

MÁTÉ MÁRTON

MŰSZAKI MECHANIKA- KINEMATIKA

MŰSZAKI TUDOMÁNYOS FÜZETEK



ERDÉLYI MÚZEUM-EGYESÜLET

Máté Márton

MŰSZAKI MECHANIKA – KINEMATIKA

MŰSZAKI TUDOMÁNYOS FÜZETEK

10.

ISSN 2068 – 3081

MŰSZAKI TUDOMÁNYOS FÜZETEK

10.

Máté Márton

MŰSZAKI MECHANIKA – KINEMATIKA



ERDÉLYI MÚZEUM-EGYESÜLET
Kolozsvár
2010

A könyv megjelenését támogatta:

a Szülőföld Alap



Lektorok:

Szeidl György, Miskolci Egyetem
Bíró Domokos, Sapientia Egyetem

© **Máté Márton 2010**

Kiadja: Az Erdélyi Múzeum-Egyesület
Felelős kiadó: Bíró Annamária
Sorozatszerkesztő: Bitay Enikő
Olvasószerkesztő: Sztranyiczki Mihály
Borítóterv: Könczey Elemér
Műszaki szerkesztő: Máté Márton

Nyomdai munkálatok:

Cromatic Tipo Kft., Marosvásárhely
Tel./Fax: +40-265-215597 www.cromatictipo.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

MÁTÉ, MÁRTON

Műszaki mechanika – kinematika / Máté Márton. - Cluj-Napoca:

Societatea Muzeului Ardelean, 2010

Bibliogr.–

ISBN 978-606-8178-10-3

62-231.2

DOI: 10.36242/mtf-10

Tartalom

Előszó	9
--------------	---

1. FEJEZET. AZ ANYAGI PONT KINEMATIKÁJA

1.1. Alapfogalmak	11
1.2. Anyagi pont mozgásparaméterei	12
1.2.1. Anyagi pont pályagörbéje	12
1.2.2. Anyagi pont sebessége	13
1.2.3. Anyagi pont gyorsulása	14
1.2.4. A normális gyorsulás. illetve a pályagyorsulás számítása....	16
1.2.5. Geometriai alkalmazás	17
1.3. Anyagi pont kinematikája polárkoordinátákban	18
1.3.1. A mozgás polárkoordinátákra értelmezett sajátosságai	18
1.3.2. Anyagi pont sebessége polárkoordinátás felírásban	20
1.3.3. Anyagi pont gyorsulása polárkoordinátás felírásban	21
1.3.4. A szögsebesség-vektor	22

2. FEJEZET. MEREV TESTEK KINEMATIKÁJA

2.1. Alapfogalmak	23
2.2. Egyszerű mozgások	24
2.2.1. A haladó mozgás	24
A. Vektormódszer	24
B. Mátrixmódszer	26
2.2.2. Helytálló tengely körüli forgás	28

Tartalom

A. Vektormódszer	28
2.2.2.1. A sebességeloszlás.....	29
2.2.2.2. A gyorsuláseloszlás.....	31
B. Mátrixmódszer	34
2.2.2.3. Mozgástörvény mátrixokkal.....	34
2.2.2.4. A sebesség mátrixos alakja.....	36
2.2.2.5. A gyorsulások számítása mátrixokkal	38
2.3. Összetett mozgások	40
2.3.1. A csavarmozgás.....	40
A. Vektormódszer	41
2.3.1.1. A sebességeloszlás.....	43
2.3.1.2. A gyorsuláseloszlás.....	44
B. Mátrixmódszer	47
2.3.1.3. A csavarmozgás mátrixmodellje.....	47
2.3.1.4. A sebesség mátrixos alakja.....	49
2.3.1.5. A gyorsulás mátrixos alakja.....	51
2.3.2. A síkmozgás.....	53
A. Vektormódszer	55
2.3.2.1. A sebességeloszlás.....	56
2.3.2.2. A sebességpólus	59
2.3.2.3. A pólusgörbék.....	61
2.3.2.4. Gyakorlati műszaki alkalmazások	62
2.3.2.5. Grafikus módszerek	64
2.3.2.6. A gyorsuláseloszlás.....	66
2.3.2.7. A gyorsuláspólus	67
2.3.2.8. A gyorsulás tulajdonságai	68
2.3.2.9. A gyorsulás geometriai értelmezése	70
B. Mátrixmódszer	72
2.3.2.10. A sebességeloszlás mátrixos tárgyalása	72
2.3.2.11. A pólusgörbék mátrixos alakja	75
2.3.2.12. A pólusgörbék kölcsönös burkolása.....	76
2.3.2.13. Gyorsuláseloszlás mátrixokkal	78
2.3.2.14. A gyorsuláspólus	79
2.3.3. A gömbmozgás	80
2.3.3.1. A gömbmozgás meghatározása.....	80
2.3.3.2. A gömbmozgás szabadságfoka	82
2.3.3.3. A gömbmozgás pályae egyenletei	84
A. Az egyenletek általános alakja	84
B. A pályagörbe tárgyalása Euler-szögekkel	85
C. A pályagörbe tárgyalása koordináta-tengelyek körüli forgatásokkal	87
2.3.3.4. A sebességeloszlás.....	88
A. Vektormódszer	88
B. Mátrixmódszer	91
2.3.3.5. Álló és mozgó alapfelületek.....	95

2.3.3.6. A gyorsuláseloszlás.....	98
A. Vektormódszer	98
B. Mátrixmódszer	102
2.3.3.7. A gyorsuláspólus lehetséges helyzetei	104
2.3.4. A merev test szabad mozgása.....	107
2.3.4.1. A mozgás leírása.....	107
2.3.4.2. A merev test egy pontjának pályagörbéje	109
A. Vektormódszer	109
B. Mátrixmódszer	111
2.3.4.3. A sebességlaszás.....	113
A. Vektormódszer	113
B. Mátrixmódszer	116
2.3.4.4. A pillanatnyi forgástengely létezésének feltétele	120
2.3.4.5. A pillanatnyi csavartengely.....	124
2.3.4.6. A gyorsuláseloszlás.....	130
A. Vektormódszer	130
B. Mátrixmódszer	131
2.3.4.7. A gyorsuláspólus	132

3. FEJEZET. A RELATÍV MOZGÁS

3.1. A relatív mozgás értelmezése	137
3.1.1. A relatív mozgás elve.....	137
3.1.2. A relatív mozgás matematikai modellje	139
3.2. Vektor abszolút és helyi deriváltja	141
3.3. Anyagi pont relatív kinematikája.....	142
3.3.1. Anyagi pont pályája a relatív mozgásban	142
A. Vektormódszer	142
B. Mátrixmódszer	146
3.3.2. Anyagi pont sebessége a relatív mozgásban	147
A. Vektormódszer	147
B. Mátrixmódszer	148
3.3.3. Anyagi pont gyorsulása a relatív mozgásban	150
A. Vektormódszer	150
B. Mátrixmódszer	152
3.4. Anyagi test relatív kinematikája.....	155
3.4.1. Anyagi test közvetített mozgásának sajátosságai	155
3.4.2. Anyagi test adott pontjának pályái a relatív mozgásban	156
3.4.3. Anyagi test adott pontjának sebessége a relatív mozgásban	157
A. Vektormódszer	157
B. Mátrixmódszer	159

Tartalom

3.4.4. Anyagi testpont gyorsulása a relatív mozgásban	163
A. Vektormódszer	163
B. Mátrixmódszer	167
Függelék	171
Appendix	173
Irodalom	179
Kinematics (Summary)	181
Contents.....	182
Kinematik (Zusammenfassung)	185
Inhalt	186
Cinematică (Rezumat)	189
Cuprins.....	190

Előszó

Az informatika, az automatizálás és a számítástechnika óriási fejlődése nyomán mindennapi életünk az intelligens gépek, eszközök, rendszerek nélkül elképzelhetlenné lett – szédületesen felgyorsult világunkban. Nem lehet figyelem nélkül hagyni azt a tényt, hogy mindezek, végső soron, anyagi rendszerek működését szolgálják, így a kapcsolódó mechanikai törvényszerűségek ismerete minden korban nélkülözhetetlen. Az eszközök, gépek, rendszerek működésének átlátásában tud csak a mérnök helyes megoldást találni.

A gyakorlati tudományok jelenkori művelőire hárul az a feladat, hogy a modern eljárások segítségével találják meg a klasszikus, örök érvényű ismeretek megközelítésének módját, amellyel a tudományos fejlődés hatékonyabb mozgatórugóját hozzák létre.

A *Műszaki mechanika – Kinematika* könyv elsősorban a mechatronika és gyártástechnológia szakos hallgatókhoz szól, de hasznos lehet bárki számára, aki érdekelt az alapvető kinematikai ismeretek elsajátításában. Az anyagi pont és az anyagi merev test mozgásának azokat a lényeges sajátosságait tárja fel, amelyek ismeretében a hallgató bizalommal láthat neki a mechanikára épülő szaktantárgyak elsajátításához, mint a gépszerkezettan, gépelemek, valamint a robotika.

A könyv három fejezetre tagolt. Az első az anyagi pont mozgását, a második a merev test műszaki alkalmazásokban előforduló mozgásait, míg a harmadik a relatív mozgás sajátosságait tárja fel. A bemutatott törvényszerűségek matematikai leírásában arra törekedtem, hogy ezeket mind vektor-, mind pedig mátrixmódszerrel tárgyaljam, úgy, hogy világossá tegyem az Olvasó számára a két módszer egyenértékűségét. A mátrixmódszer megértéséhez szüksége van az Olvasónak alapvető analitikus mértani ismeretekre, a koordináta-transzformáció alapos ismeretére, és a mátrixműveleteket rutinosan kell tudnia kezelni. A két módszer összehasonlító jellegű használatával szerettem volna rávilágítani a vektormódszer frappáns egyszerűségére és eleganciájára, amivel a fizikai mennyiségek közötti összefüggéseket kifejezi, párhuzamosan a mátrixmódszer strukturált jellegéből adódó igen nagy előnyére, ami főképp a gépesített számolásban, valamint a modell-alkotásban hasznosítható.

A könyvben feltárt klasszikus ismeretek nemrelativista szemléletben, az euklideszi geometria igazságának elfogadásában gyökereznek. Mindennapi

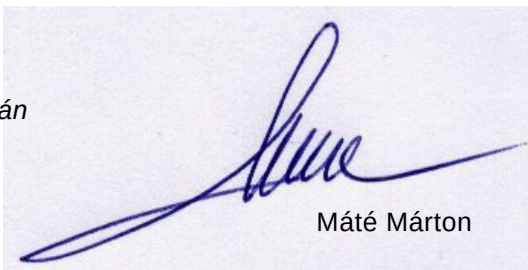
Előszó

életünkben, a kozmikus közlekedést és a nanovilágot leszámítva, a fentebb megfogalmazott, több évszazados illetve évezredes felismerésekre épülő közélet még mindig megfelelő, és a műszaki anyagi egzisztencia emberhez közvetlenül kapcsolódó vetületét minden időben jól fogja szolgálni. Legtöbb illusztrációm *szándékosan* kézzel, hagyományos módon rajzoltam meg, hogy ezzel is felhívjam a fentebb közölt gondolatra az Olvasó figyelmét.

Ezúton szeretném köszönetemet kifejezni Szeidl György professzor úrnak a Miskolci Egyetemről, valamint Biró Domokos docens kollégámnak a Sapientia Egyetemről, munkám önzetlen támogatásáért, megjegyzéseikért, javaslataikért, aminek eredményeképpen a könyv tartalmi minősége jelentősen javult.

Reménykedem, hogy sikerül az Olvasóban felkeltenem a mátrixmódszer használata iránti érdeklődést, és ugyanakkor rávilágítanom a mechanika örökérvényű erejére, szépségére valamint nélkülözhetetlen fontosságára.

Marosvásárhely, 2010. május 20-án



Máté Márton

1. Fejezet

Az anyagi pont kinematikája

1.1. Alapfogalmak

A kinematika általánosan fogalmazva a mechanikának az az ága, amely az anyagi test, illetve testek – együttesen és tömören anyagi entitások –, mozgását vizsgálja geometriai szemüvegen keresztül, anélkül azonban, hogy figyelembe venné a mozgás (a helyzetváltoztatás) okait, az ezeket létrehozó erőket.

A jelen tankönyv az anyagi testek alábbi modelljeire, a következő anyagi entitásokra korlátozza figyelmét a mozgások geometriai leírását szolgáló eszközök tárgyalása során: anyagi pont, illetve pontok (az anyagi pont olyan test, amelynek mozgása egyetlen kiragadott pontjának mozgásával kellő pontossággal leírható), továbbá merev test, és merev testekből felépülő rendszerek (a merev test bármely két különböző pontjának állandó a távolsága). Hozzáteesszük ehhez, hogy a merev test egy kiragadott pontjának mozgása az anyagi pontok mozgásával kapcsolatos eszközökkel vizsgálható.

A mozgások geometriai szemüvegen át történő vizsgálatának, a kinematikai elemzésnek az a célja, hogy a vizsgált anyagi entitás mozgását minőségileg és mennyiségileg is kifejezze. A műszaki mechanika a gépelemek és mechanizmusok jellegzetes mozgásainak leírásával foglalkozik bővebben.

A mozgás minőségi leírása alatt a mozgástípus azonosítását értik. Bármely anyagi entitás végezhet egyszerű vagy összetett mozgást. Az egyszerű mozgás közvetlenül azonosítható. Az összetett mozgások általában több egyszerű mozgásból épülnek fel.

Az összetett mozgások kétféleképpen tárgyalhatók:

- abszolút mozgásként, egy rögzített helyzetű vonatkoztatási rendszerben;
- relatív mozgásként, egy rögzített helyzetű és egy mozgó vonatkoztatási rendszerben egyidejűleg, figyelembe véve a rendszerek egymáshoz viszonyított mozgását.

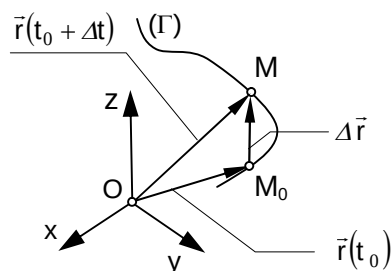
A mozgás mennyiségi leírása adott pont térbeli helyzetének időbeli változását fejezi ki. A vizsgált anyagi entitás adott pontjának helyzete a mozgás során változik. Ez a változás a koordináták időtől való függőségében nyilvánul meg. Egy tetszőlegesen választott, rögzített Oxyz koordináta-rendszerben, a vizsgált entitás bármely pontjára felállíthatók a koordinátafüggvények:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \eta(t) \end{cases} \quad (1)$$

ahol x, y, z a vizsgált pont koordinátái, a t változó pedig az idő. Az (1) egyenletrendszer geometriai értelmezése egy térgörbe, amely a vizsgált entitás tekintett pontjának mértani helye. Ezt a görbét *pályagörbének* nevezik.

A $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\eta(t)$ függvények a vizsgált pont helyvektorának összetevői:

$$\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \eta(t)\vec{k} \quad (2)$$



1. ábra.
Anyagi pont mozgása

A fenti megállapítások a mozgást végző anyagi entitás minden pontjára érvényesek. A legegyszerűbben az anyagi pont kinematikája írható le ily módon. Amint arra már az előző oldalon utaltunk, a merev test kinematikájában is változatlanul érvényesek az anyagi pontra vonatkozó megállapítások, illetve eredmények. Ez azt jelenti, hogy a merev test valamely kiragadott anyagi pontját tekintve, annak mozgás-vizsgálatára, sikerrel alkalmazhatók az anyagi pontok mozgásával kapcsolatos összefüggések a pályagörbék, a vonatkozó sebességek, és gyorsulások számítása során. A továbbiakban a speciális mozgások részletes tárgyalására kerül majd sor.

1.2. Anyagi pont mozgásparaméterei

1.2.1. Anyagi pont pályagörbéje

Legyen az M anyagi pont, melynek helyzetvektora az Oxyz derékszögű, jobbsodrású koordináta-rendszerben, a mozgás vizsgálatának kezdeti, t_0 időpillanatában $\vec{r}(t_0)$ (1. ábra). Adott, Δt idő elteltével, az M pont helyzetvektora $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0 + \Delta t)$ lesz. Észrevehető, hogy a mozgás geometriai értelmezése az $\vec{r}(t)$ helyzetvektor változása. A vektormennyiségek változásának vizsgálatakor két szempontot kell értelmezni: a vektor irányának, valamint abszolút értékének változását. Az elkövetkezőkben ez a megállapítás lényeges szerepet kap.

A pályagörbe egyenleteit az (1) -hez hasonló parametrikus függvényekkel célszerű leírni.

1.2.2. Anyagi pont sebessége

A sebességvektor a helyzetvektor időbeli változását fejezi ki. Adott, véges, Δt időintervallum alatt bekövetkezett helyzetvektor-változás az 1. ábrán is feltüntetett $\Delta \vec{r}$.

A *közepes sebesség* a $\Delta \vec{r}$ helyzetvektor-változás és ennek bekövetkezéséhez szükséges Δt időtartam hányadosa:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (3)$$

Ha a mozgás vizsgálata szintén az M_0 pontból indul, de más Δt időintervallumra terjed ki, az előbbtől különböző $\Delta \vec{r}$ helyzetvektor-változás keletkezik, melynek következtében a (3) képlettel számított közepes sebesség-érték is különbözni fog.

Ha a vizsgálat Δt időintervalluma végtelenül kicsi, akkor a $\Delta \vec{r}$ helyzetvektor-változás is végtelenül kicsi lesz, vagyis a (3) közepes sebesség az M_0 infinitezimális környezetére lesz érvényes.

A közepes sebesség határértéke, ha $\Delta t \rightarrow 0$, az M_0 pontbeli *pillanatnyi sebesség*:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{t_0 + \Delta t - t_0} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_0} = \dot{\vec{r}}(t_0) \quad (4)$$

Figyelembe véve a helyvektor (2) kifejezését, a sebességvektor a következő alakot ölti:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt} (\varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \eta(t)\vec{k}) = \dot{\varphi}(t)\vec{i} + \dot{\psi}(t)\vec{j} + \dot{\eta}(t)\vec{k} \quad (5)$$

A pillanatnyi sebességvektor tartóegyenese a pályagörbe érintője. Ez a tény a pillanatnyi sebesség definíciójának geometriai következménye, ugyanis a $\Delta \vec{r}$ csökkenésével a pályagörbe íve és húrja között az eltérés addig csökken, ameddig, hatéresetben, a húr érintővé válik.

Ez az állítás másképpen is bizonyítható. Ha a pályagörbét nem a t idő, hanem az s ívkoordináta, mint paraméter függvényében tekintik, akkor az $\vec{r} = \vec{r}(s)$ alakú. Az ívkoordináta időfüggő, tehát $s = s(t)$. Az ívkoordináta segítségével az adott idő alatt megtett út határozható meg, anélkül, hogy ennek térbeli alakjáról információt nyújtana. Az $s(t)$ függvényt *skaláris mozgástörvénynek* nevezik. Felhasználása különösen a bűtykös és karos mechanizmusok tervezésében jelentős.

Az ívkoordinátával parametrizált, de időfüggő pályagörbe tehát

$$\vec{r} = \vec{r}[s(t)]$$

módon írható fel. A sebesség meghatározásához az idő szerinti deriválást – figyelembe véve, hogy az r mozgástörvény az s ívkoordinátán keresztül függ az időtől – a láncszabállyal kell elvégezni:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{\tau} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (6)$$

A fenti képletben ds/dt a pályasebesség (ez is előjeles mennyiség – pozitív, ha a tekintett anyagi pont a pozitív ívkoordináta irányában mozog, ellenkező esetben negatív), a $\vec{\tau}$ egységvektor pedig (a Frénet-féle első képletből következik) a pályagörbe érintő-egységvektora. Ezzel igazoltuk, hogy a pillanatnyi sebességvektor a pályagörbe érintője.

Az ívkoordináta elemi megváltozása, az ívkoordináta-növekmény nyilvánvalóan a

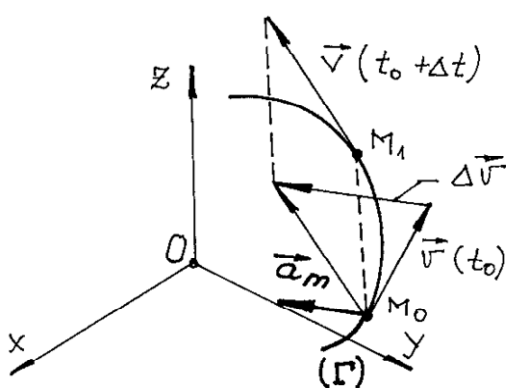
$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{[\dot{\phi}(t)]^2 + [\dot{\psi}(t)]^2 + [\dot{\eta}(t)]^2} dt \quad (7)$$

Az érintő egységvektort szintén az (1) parametrikus egyenletek idő szerinti deriválásával lehet meghatározni:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = & \frac{\dot{\phi}(t)}{\sqrt{[\dot{\phi}(t)]^2 + [\dot{\psi}(t)]^2 + [\dot{\eta}(t)]^2}} \vec{i} + \frac{\dot{\psi}(t)}{\sqrt{[\dot{\phi}(t)]^2 + [\dot{\psi}(t)]^2 + [\dot{\eta}(t)]^2}} \vec{j} + \\ & + \frac{\dot{\eta}(t)}{\sqrt{[\dot{\phi}(t)]^2 + [\dot{\psi}(t)]^2 + [\dot{\eta}(t)]^2}} \vec{k} \end{aligned} \quad (8)$$

Ha a (8) képlet szerint felírt érintő-egységvektort a ds/dt pályasebességgel szorozzuk, és figyelembe vesszük a ds/dt -re vonatkozó (7) kifejezést, akkor eredményül a sebességvektor (5) kifejezését kapjuk.

