejthetőnek bizonyul — ebből lesz:

$$\int_0^\infty e^{-z} z^{u-1} dz = \lim. \left(\frac{n!}{u(u+1) \dots (u+n)} n^u \right), \quad u > 0 \quad (\text{IV.})$$

Ha ugyanis $0 < u < 1$, az első tagnak a jobb oldalon határértéke 0.

Ugyanezen feltétel mellett a bal oldalon álló integrál véges és meghatározott volta is rögtön belátható. Az integrál ugyanis

$$\int_0^1 e^{-z} z^{u-1} dz + \int_1^\infty e^{-z} z^{u-1} dz$$

alakban írható; az első ezek közül nem más, mint:

$$\int_0^1 d \left(\frac{e^{-z} z^u}{u} \right) + \frac{1}{u} \int_0^1 e^{-z} z^u du,$$



tehát véges és meghatározott, a második pontosabb írásban

$$\lim_{\omega=\infty} \int_1^{\omega} e^{-z} z^{u-1} dz$$

és ennek összetartási föltétele:

$$\lim_{\omega_1, \omega_2=\infty} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z} z^{u-1} dz = 0$$

de, ha $0 < u < 1$, és így $z^{u-1} < 1$, akkor:

$$0 < \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z} z^{u-1} dz < \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-z} dz = e^{-\omega_1} - e^{-\omega_2}$$

és a határérték csakugyan 0.

Ebből azután következik, hogy a IV. jobb oldalán álló kifejezés határértéke is véges és meghatározott, még mindig megtartva az $0 < u < 1$ megszorítást.

4. Hogy végre a (IV.) alatt álló képletben elég, ha mint ott jelöltük, $u > 0$, és nem szükséges, hogy u pozitív valódi tört legyen, a mely esetre egyedül érvényes az eddigi bizonyítás, azt következőképen mutatjuk ki.

Ha először is $u = 1$, akkor a (IV.)-ből lesz:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{(n+1)!} n \right) = 1,$$

a mi ismeretes helyes eredmény.

Legyen most röviden a (IV.) baloldala $\Gamma(u)$, jobboldala $P(u)$, azaz:

$$\Gamma(u) = \int_0^{\infty} e^{-z} z^{u-1} dz,$$

$$P(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{u(u+1) \dots (u+n)} n^u \right).$$

akkor a már előbb használt parciális integrálás képlete szerint:

$$\int_0^{\infty} e^{-z} z^{u-1} dz = \left[\frac{e^{-z} z^u}{u} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-z} z^u dz.$$

itt a jobboldal első tagja mindkét határon zérus, tehát

$$\Gamma(u) = \frac{1}{u} \Gamma(u+1); \quad (\text{V.})$$

hasonlókép:

$$P(u) = \lim. \left(\frac{n!}{u(u+1) \dots (u+n)} n^u \right) = \frac{1}{u} \lim. \left(\frac{n!}{(u+1) \dots (u+n)} n^u \right)$$

a mely értéken nem változtatunk, ha

$$\lim. \left(\frac{n}{u+n+1} \right) = 1$$

kifejezéssel szorzunk. Ekkor:

$$P(u) = \frac{1}{u} \lim. \left(\frac{n!}{(u+1) \dots (u+n+1)} n^{u+1} \right) = \frac{1}{u} P(u+1). \quad (\text{VI.})$$

Azaz, ha $\Gamma(u) = P(u)$ volt, akkor egyszersmind $\Gamma(u+1) = P(u+1)$. Ha tehát a (IV.) két oldalán álló kifejezés azonos minden u -ra, mely 0-nál nagyobb és 1-nél nem nagyobb, akkor azonosak egyszersmind minden u -ra, mely 1-nél nem kisebb és 2-nél nem nagyobb. Ez alapon átmehetünk ép úgy a 2-től 3-ig terjedő számközre és úgy tovább; szóval $\Gamma(u)$ és $P(u)$ azonosnak bizonyul az u minden pozitív értékénél.

5. Ismerve a gammafüggvény, $\Gamma(u)$ -nak ezen $P(u)$ alakját, igen rövid úton jutunk azon hatványsorhoz, melyet Legendre a l. $\Gamma(1+u)$ számára föllálitott és, mely a gammafüggvény számára szerkesztett táblák * számításának alapja. Hogy e tárgyalás teljes egészet adjon, szükségesnek tartom e részleteknek is fölvételét, ámbár itt csekélyebb rövidítések kivételével csak ismeretes módszerekről referálok:

Ha ugyanis újból a

$$\Gamma(u) = \lim. \left(\frac{n!}{u(u+1) \dots (u+n)} n^u \right), \quad (u > 0)$$

* LEGENDRE. Exercices de calcul intégral. I. köt. 1811. 302. l. az u -nak 1-től 2-ig ezred részekben haladó értékére log. $\Gamma(u)$ 7 deczimálisra van adva. A II. kötet (1817). 86. és következő lapjain ugyane táblát 12 tizedeshelyre terjesztette ki LEGENDRE. GAUSS-nál («Disquisitiones circa seriem etc. 1812) századrészekben haladó tábla található, mely 18 tizedeshelyre terjed. Rövid kivonat FRÖHLICH repertoriumának 189. lapján.