1.2.3. Anyagi pont gyorsulása



2. ábra.
Anyagi pont gyorsulása

Az előbbieken tárgyaltak alapján belátható, hogy az anyagi pont pillanatnyi sebességvektora a pont pályagörbe mentén elfoglalt helyzetétől függ, tehát irányában és abszolút értékében is változhat. A továbbiakban feltételezhető, hogy e változás a mozgást befolyásolja. A sebességvektor változását a 2. ábra szemlélteti. Az Oxyz koordináta-rendszerben legyen a mozgó pontnak a $t = t_0$ időpillanatban elfoglalt helyzete az M_0 , és sebessége $\vec{v}(t_0)$.

Δt idő múlva a pont az M_1 -be érkezik, ahol sebessége a $\vec{v}(t_0 + \Delta t)$ lesz.

A sebességvektor adott Δt idő alatti változása, és a Δt időintervallum hányadosa a *közepes gyorsulás*:

$$\bar{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t} \quad (9)$$

Akárcsak a sebesség tárgyalásakor, ha a Δt időintervallum a nullához tart, akkor a közepes gyorsulás kifejezésében határértékre kell térni, hogy a $0/0$ típusú határozatlanság eltűnjön. A közepes gyorsulás-vektor $\Delta t \rightarrow 0$ -ra számított határértéke a *pillanatnyi gyorsulás*:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{t_0 + \Delta t - t_0} = \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{t=t_0} = \dot{\vec{v}}(t_0) \quad (10)$$

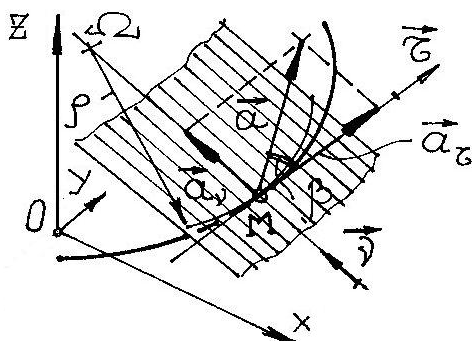
A pillanatnyi gyorsulás képletének meghatározása a sebességvektor (6), az érintő egységvektor függvényében felírt alakjából a legegyszerűbb. Figyelembe kell venni, hogy a $\vec{\tau}$ érintő-egységvektor az ívhossz-koordinátán keresztül függ az időtől, tehát $\vec{\tau}(t) = \vec{\tau}[s(t)]$. Másrészt – a Frénet-féle második összefüggés értelmében – a $\vec{\tau}$ érintő-egységvektornak s ívhossz-koordináta szerinti deriváltja a főnormális-irány $\vec{\nu}$ egységvektorának és a pályagörbe ρ görbületi sugarának hányadosa. Mindezeket figyelembe véve, és a (6) relációt t szerint deriválva, következik:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{\tau} \frac{ds}{dt} \right) = \dot{\vec{\tau}} \frac{ds}{dt} + \vec{\tau} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + \vec{\tau} \frac{d^2s}{dt^2} = \\ &= \vec{\nu} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \vec{\tau} \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{v^2}{\rho} \vec{\nu} + \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} \end{aligned} \quad (11)$$

A pillanatnyi gyorsulásvektornak, a (11) reláció alapján, a következő tulajdonságai azonosíthatók:

- általános esetben a gyorsulásvektor a $\vec{\tau}$ érintőirány, és a $\vec{\nu}$ főnormális irány szerint széttagolható;
- a gyorsulásvektornak soha nincs binormális irányú összetevője, azaz minden esetben a pályagörbe simulósíkjába illeszkedik;
- ha a pályaszakasz egyenes, akkor a ρ görbületi sugár végtelen, így a gyorsulásvektor érintőirányú lesz;
- ha a sebesség modulusza állandó, akkor $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$, tehát a gyorsulásvektor normálirányú lesz;
- a gyorsulásvektor érintő irányú összetevője a sebesség moduluszának változását, míg a normál irányú összetevője a sebességvektor irányának időbeli változását mutatja;

- a tangenciális irányú összetevő lehet pozitív vagy negatív, attól függően, hogy a sebességvektor abszolút értéke növekszik vagy csökken, ellenben a normálirányú összetevő mindig pozitív a $\vec{r}$ érintő és a $\vec{v}$ normális által kifeszített helyi koordináta-rendszerben mivel a normális – értelmezése szerint – a görbületi középpont felé mutat.



3.ábra.

A gyorsulásvektor komponensei

A 3. ábra a gyorsulásvektor normál, illetve érintő irány szerinti széttagolását tünteti fel. Megfigyelhető, hogy a gyorsulásvektor és az érintővektor iránya közötti β szög a

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_n}{a_t} = \frac{v^2}{\rho \frac{d^2 s}{dt^2}} \quad (12)$$

képlettel határozható meg.

A gyorsulásvektor összetevői a mozgás vizsgálatára értelmezett derékszögű koordináta-rendszerben a helyzetvektor kétszeres, idő szerinti deriválásával állíthatók elő:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\varphi}(t) \vec{i} + \ddot{\psi}(t) \vec{j} + \ddot{\eta}(t) \vec{k} \quad (13)$$

A gyorsulásvektor modulusza a (11), illetve a (13) reláció segítségével a következőképpen fejezhető ki:

$$a = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \left(\frac{d^2 s}{dt^2} \right)^2} = \sqrt{[\ddot{\varphi}(t)]^2 + [\ddot{\psi}(t)]^2 + [\ddot{\eta}(t)]^2} \quad (14)$$

1.2.4. A normális gyorsulás, illetve a pályagyorsulás számítása

A gyorsulásvektor vetületeinek számítása a választott koordináta-rendszerben viszonylag egyszerű, de ezek a vektorösszetevők nem mindig szolgáltatnak elégséges információt a mozgás sajátosságairól, hiszen az x , y , illetve z tengelyekre értelmezett vetületekben keveredik a normál, illetve a tangenciális gyorsulás hatása. Adott esetben szükség lehet a normális gyorsulás és a pályagyorsulás ismeretére.

Legegyszerűbb a pályagyorsulás meghatározása, hiszen az iránya egybeesik a pályagörbe érintőjével. A (7) képlet alapján a ds/dt pályasebesség idő szerinti deriváltja maga a keresett pályagyorsulás:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\psi}\ddot{\psi} + \dot{\eta}\ddot{\eta}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\eta}^2}}$$

A gyorsulásvektor pályairányú összetevője a pályagyorsulás $\vec{\tau}$ érintővektorral (8. képlet) való szorzataként fejezhető ki:

$$\vec{a}_\tau = \dot{\phi} \frac{\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\psi}\ddot{\psi} + \dot{\eta}\ddot{\eta}}{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\eta}^2} \vec{i} + \dot{\psi} \frac{\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\psi}\ddot{\psi} + \dot{\eta}\ddot{\eta}}{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\eta}^2} \vec{j} + \dot{\eta} \frac{\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\psi}\ddot{\psi} + \dot{\eta}\ddot{\eta}}{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\eta}^2} \vec{k} \quad (15)$$

A normálgyorsulás összetevőit sokkal könnyebb számítani a tangenciális gyorsulás összetevőiből, mint a normálvektor és a normálgörbület kifejezésével. Figyelembe véve, hogy $\vec{a} = \vec{a}_v + \vec{a}_\tau$, innen $\vec{a}_v = \vec{a} - \vec{a}_\tau$, a (13) és (15) kifejezésekkel a normálirányú gyorsulásvektor:

$$\begin{aligned} \vec{a}_v = & \frac{\dot{\psi} \cdot (\ddot{\phi} \cdot \dot{\psi} - \dot{\phi} \cdot \ddot{\psi}) + \dot{\eta} \cdot (\ddot{\phi} \cdot \dot{\eta} - \dot{\phi} \cdot \ddot{\eta})}{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\eta}^2} \cdot \vec{i} + \frac{\dot{\eta} \cdot (\ddot{\psi} \cdot \dot{\eta} - \dot{\psi} \cdot \ddot{\eta}) + \dot{\phi} \cdot (\ddot{\psi} \cdot \dot{\phi} - \dot{\psi} \cdot \ddot{\phi})}{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\eta}^2} \cdot \vec{j} \\ & + \frac{\dot{\phi} \cdot (\ddot{\eta} \cdot \dot{\phi} - \dot{\eta} \cdot \ddot{\phi}) + \dot{\psi} \cdot (\ddot{\eta} \cdot \dot{\psi} - \dot{\eta} \cdot \ddot{\psi})}{\dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\eta}^2} \cdot \vec{k} \end{aligned} \quad (16)$$

1.2.5. Geometriai alkalmazás

A mérnöki feladatok matematikai megfogalmazásában számtalan olyan eset merül fel, ahol adott görbe görbületének meghatározása okoz gondot, ugyanis a differenciálgeometriából ismeretes képletek alkalmazása sok esetben igen bonyolult számításokhoz vezet. A fogaskerékajtások tervezésében elengedhetetlen a kapcsolódó profilgörbék, illetve felületek görbületei közötti relációk ismerete. Ez esetben a kinematikai megfontolások alapján levezetett összefüggések bizonyulnak egyszerűbbnek.

A pályagörbe adott M pontjában definiálhatónak feltételezzük a $\vec{\tau}$ és a $\vec{\nu}$ vektor, (a pályagörbe sima, parametrikus függvényei legalább egyszer deriválhatók), tehát érvényes a $\vec{\tau} \cdot \vec{\nu} = 0$ összefüggés. Ha egybevetjük ez utóbbinak ívkoordináta szerinti

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \vec{\nu} + \vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\nu}}{ds} = 0$$

deriváltját és a

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{\nu}}{\rho}$$

Frénet-féle képletet akkor kapjuk, hogy:

$$\frac{\vec{v}}{\rho} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} = -\vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{ds} = -\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d\vec{v}}{ds} = -\frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} \cdot \frac{\frac{d\vec{v}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{v}}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \quad (17)$$

Ha a pályagörbe alakja ismert, és tetszőlegesen $\vec{r} = \vec{r}(u)$ alakban parametrizált, valamint a normál-egységvektor ismert, akkor a pálya adott pontbeli görbületének számítására a (17) reláció a következőképpen használható fel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \frac{\frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv_x}{du} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv_y}{du} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dv_z}{du} \cdot \frac{du}{dt}}{\left(\frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{dt}\right)^2} = \\ &= \frac{\frac{dx}{du} \cdot \frac{dv_x}{du} + \frac{dy}{du} \cdot \frac{dv_y}{du} + \frac{dz}{du} \cdot \frac{dv_z}{du}}{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

Ezzel a pályagörbe adott pontbeli görbülete egyértelműen meghatározható, ha a (18) képletben szereplő deriváltakat a tekintett ponthoz tartozó u_0 paraméter értékére számítjuk.

1.3. Anyagi pont kinematikája polárkoordinátákban

1.3.1. A mozgás polárkoordinátákra értelmezett sajátosságai

Bizonyos esetekben a pályagörbe matematikai kifejezése polárkoordinátákban egyszerűbb. Előnyös ebben az esetben a sebesség és a gyorsulás meghatározására a polárkoordinátás kifejezéseket használni. Megjegyezzük, hogy a jelen 1.3. szakaszban levezetett összefüggések csak akkor érvényesek és használhatók, ha a pályagörbe síkgörbe.

Legyen (Γ) a pályagörbe a rögzített Oxy koordináta-rendszerben, melynek poláregyenlete $\rho = \rho(\theta)$ (4. ábra). Ha az M pont a pályagörbe mentén elmozdul, akkor a θ polárszög az idő függvényében változik, emiatt célszerűbb a görbe polárkoordinátás alakjának idő szerinti parametrizálása:

$$\begin{cases} \theta = \theta(t) \\ \rho(t) = \rho[\theta(t)] \end{cases} \quad (19)$$

Az M ponthoz kötjük a pont mozgását követő $M\xi\eta$ koordináta-rendszert. Ennek ξ tengelye mindig áthalad az O origón is, következésképp egybeesik a polársugárral. Az η tengelyt pedig úgy kapjuk meg, hogy elforgatjuk a ξ tengelyt az

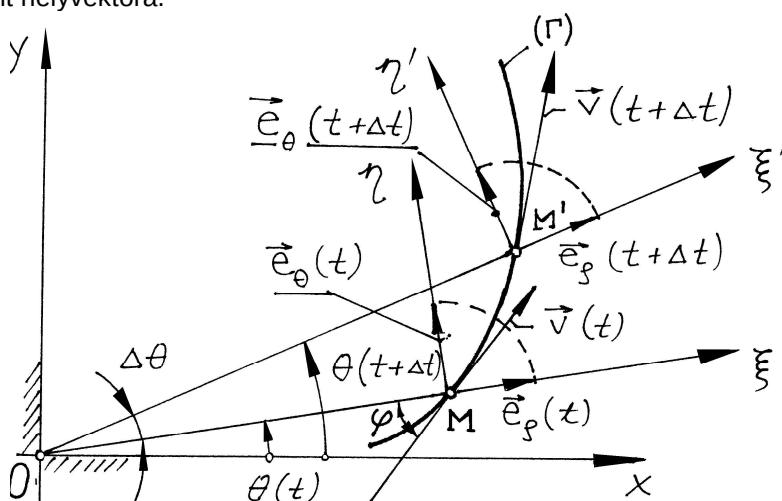
M origóban az óramutató járásával ellenkező irányba 90° -kal. A két koordinátatengelyhez tartozó egységvektorokat rendre $\vec{e}_\rho$ és $\vec{e}_\theta$ jelöli.

A Δt idő elteltével az origó új helyzetét M' jelöli, a koordinátatengelyekét pedig – összhangban ezzel a megállapodással – ξ' és η' . Nyilvánvaló, hogy az $\vec{e}_\rho$ és $\vec{e}_\theta$ egységvektorok a θ polárszögön keresztül az idő függvényei.

Az $\vec{e}_\rho$ egységvektorral

$$\vec{\rho}(t) = \rho(t)\vec{e}_\rho(t) \quad (20)$$

az M pont helyvektora.



4. ábra.

Anyagi pont mozgása polárkoordinátákban

A sebesség a pont helyzetvektorának idő szerinti deriváltja. Meg kell jegyezni, hogy a következőkben, a kifejezések egyszerűsítése céljából, a polársugár idő szerinti deriváltja alatt a

$$\dot{\rho}(t) = \frac{d}{dt}[\rho(\theta(t))] = \frac{d\rho}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta} \quad (21)$$

kifejezést kell érteni.

Nyilvánvaló a 4. ábra alapján, hogy az $\vec{e}_\rho$ helyvektor az $\vec{e}_\rho(t) = \cos(\theta(t))\vec{i} + \sin(\theta(t))\vec{j}$ alakban írható fel az Oxy koordináta-rendszerben. az $\vec{i}$ és $\vec{j}$ állandó egységvektorok segítségével. Idő szerinti deriváltja

$$\dot{\vec{e}}_\rho(t) = \frac{d}{dt} \vec{e}_\rho(t) = \dot{\theta} \left[-\sin(\theta(t)) \vec{i} + \cos(\theta(t)) \vec{j} \right] = \dot{\theta} \left[\cos\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} \right] \quad (22)$$

A képlet jobboldalán, a szögletes zárójelben álló utolsó tag az $\vec{e}_\rho(\theta)$ egységvektor a $\theta + \pi/2$ helyen, tehát $\vec{e}_\rho(\theta + \pi/2)$. Másként fogalmazva olyan egységvektor, amelyet az $\vec{e}_\rho(\theta)$ egységvektor alkalmas elforgatásával kapunk meg. A képlet szerint az elforgatás az óramutató járásával ellentétes irányba történik, az elforgatás szöge pedig $\pi/2$. Ezek után nyilvánvaló, hogy $\vec{e}_\rho(\theta + \pi/2)$ nem más, mint az $M\eta$ koordinátatengelyhez tartozó $\vec{e}_\theta$ egységvektor. Az előbb elmondottak alapján, tekintettel még a 4. ábrára is, nem nehéz ellenőrizni, hogy

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_\rho \end{cases} \quad (23)$$

1.3.2. Anyagi pont sebessége polárkoordinátás felírásban

A sebességet a (20) helyzetvektor idő szerinti deriválásával kapjuk:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (\rho(t) \vec{e}_\rho(t)) = \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho(t) + \rho(t) \dot{\theta}(t) \vec{e}_\theta(t) = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\theta \vec{e}_\theta \quad (24)$$

Megfigyelhető, hogy a sebességvektornak két, egymásra merőleges összetevője van: $v_\rho \vec{e}_\rho$ és $v_\theta \vec{e}_\theta$. A v_ρ sebesség a polársugár időegység alatti növekedését jelenti, ha állandó a θ polárszög, míg a v_θ sebesség a polárszög időegység alatti változásának eredménye, ha nem változik a ρ sugár. Ha a polárszög állandó marad, akkor a pálya egy origón áthaladó egyenes lesz, a sebességvektor pedig erre illeszkedik. Ha a ρ sugár állandó, és a θ polárszög változik, a pályagörbe kör alakot ölt.

A $\vec{v}$ sebességvektor és a ρ sugár közötti φ szöget a v_θ és v_ρ sebességek arányából lehet meghatározni:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_\theta}{v_\rho} = \frac{\rho(t) \dot{\theta}(t)}{\dot{\rho}(t)} = \frac{\rho \frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt}} = \frac{\rho}{\frac{d\rho}{dt}} = \frac{\rho}{\rho'} \quad (25)$$

A (25) összefüggés a differenciálgeometriából ismert, és az adott pontban értelmezett polársugár, illetve a görbe érintője által bezárt szög. Belátható, hogy a (25) kifejezés alapján a polársugár és az érintő szöge, kinematikai megközelítéssel, egyszerűbben levezethető.

A sebességvektor abszolút értéke, a (24) képlet alapján,

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(\dot{\rho}(t))^2 + (\rho(t)\dot{\theta}(t))^2} \quad (26)$$

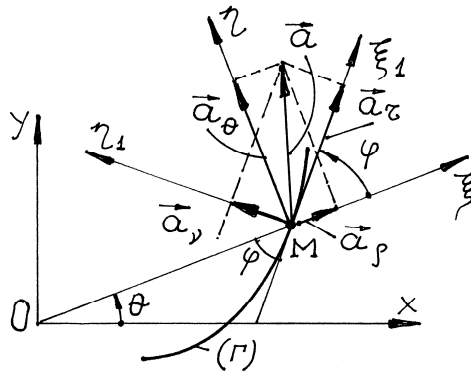
1.3.3. Anyagi pont gyorsulása polárkoordinátás felírásban

A gyorsulás, akár a Descartes-féle koordináta-rendszerben, a sebességvektor deriválásával kapható meg. A (24) kifejezés, idő szerinti deriválás után, a következő alakot ölti:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}(t)\vec{e}_\rho(t) + \dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) + \dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) + \rho(t)\ddot{\theta}(t)\vec{e}_\theta(t) - \rho(t)(\dot{\theta}(t))^2\vec{e}_\rho(t)$$

A tagok $\vec{e}_\rho$ és $\vec{e}_\theta$ szerinti csoportosításával a gyorsulásvektor a következő lesz:

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{\rho}(t) - \rho(t)(\dot{\theta}(t))^2)}_{\vec{a}_\rho}\vec{e}_\rho + \underbrace{(\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t))}_{\vec{a}_\theta}\vec{e}_\theta \quad (27)$$



5. ábra.

A tangenciális és normál irányú gyorsulásösszetevők polárkoordinátákban

A (27) kifejezés a gyorsulásnak a polársugárra, illetve az erre merőleges irányra eső vetületeit tartalmazza. A tangenciális, illetve a normál irányú gyorsulás a fentiekől általában különbözik. Ezek meghatározása az 5. ábra alapján lehetséges. A (Γ) pályagörbe M pontjában levő anyagi pont $\vec{a}$ gyorsulásvektorát az $M\xi\eta$, illetve az $M\xi_1\eta_1$ koordináta-rendszerekhez viszonyítják, melyek tengelyeinek egységvektorai a polárkoordinátás felírásban használt $\vec{e}_\rho$ és $\vec{e}_\theta$, illetve a $\vec{\tau}$ érintő, és $\vec{\nu}$ normál egységvektor. A két koordináta-rendszer közötti kapcsolatot a φ szögű elforgatás. A megfelelő transzformációs mátrix alkalmazásával az $\vec{a}$ gyorsulás-

vektornak az említett koordináta-rendszerekben értelmezett összetevői között a kapcsolat a következőképpen írható fel:

$$\begin{bmatrix} a_\tau \\ a_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_\rho \\ a_\theta \end{bmatrix} \quad (28)$$

Figyelembe véve a φ szög (25) kifejezését, a gyorsulás $\vec{e}_\rho$ és $\vec{e}_\theta$ egységvektorok szerint kifejezett polárkomponenseit a (27) reláció segítségével, valamint a (28) mátrixegyenletet, a gyorsulás normál, illetve tangenciális összetevői a következők lesznek:

$$\begin{cases} a_\tau = a_\rho \cos \varphi + a_\theta \sin \varphi = \frac{\dot{\rho} \ddot{\rho} + \rho \dot{\theta} (\rho \ddot{\theta} + \dot{\rho} \dot{\theta})}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2}} \\ a_\nu = -a_\rho \sin \varphi + a_\theta \cos \varphi = \frac{\rho^2 \dot{\theta}^3 + 2 \dot{\rho}^2 \dot{\theta} + \rho (\dot{\rho} \ddot{\theta} - \ddot{\rho} \dot{\theta})}{\sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2}} \end{cases} \quad (29)$$

1.3.4. A szögsebesség-vektor

A (23) képletekre vezető gondolatmenet során igazolást nyert, hogy az $\vec{e}_\rho$ és $\vec{e}_\theta$ egységvektorok idő szerinti deriváláskor a két vektor

- (a) elfordul az óramutató járásával ellentétesen $\pi/2$ szöggel;
- (b) egységnyi abszolút értéke $\dot{\theta}$ -tal szorzódik.

Ha az Oxy koordináta-síkra merőleges $\vec{k}$ egységvektort tekintjük úgy, hogy $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ (a három egységvektorra támaszkodó Oxyz koordináta-rendszer jobbsodrású), akkor bármely, az Oxy síkba illeszkedő vektornak $\vec{k}$ -val balról való vektor-szorzata az említett síkban az óramutató járásával ellentétesen, $\pi/2$ szöggel elfordul.

Ha a $\dot{\theta}$ skalárértékhez egy olyan $\vec{\theta}$ vektort csatolunk, amelynek abszolút értéke a skalárral megegyező, irány-egységvektora pedig a mozgás síkjára merőleges $\vec{k}$, akkor könnyen belátható, hogy a (23) képletek a következőképpen is felírhatók:

$$\begin{cases} \dot{\vec{e}}_\rho = \vec{\theta} \times \vec{e}_\rho = \vec{\omega} \times \vec{e}_\rho \\ \dot{\vec{e}}_\theta = \vec{\theta} \times \vec{e}_\theta = \vec{\omega} \times \vec{e}_\theta \end{cases} \quad (30)$$

A $\vec{\theta}$ vektort *szögsebesség-vektornak* nevezik, és az elkövetkezőkben jelölése $\vec{\omega}$. A (30) vektoriális felírás a Poisson-féle képletek sajátos esete. A későbbiekben ezek általános alakja alkalmazást nyer a merev test mozgásainak tanulmányozásában.

2. Fejezet.

Merev testek kinematikája

2.1. Alapfogalmak

A merev testek kinematikája a műszaki mechanikának az a része, amely az anyagi testek mozgását tanulmányozza, különös tekintettel az alábbiakra:

- a jellegzetes pontok pályagörbéjének meghatározása;
- a testpontok sebességeinek meghatározása;
- a testpontok gyorsulásainak meghatározása.

A pályagörbék, a sebességek és a gyorsulások meghatározásának gyakorlati szerepe igen jelentős a mechanizmusok tervezésében. A felsorolt mennyiségek képezik a dinamikai számítás alapjait, amely a mechanizmus igénybevételét határozza meg, és így a méretezés kiindulópontját képezi.

Matematikai szempontból vizsgálva, adott testpont pályagörbéjét $\vec{r}(t) = \vec{r}(x(t), y(t), z(t))$ függvényként lehet felfogni, ahol t az idő, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ pedig az illető testpont koordinátáinak időfüggvényei, egy álló koordináta-rendszerhez viszonyítva. Az álló koordináta-rendszeren kívül célszerű egy, a testtel mereven kötött koordináta-rendszert is értelmezni, melyet a test geometriai sajátosságainak figyelembevételével érdemes megválasztani. A mozgás során a testhez rögzített és az álló koordináta-rendszer közötti kapcsolat minden időpillanatban ismertnek tekintett. A két koordináta-rendszer használatának előnye a kinematikai elemzés mátrixos módszerében világosodik meg.

A sebesség-, valamint a gyorsulásvektor, akár a mozgást végző merev test adott pontjának helyzetvektora, mind az álló, mind a testhez kötött – és ezzel együtt mozgó – koordináta-rendszerben értelmezhető.

A merev testek kinematikája a sebességfüggvény, illetve a gyorsulásfüggvény meghatározását tűzi ki célul. Ezek a függvények, a pályagörbéhez hasonlóan, egyváltozós és három paraméteres vektoriális függvények, melyek időben teremtenek kapcsolatot a sebesség illetve a gyorsulás, és a testpont helyzet-paraméterei között. Emiatt ezeket a függvényeket sebesség-, illetve gyorsuláseloszlásnak is nevezik.

A merev test mozgása többféleképpen osztályozható.

A koordináta-rendszer általában azon test modellje, amelyhez a tekintett anyagi pont vagy merev test mozgását viszonyítjuk. Ha a mozgást valamely rögzítettnek tekintett – más néven abszolút – koordináta-rendszerben szemléljük, akkor ezt *abszolút mozgásnak* nevezzük. Létezik azonban számtalan olyan gyakorlati eset is, amikor a mozgást eleve egy olyan koordináta-rendszerben vizsgáljuk, amely maga is mozog az abszolútnak tekintett koordináta-rendszerhez képest. Ez

esetben a mozgó koordináta-rendszer a relatív koordináta-rendszer, az ebben megfigyelt mozgás pedig a *relatív mozgás*. A két koordináta-rendszer abszolút, illetve relatív minőségét a vizsgálat során magunk választhatjuk meg, lehetőleg úgy, hogy a legegyszerűbb felírású megoldásnak adjon helyet.

A mozgások, jellegük alapján, két csoportba sorolhatók:

- egyszerű mozgások;
- összetett mozgások.

Egyszerű mozgások azok a mozgástípusok, amelyek már nem bonthatók fel további egyszerűbb összetevőkre. Merev test esetében két egyszerű mozgás létezik: a haladó mozgás, és a helyálló tengely körüli forgás.

Összetett mozgásoknak nevezik az egyszerű mozgásokból előállítható, a gyakorlatban jelentkező és kiemelt sajátosságokkal rendelkező, alább felsorolt mozgástípusokat:

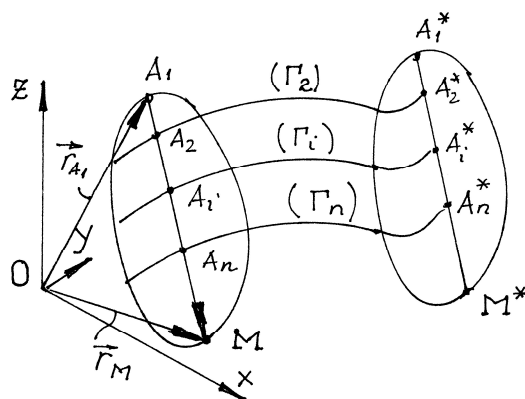
- csavarmozgás;
- síkmozgás;
- gömbmozgás vagy helyálló pont körüli forgás;
- általános mozgás.

A jelen jegyzetben minden olyan mozgást, amely előállítható az egyszerű forgó, illetve a haladó mozgások valamilyen összetételeként, összetett mozgásnak tekintünk. Ugyanakkor a szakirodalomban fellelhetők ettől eltérő értelmezések is [24, 26, 27], ahol a csavarmozgást, a síkmozgást, a gömbmozgást, valamint az általános mozgást is egyszerű mozgásként értelmezik, mivel egy, a térben álló helyzetű koordináta-rendszerhez viszonyítják.

Az összetett mozgás vizsgálható úgy is, mint több, egyszerű mozgás összetétele; ilyen szempontból a mozgás lehet egyszerűen vagy többszörösen összetett.

Ezek részletes vizsgálata a „Felületgenerálás elmélete” tantárgyban kap helyet.

A következőkben a felsorolt mozgástípusok részletes elemzésével foglalkozunk.



6. ábra.
A haladó mozgás vázlata

2.2. Egyszerű mozgások

2.2.1. A haladó mozgás

A. Vektormódszer

Merev test akkor végez haladó mozgást, ha bármely két testpontra illesztett egyenes a mozgás során önmagával párhuzamos marad.

A haladó mozgás vázlata a 6. ábrán látható. A merev test mozgása az Oxyz jobbsodrású koordináta-rendszerhez viszonyított. A mozgás sajátosságainak értelmében a mozgás során a tetszőlegesen választott A_1M szakasz is önmagával párhuzamos marad. Az $\vec{r}_{A_1}$, illetve az $\vec{r}_M$ helyvektorok időben változnak, de az $\vec{A_1M}$ vektor sem abszolút értékben, sem irányában nem változik, tehát időben állandó. Meg kell jegyezni, hogy a statikától eltérően, az $\vec{A_1M}$ A_1 kezdőpontja elmozdul, tehát a vektor nem kötött. Ellenben a komponensei nem változnak, mivel önmagával párhuzamos marad, és abszolút értéke sem változik, vetületei állandóak lesznek.

A fent elmondottakat figyelembe véve, legyen az A_i pont az A_1M szakasz tetszőleges pontja, és legyen $\vec{e}$ az $\vec{A_1M}$ vektor egységvektora. Az A_i és az A_1 pontok helyvektorai között fennáll az

$$\vec{r}_{A_i} = \vec{r}_{A_1} + \lambda \cdot \vec{e} \quad (31)$$

összefüggés. Ha $\lambda = |A_1M|$, akkor nyilvánvaló, hogy $A_i \equiv M$.

A (31) összefüggés idő szerinti deriválásával az A_1 és A_i testpontok sebességei között fennálló alábbi összefüggést kapjuk:

$$\dot{\vec{r}}_{A_i} = \dot{\vec{r}}_{A_1} \Leftrightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_1 \quad (32)$$

A (32) reláció a haladó mozgást jellemző sebességeloszlás. Értelmezése az, hogy a mozgást végző merev test bármely pontjának, adott időpillanatban, a sebessége ugyanaz. Figyelembe véve, hogy a merev testben az AM szakasz kijelölése, így az $\vec{e}$ egységvektor iránya is tetszőleges, a (32) reláció bármely testpontpárra érvényes.

A gyorsuláseloszlás a sebességeloszláshoz hasonló. A sebességek relációját idő szerint deriválva,

$$\ddot{\vec{r}}_{A_i} = \ddot{\vec{r}}_{A_1} \Leftrightarrow \vec{a}_i = \vec{a}_1 \quad (33)$$

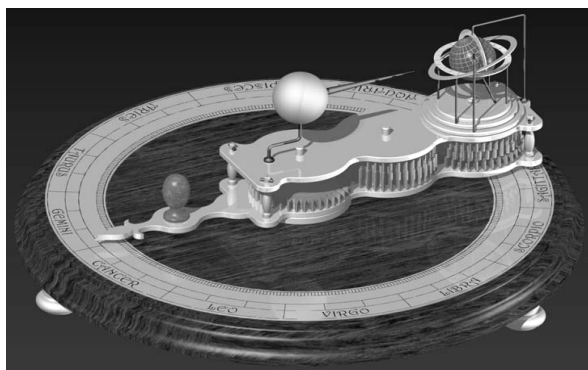
Ennek értelmében a haladó mozgás során a merev test pontjainak adott időpillanatban tekintett gyorsulásuk azonos.

Ha a (31) vektorösszegben a vektorokat idő függvényeként tekintjük, akkor a (31) vektorösszeg a merev test különböző pontjai által leírt pályagörbék vektor-egyenletei között fennálló összefüggés. Kiemeljük, hogy a t idő a független változó, míg az $\vec{e}$ egységvektor, illetve a λ paraméter időben állandó mennyiségek. Az utóbbiak értékét az A_1 és az A_i pontok egymáshoz viszonyított helyzete határozza meg. A (31) vektoregyenlet mátrixos alakban a következő:

$$\begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{bmatrix} \quad (34)$$



7a. ábra.
Az óriáskerék



7b. ábra.
A Ferguson-féle, földmozgást szemléltető,
bolygókerekes mechanizmus

Az A_i és az A_1 pont koordinátái között, időtől függetlenül, a különbség állandó. Geometriai szempontból ez a tény azt igazolja, hogy az A_i pont Γ_i pályagörbéje, és az A_1 pont Γ_1 pályagörbéje egybevágó.

Haladó mozgást végző merev test pontjai egybevágó pályagörbékét írnak le.

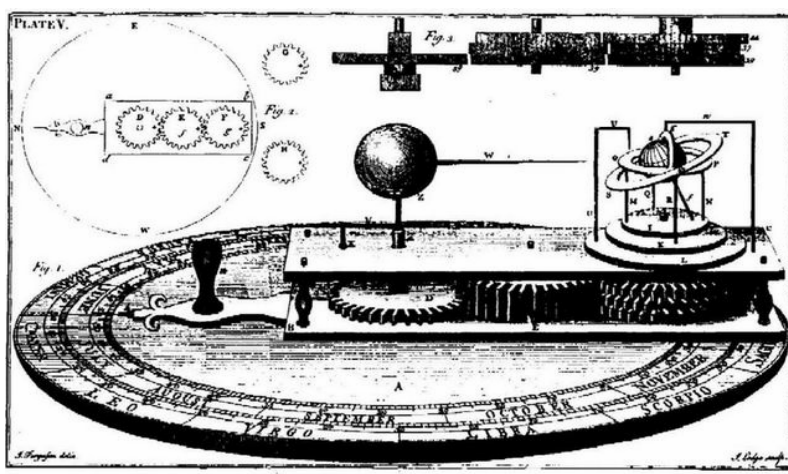
A haladó mozgás nem tévesztendő össze az egyenes vonalú mozgással! Ez utóbbi a haladó mozgás sajátos esete, ezenkívül rengeteg gyakorlati eset létezik, ahol a haladó mozgás jellemző pályagörbéje nem egyenes.

A 7a. ábrán szemléltetett az óriáskerék, amelynek kosarai mindig függőlegesek maradnak, és a kosár minden pontja ugyanazt az óriáskerék-átmérőjű kört írja le, csak ezek középpontjai illeszkednek különböző pozíciókban. A 7b. ábrán a Ferguson híres mechanizmusának a rekonstrukciója látható, amelyben – bármennyire is hihetetlennek tűnik első látásra – a földgömbtartó lapka a mozgás során önmagával párhuzamos marad. Innen is a „Ferguson-féle paradoxon” elnevezés. A 7c. ábra a konstruktőr eredeti rajzát idézi.

B. Mátrixmódszer

A mátrixos mozgáselemzéshez két koordináta-rendszer megválasztása szükséges: egy álló S_0 rendszer, valamint egy, a vizsgált merev testhez rögzített és ezzel együtt mozgó, S_1 rendszer. A merev test geometriája az S_1 rendszerben ismert – ez a mátrixmódszer alkalmazásának alapfeltétele.

A mozgás ismerete feltételezi, hogy minden időpontban meghatározott – tehát felírható – az álló és a mozgó koordináta-rendszer közötti transzformációs mátrix. A mozgás következményeképpen, a transzformációs mátrix elemei időfüggők. A mátrixmódszer alkalmazásához szükséges alapismeretek rövid összefoglalója a függelékben található.



7.c. ábra.

A Ferguson „Select Mechanical Exercises” 1773-ban kiadott művében fellelhető eredeti rajz

A haladó mozgás sajátosságait figyelembe véve – vagyis azt a tényt, hogy bármely két testpontot összekötő szakasz a mozgás során önmagával párhuzamos marad – kijelenthető, hogy az S_1 -ből az S_0 -ba való transzformáció mátrixa mindig translációs mátrix, tehát a forgató rész (lásd a Függelék) egységmátrix lesz.

A mozgás során időben változó elemek így nem lesznek másak, mint a mozgó S_1 rendszer origójának S_0 -hoz viszonyított koordinátái (a transláció-koordináták), így a szabadon választott M testpont homogén koordinátái közötti relációt az

$$\begin{bmatrix} x_0^{(M)} \\ y_0^{(M)} \\ z_0^{(M)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0^{(O_1)} \\ 0 & 1 & 0 & y_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 1 & z_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(M)} \\ y_1^{(M)} \\ z_1^{(M)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

mátrixegyenlet adja. Figyelembe véve, hogy az időtől függő koordináták csupán a mozgó rendszer origójának koordinátái, az M pont sebességének összetevői az S_0 -ban – idő szerinti deriválás alkalmazásával – a következők:

$$\begin{bmatrix} v_{x0}^{(M)} \\ v_{y0}^{(M)} \\ v_{z0}^{(M)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{x}_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{y}_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{z}_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1^{(M)} \\ y_1^{(M)} \\ z_1^{(M)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

Világosan látszik, hogy a rotációs rész idő szerinti deriváltja a nullmátrix. Következésképpen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{x0}^{(M)} \\ \mathbf{v}_{y0}^{(M)} \\ \mathbf{v}_{z0}^{(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_0^{(O_1)} \\ \dot{\mathbf{y}}_0^{(O_1)} \\ \dot{\mathbf{z}}_0^{(O_1)} \end{bmatrix} \quad (37)$$

A fenti képlet értelmezése aban áll, hogy a tetszőleges testpont sebessége megegyezik a mozgó koordináta-rendszer origójának sebességével, vagyis minden testpont ugyanolyan sebességű.

A (37) relációt idő szerint deriválva, az egyenlet jobboldalán a választott testpont gyorsulásvektorának összetevői jelennek meg:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{x0}^{(M)} \\ \mathbf{a}_{y0}^{(M)} \\ \mathbf{a}_{z0}^{(M)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_0^{(O_1)} \\ \ddot{\mathbf{y}}_0^{(O_1)} \\ \ddot{\mathbf{z}}_0^{(O_1)} \end{bmatrix} \quad (38)$$

2.2.2. Helytálló tengely körüli forgás

A. Vektormódszer

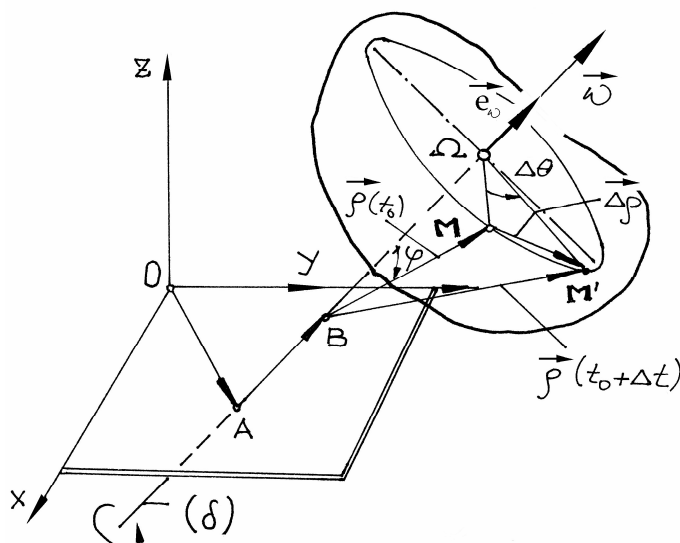
Merev test akkor végez helytálló tengely körüli forgást (röviden: forgómozgást), ha a test egymástól különböző két pontja nyugalomban marad a mozgás során. Könnyű belátni, hogy a két említett ponton áthaladó egyenes többi pontja is mozdatlan marad. Ez az egyenes a forgómozgás tengelyét képezi.

A forgómozgásnak számtalan műszaki alkalmazása van. Gyakorlatilag alig található olyan gép, amelynek ne lenne legalább egy helytálló tengely körüli forgómozgást végző alkatrésze.

A forgómozgás mennyiségi elemzése a 8. ábrán feltüntetett geometriai elemek és vektorok segítségével történik. Az helytálló $Oxyz$ koordináta-rendszerben (δ) jelöli a forgástengelyt. Ez az A pontban dőfi át az xy síkot. A forgástengely helyzetét egyértelműen meghatározza az A dőféspont és a (δ) tengely irányvektora. Az utóbbit egységvektornak tekintjük. Jelölje rendre M és M' a merev test egy tetszőleges pontjának helyzetét a t_0 és $t_0 + \Delta t$ időpillanatban. Legyen továbbá $\vec{\rho}(t_0)$ és $\vec{\rho}(t_0 + \Delta t)$ ugyanezen pont a forgástengely valamely B pontjára vonatkozó helyvektora. Mivel merev test mozgását vizsgáljuk, nyilvánvaló, hogy bármely három különböző testpont alkotta háromszög torzulatlan marad a mozgás során. Az M ponton áthaladó és a forgástengelyre merőleges síkot az Ω pontban dőfi a forgástengely. Tekintsük most a $BM\Omega$ derékszögű háromszöget. A háromszög B és Ω csúcsa nyugalomban van, mivel a forgástengelyen található. Így Δt idő múlva a háromszög a $BM'\Omega$ helyzetbe kerül. Nyilvánvaló, hogy az $M\Omega$ befogó hossza állandó marad a mozgás során. Más szavakkal kifejezve, az M pont forgás-

tengelytől mért távolsága a mozgás során nem változik.

A fentebb mondtak alapján kijelenthetjük, hogy a helytálló tengely körül forgómozgást végző test pontjainak pályagörbéi a forgástengelyre merőleges síkokban fekvő körök. E körök sugarai megegyeznek a tekintett pontok forgástengelytől való távolságaival.



8. ábra.