értelmezésből indulunk ki, és a két oldalon

$$u = u \lim. \frac{u+n}{n}$$

-nel szorzunk, lesz

$$u\Gamma(u) = \Gamma(u+1) = \lim. \left(\frac{(n-1)!}{(u+1) \dots (u+n-1)} n^u \right), \quad (u > 0)$$

vagy még:

$$\Gamma(1+u) = \lim. \frac{n^u}{\left(1+\frac{u}{1}\right)\left(1+\frac{u}{2}\right) \dots \left(1+\frac{u}{n-1}\right)}, \quad (u > 0)$$

de n^u így is írható:

$$n^u = \left(\frac{2}{1}\right)^u \left(\frac{3}{2}\right)^u \dots \left(\frac{n}{n-1}\right)^u = \left(1+\frac{1}{1}\right)^u \left(1+\frac{1}{2}\right)^u \dots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^u,$$

tehát:

$$\Gamma(1+u) = \lim. \left(\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^u}{1+\frac{u}{1}} \frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^u}{1+\frac{u}{2}} \dots \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^u}{1+\frac{u}{n-1}} \right). \quad (u > 0)$$

Áttérve a természetes logaritmusokra:

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(1+u) = \lim. & \left(u \ln \left(1+\frac{1}{1}\right) - \ln \left(1+\frac{u}{1}\right) + u \ln \left(1+\frac{1}{2}\right) - \ln \left(1+\frac{u}{2}\right) + \right. \\ & \left. + \dots + u \ln \left(1+\frac{1}{n-1}\right) - \ln \left(1+\frac{u}{n-1}\right) \right), \end{aligned}$$

de az ily $n-1$ tagú sor határértéke, midőn a tagszám, $n-1$, a végtelenbe növekszik, nem más, mint a megfelelő végtelen sor, úgy hogy ezt az eredményt a közönséges jelzésben így is írhatjuk:

$$\ln \Gamma(1+u) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(u \ln \left(1+\frac{1}{m}\right) - \ln \left(1+\frac{u}{m}\right) \right), \quad (u > 0) \quad (\text{VII.})$$

Ha a pozitív u -t az 1-nél nem nagyobb értékekre szorítjuk, akkor használható a logaritmus sora,

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad (1 < z \leq 1)$$

és lesz:

$$1. \Gamma(1+u) = u! \cdot 2 - 1 \cdot (1+u) +$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left(u \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{m^3} - \dots \right) \left(\frac{u}{m} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{m^2} + \frac{1}{3} \frac{u^3}{m^3} - \dots \right) \right) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

vagyis

$$1. \Gamma(1+u) = u! \cdot 2 - 1 \cdot (1+u) +$$

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left(- \left(\frac{1}{2} \frac{1}{m^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{m^3} + \dots \right) u + \frac{1}{2} \frac{u^2}{m^2} - \frac{1}{3} \frac{u^3}{m^3} - \dots \right), \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (\text{VIII.})$$

Szabad-e itt a sorban az u egyenlő hatványait tartalmazó tagokat összevonni és ily módon sorunkat hatványsorra átalakítani? Ezen átrendezés ismeretes tételek alapján helyes eredményhez vezet, ha minden tag helyébe abszolút értékét téve, még mindig összetartó sort kapunk, azaz ha összetartó a következő sor:

$$\sum_{m=2}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{m^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{m^4} + \dots \right) u + \frac{1}{2} \frac{u^2}{m^2} + \frac{1}{3} \frac{u^3}{m^3} + \frac{1}{4} \frac{u^4}{m^4} + \dots \right) \quad (0 \leq u \leq 1)$$

Itt végre minden tagot nagyobbítunk, ha u helyébe legnagyobb értékét, egyet írunk, és így a (VIII.) átrendezése mindenestre megvan engedve, ha összetartó a következő sor, melynek az $u=1$ helyettesítésnél kétszerese lép föl:

$$S = \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{m^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{m^4} + \dots \right)$$

Azonban itt, hol $m \leq 2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{m^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{m^3} + \frac{1}{4} \frac{1}{m^4} + \dots &< \frac{1}{2} \frac{1}{m^2} \left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \dots \right) \\ &< \frac{1}{2} \frac{1}{m^2} \frac{m}{m-1} \\ &< \frac{1}{2} \frac{1}{(m-1)m} \end{aligned}$$

Tehát:

$$S < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \right),$$

$$S < \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right) = \frac{1}{2}$$

azaz S csakugyan összetartó.