A forgómozgás vázlata

2.2.2.1. A sebességeloszlás

A sebesség- illetve a gyorsuláseloszlás meghatározásakor ismertnek tekinjük a mozgást végző test geometriáját a választott S_0 koordináta-rendszerben. A merev test M pontjának $\vec{OM}$ az origóra vonatkozó helyzetvektora. A 8. ábra alapján felírható, hogy

$$\vec{r} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{\rho} \quad (39)$$

A kiválasztott M pont $\vec{r}$ helyvektora nyilvánvalóan az idő függvénye. A sebesség meghatározása céljából idő szerint kell tehát deriválni a (38) egyenletet. A deriválás során figyelembe kell venni, hogy csak a $\vec{\rho}$ vektor időfüggő és így

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

A $d\vec{\rho}/dt$ számítása a 8. ábrán feltüntetett $\Omega MM'$ háromszög segítségével végezhető el:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\rho}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\rho}(t_0 + \Delta t) - \vec{\rho}(t_0)}{t_0 + \Delta t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2\Omega M \sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} \vec{e}_{MM'} \\ &= 2\Omega M \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta t} \vec{e}_{MM'} \end{aligned}$$

A képletben ΩM a vizsgált pontnak a forgástengelytől mért távolsága, az $\vec{e}_{MM'}$ egységvektor pedig az M pontból az M' pontba mutat. Nyilvánvaló, hogy az $\Omega MM'$ egyenlő szárú háromszög MM' alapján fekvő két szögnek a határértéke 90° , ha a háromszög Ω csúcsához tartozó $\Delta\theta$ középponti szög a zérushoz tart. Következésképp határesetben a $\Delta\vec{\rho}$ különbségvektor merőleges lesz az ΩM sugárra.

A mozgás során a $\vec{\rho}$ helyvektor csak az irányát változtatja, abszolút értéke állandó marad. Legyen φ a $\vec{\rho}$ helyvektor és a (δ) forgástengely által bezárt szög. Nyilvánvaló az ábra alapján, hogy az ΩBM háromszög φ szöggel szemben fekvő befogója az M pont körpályájának $\Omega M = \rho \sin \varphi$ sugara. Behelyettesítve az ΩM sugár értékét a sebesség fenti képletébe kapjuk, hogy:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \rho \sin \varphi \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \vec{e}_{MM'} \quad (40)$$

A fenti képletben álló határérték a körpályán mozgó M pont helyzetét megadó θ központi szög időbeli változásának sebessége. Ennek alapján, visszatérve még a (30) képlet kapcsán mondottakat is, a skaláris alakú szögsebességet az

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (41)$$

módon értelmezzük. A számítási képletek rendszerezése végett célszerű a szögsebességet vektorizálni, vagyis a központi szög egységnyi idő alatt történő pillanatnyi változásához irányt és irányítást rendelni. Kössük a (δ) tengely $\vec{e}_\omega$, $|\vec{e}_\omega| = 1$ irányvektorát az Ω ponthoz. Pozitívnak tekintjük a $\Delta\theta$ szögelfordulást, ha az $\vec{e}_\omega$ vektor végpontjából tekintve az $MM'\Omega$ síkra, az $\overrightarrow{\Omega M}$ vektor az óramutató járásával ellentétesen fordul el $\Delta\theta$ szöggel a $\overrightarrow{\Omega M'}$ vektorba. Értelmezzük ezek után a merev test szögsebesség-vektorát a (41) képlet segítségével, mint $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\omega$. Nyilvánvaló, hogy az $\vec{e}_\omega \times \vec{\rho}$ vektoriális szorzatnak az abszolút értéke $\rho \sin \varphi$ és a jobbkézszabálynak megfelelően $\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \vec{e}_{MM'}$ az irányvektora (ez a körpálya érintő egységvektora az M pontban). Összevetve ezt az eredményt a (40) képlettel azt kapjuk,

hogy helytálló tengely körüli forgómozgás esetén

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (42)$$

a sebességeloszlás számításának összefüggése. A képletben szereplő $\vec{\omega}$ szögsebességvektor az helytálló tengely körüli forgómozgás alapvető jellemzője, a $\vec{\rho}$ pedig a merev test egy tetszőleges pontjának helyvektora a forgástengely valamely szabadon kiválasztott – jelen esetben a B – pontjához viszonyítva.

Az álló S_0 koordináta-rendszerben az $\vec{\omega}$ szögsebességvektor iránya időben változatlan, irányítása (előjele) és nagysága viszont időfüggő lehet. A vizsgált pont koordinátái időben szintén változóak. A (42) vektoregyenlet, mátrix-alakban, a következő lesz:

$$\begin{bmatrix} v_{x_0} \\ v_{y_0} \\ v_{z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_0} & \omega_{y_0} \\ \omega_{z_0} & 0 & -\omega_{x_0} \\ -\omega_{y_0} & \omega_{x_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^{(M)} \\ y_0^{(M)} \\ z_0^{(M)} \end{bmatrix} \quad (43)$$

A képletben álló x_0, y_0, z_0 valamint nulla indexek azt jeletik, hogy a $\vec{v}$ és $\vec{\omega}$ vektorok koordinátáit az S_0 álló helyzetű koordináta-rendszerben tekintjük.

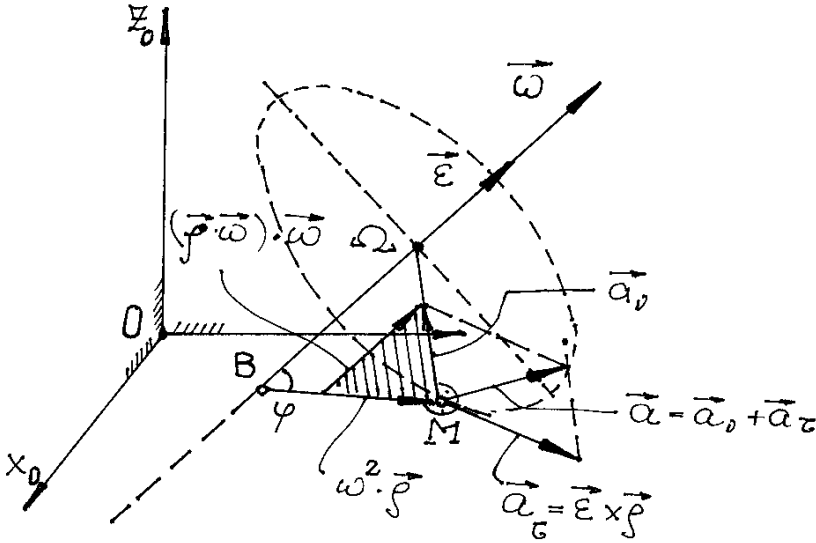
A sebesség abszolút értékének eloszlása helytálló tengelyű forgómozgás esetén lineáris. Valóban, figyelembe véve a (42) relációt és a 8. ábrát, a vektorszorzat nagysága a szögsebességvektor nagyságának és a vizsgált pont forgástengelytől való távolságának szorzata. Mivel a test merev, az $\vec{\omega}$ vektort meghatározó $\Delta\theta/\Delta t$ szögváltozás minden forgástengelyre merőleges síkban állandó (ellenkező esetben a különböző síkokban illeszkedő testpontok egymáshoz viszonyítva el kéne mozduljanak). Kijelenthető, hogy adott sugarú, forgástengellyel egybeeső tengelyű körhengeren illeszkedő testpontok sebességének abszolút értéke egyenlő. A sebességvektorok iránya – természetesen az adott testpont helyzetétől függően – különböző, de mindig merőleges a tekintett pontot a forgástengellyel összekötő szakaszra.

2.2.2.2. A gyorsuláseloszlás

A gyorsulás számítása a sebesség vektoregyenletének idő szerinti deriválásával történik. Figyelembe véve a (42) egyenletet,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt}$$

A $d\vec{\omega}/dt$ derivált nem más mint az $\vec{\varepsilon}$ szöggyorsulás-vektor. Iránya megegyezik az $\vec{\omega}$ szögsebességvektor irányával. Nagysága a forgómozgáshoz tartozó $\theta(t)$ központi szög idő szerinti második deriváltja. Az egyenlet jobb oldalán megjelenő $d\vec{\rho}/dt$ deriváltat a (41) képlet szerint számítjuk. A behelyettesítés után, kihasználva a kétszeres vektorszorzattal kapcsolatos kifejtési tételt, következik:



9. ábra.

A gyorsulásvektor és összetevői: a tangenciális és a normál irányú gyorsulás

$$\vec{a} = \vec{\epsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\epsilon} \times \vec{\rho} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{\rho} \quad (44)$$

Figyeljük meg, hogy a gyorsulásvektor két összetevőre bontható. Az $\vec{\epsilon} \times \vec{\rho}$ összetevő a sebességvektorral megegyező irányú, míg az $(\vec{\omega} \cdot \vec{\rho})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{\rho}$ összetevő az $\vec{\omega}$ és $\vec{\rho}$ vektorok ponderált összegeként, e két vektor által kifeszített síkban fekszik. A geometriai viszonyokat a 9. ábra szemlélteti.

Legyen $\vec{e}_\rho$ a $\vec{\rho}$ helyvektor irányát kijelölő egységvektor, $\vec{e}_\omega$ pedig a korábban δ -val jelölt forgástengely irány-egységvektora. Ezekkel a jelölésekkel a fentebb tekintett gyorsulás-összetevő a következőképpen írható fel:

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\rho})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{\rho} = \omega^2 \rho \cos \varphi \vec{e}_\omega - \omega^2 \rho \vec{e}_\rho \quad (45)$$

Figyeljük meg, hogy a fenti különbség kisebbítendője az $\Omega B M$ háromszög ΩB befogójával, míg a kivonandó ugyanennek a háromszögnek $B M$ átfogójával arányos. A vektorművelethez tartozó zárt vektorháromszög tehát az $\Omega B M$ háromszöggel hasonló, és oldalai ennek megfelelő oldalaival párhuzamosak. A különbségvektor, ennek következményeként, az ΩM befogóval párhuzamos, egyébként pedig az M pont által leírt körpálya Ω középpontja felé mutat. A gyorsulás (45) képlettel számított összetevőjét *normál* gyorsulásnak, míg az $\vec{\epsilon} \times \vec{\rho}$ összetevőt *tangenciális* vagy *érintőirányú* gyorsulásnak nevezzük. Összegezve, a

helytálló tengelyű forgómozgást végző test adott pontjának gyorsulását a tangenciális, illetve normálgyorsulás-vektorok összege határozza meg:

$$\begin{cases} \vec{a} = \vec{a}_v + \vec{a}_\tau \\ \vec{a}_v = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{v} \\ \vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} \end{cases} \quad (46)$$

A gyorsulásösszetevők abszolút értékei a (46) képletek, valamint a 9. ábra alapján számíthatók:

$$\begin{aligned} |\vec{a}_\tau| &= \varepsilon \rho \sin \varphi \\ |\vec{a}_v| &= \omega v = \omega^2 \rho \sin \varphi \end{aligned} \quad (47)$$

Innen azonnal adódik a gyorsulás abszolút értéke:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_v^2} = \rho \sin \varphi \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (48)$$

Az előzőekben levezetett képletek alapján a gyorsuláseloszlás következő sajátosságai emelhetők ki:

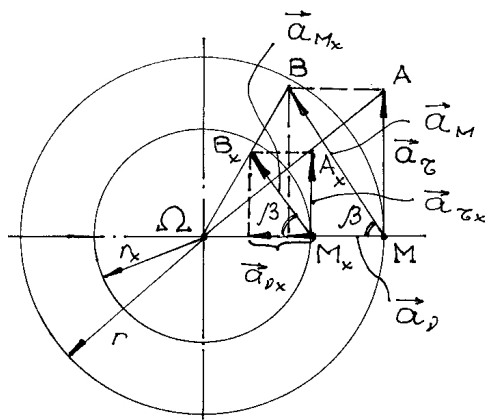
- akár a sebességeloszlás esetében, a gyorsulásvektor mindkét összetevője és ennek következményeként az eredő gyorsulás is egyenesen arányos a vizsgált testpont forgástengelytől mért távolságával ((47) és (48) képletek);
- a forgástengely pontjainak gyorsulása értelemszerűen nulla;
- ha zérus a szöggyorsulás értéke, akkor normálirányú a gyorsulásvektor – ebben az esetben egyenletes forgómozgásról beszélünk;
- bármely pontban azonos a normál, illetve az eredő gyorsulásvektor által bezárt β szög értéke hiszen (10. ábra)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_\tau}{a_v} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (49)$$

A 10. ábrán a tangenciális, illetve az eredő gyorsulás lineáris eloszlását a forgástengelytől való távolság függvényében az ΩAM illetve az ΩBM háromszög szemlélteti. Ha az M pontban ismert a tangenciális és a normálgyorsulás értéke, akkor könnyen megszerkeszthető az eredő gyorsulás. A tetszőleges r_x sugarú körpályát leíró M_x pont tangenciális gyorsulását az $M_x A_x$ szakasz, eredő gyorsulását pedig az $M_x B_x$ szakasz adja, melyek A_x illetve B_x végpontjait az M_x -ből AM-hez, illetve BM-hez húzott párhuzamosok adják.

B. Mátrixmódszer

2.2.2.3. Mozgástörvény mátrixokkal



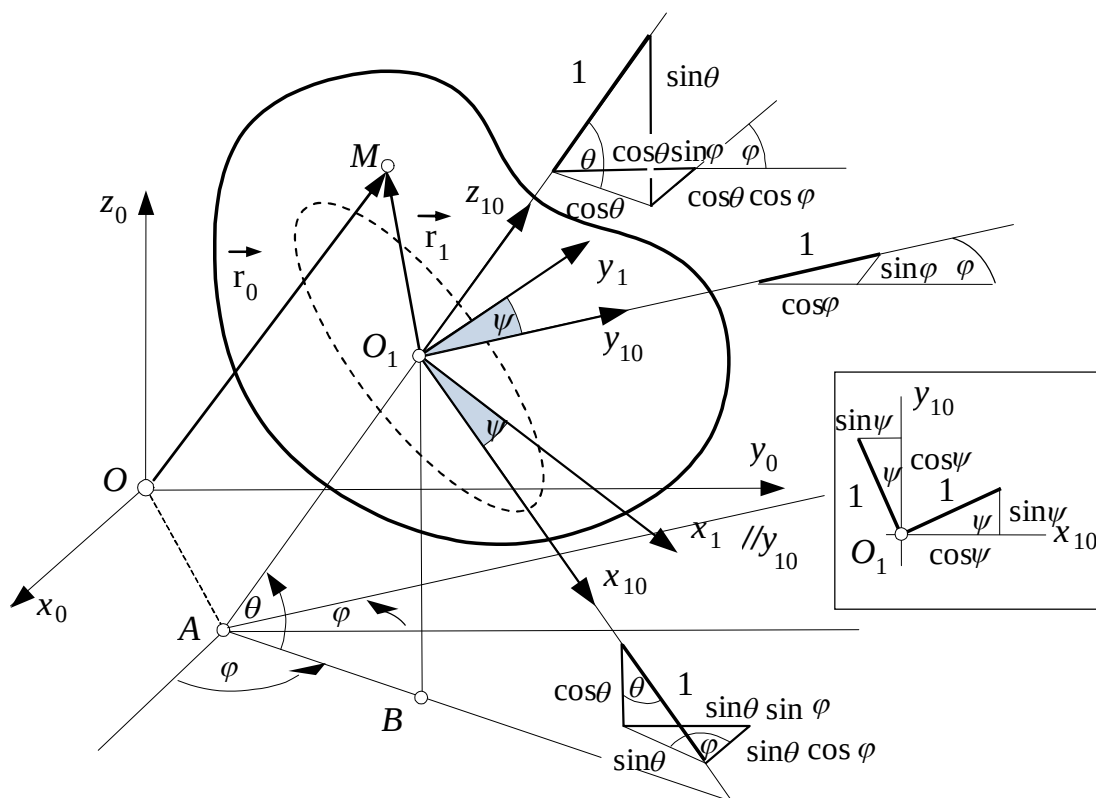
10. ábra.

A gyorsulás geometriai tulajdonságai

álló koordináta-rendszerben a test AO_1 forgástengelye az A pont koordinátaival, valamint a φ és a θ szögek segítségével adható meg. Az AB szakasz a forgástengely vetülete az x_0y_0 síkra. Nyilvánvaló, hogy az AO_1B háromszög síkja az x_0y_0 síkra merőleges. A forgómozgást végző merev testhez rögzített S_1 koordináta-rendszer a mozgás tanulmányozásának kezdeti pillanatában az $O_1x_{10}y_{10}z_{10}$ helyzetben található. Vegyük észre, hogy az első index a koordináta-rendszert, a második a $t=0$ időpillanatot azonosítja. Az S_1 koordináta-rendszer $O_1x_{10}y_{10}z_{10}$ helyzetét a továbbiakban szintén állónak tekintjük és a megkülönböztetés kedvéért S_{10} módon jelöljük. Adott t idő elteltével a mozgó rendszer az $O_1x_1y_1z_1$ helyzetbe kerül. Ezalatt az idő alatt a forgást végző test ψ szöggel fordul el az AO_1 forgástengely körül. A számítások egyszerűsítése céljából a mozgó rendszert lehetőleg úgy kell felvenni, hogy egyik tengelye a forgástengellyel egybeessen. Jelen esetben, összhangban a 11. ábrával, a forgástengely a $z_1 = z_{10}$ tengely. Mivel a ψ szög időfüggő, célszerű ezt $\psi = \psi(t)$ -nek jelölni. A választott koordináta-rendszerek tengelyeinek egységvektorai rendre $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0, \vec{i}_{10}, \vec{j}_{10}, \vec{k}_{10}$ illetve $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$. Felteszünk, hogy az S_{10} koordináta-rendszer x_{10} tengelye az AO_1B síkban fekszik. Következésképpen a $\vec{j}_1$ az AO_1B síkra merőleges, tehát az x_0y_0 síkkal párhuzamos, iránya pedig, sajátos helyzetéből adódóan, az x_0 tengely irányával a $90^\circ + \varphi$

A mátrixmódszer, akárcsak a haladó mozgás esetében, az álló helyzetű S_0 és a testhez kötött, vele együtt mozgó, S_1 koordináta-rendszer kapcsolatának ismeretére épül. A mozgást végző test geometriája ismert kell legyen a testhez kötött S_1 mozgó koordináta-rendszerben. Amennyiben az álló S_0 koordináta-rendszerben, minden időpillanatban, meghatározhatók bármely testpont koordinátái, akkor ismert az álló és a mozgó koordináta-rendszer közötti kapcsolat transzformációs mátrixa. A transzformációs mátrix elemei tehát az idő függvényeiként foghatók fel.

A helytálló tengely körüli forgómozgás esetén használt koordináta-rendszereket a 11. ábra szemlélteti. Az S_0



11. ábra.

A mátrixmódszer alkalmazott koordináta-rendszerei

szöveget zárja be. A 11. ábra alapján ellenőrizhető, hogy az S_{10} koordináta-rendszer $\vec{i}_{10}, \vec{j}_{10}, \vec{k}_{10}$ egységvektorainak oszlopmátrixai a $t = 0$ időpillanatban a következők:

$$\underline{\mathbf{i}}_{10} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{j}}_{10} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{k}}_{10} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \end{bmatrix}; \quad (50)$$

Megjegyezzük, hogy két egységvektor ismeretében a harmadik analitikus úton is számítható az $\vec{i}_0 \times \vec{j}_0 = \vec{k}_0$ valamint az ezzel ekvivalens képletekből. Az O_1 origó $(x_0^{(O_1)}, y_0^{(O_1)}, z_0^{(O_1)})$ koordinátái S_0 -ban ismertnek tekintettek. Jelölje rendre $\underline{\mathbf{r}}_0$ és $\underline{\mathbf{r}}_1$ a merev test valamely M pontja az S_0 illetve S_1 -beli helyvektorainak megfelelő oszlopmátrixait. Belátható, hogy az $\underline{\mathbf{r}}_1$ oszlop időfüggetlen, mivel S_1 a merev

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

testtel együtt mozog. Mivel az S_1 a t_0 kezdeti időpillanatban elfoglalt S_{10} helyzetéhez viszonyítva elmozdul, így az M pont S_{10} -ra értelmezett $\underline{r}_{10}$ oszlopa időfüggő; belátható, hogy t_0 pillanatban $\underline{r}_{10} = \underline{r}_1$.

A továbbiakban a 11 ábra, a homogén koordináták értelmezése, valamint az egységvektorok között fennálló (50) képlet felhasználásával belátható, hogy bármely időpillanatban teljesül az alábbi transzformációs egyenlet:

$$\underline{r}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \cos\varphi & -\sin\varphi & \cos\theta \cos\varphi & x_0^{(O_1)} \\ \sin\theta \sin\varphi & \cos\varphi & \cos\theta \sin\varphi & y_0^{(O_1)} \\ -\cos\theta & 0 & \sin\theta & z_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{0,10} \underline{r}_{10} \quad (51)$$

Az S_1 mozgórendszer általános helyzetét S_{10} -hoz a $\psi(t)$ paraméterrel meghatározott $z_{10} = z_1$ tengely körüli forgatás adja meg. Következésképp, $\underline{r}_{10}$ és $\underline{r}_1$ között a kapcsolat az alábbi módon írható fel:

$$\underline{r}_{10} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{10,1} \underline{r}_1 \quad (52)$$

Behelyettesítve az (52) egyenletet az (51)-be, az S_1 -ből az S_0 -ba való átmenet mátrixa az előbbieken felírt két transzformációs mátrix szorzata lesz:

$$\underline{r}_0 = \mathbf{M}_{0,10} \mathbf{M}_{10,1} \underline{r}_1 \quad (53)$$

Felhívjuk arra a körülményre a figyelmet, hogy a fenti egyenletben egyedül $\mathbf{M}_{10,1}$ függ a $\psi(t)$ -n keresztül az időtől.