A (VIII.) ily átrendezése akkor is meg van engedve, ha l. $(1+u)$ helyett is soralakját

$$l. (1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots \quad (-1 < u \leq 1)$$

írjuk, mert ez is összetartó, ha minden előjelt pozitívrá változtatunk, csakhogy ekkor u -értékét egynél kisebbre kell szorítanunk. Az átrendezés eredménye * a következő LEGENDRE-tól származó sor:

$$l. I'(1+u) = -Cu + \frac{1}{2} S_2 u^2 - \frac{1}{3} S_3 u^3 + \frac{1}{4} S_4 u^4 - \dots, \quad (IX.)$$

($|u| < 1$)

hol az együtthatókra már a szokásos rövid jelzést vezettük be. Az első tagban előforduló C nem más mint az EULER vagy MASCHERONI után nevezett állandó, míg S_k az egész számok $(-k)$ -edik hatványainak összegeit jelenti, t. i.

$$S_k = 1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots,$$

melyeket LEGENDRE a «*Traité des fonctions elliptiques*» cz. munkájában (2. köt. 432. l.) $k=2$ -től 35-ig 16 tizedes helyre közölt. Az S_k jelzés segítségével C kifejezése is rövidül, t. i. közvetetlenül látni, hogy ez:

$$C = 1 - l. 2 + \frac{1}{2} (S_2 - 1) - \frac{1}{3} (S_3 - 1) + \frac{1}{4} (S_4 - 1) - \dots,$$

vagy még tekintetbe véve, hogy l. $(1+u)$ sorából

$$l. 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

vége:

$$C = \frac{1}{2} S_2 - \frac{1}{3} S_3 + \frac{1}{4} S_4 - \frac{1}{5} S_5 + \dots$$

$$= 0.577\ 215\ 664\ 901\ 533$$

A (IX.) alatti sort LEGENDRE még a következő gyorsabb számításra alkalmas alakba írja át. Ha benne $-u$ helyébe u -t teszünk, lesz

* Minthogy itt hatványsorral van dolgunk, az $0 \leq u < 1$ összetartási föltétel helyett $|u| < 1$ írható.

$$1. \Gamma(1-u) = Cu + \frac{1}{2} S_2 u^2 + \frac{1}{3} S_3 u^3 + \frac{1}{4} S_4 u^4 + \dots \quad (X.)$$

$$|u| < 1,$$

és így

$$1. \Gamma(1+u) + 1. \Gamma(1-u) = S_2 u^2 + \frac{1}{2} S_4 u^4 + \frac{1}{3} S_6 u^6 + \dots \quad (|u| < 1)$$

De ismeretes tétel szerint (lásd p. SCHLÖMILCH, Compendium der höheren Analysis, I. köt. 240. l.)

$$1. \left(\frac{\sin z}{z} \right) = -\frac{S_2 z^2}{\pi^2} - \frac{1}{2} \frac{S_4 z^4}{\pi^4} - \frac{1}{3} \frac{S_6 z^6}{\pi^6} - \dots \quad (|z| < 1)$$

azaz, ha z helyett $\pi \cdot u$ -t írunk és -1 -gyel szorzunk:

$$1. \frac{\pi u}{\sin \pi u} = S_2 u^2 + \frac{1}{2} S_4 u^4 + \frac{1}{3} S_6 u^6 + \dots \quad (|u| < 1)$$

tehát a fönt kifejtett egyenlet:

$$1. \Gamma(1+u) + 1. \Gamma(1-u) = 1. \frac{\pi u}{\sin \pi u} \quad (XI.)$$

Most még a (IX.) és (X.)-ben:

$$1. (1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots \quad (|u| < 1)$$

illetőleg

$$1. (1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \dots \quad (|u| < 1)$$

értéket zárt alakban levonva és soralakban hozzáadva lesz:

$$1. \Gamma(1+u) = -1. (1+u) + (1-C)u + \frac{1}{2} (S_2-1) u^2 - \frac{1}{3} (S_3-1) u^3 + \dots \quad (|u| < 1) \quad (XII.)$$

$$1. \Gamma(1-u) = 1. (1-u) - (1-C)u + \frac{1}{2} (S_2-1) u^2 + \frac{1}{3} (S_3-1) u^3 + \dots \quad (|u| < 1) \quad (XIII.)$$

A (XII.)-ből levonva a (XIII.)-at:

$$\frac{1}{2} (1. \Gamma(1+u) - 1. \Gamma(1-u)) = -\frac{1}{2} 1. \frac{1+u}{1-u} + (1-C)u - \frac{1}{3} (S_3-1) u^3 - \frac{1}{5} (S_5-1) u^5 - \dots$$

hol végre l. $\Gamma(1-u)$ értékét a (XI)-ből véve lesz :

$$\begin{aligned} \text{l. } \Gamma(1+u) = & \frac{1}{2} \text{l.} \frac{\pi u}{\sin \pi u} - \frac{1}{2} \text{l.} \frac{1+u}{1-u} + (1-C)u \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (S_3-1) u^3 + \frac{1}{5} (S_5-1) u^5 + \dots \right) \quad (|u| < 1) \end{aligned}$$

Ez a közönségesen LEGENDRE sorának nevezett alakzat, melylyel most már a gammafüggvény logaritmusainak tábláját bármely pontossággal aránylag igen gyorsan számíthatjuk.

König Gyula.