2.2.2.4. A sebesség mátrixos alakja

Az (53) mátrixegyenlet idő szerinti deriváltja a sebességvektor összetevőit, míg az idő szerint második derivált a gyorsulásvektor összetevőit adja meg az álló S_0 rendszerben. Következésképp

$$\underline{v}_0 = \dot{\underline{r}}_0 = \mathbf{M}_{0,10} \frac{d}{dt} \mathbf{M}_{10,1} \underline{r}_1 = \mathbf{M}_{0,10} \frac{d\psi}{dt} \begin{bmatrix} -\sin\psi & -\cos\psi & 0 & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{r}_1 \quad (54)$$

Az (54) egyenlet lehetővé teszi a mozgást végző merev test geometriájának ismeretében – ezt természetesen az S_1 koordináta-rendszerben ismerjük – a

sebességvektor komponenseinek azonnali számítását az S_0 állórendszerben, feltéve hogy ismert a $d\psi/dt$ pillanatnyi szögsebesség.

A továbbiakban az ugyancsak helytálló S_{10} koordináta-rendszerben számítjuk a sebességvektor összetevőit, azaz a $\underline{\mathbf{v}}_{10}$ oszlopmátrixot. A számítás elvégzésére szükség van a vektort S_0 -ból S_{10} -ba transzformáló $\underline{\mathbf{L}}_{10,0}$ mátrixra. Mint ismeretes, a vektorösszetevőket transzformáló homogén mátrixot úgy állítjuk elő, hogy a megfelelő koordinátatranszformáció homogén mátrixának forgatórészét egy nulla sorral és egy nulla oszloppal egészítjük ki. A $\underline{\mathbf{v}}_{10} = \underline{\mathbf{L}}_{10,0} \underline{\mathbf{v}}_0$ alkalmas átalakításával és az (52) kihasználásával az átalakítás, részletesen, a következő számításokat jelenti:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}}_{10} &= \underline{\mathbf{r}}_{10,0} = \underline{\mathbf{L}}_{10,0} \underline{\mathbf{v}}_0 = \underline{\mathbf{L}}_{10,0} \underline{\mathbf{M}}_{0,10} \underbrace{\frac{d\psi}{dt} \begin{bmatrix} -\sin\psi & -\cos\psi & 0 & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{r}}_1}_{\underline{\mathbf{v}}_0} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\psi}{dt} \begin{bmatrix} -\sin\psi & -\cos\psi & 0 & 0 \\ \cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\underline{\mathbf{M}}_{1,10} \underline{\mathbf{M}}_{10,1}}_{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\mathbf{r}}_1 \end{aligned} \quad (55)$$

Figyelembe kell venni, hogy $\underline{\mathbf{M}}_{10,1} \underline{\mathbf{r}}_1 = \underline{\mathbf{r}}_{10}$ a vizsgált testpont homogén koordinátáinak felírása S_{10} -ban. A számítások elvégzése után a keresett sebességoszlop a következő alakot ölti:

$$\underline{\mathbf{v}}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d\psi}{dt} & 0 & 0 \\ \frac{d\psi}{dt} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \\ z_{10} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Az (56) reláció egyenértékű a (43)-mal. Az a különbség, hogy az (56) az S_{10} koordináta-rendszerben van felírva. Ebben világosan látszik a szögsebesség-vektor ferdeszimmetrikus mátrixa, ami a gyakorlati számításokban sokkal előnyösebb (54) relációból azonban nem tűnik ki! Az (54) összefüggés elsősorban azért előnyös, mert a sebességvektor-össztevőket a merev test saját rendszeréből vett helykoordinátákkal adja meg az álló S_0 rendszerben. Mivel a mozgás ismert, egyszerű

transzformáció alkalmazásával bármely, mondjuk az S_i , koordináta-rendszerben felírható a $\underline{v}_i$ sebességvektor a vonatkozó $\mathbf{M}_{i0}$ transzformációs mátrix, illetve az ennek megfelelő $\mathbf{L}_{i0}$ ismeretében:

$$\underline{v}_i = \mathbf{L}_{i0} \underline{v}_0 \quad (57)$$

2.2.2.5. A gyorsulások számítása mátrixokkal

A gyorsulás meghatározása az (54) egyenlet idő szerinti deriválásával történik:

$$\underline{a}_0 = \frac{d}{dt} \underline{v}_0 = \mathbf{M}_{0,10} \underbrace{\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{M}_{10,1} \underline{r}_1}_{\underline{a}_{10}} = \mathbf{M}_{0,10} \left\{ \frac{d^2 \psi}{dt^2} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \frac{d\psi}{dt} \begin{bmatrix} -\cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d\psi}{dt} \right\} \underline{r}_1$$

Nem nehéz belátni, hogy kapcsos zárójelben szereplő mátrixok közül az első a tangenciális-, (ez ugyanis a szöggyorsulással arányos) a második pedig a normálgyorsulás értékét adja meg (ez ugyanis a szögsebesség négyzetével arányos). Bár a konkrét számítások végrehajtása során a fenti alak, hasonlóan a sebességmező esetéhez, előnyösebb, az alábbiakban a vektoriális alakkal való összehasonlítás kedvéért külön is felírjuk az $\underline{a}_1$ gyorsulást. A koordinátatranszformáció alapján kijelenthető, hogy a gyorsulások tekintetében fennáll az $\underline{a}_1 = \mathbf{M}_{1,10} \underline{a}_{10}$ összefüggés. Ahhoz, hogy ez megjelenjen a gyorsulásmező képletében, további átalakításokra van szükség:

$$\underline{a}_0 = \mathbf{M}_{0,10} \{ \dots \} \underline{r}_1 = \mathbf{M}_{0,10} \underbrace{\mathbf{M}_{10,1} \mathbf{M}_{1,10}}_{\mathbf{E}} \{ \dots \} \underline{r}_1 = \mathbf{M}_{0,10} \mathbf{M}_{10,1} \underbrace{\mathbf{M}_{1,10} \{ \dots \} \underline{r}_1}_{\underline{a}_1}$$

A fenti műveletsorban szereplő első két szorzótényező adta részeredmény nem más mint $\mathbf{M}_{0,10} \mathbf{M}_{10,1} = \mathbf{M}_{01}$, vagyis az S_1 -ből az S_0 -ba való transzformáció mátrixa. Világos, hogy

$$\underline{a}_0 = \mathbf{M}_{01} \underbrace{\mathbf{M}_{1,10} \{ \dots \} \underline{r}_1}_{\underline{a}_1} = \mathbf{M}_{01} \underline{a}_1$$

és ezzel a gyorsulás oszlopmátrixa S_1 -ben az

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{M}_{1,10} \{\dots\} \underline{\mathbf{r}}_1$$

műveletsorral számítható, ami, figyelembe véve az első kifejezést, a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}_1 &= \left\{ \frac{d^2 \psi}{dt^2} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \right. \\ &+ \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left. \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \frac{d^2 \psi}{dt^2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

vagy a kijelölt műveletek elvégzése után:

$$\underline{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{d^2 \psi}{dt^2} & 0 & 0 \\ \frac{d^2 \psi}{dt^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Az (59) képlet első tagja a tangenciális gyorsulás, a második pedig a normálgyorsulás. Könnyen belátható, a gyorsulás $\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$ vektoriális kifejezését tekintve, hogy a koordináta-transzformáció deriválásával levezetett képlet úgy is megkapható, hogy a vektorszorzatok felírásakor az első szorzótényező tekintetében értelemszerűen a vonatkozó ferdeszimmetrikus mátrixot, a második tekintetében pedig a vonatkozó oszlopmátrixot használjuk. A végeredmény azonosságának belátása a harmadrendű mátrixok kiegészítését igényli annak érdekében, hogy negyedrendű mátrixokat kapjunk: a jobboldalon egy zérus oszlop, az utolsó sor után pedig egy zérus sor a szükséges kiegészítés. Az oszlopmátrixok esetén pedig homogén koordinátákra érdemes áttérni az utolsó elem alkalmas megválasztásával.

A $d^2\psi/dt^2$ kifejezés az $\vec{\varepsilon}$ szöggyorsulásvektor abszolút értéke.

A normálgyorsulás kifejezésében szereplő négyzetes mátrix az $\tilde{\omega}$ ferdeszimmetrikus mátrix négyzetének hasonló kiegészítettje.

A fentebb mondottak alapján világosan látszik az analógia a vektormódszer és a mátrixmódszer között. A vektormódszer egyszerűbb kifejezéseket eredményez, viszont ügyelni kell arra, hogy a kifejezésben szereplő minden vektor ugyanabban a koordináta-rendszerben legyen felírva. A mátrixmódszer első látásra bonyolultabbnak tűnik, de használata lényegesen egyszerűbb, amikor számolni kell, maguk a számítások pedig közvetlenül kódolhatók, ha programot kell írni.

2.3. Összetett mozgások

2.3.1. A csavarmozgás

A csavarmozgás az egyenes vonalú haladó mozgás és a helytálló tengely körüli forgás kombinációjából hozható létre. A csavarmozgást végző merev test adott helyzetű tengely mentén haladó mozgást végez, miközben e tengely körül forog. Ebben az esetben a forgástengelyre illeszkedő testpontok kizárólag haladó mozgást végeznek, míg a tengelyen kívül eső testpontok mozgása az egyenes vonalú transláció, és a forgástengely körüli rotáció szuperponálásának eredménye. A csavarmozgás úgy is felfogható, hogy a forgómozgást végző test tengelye saját maga mentén mozdul el – ez a transláció –, miközben természetesen magával viszi a pontjait is. A transláció, illetve az elfordulás között mindig létezik összefüggés. Ha skaláris alakban tekintjük a mozgástörvényt, akkor a translációra nézve az $s = s(t)$, az elfordulásra nézve pedig a $\varphi = \varphi(t)$ alakot tételezzük fel. További feltevés, hogy a $\varphi = \varphi(t)$ kapcsolat kölcsönösen egyértelmű (bijektív), következésképp létezik a $t = \varphi^{-1}(\varphi)$ alakú inverzfüggvény. Visszahelyettesítve ezt a képletet a tengelymentén mért ívkoordinátát adó skalártörvénybe, megkapjuk az ív- és szögkoordináta közötti kapcsolatot:

$$s = s[\varphi^{-1}(\varphi)] \quad (60)$$

A csavarmozgásnak számos gyakorlati alkalmazása ismert. Ezek típusától függően más és más lehet a (60) összefüggés alakja. A leggyakrabban a lineáris kapcsolat fordul elő: $s(\varphi) = p\varphi$ – csavarkötések, illetve csavarkapcsok esetében. Könnyen belátható, hogy a $\varphi = 2\pi$ teljes körforduláshoz $s = 2\pi p$ tengelyirányú elmozdulás tartozik. Ez valójában a csavar menetemelkedése. Az is kiolvasható a képletből, hogy a p arányossági tényező nem más, mint a $\varphi = 1\text{rad}$ szögelforduláshoz tartozó elmozdulás, melyet a csavar paraméterének neveznek, és az elméleti modellek előszeretettel használják [19]. Ha az idő szerint deriváljuk ezt a

lineáris kapcsolatot, akkor a szögsebesség és a tengelymenti sebesség között kapunk összefüggést:

$$\frac{d}{dt}(s) = \rho \frac{d}{dt}(\varphi) \Leftrightarrow v = \rho \omega \quad (61)$$

A másik nagy alkalmazáscsoport a térbeli büttyös mechanizmusokat foglalja magába (12. ábra). Ezek célja az állandó szögsebességű forgómozgás változó sebességű lineáris elmozdulássá alakítása. Ebben az esetben a mechanizmus mozgásátviteli törvénye geometriai vagy kinematikai jellegű lehet. Ha a mozgásátviteli törvény geometriai, akkor adott értékű szögelfordulásra a vezetett tagot az előírt tengelymenti helyzetbe kell, hogy hozza, a szögelfordulás értékének megfelelő elmozdulással. Amennyiben a mozgástörvény kinematikai jellegű, akkor – a vezető tag állandó szögsebessége mellett – a vezetett tag adott időpillanatban a mozgástörvénynek megfelelő sebességgel kell mozogjon. Ezekkel a problémákkal a mechanizmusok tudománya foglalkozik részletesebben.

Ha az első, azaz a geometriai célkitűzést tekintjük, akókor világos, hogy az $s(\varphi) = f(\varphi)$ függvény nem feltétlenül lineáris, és ebben az esetben a tengelyirányú sebesség:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{df}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{df}{d\varphi} \omega \quad (62)$$

Világos, a (61) és (62) összefüggések alapján, hogy $df/d\varphi$ a pillanatnyi csavarparaméter.

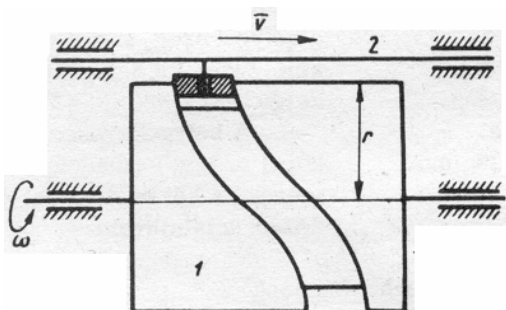
Amennyiben a hajtás kinematikai, úgy a mozgástörvény alakja $v(t) = p(t)\omega$, ha állandó a szögsebesség. Ebben az esetben az úttörvény integrálással kapható:

$$s(t) = \omega \int_{t_0}^t p(z) dz \quad (63)$$

A következőkben a csavarmozgást végző merev test a sebesség- illetve gyorsuláseloszlását mind vektor-, mind pedig mátrixmódszerrel áttekintjük.

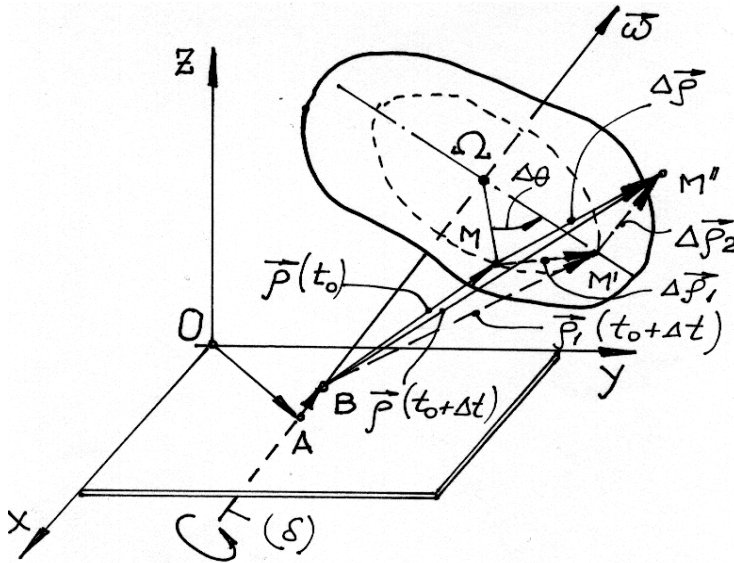
A. Vektormódszer

A csavarmozgás jellemzőit a 13. ábra szemlélteti. A helytálló Oxyz koordináta-rendszer xy síkját a (δ) csavartengely az A pontban dőfi. A csavartengely egyszerre a forgástengely és az egyenes vonalú haladó mozgás iránya is egyben. A tekintett merev test M pontjának helyzetét, a t_0 időpillanatban, a (δ) tengely B



12. ábra.

Térbeli büttyös mechanizmus



13. ábra.

A csavarmozgás vektormodellje

rögzített pontjából kiinduló $\vec{r}(t_0)$ vektor határozza meg. Δt_0 idő eltelte után az M pont M'' helyzetbe kerül. Ennek a pontnak $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$ a B ponthoz viszonyított helyvektora. A helyvektor $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$ alakú növekménye két összetevőre bontható:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \Delta \vec{r}_1 + \Delta \vec{r}_2 \quad (64)$$

A $\Delta \vec{r}_1$ összetevő kezdőpontja a $\vec{r}(t_0)$ helyvektor csúcsa egyébként pedig a csavartengelyre merőleges síkban fekszik. A $\Delta \vec{r}_2$ összetevő kezdőpontja a $\Delta \vec{r}_1$ vektor végpontja, és párhuzamos a csavartengely irányával. Ez a csavartengelyre merőleges és azzal párhuzamos összetevőre történő felbontás valójában a csavarmozgás helytálló tengely körüli forgásra és a csavartengellyel párhuzamos egyenesvonalú haladómozgásra történő felbontása. Ha azonosan zérus (minden időpillanatban zérus) a helytálló tengely körüli forgást leíró $\Delta \vec{r}_1$ összetevő, akkor az M pont $\Delta \vec{r}_2$ elemi elmozdulása haladó mozgáshoz tartozik, maga a csavarmozgás pedig haladó mozgássá egyszerűsödik. Ha pedig a csavartengely-irányú haladó mozgást adó $\Delta \vec{r}_2$ elemi elmozdulás azonosan zérus, akkor a vizsgált test forgómozgást végez a (δ) tengely körül.

A sebességvektor komponenseit a 14. ábra szemlélteti. A csavarmozgás sebességének tengelyirányú, valamint tangenciális összetevője az úgynevezett Σ hordozó hengerfelület érintő síkját feszíti ki. A tekintett M testpont csavartengelyhez viszonyított távolsága nem változik a csavarmozgás során, így az $M\Omega$ hengersugár állandó marad. A 14. ábrán használt jelölésekkel

$$|\vec{\omega} \times \vec{\rho}| = \omega(\rho \sin \varphi) = \omega r \quad (67)$$

Következésképpen az M pont (Γ) pályája a (Σ) hengerfelületen fekszik, és, általános esetben, egy változó paraméterű hengeres csavarvonal. A pillanatnyi sebesség mindig a csavarvonal érintője. A tengelyirányú és tangenciális irányú összetevők hányadosa meghatározza a sebességvektor dőlésszögét a csavartengelyre merőleges síkra:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_{\delta}}{|\vec{\omega} \times \vec{\rho}|} = \frac{p(t)\omega}{\omega r} = \frac{p(t)}{r} \quad (68)$$

Vegyük észre, hogy adott időpillanatban a dőlésszög tangensének eloszlása hiperbolikusan csökken a csavartengelytől való r távolsággal. Ennek megfelelően, a sebességirány és a csavartengely szöge (mivel ez utóbbi a dőlésszög pótszöge) hiperbolikusan növekvő.

A tangenciális sebességkomponens a csavartengelytől mért távolsággal arányosan növekszik, ugyanúgy mint a forgómozgás esetében.

A tengelyirányú sebességkomponens, egy adott időpillanatban, a merev test minden pontjában azonos.

2.3.1.2. A gyorsuláseloszlás

Legyen $\vec{e}_{\delta}$ a (δ) csavartengely irány-egységvektora. $\vec{e}_{\delta}$ időben állandó, mivel a csavartengely helyzete rögzített. Figyelembe véve ezt, a (65) alatti sebesség a következőképpen írható fel:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \frac{p(t)}{\omega} \vec{e}_{\delta} \quad (69)$$

A gyorsulás a (69) reláció idő szerinti deriválásával határozható meg:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + \frac{d}{dt}\left(\frac{p(t)}{\omega}\right) \vec{e}_{\delta} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) + \frac{\dot{p}(t)\omega - p(t)\varepsilon}{\omega^2} \vec{e}_{\delta} \quad (70)$$

Összevetve a (70) képletet a forgómozgás gyorsuláseloszlásával, (44)-es és (46)-os képletek, világosan kitűnik, hogy a csavarmozgás gyorsulásvektora három, egymásra merőleges összetevőre bontható:

- a forgásból származó tangenciális komponensre;

- a forgásból származó normálkomponensre;
- a haladómozgásból származó tengelyirányú komponensre.

Ezek az alábbi módon különíthetők el egymástól:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_r + \vec{a}_v + \vec{a}_\delta \\ \vec{a}_r &= \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} \\ \vec{a}_v &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\vec{\rho} = \vec{\omega} \times \vec{v} \\ \vec{a}_\delta &= \frac{\dot{p}(t)\omega - p(t)\varepsilon}{\omega^2} \vec{e}_\delta\end{aligned}\quad (71)$$

A három, egymásra merőleges összetevő iránya azt tükrözi, hogy a csavarmozgás forgómozgásra, illetve ennek tengelye mentén történő haladó mozgásra választható szét. Így a gyorsulásvektor első lépésben a csavartengellyel párhuzamos ($\vec{a}_\delta$) és a csavartengelyre merőleges síkba eső ($\vec{a}_v + \vec{a}_r$) összetevőkre bontható fel. Második lépésben a csavartengelyre merőleges síkba eső vetület egy, a csavartengelyt metsző ($\vec{a}_v$) és egy erre merőleges ($\vec{a}_r$) összetevőre bontjuk fel. Vegyük észre, hogy az $\vec{a}_v$ és $\vec{a}_r$ komponensek nem azonosak a gyorsulás normál-, illetve tangenciális összetevőivel, hiszen a gyorsulásvektor tangenciális összetevője a pályagörbe érintője, az erre merőleges komponens – a normálgyorsulás – viszont a pálya görbületi középpontja felé irányított, a két komponens pedig a pályagörbe (most a csavarvonal) simulósíkjában fekszik.

A pályagörbe simulósíkjába illeszkedő tangenciális, illetve normálkomponenst úgy határozhatjuk meg a legkönnyebben, hogy kiszámítjuk a pálya érintőirányú és normálirányú egységvektorait, ezekre bontjuk fel a (71) képlet által megadott összetevőket, majd az előbbi egységvektorok szerint összegezzük. A számítást az alábbiak ismertetik.

Feltételezzük, hogy az adott t időpillanatban ismert a mozgást végző merev test helyzete a helytálló $Oxyz$ koordináta-rendszerben, vagyis ismert a $\vec{\rho}$ vektor. A 13. ábra jelöléseivel $\vec{\rho}(t) = (x - x_B)\vec{i} + (y - y_B)\vec{j} + (z - z_B)\vec{k}$, ahol az x, y, z koordináták az idő függvényei változnak, de a B pont a csavartengely rögzített pontja. Ezenkívül ismert az adott pillanatban az axiális sebesség, a pillanatnyi $p(t)$ csavarparaméter, a (δ) csavartengely $\vec{e}_\delta$ egységvektora valamint az $\omega = \vec{\omega} \cdot \vec{e}_\delta$ skalárszorzat, ami nem más, mint a pillanatnyi skaláris szögsebesség. A pillanatnyi sebességvektor (68) alapján:

2. Fejezet. Anyagi testek kinematikája

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-x_B \\ y-y_B \\ z-z_B \end{bmatrix} + p(t) \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\omega_z(y-y_B) + \omega_y(z-z_B) + p(t)\omega_x \\ -\omega_x(z-z_B) + \omega_z(x-x_B) + p(t)\omega_y \\ -\omega_y(x-x_B) + \omega_x(y-y_B) + p(t)\omega_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (72)$$

A (72) sebességkomponensekkel a pályagörbe érintő-egységvektora a következő módon számítható:

$$\vec{\tau} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \vec{i} + \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \vec{j} + \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \vec{k} \quad (73)$$

A tangenciális gyorsulás meghatározásakor, azaz a (71) képlet által megadott komponensek $\vec{\tau}$ irányú vetülete számításakor, figyelembe kell venni, hogy adott vektor és egységvektor skaláris szorzata nem más, mint az adott vektor egységvektor irányú koordinátája. Ezt figyelembe véve, a (71) és (73) képletekből megkapjuk a tangenciális gyorsulásvektort:

$$\vec{a}_\tau^* = \left[(\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) \cdot \vec{\tau} + (\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{\tau} + \frac{\dot{p}(t)\omega - p(t)\varepsilon}{\omega^2} \vec{e}_\delta \cdot \vec{\tau} \right] \vec{\tau} \quad (74)$$

Vegyük észre, hogy a (74) kifejezésben szereplő $(\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot \vec{\tau}$ vegyesszorzat nulla, mivel a sebességvektor a pályagörbe érintője. Ezzel

$$\vec{a}_\tau^* = \left[(\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) \cdot \vec{\tau} + \frac{\dot{p}(t)\omega - p(t)\varepsilon}{\omega^2} \vec{e}_\delta \cdot \vec{\tau} \right] \vec{\tau} \quad (75)$$

a tangenciális gyorsulás. Itt a szögletes zárójelben álló skalár pedig nyilvánvalóan a pályagyorsulás.

A normálgyorsulás abszolút értékét annak figyelembevételével számítjuk, hogy a teljes gyorsulás abszolút értéke felbontásától független és így kétféleképpen írható fel:

$$(\vec{a}_\tau^*)^2 + (\vec{a}_\nu^*)^2 = a_\tau^2 + a_\nu^2 + a_\delta^2 \quad (76)$$

Ha a (76) összefüggésbe helyettesítjük a (71) és (75) kifejezéseket, és a két oldalt felcseréljük, akkor kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
 & (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) + \left(\frac{\dot{p}(t)\omega - p(t)\varepsilon}{\omega^2} \right)^2 \vec{e}_\delta \cdot \vec{e}_\delta = \\
 & = \left[(\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) \cdot \vec{\tau} + \frac{\dot{p}(t)\omega - p(t)\varepsilon}{\omega^2} \vec{e}_\delta \cdot \vec{\tau} \right]^2 + (\vec{a}_v^*)^2
 \end{aligned}$$

A skalárszorzat tulajdonságait figyelembe véve, a fenti kifejezés a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned}
 & (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) + (\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) + \left(\frac{\dot{p}(t)\omega - p(t)\varepsilon}{\omega^2} \right)^2 = \\
 & = \left[(\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) + \frac{\dot{p}(t)\omega - p(t)\varepsilon}{\omega^2} \vec{e}_\delta \right] \left[(\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) + \frac{\dot{p}(t)\omega - p(t)\varepsilon}{\omega^2} \vec{e}_\delta \right] \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{\tau} + (\vec{a}_v^*)^2 = \\
 & = (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) \cdot (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) + \left(\frac{\dot{p}(t)\omega - p(t)\varepsilon}{\omega^2} \right)^2 + 2 \frac{\dot{p}(t)\omega - p(t)\varepsilon}{\omega^2} (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) \cdot \vec{e}_\delta + (\vec{a}_v^*)^2
 \end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy az $(\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) \cdot \vec{e}_\delta$ vegyesszorzat nulla, mivel a szöggyorsulásvektor és a csavartengely egységvektora kollineárisak. A kifejezés egyszerűsítése után adódik, hogy

$$\vec{a}_v^* \cdot \vec{a}_v^* = (\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{a}_v \cdot \vec{a}_v \quad (77)$$

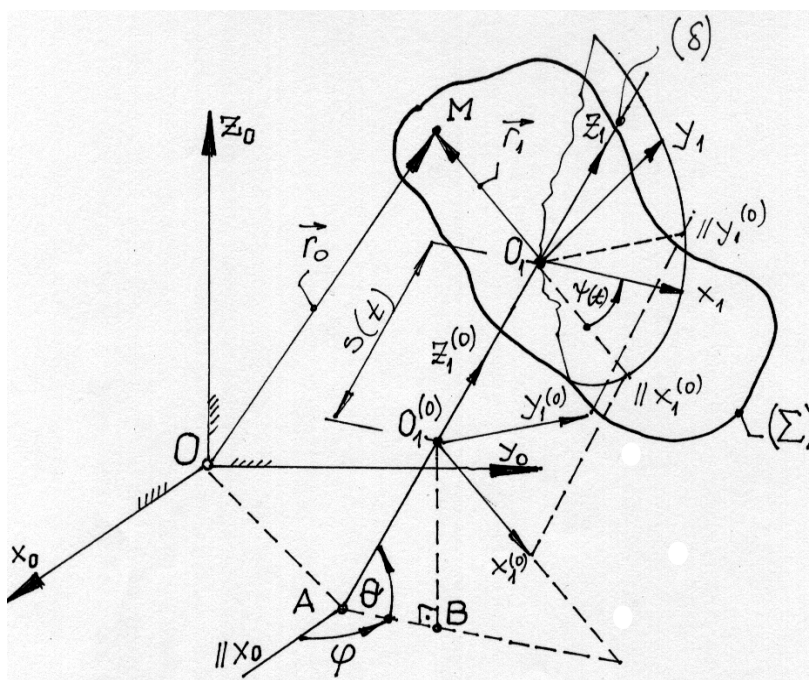
vagyis $|\vec{a}_v^*| = |\vec{a}_v|$. Másrészt, a 14. ábrán megfigyelhető, hogy a sebességvektor tangenciális és tengelyirányú összetevője egy olyan síkot feszít ki, amely a forgástengellyel párhuzamos. A gyorsulás normálkomponense pedig erre a síkra merőleges. Innen egyértelmű, hogy a csavarmozgás során keletkező normálgyorsulás azonos a tangenciális sebesség deriválásából keletkezett normálkomponenssel, vagyis *a tengelyirányú haladás semmilyen sem befolyásolja a normálgyorsulás-összetevő irányát és nagyságát*. Következtetésképpen fennáll, hogy:

$$\begin{cases} \vec{a}_v^* = \vec{a}_v \\ \vec{a}_\tau^* = \sqrt{a_\tau^2 + a_\delta^2} \vec{\tau} \end{cases} \quad (78)$$

B. Mátrixmódszer

2.3.1.3. A csavarmozgás mátrixmodellje

A mátrixmódszer alkalmazása, hasonlóan a helytálló tengely körüli forgás esetéhez, feltételezi a helytálló S_0 , a merev testhez rögzített és ezzel együtt mozgó S_1 , továbbá az S_{10} , koordináta-rendszerek, valamint a közöttük fennálló transzformációs mátrixok ismeretét. Az említett koordináta-rendszerek egymáshoz viszonyí-



15. ábra .

A csavarmozgás mátrixmodellje

tott helyzete a 15. ábrán látható. A matematikai modell a forgómozgáskor felhasznált modellre épül, amelyet a tengelyirányú haladó mozgás egészít ki. Az S_1 koordináta-rendszer $t=0$ időpontnak megfelelő helyzetében azaz az S_{10} koordináta-rendszerben az (50) egyenlet adja meg az egységvektorok komponenseit. Az S_{10} kezdeti helyzete és az S_0 közötti kapcsolatot pedig a (51) mátrixegyenletben szereplő $\mathbf{M}_{0,10}$ mátrix írja le.

A csavarmozgásra jellemző (δ) tengely körüli elfordulást a $\psi(t)$ szög határozza meg. Ez egyben az S_{10} és S_1 koordináta-rendszerek közötti forgatómátrix paramétere.

A tengelymenti elmozdulást az $s(t)$ ívkoordináta adja meg.

Ez a függvény, büttyös mechanizmusok esetén a ψ szögelforduláson keresztül függ az időtől.

$$s(t) = f(\psi(t)) \quad (79)$$

A tengelyirányú sebesség a (79) idő szerinti deriváltja. Ezt a (62) képlettel tudjuk számítani.

Az $\mathbf{M}_{10,1}$ transzformációs mátrix kiegészül a z_1 tengely irányában végzett $s(t)$ mértékű elmozdulással, így alakja a következő lesz:

$$\mathbf{M}_{10,1} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

Ezzel a merev test tetszőleges M pontjának koordinátái az S_0 álló rendszerben a következők:

$$\underline{\mathbf{r}}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{0,10} \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{0,10} \mathbf{M}_{10,1} \underline{\mathbf{r}}_1 \quad (81)$$

2.3.1.4. A sebesség mátrixos alakja

A (81) reláció idő szerinti deriválásával az $\underline{\mathbf{r}}_1$ oszlop mátrixszal megadott tetszőleges testpont sebességének komponenseit lehet meghatározni az S_0 rendszerben:

$$\underline{\mathbf{v}}_0 = \dot{\underline{\mathbf{r}}}_0 = \mathbf{M}_{0,10} \frac{d}{dt} \mathbf{M}_{10,1} \underline{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{M}_{0,10} \frac{d\psi}{dt} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{df}{d\psi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{r}}_1 \quad (82)$$

A (82) relációban szereplő $\mathbf{M}_{10,1}$ mátrix deriváltja két részre bontható:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{M}_{10,1} &= \frac{d\psi}{dt} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{df}{d\psi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{d\psi}{dt} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{df}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R} + \mathbf{T} \end{aligned}$$

2. Fejezet. Anyagi testek kinematikája

Jól látható, hogy az $\mathbf{R}$ mátrix a forgásból származó sebességkomponenst, a $\mathbf{T}$ mátrix pedig a tengelymenti haladásból eredőt adja. Az $\mathbf{R}$ mátrix azonos a forgómozgásra levezetett, (53) relációban szereplő mátrixsal. A sebesség oszlop-mátrixa, a felbontás alapján a következő lesz:

$$\underline{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{M}_{0,10} \mathbf{R} \underline{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{M}_{0,10} \mathbf{T} \underline{\mathbf{r}}_1 \quad (83)$$

Ha a (83) egyenletet balról az $\mathbf{M}_{10,0}$ -val, az $\mathbf{M}_{0,10}$ inverzával szorozzuk, akkor a sebesség oszlopa az S_{10} -ban adódik. Vegyük észre, hogy a $\mathbf{T}$ mátrix és az $\underline{\mathbf{r}}_1$ oszlop szorzata nem más, mint a $\mathbf{T}$ utolsó oszlopa. Az elmondottak alapján, a számítás a következő:

$$\underline{\mathbf{v}}_{10} = \mathbf{M}_{10,0} \underline{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{M}_{10,0} \mathbf{M}_{0,10} \mathbf{R} \underline{\mathbf{r}}_1 + \mathbf{M}_{10,0} \mathbf{M}_{0,10} \mathbf{T} \underline{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{R} \underline{\mathbf{r}}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{df}{d\psi} \frac{d\psi}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (84)$$

Világosan látszik, hogy a csavarmozgás sebességeloszlása nem más, mint a forgómozgás sebességeloszlásának kiegészítése a csavartengely mentén való haladó mozgás sebességével. Ha a (84) egyenletben, az $\underline{\mathbf{r}}_1$ oszlopot balról az $\mathbf{E} = \mathbf{M}_{1,10} \mathbf{M}_{10,1}$ alakban felírt egységmátrixszal szorozzuk, és megfigyeljük, hogy $\mathbf{M}_{10,1} \underline{\mathbf{r}}_1 = \underline{\mathbf{r}}_{10}$, a vektormódszerrel levezetett képletek mátrixos alakjára találunk:

$$\underline{\mathbf{v}}_{10} = \mathbf{R} \overbrace{\mathbf{M}_{1,10} \mathbf{M}_{10,1}}^{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{r}}_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{df}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{10} \underline{\mathbf{r}}_{10} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{df}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (85)$$

Vegyük észre, hogy a (85) képletben szereplő $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}$ ferdeszimmetrikus mátrix az (55) mátrix-egyenletben szereplővel azonos. A haladó sebesség oszlop-mátrixa az S_{10} helytálló, valamint az S_1 mozgó rendszer közös Z_1 tengelyének irányában való haladás sebességét fejezi ki, mivel csak a harmadik eleme nullától különböző.

2.3.1.5. A gyorsulás mátrixos alakja

A gyorsulás a (83) sebességegyenlet idő szerinti deriválásával határozható meg:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{a}}_0 = \underline{\ddot{\mathbf{r}}}_0 &= \mathbf{M}_{0,10} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{M}_{10,1} \underline{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{M}_{0,10} \frac{d}{dt} (\mathbf{R} + \mathbf{T}) \underline{\mathbf{r}}_1 = \\
 &= \mathbf{M}_{0,10} \frac{d^2 \psi}{dt^2} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{r}}_1 + \\
 &+ \mathbf{M}_{0,10} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \begin{bmatrix} -\cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{r}}_1 + \\
 &+ \mathbf{M}_{0,10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d^2 f}{d\psi^2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{df}{d\psi} \frac{d^2 \psi}{dt^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{r}}_1 \quad (86)
 \end{aligned}$$

A (86) egyenlet explicit módon tartalmazza a gyorsulás $\underline{\mathbf{a}}_\tau$, $\underline{\mathbf{a}}_\nu$ illetve $\underline{\mathbf{a}}_\delta$ összetevőinek homogén vektorkoordinátáit az S_0 helyálló koordináta-rendszerben:

$$\underline{\mathbf{a}}_\tau = \mathbf{M}_{0,10} \frac{d^2 \psi}{dt^2} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{r}}_1 \quad (86a.)$$

$$\underline{\mathbf{a}}_\nu = \mathbf{M}_{0,10} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \begin{bmatrix} -\cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{r}}_1 \quad (86b.)$$

2. Fejezet. Anyagi testek kinematikája

$$\underline{\mathbf{a}}_{\delta} = \mathbf{M}_{0,10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d^2 f}{d\psi^2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{df}{d\psi} \frac{d^2 \psi}{dt^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{r}}_1 \quad (86c.)$$

A vektormódszerrel levezetett képletekkel való ekvivalencia a gyorsulás esetében is kimutatható. Hangsúlyozzuk, hogy a három gyorsulás-összetevőt az álló S_0 koordináta-rendszerben írtuk fel, a merev testhez rögzített és vele együtt mozgó S_1 rendszerben értelmezett, homogén testpontkoordináták függvényében.

A fentebb hangoztatott egyenértékűség kimutatásának érdekében a (86a.), (86b.), és (86c.) mátrixegyenleteket balról az $\mathbf{M}_{10,0}$ mátrixszal szorozzuk, és ezzel a számított gyorsulás-összetevőket az S_{10} -ben (a merev testhez kapcsolt koordináta-rendszer indulási helyzetével megegyező helytálló rendszerben) értelmezzük.

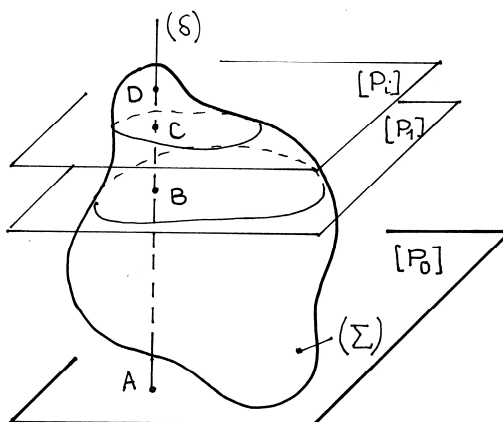
Ezek után a testpontkoordinátákat fejezzük ki S_{10} -ben, úgy, hogy az $\underline{\mathbf{r}}_1$ oszlopot balról szorozzuk az $\mathbf{E} = \mathbf{M}_{1,10} \mathbf{M}_{10,1}$ egységmátrixszal, akár a sebességgel kapcsolatos, az előbbiekben tárgyalt módszerben. A műveletek elvégzése után a vektormódszerrel levezetett gyorsulásmező mátrixos alakját kapjuk. Emlékezzünk, hogy az M testpontra mutató $\vec{\rho}$ helyvektor (vektormodell, 13. ábra) mind irányát, mind abszolút értékét A sebesség elemzésekor felhasznált, ide vonatkozó számításokat megismételve, az alábbi mátrixos kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{a}}_r)_{10} &= \tilde{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{r}}_{10} \\ (\underline{\mathbf{a}}_v)_{10} &= \tilde{\boldsymbol{\omega}} (\tilde{\boldsymbol{\omega}} \underline{\mathbf{r}}_{10}) = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \underline{\mathbf{v}}_{10} \\ (\underline{\mathbf{a}}_{\delta})_{10}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{d^2 f}{d\psi^2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 + \frac{df}{d\psi} \frac{d^2 \psi}{dt^2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (87)$$

2.3.2. A síkmozgás

A síkmozgás olyan sajátos mozgásfajta, amely számos szerkezeti elem esetén előfordul. Síkmozgást végeznek a dugattyúkarok a belsőégésű motorokban, a bolygóműves szerkezetek bolygókerekei, a differenciális bűtykös szerkezetek tapintói, a robotok sajátos alkatrészei. Ha valamely síkbeli szerkezet elemének mozgását vizsgáljuk, akkor mindig megjelenik az egyes elemek relatív síkmozgása.

Merev test akkor végez síkmozgást, ha van három nem kollineáris pontja, melyek közös síkja a mozgás során párhuzamos marad egy adott, rögzített helyzetű síkkal. Ez utóbbit a mozgás *alapsíkjának* nevezzük. (16 ábra).



16. ábra.

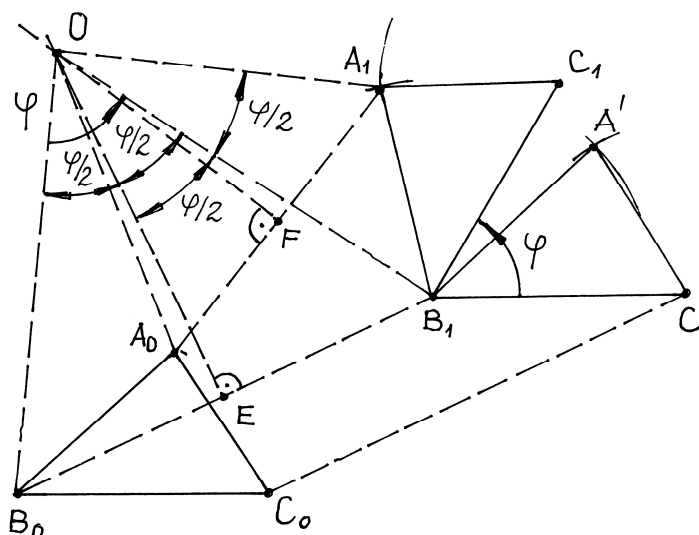
A síkmozgás meghatározása

A fenti állítás alapján, egyszerű geometriai megfontolással, az alábbi észrevételeket tehetjük:

- ha a merev test három nem kollineáris pontja mindig egy, az alapsíkkal párhuzamos síkban marad a mozgás során, akkor, a test merevségéből következően, az *összes többi*, adott síkbeli pontja is ebben a síkban marad;
- ha létezik legalább egy olyan síkja a merev testnek amely párhuzamos marad a mozgás alapsíkjával, akkor végtelen számú ilyen sík létezik, (ezek a merev test alapsíkkal párhuzamos síksorral való metszései) ennél fogva a merev test pontjai az alapsíkkal párhuzamos síkokban mozognak;
- a merev test elfordulásának tengelye mindig merőleges az alapsíkra, ellenkező esetben ugyanis lenne olyan testpont, amely elhagyná a saját mozgási síkját.;
- bármely, az alapsíkra merőleges egyenesre illeszkedő testpontok pályája egybevágó, sebessége és gyorsulása pedig azonos.

Az utolsó megjegyzés alapján kimondható, hogy a síkmozgást elégséges az alapsíkkal párhuzamos, egyébként tetszőleges síkban vizsgálni. Nem sérti az általánosságot, ha a mozgás vizsgálatához szükséges koordináta-rendszer egyik síkja az alapsíkkal párhuzamos, vagy azzal egybeesik. A testnek a mozgás alapsíkjába eső metszetét *referencia-szelvénynek* vagy *alapszelvénynek* nevezzük.

A síkmozgás vizsgálata előtt célszerű megjegyezni, hogy a haladó mozgásnak is lehet olyan sajátos esete, amelyben síkgörbék a testpontok pályái; a helytálló tengely körül forgó mozgást végző test pontjainak pályagörbéi is a forgástengelyre



17. ábra.
A síkmozgás geometriája

merőleges, párhuzamos síkokban fekvő körök. Mindkét speciális esetben definiálható a mozgás számára egy alapsík. Ezt figyelembe véve kijelenthető, hogy a síkmozgás a forgó mozgás, és egy speciális haladó mozgás kombinációja amelyre az jellemző, hogy a forgástengely helyzete időfüggő, miközben a test haladó mozgást is végez!

A síkmozgás jellegének tisztázása végett célszerű a 17. ábra elemzése. Az ABC háromszög a mozgás síkjában fekszik és a $t_0 = 0$ időpillanatban az $A_0B_0C_0$ helyzetet foglalja el. A $t = t_0 + \Delta t$ időpillanatban pedig legyen $A_1B_1C_1$ a háromszög helyzete. Az $A_0B_0C_0$ háromszöget síkmozgatással kétféleképpen hozhatjuk az $A_1B_1C_1$ helyzetbe. Az első módszer két lépéses: elcsúsztatjuk az $A_0B_0C_0$ háromszöget az $A'B_1C'$ helyzetbe, oly módon, hogy a síkidom oldalai önmagukkal párhuzamosak maradnak, ezután pedig a B_1 csúcs körül φ szöggel a végső $A_1B_1C_1$ helyzetbe forgatjuk azt. A második módszer lényege, hogy egyetlen alkalmasan választott külső O pont körüli forgatással hozzuk az $A_0B_0C_0$ háromszöget végső $A_1B_1C_1$ helyzetébe. Az O pont az A_0A_1 , illetve B_0B_1 szakaszok felező merőlegeseinek metszéspontja. Valóban, $OB_0 = OB_1$, $OA_0 = OA_1$ és $A_0B_0 = A_1B_1$, ahonnan evidens az OA_0B_0 és az OA_1B_1 háromszögek egybevágósága. A közös O csúcs révén nyilvánvaló, hogy a két háromszög az O körüli elfordítással egymással fedésbe hozható. Figyelembe véve, hogy az $A'B_1C'$ és a végső helyzetű $A_1B_1C_1$ háromszögek megfelelő oldalai között φ a szög, továbbá, hogy A_0B_0 párhuzamos az $A'B_1$ oldallal, következik, hogy az OA_0B_0 és OA_1B_1 háromszögek megfelelő oldalai közötti szög is φ . Ezzel igazoltuk, hogy az első módszer ekvivalens a második módszerrel, az egyetlen pont körüli elfordulással.

A mozgás folytonos; két, különböző testhelyzet között végtelen sok, közbeeső helyzet létezik, ahogy a Δt véges időintervallum is végtelen sok, infinitezimális, dt intervallum összegének tekinthető. A dt infinitezimális idő alatt a merev test elmozdulása végtelenül kicsi, így testpontjai végtelenül kicsi ds pályaíveket írnak le. Ezek a pályaívek végtelenül kicsi (infinitezimális) körívekkel helyettesíthetők. Figyelembe véve az egyetlen forgatás lehetőségét, két különböző testhelyzet között, kimondható, hogy adott pillanatban a síkmozgást végző test végtelenül kis elfordulást végez az alapsíkra merőleges, változó helyzetű tengely körül. Az utóbbit *pillanatnyi forgástengelynek* nevezzük.

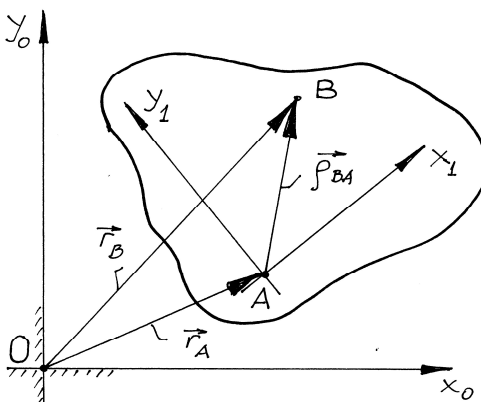
Kimondható, hogy a síkmozgás végtelenül sok, változó helyzetű forgástengely körül végrehajtott infinitezimális méretű elemi forgások sorozata.

Ez azt jelenti, hogy az egyes pontok pályagörbéinek infinitezimális szakaszai a pályagörbék simulóköreinek ívei és a tekintett pont pillanatnyi forgástengelytől mért távolsága nem más, mint a pálya adott pontbeli görbületi sugara.

A továbbiakban a síkmozgásra jellemző sebesség-, illetve gyorsuláseloszlás tanulmányozására kerül sor, vektor- illetve mátrixmódszerrel.

A. Vektormódszer

A vektormódszer geometriai modellje a 18. ábrán látható. Feltevésünk szerint a mozgás alapsíkja az S_0 álló helyzetű koordináta-rendszer x_0y_0 síkjával párhuzamos, a mozgást végző merev test referencia-szelvénye pedig ebben a síkban fekszik. A test A pontjához kötjük a testhez mereven rögzített, S_1 jelű koordináta-rendszert. Legyen B a referencia -szelvény tetszőleges pontja. A mozgás során a B pont koordinátái az álló S_0 rendszerben időfüggőek, az S_1 -ben pedig állandóak. Az S_1 rendszer egységvektorai nyilvánvalóan időfügőek (a merev test pillanatnyi forgások sorozatát írja le).



18. ábra.

A síkmozgás jellemző helyzetvektorai

Az ábra alapján az A és B pontok helyvektorai közötti a következő összefüggés írható fel:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{BA} \quad (88)$$

A (88) egyenlet mindegyik tagja időfüggő. Az $\vec{r}_A$ és az $\vec{r}_B$ vektorok mind az irányukat, mind pedig az abszolútértéküket tekintve időfüggőek. Ezzel szemben a $\vec{r}_{BA}$ vektor csak az irányát tekintve változik, mivel a test merev. Másként fogalmazva azért változnak a $\vec{r}_{BA}$ összetevői az álló S_0 koordináta-rendszerben mert a vektor a mozgás során elfordul.

2.3.2.1. A sebességeloszlás

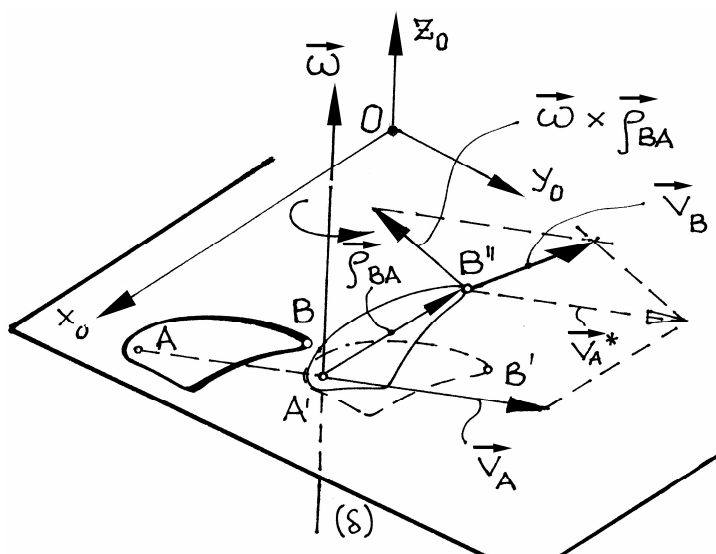
A tetszőleges B pont sebességvektora a (88) egyenlet idő szerinti deriváltja. Ez a képletben szereplő vektorok koordináta-irányok szerinti felbontásának figyelembevételével számítható:

$$\begin{cases} \vec{r}_B(t) = x_B(t)\vec{i}_0 + y_B(t)\vec{j}_0 \\ \vec{r}_A(t) = x_A(t)\vec{i}_0 + y_A(t)\vec{j}_0 \\ \vec{\rho}_{BA}(t) = x_{1B}\vec{i}_1(t) + y_{1B}\vec{j}_1(t) \end{cases} \quad (89)$$

Meg kell figyelni, hogy a B és az A pontok koordinátái időfüggők, míg a B pont A-hoz viszonyított *relatív helyzetét kifejező* $\vec{\rho}_{BA}$ vektor esetében az $\vec{i}_1, \vec{j}_1$ egységvektorok (más néven bázisvektorok) függenek az időtől, az x_{1B} és y_{1B} koordináták pedig nem.

A (88) egyenlet idő szerinti deriváltja a (89) képletek figyelembevételével, illetve a (30) alatti Poisson-féle képletek értelemszerű alkalmazásával határozható meg (a Poisson-féle képleteket az $\vec{i}_1$ és $\vec{j}_1$ egységvektorok idő szerint vett deriváltjainak számításakor használjuk fel):

$$\dot{x}_B \vec{i}_0 + \dot{y}_B \vec{j}_0 = \dot{x}_A \vec{i}_0 + \dot{y}_A \vec{j}_0 + x_{1B} (\vec{\omega} \times \vec{i}_1) + y_{1B} (\vec{\omega} \times \vec{j}_1) \quad (90)$$



19. ábra.
A síkmozgás haladó és forgó jellege

Az eredmény bal oldalán álló első két tag az A pont, a jobb oldalon álló első két tag pedig a B pont sebessége. Ha kiemeljük az $\vec{\omega}$ vektort és kihasználjuk, hogy az együttmozgó pont a $\vec{\rho}_{BA}$ relatív helyvektor, akkor kapjuk hogy:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{BA} \quad (91)$$

A (91) képletből kitűnik, hogy a síkmozgást végző merev test adott pontjának a sebességét akkor lehet meghatározni, ha ismert:

- egy adott testpont sebességvektora (jelen esetben ez az A pont, amely egybeesik a mozgó koordináta-rendszer origójával);
- a vizsgált testpontnak (B) az adott testponthoz viszonyított sebessége (ez csak a forgásból eredhet, a test merevségéből adódóan).

A sebesség képletének grafikus szemléltetése, valamint a fenti megjegyzések grafikus igazolása a 19. ábrán láthatók. Ez a merev testnek a mozgás alapsíkjába eső referencia-szelvényét tünteti fel két, egymáshoz végtelenül közeli helyzetben. A kiindulási helyzetnek megfelelő t_0 időpillanatban A, illetve B a vizsgálni kívánt pontok helyzete. Miután $d t$ idő eltelt, a $t_0 + d t$ időpillanatnak megfelelő helyzet A'-re, illetve B"-re módosul. Mivel az eltelt $d t$ idő infinitezimálisan kicsi, az A pont sebességének $\overline{AA'} = d\vec{r}$ lesz az iránya. A síkszelvény, a $d t$ elemi idő alatt, új helyzetébe kerül, a következő két egyszerű mozgás szuperpozíciója révén. Ezek

- a $\vec{v}_A$ irányú egyenes vonalú haladó mozgás;
- az A ponton áthaladó, az alapsíkra merőleges (δ) tengely körüli infinitezimális forgás.

A (91) képlettel megadott sebesség a fenti két infinitezimális mozgásból származó sebesség vektorösszege. A B pont sebessége különbözik az A pont sebességétől, mivel kiegészül a forgásból származó $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{BA}$ taggal. Az előzőeket részint ismételve hangsúlyozzuk, hogy a képletben álló $\vec{\omega}$ szögsebességvektort az A ponthoz kötöttnek gondoljuk, iránya pedig merőleges az alapsíkra.

Ha a merev test A pontja helyett egy másik, szintén az alapsíkban fekvő E pontot választanánk és ezzel írnánk fel a B pont sebességét, a (91) képlet formálisan változatlan maradna, csupán az „A” index helyett kellene „E”-t írni. Az $\vec{\omega}$ szögsebességvektor tartóegyenese az A pontból az E pontba kerül, miközben $\vec{\omega}$ irányítása és abszolút értéke egyébként változatlan kell, hogy maradjon. Ez az állítás a következő módon látható be.

Tételezzük fel, hogy $\vec{\omega}_A \neq \vec{\omega}_E$ valamint, összhangban a fentiekkel, a B pont sebessége kétféleképpen írható fel:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}_{BA} = \vec{V}_E + \vec{\omega}_E \times \vec{\rho}_{BE}$$

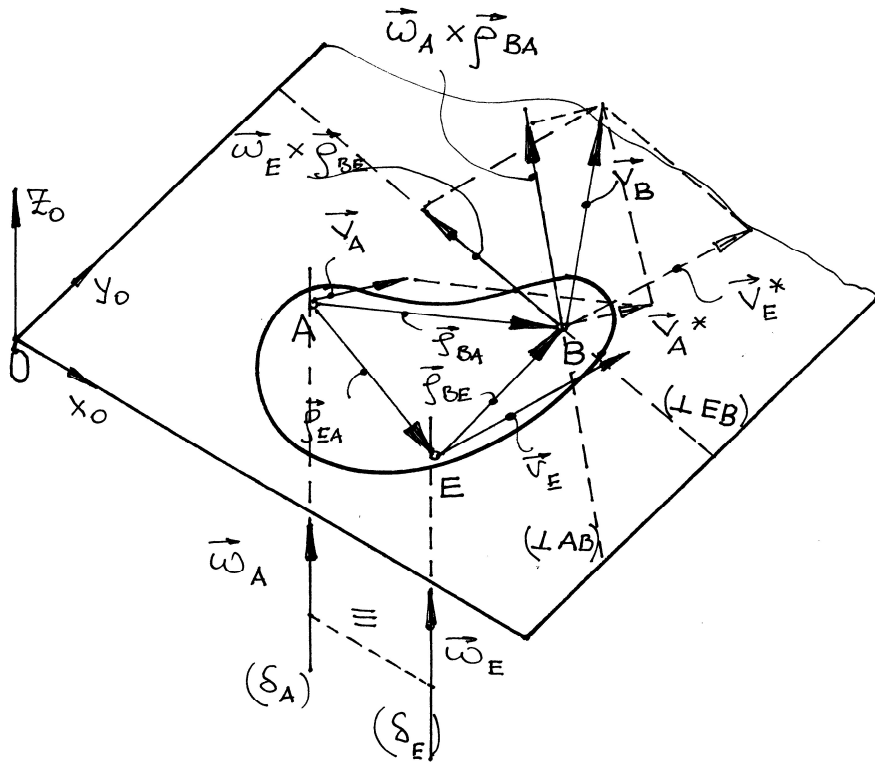
Innen

$$\vec{\omega}_A \times \vec{\rho}_{BA} - \vec{\omega}_E \times \vec{\rho}_{BE} = \vec{V}_E - \vec{V}_A \quad (92)$$

A 20. ábra, valamint a (91) képlet alkalmazásával kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \vec{V}_E &= \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}_{EA} \\ \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}_{BA} - \vec{\omega}_E \times \vec{\rho}_{BE} &= \vec{V}_E - \vec{V}_A = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}_{EA} - \vec{V}_A = \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}_{EA} \\ \vec{\omega}_A \times (\vec{\rho}_{BA} - \vec{\rho}_{EA}) - \vec{\omega}_E \times \vec{\rho}_{BE} &= 0 \\ \vec{\rho}_{BA} &= \vec{\rho}_{EA} + \vec{\rho}_{BE} \\ \vec{\omega}_A \times (\vec{\rho}_{EA} + \vec{\rho}_{BE} - \vec{\rho}_{EA}) - \vec{\omega}_E \times \vec{\rho}_{BE} &= 0 \Leftrightarrow (\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_E) \times \vec{\rho}_{BE} = 0 \end{aligned}$$

Az utolsó összefüggés igazolja az $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_E$ egyenlőséget. A vektorszorzat ugyanis csak akkor lehet nulla ha zérus a zárójelen levő különbség értéke, mivel



20. ábra.

Adott pont sebességének különböző pontok sebességével való felírása

$\vec{\rho}_{BE}$ merőleges az $\vec{\omega}$ vektorokra, továbbá a B pont nem esik egybe az E ponttal.

A fenti gondolatmenetből világosan kitűnik, hogy a síkmozgást, adott időpillanatban, egyetlen $\vec{\omega}$ szögsebességvektor jellemzi. A merev test *sebességállapotát*, egy adott időpillanatban a testpontokhoz tartozó sebességek összessége határozza meg. (Ezt a sebességek megoszlásának, sebességmezőnek vagy sebességeloszlásnak is szokták nevezni). Összhangban a fentiekkel kijelenthető, hogy a sebességállapotot a merev test valamely kiragadott pontjának sebessége, valamint a szögsebesség-vektor egyértelműen meghatározza. Könnyen belátható tehát, hogy a sebességeloszlást, a merev test kiválasztott pontjának függvényében, végtelenül sok módon lehet felírni. A végeredmény mégis változatlan, mert a pontok relatív helyzetvektorai a választott ponthoz képest változnak. Ennélfogva az adott, dt elemi időintervallumban történt síkmozgást végtelenül sokféleképpen lehet elemi haladó-, és elemi forgómozgás-összetevőkre bontani.

2.3.2.2. A sebességpólus

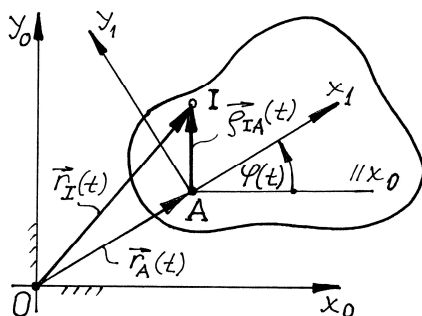
A (92) képletben szereplő $\vec{v}_E - \vec{v}_A$ különbség az E pont A-hoz viszonyított relatív sebessége. Az A, B, E pontok relatív helyzetvektorai közötti összefüggést tekintve, ugyanakkor figyelembe véve, hogy a síkmozgást adott időpillanatban egyetlen $\vec{\omega}$ szögsebességvektor jellemzi, átírható a képlet:

$$\vec{v}_E - \vec{v}_A = \vec{\omega}_A \times \vec{\rho}_{BA} - \omega_E \times \vec{\rho}_{BE} = \vec{\omega} \times (\vec{\rho}_{BA} - \vec{\rho}_{BE}) = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{EA} \quad (93)$$

A fenti összefüggésből világosan kitűnik, hogy a merev test két pontjának egymáshoz viszonyított relatív sebessége nem adódhat semmi másból, csak forgásból, hiszen a relatív helyzetvektor nagysága állandó. A (93) reláció, kissé átalakított formában, a fogaskerékelméletben alapvető jelentőségű Willis-féle kapcsolódási tétel bizonyításának alakképlete.

Az előbb vázolt – analitikus úton elért –, következtetések mellett feltehető a kérdés, hogy a síkmozgás elemi idő alatt megtett szakaszát hogyan lehetne, egyértelműen meghatározható módon, elemi mozgásokkal egyenértékűvé tenni? Másképpen fogalmazva, létezik-e egy olyan pont, amely a merev test összes többi pontjától azért különbözik, mert sebessége, az adott időpillanatban, jellegzetes, sajátos érték? A mozgás véges időben véges, tehát, amennyiben létezik ilyen szélsőérték, ez csak lokális minimum lehet. Figyelembe véve a 17. ábrán bemutatott geometriai szerkesztést, aminek az a geometriai értelme, hogy a síkidom két, különböző helyzete úgy függ össze, hogy az első helyzet egyetlen forgatással átvihető a második helyzetbe (tehát nulla eltolással !!!), kijelenthetjük, hogy: az elemi síkmozgás úgy írható le a legegyszerűbben, ha a viszonyítási pontnak – ez a (91) képletben az A volt – zérus a sebessége. A továbbiakban a cél a zérus sebességű pont meghatározása egy adott időpillanatban.

A 21. ábra a merev test alapszelvényét ábrázolja, egy tetszőleges időpillanatban. A merev testhez kötött S_1 koordináta-rendszernek a test A pontja az ori-



21. ábra.

A sebességpólus meghatározása

gója. Ha ismert a mozgástörvény, akkor ismertnek tekinthetjük az A origó $\vec{r}_A(t)$ helyvektorát az S_0 koordináta-rendszerben, illetve az x_1 tengely és az x_0 tengely által alkotott $\varphi(t)$ szöget.

Legyen az I a merev test azon pontja az alapsíkban, melynek zérus a sebessége – egyelőre csak feltételezzük, hogy van ilyen pont. E feltétel elfogadásával és a (91) képlet formális alkalmazásával írható, hogy:

$$\vec{v}_I = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{IA} \quad (94)$$

A (94) vektoregyenletet először az S_0 rögzített koordináta-rendszerben tekintjük. Nyilvánvaló, hogy az egyenletet az ismeretlen $\vec{\rho}_{IA} = \vec{r}_I - \vec{r}_A$ vektor kiszámítására használjuk fel. A megoldás érdekében szorozzuk meg a fenti egyenletet balról $\vec{\omega}$ -val vektoriálisan, majd alkalmazzuk a két-szeres vektorszorzattal kapcsolatos kifejtési tételt. Kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times [\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{IA}] &= 0 \\ \vec{\omega} \times \vec{v}_A + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_I - \vec{r}_A)] &= 0 \\ \vec{\omega} \times \vec{v}_A + [\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_I - \vec{r}_A)]\vec{\omega} - (\vec{r}_I - \vec{r}_A)(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) &= 0 \end{aligned}$$

Az egyenlet baloldalán a második tag nulla, mivel $\vec{\omega}$ merőleges a helyvektorokra. Ennélfogva $\vec{\omega} \times \vec{v}_A = (\vec{r}_I - \vec{r}_A)(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$, és innen egyértelműen meghatározható a nullasebességű I pont helyzetvektora:

$$\vec{\rho}_{IA} \equiv \vec{r}_I - \vec{r}_A = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2} \Leftrightarrow \vec{r}_I = \vec{r}_A + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2} \quad (95)$$

A nulla sebességű pontot *sebességpólusnak* nevezik. Koordinátáinak számítására célszerű a (95) képletet mátrixokkal felírni:

$$\begin{bmatrix} x_{0I} \\ y_{0I} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0A} \\ y_{0A} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{x0A} \\ v_{y0A} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0A} \\ y_{0A} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/\omega & 0 \\ 1/\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_{0A} \\ \dot{y}_{0A} \\ 0 \end{bmatrix}$$

A számítások elvégzése után megkapjuk a sebességpólus koordinátáit a rögzített S_0 rendszerben:

$$\begin{cases} x_{01}(t) = x_{0A}(t) - \frac{\dot{y}_{0A}(t)}{\omega(t)} \\ y_{01}(t) = y_{0A}(t) + \frac{\dot{x}_{0A}(t)}{\omega(t)} \end{cases} \quad (96)$$

2.3.2.3. A pólusgörbék

A jelen paragrafusban (95) képlet jelentését kívánjuk tisztázni. A síkmozgás minden időpillanatára egyetlen sebességpólus határozható meg. Ennek koordinátái időfüggők, tehát a sebességpólus is, a merev test mozgása alatt, valamilyen – a merev test mozgása által meghatározott – pályát ír le. A helyzetváltozásnak két oka lehet:

- a merev test elmozdulása;
- különböző időpillanatokban a merev test különböző alapsíkponjtjai (azaz a mozgó koordináta-rendszer különböző pontjai) kerülnek sorra a nulla sebességű helyzetbe.

Nyilvánvaló, hogy a pólus a helytálló S_0 koordináta-rendszerben adott pályát ír le. Ezt a pályát helytálló, vagy röviden *álló pólusgörbének* nevezzük. Az álló szó mint jelző arra utal, hogy ez a görbe nem mozog az S_0 koordináta-rendszerben. Vegyük észre, hogy a sebességpólus helyzete a merev testhez kötött koordináta-rendszerben is időfüggő, ennél fogva értelme van a póluspont pályája keresésének az S_1 mozgó koordináta-rendszerben is. A pólus S_1 -ben leírt pályáját *mozgó pólusgörbének* nevezzük.

Az alábbiakban meghatározzuk a mozgó (az S_1 koordináta-rendszerben megfigyelt) pólusgörbe egyenletét. A vektormódszerben ez igen könnyen megvalósítható, ha a (95) képletet a 21. ábra alapján geometriai szempontból értelmezzük. Mivel $\vec{r}_1 = \vec{r}_A + (\vec{\omega} \times \vec{v}_A) / \omega^2$, $\vec{r}_A$ pedig az S_1 origó helyzetvektora az S_0 rögzített koordináta-rendszerben, az $(\vec{\omega} \times \vec{v}_A) / \omega^2$ vektorszorzat nem lehet más, mint a $\vec{\rho}_{1A}$ vektor, azaz az I sebességpólus helyvektora az S_1 koordináta-rendszer A origójához viszonyítva. A mozgó pólusgörbe egyenletének megadása (azaz a $\vec{\rho}_{1A}$ vektor A ponthoz viszonyított koordinátáinak felírása) az S_1 mozgó koordináta-rendszerben a vektorszorzat kiírását igényli ugyanebben a koordináta-rendszerben. Elemi számolással kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} x_{11}(t) = -\frac{v_{y1A}(t)}{\omega(t)} \\ y_{11}(t) = \frac{v_{x1A}(t)}{\omega(t)} \end{cases} \quad (97)$$

A képletben álló $v_{y1A}(t)$ és $v_{x1A}(t)$ rendre az A pont két sebességkoordinátája az S_1 koordináta-rendszerben.

A (96) képlet az *álló pólusgörbe parametrikus egyenleteit*, másképp a sebességpólus pályagörbéjének parametrikus egyenleteit fejezi ki az álló S_0 rendszerben. A (97) képlet ezzel szemben a *mozgó pólusgörbe parametrikus egyenleteit* fejezi ki a testhez kötött S_1 koordináta-rendszerben. A szakirodalomban használják még a *polhódiagörbe* megnevezést is.

Érdemes meggondolni, hogy bár az I pont pillanatnyi sebessége nulla, a helyzete mégis változik mind az álló, mind pedig a mozgó koordináta-rendszerben. Ezt a jelenséget pólusvándorlásnak is szokás nevezni. A pólus vándorlásából következik, hogy bármely dt elemi időintervallumnak megfelel egy ds_0 elmozdulás az álló pólusgörbén, egy ds_1 pedig a mozgó pólusgörbén. A pólus nulla sebessége, és ennek ellenére bizonyítható helyzetváltozása látszólag ellentmondásos. Az ellentmondást az oldja fel, hogy a pólus *a testhez kötött alapszelvényben elmozdul*. Így világossá válik, hogy a pont kicserélődése-vándorlása miatt kerül sor az S_1 -ben a ds_1 ív leírására. A ds_0 ív a ds_1 megfelelője az állórendszerben, miközben I *nem mozdul, csak körülötte fordul el a szelvény!* Így rögtön belátható, hogy $ds_0 = ds_1$. Másodsorban, pontosan a $\vec{v}_{01} = 0$ feltételből következik, hogy az I pont elmozdulási sebességéhez nem járul hozzá a merev test helyzetváltoztatása, csak az, hogy a nulla sebesség követelményének eleget tevő pont szerepét egy másik pont fogja betölteni. Ennek alapján, az álló, valamint a mozgó centroida kölcsönös helyzetére vonatkozólag a következő két állítás valószínűsíthető:

- a két pólusgörbének közös érintője van a pillanatnyi sebességpólusban.
- a mozgó pólusgörbe gördül az álló pólusgörbén.

A fenti két állítás szigorú matematikai bizonyítását a mátrixmódszer tárgyalásakor közöljük.

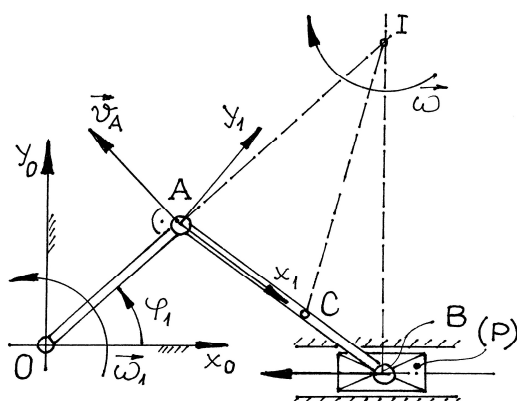
Megjegyezzük, hogy, különbséget kell tenni a póluspont, mint testpont *síkmozgásbeli pillanatnyi nulla* sebessége illetve a pólus mint geometriai pont *pólusgörbén értelmezett vándorlási* sebessége között. Az első a merev test mozgásának jellemzője. A második annak tulajdonítható, hogy a pólus megváltoztja helyét a mozgás során a testhez kötött alapszelvényben.

2.3.2.4. Gyakorlati műszaki alkalmazások

A sebességpólus meghatározása, a gyakorlati alkalmazások során, nemcsak a (95) és (96) képletekkel történhet. A sebességpólus-koordinátákat adó képletekből következik, hogy számításához ismerni kell legalább egy testpont helyzetét, sebességét és az $\vec{\omega}$ szögsebességvektor abszolút értékét. Ez feltételezi a mozgástörvény ismeretét.

Ha a mozgástörvény nem ismert, hanem éppen ennek megállapítása a cél, akkor a pólus meghatározását a síkmozgást végző szerkezet egyes tagjaival kapcsolatos kényszerek tehetik lehetővé.

A pólus egyértelműen meghatározható, ha ismert egy pontban a sebességvektor és egy másik pontban pedig a sebesség iránya. Az eljárást a 22. ábrán szemléltetett forgattyús mechanizmus AB hajtórúdja esetén szemléltetjük.



22. ábra.

Tolattyús mechanizmus vázlata

A mechanizmus elemei az OA forgattyú, az AB hajtórúd, amely B-ben csuklóval kapcsolódik a vízszintes kényszerpályához kötött (P) csúszkához (az utóbbi a dugattyú belsőégésű motorok esetén). Az OA forgattyú $\vec{\omega}_1$ szögsebességű forgómozgást végez.

A csúszka mozgása egyenesvonalú. Az AB hajtórúd olyan síkmozgást végző elem, melynek A pontjában ismert a $\vec{v}_A = \vec{\omega}_1 \times \vec{OA}$ pillanatnyi sebesség, valamint a B pontbeli sebesség iránya. Mivel a

síkmozgás a pillanatnyi sebességpólus körüli elemi forgómozgások összessége, a sebességpólus egyértelműen meghatározható, ha merőlegeseket húzunk az A és B pontokban a $\vec{v}_A$, illetve a $\vec{v}_B$ sebességek irányaira. A két merőleges metszéspontja az I pólus. Nyilvánvaló, hogy ki tudjuk számítani az I pont koordinátáit az Ox_0y_0 rögzített koordináta-rendszerben az OA hajtókar helyét meghatározó φ szögkoordináta függvényében, illetve az idő függvényében is, ha ismert a $\varphi = \varphi(t)$ mozgástörvény. Az AI távolság birtokában – ez elemi geometriai megfontolásokkal számítható – az AB hajtórúd jellemző $\vec{\omega}$ pillanatnyi szögsebességvektorának abszolút értéke $\omega = |\vec{v}_A| / AI$. Az ábráról leolvasható, hogy pozitív az ω előjele, ha $\vec{\omega}_1$ pozitív. Az ω ismeretében az AB hajtórúd bármely C pontjára számítható a pillanatnyi sebesség:

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{IC} = \frac{|\vec{v}_A|}{AI} \vec{k} \times \vec{IC} \quad (98)$$

A (98) képlet a sebességeloszlást határozza meg.

A forgómozgás sajátosságai a vizsgálat időpillanatában érvényesek a síkmozgást végző merev testre is. Az I pólustól egyenlő távolságra lévő (azonos sugarú I középpontú körön fekvő) testpontoknak azonos abszolútértékű a pillanatnyi sebessége. A sebesség-vektor iránya a (98) képlet értelmében változó, de a sebesség mindig érintője a körnek.

2.3.2.5. Grafikus módszerek

A sebesség abszolútértéke egyenesen arányos a testpontok pillanatnyi sebességpólushoz viszonyított távolságával. Ezt a tulajdonságot lehet felhasználni a sebességeloszlás grafikus meghatározásához. Az eljárást a 23. ábra szemlélteti. Rajzoljuk meg az A pont $\vec{v}_A$ sebességvektorát valamilyen léptékben az A ponthoz kötötten. Jelölje C a sebességvektor végpontját. Kössük össze ezt a pontot az I pólussal. Legyen továbbá B' az IB sugarú kör (B tetszőleges testpont) IA egyenessel való metszéspontja. Állítsunk merőlegest az IA egyenesre a B' pontban és legyen P az utóbbi és az IC egyenes metszéspontja. Nyilvánvaló, hogy a B'P vektor a B' pont sebessége. Mérjük fel ennek hosszát a B pontból az OB sugarú kör B pontbeli érintője mentén. Tegyük ezt oly módon hogy a BP' egyenesszakasz az óramutató járásával egyezően legyen elforgatható 90° -kal a B pont körül a BI egyenesbe ha a szögsebesség pozitív, illetve az óramutató járásával ellentétesen ha a szögsebesség negatív. Ekkor a BP' vektor a B pont sebességvektora.

A sebességeloszlás-függvény grafikus ábrázolása a sebességábra. A sebességábra kiindulópontja egy, adott időpillanathoz tartozó I pólus tetszőlegesen felvett I' megfelelője. Az I' pontból indulnak az A, B, C, ..., M tetszőlegesen választott testpontok sebességvektoraival ekvipolens $\vec{I'A'}, \vec{I'B'}, \vec{I'C'}, \dots, \vec{I'M'}$ vektorok (24. ábra). A sebességábra gyakorlati alkalmazásoknál látható hatékonysága a Burmeister- féle tételre épül.

A Burmeister- féle tétel kimondja, hogy a síkmozgást végző merev test három, tetszőleges A,B,C pontjában a sebesség-vektorok A'B'C' végpontjai a sebesség-ábrán egy olyan háromszöget alkotnak, amely az ABC háromszöghöz hasonló, és ehhez képest a szögsebesség forgatási irányában 90° -kal el van forgatva.

A tétel bizonyítása a 24. ábrán észlelhető geometriai összefüggéseken alapszik. Az IA, IB, IC, pillanatnyi sebességpólusból származtatott helyvektorok merőlegesek a $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$ sebességekre és így:

$$IA \perp I'A' = \vec{v}_A; IB \perp I'B' = \vec{v}_B; IC \perp I'C' = \vec{v}_C;$$

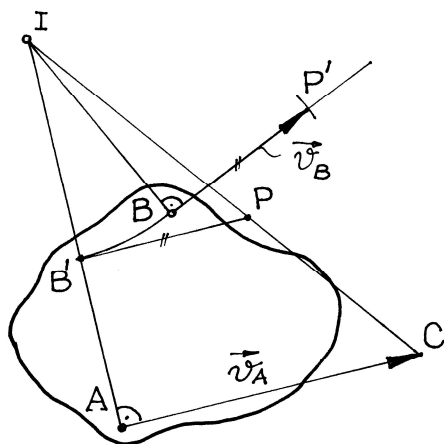
Innen

$$AIB\angle = A'I'B'\angle$$

$$BIC\angle = B'I'C'\angle$$

$$CIA\angle = C'I'A'\angle$$

Figyelembe véve, hogy síkmozgás esetén a szögsebességvektor merőleges a helyvektorokra és hogy a sebesség-



23. ábra.

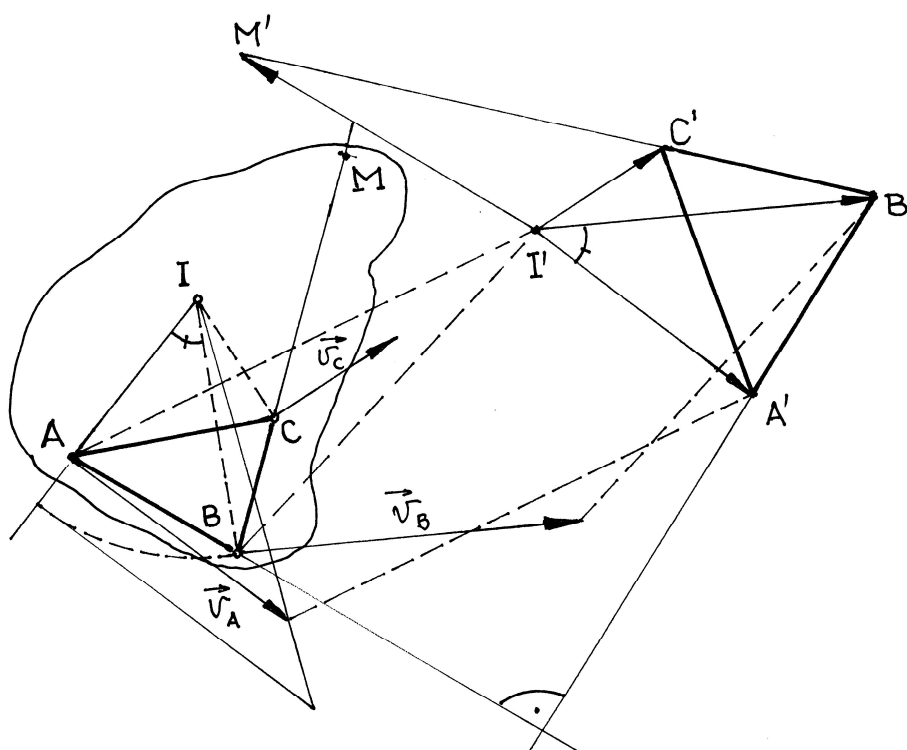
A sebességeloszlás grafikus meghatározása

vektorok abszolút értékei egyenesen arányosak a helyvektorok abszolút értékeivel felírható, hogy

$$\frac{IA}{I'A'} = \frac{IB}{I'B'} = \frac{IC}{I'C'} = \frac{1}{\omega} ,$$

Ennek alapján kijelenthető, hogy $IAB\Delta \cong I'A'B'\Delta$, $IBC\Delta \cong I'B'C'\Delta$. A hasonló háromszögek elhelyezkedése következtében azonnal adódik, hogy az $IABC$ négyszög oldalai rendre merőlegesek az $I'A'B'C'$ oldalaira. Innen pedig következik az ABC és $A'B'C'$ háromszögek hasonlósága, ami a tétel bizonyítása is egyben.

A Burmeister- féle tételnek gyakorlati alkalmazása az egyes testpontok sebességének szerkesztéssel történő meghatározása. Amennyiben ismert a sebességábra két pontra, a két pont által meghatározott egyenes bármely pontjára megszerkeszthető a sebesség. Legyen a 24. ábrán a BC szakasz C ponton túli meghosszabbításán az M pont. Az M pontban a sebességet úgy határozzuk meg, hogy a sebességábrán a $B'C'$ egyenes C' -en túli meghosszabbításán úgy vesszük



24. ábra.

A sebességeloszlás és Burmeister tétele

fel az M' pontot, úgy, hogy teljesüljön a $\frac{BM}{BC} = \frac{B'M'}{B'C'} = k$ egyenlőség. A keresett sebesség az $l'M'$ szakasz hossza.

2.3.2.6. A gyorsuláseloszlás

A gyorsulás meghatározása a sebességképlet idő szerinti deriválásával történik. Kiindulópont a merev test tetszőleges B pontjának $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_{BA}$ (91) összefüggéssel kifejezett sebessége. A deriválás nyomán:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}_B &= \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho}_{BA} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}}_{BA} \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{BA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_{BA}) \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{BA} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}_{BA})\vec{\omega} - \vec{\rho}_{BA}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})\end{aligned}$$

Figyelembe véve, hogy az $\vec{\omega} \cdot \vec{\rho}_{BA}$ skalárszorzat nulla, a B pont gyorsulásának képlete a következőképpen alakul:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{BA} - \omega^2 \vec{\rho}_{BA} \quad (99a)$$

A fentiek szerint a merev test *gyorsulásállapotát* – ez a merev test pontjaihoz tartozó gyorsulások összessége vagy másképp a gyorsulások megoszlása – egy adott időpillanatban, összhangban a fentiekkel, valamely kiragadott pontjának gyorsulása, a szögsebessége, valamint a szöggyorsulása egyértelműen meghatározza.

Jól látható, hogy a B pont gyorsulása az A pont gyorsulásából és a B pont A -hoz viszonyított mozgásának gyorsulásából tevődik össze. A (98) képlet jobb-oldalán álló kifejezés két utolsó tagja azonos a helytálló tengely körüli forgásra érvényes gyorsulásképlettel. Ennek oka az, hogy a síkmozgás egy haladó és egy forgó mozgás szuperponálása. A B pont mozgása tehát az A pont pillanatnyi haladó mozgásának, és az A körüli pillanatnyi forgásnak az összege. Következésképp a (99a) képlet, a fenti megfontolások alapján, az

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \quad (99b)$$

alakban is felírható, ahol

$$\vec{a}_{BA} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{BA} + \omega^2 (-\vec{\rho}_{BA}) \quad (100)$$

a relatív gyorsulás. Jól látható, hogy a kifejezés első tagja az érintőirányú összetevő, míg a második a normálirányú összetevő. Az utóbbi iránya a $\vec{\rho}_{BA}$ helyzetvektorával megegyező, irányítása pedig ezzel ellentétes, vagyis az A relatív forgásközpont felé mutat.

2.3.2.7. A gyorsuláspólus

Akárcsak a pillanatnyi sebesséállapot vizsgálatakor, most is feltevődik a kérdés, hogy létezik-e olyan pont, amelynek a gyorsulása a mozgás egy adott időpillanatában zérus. A 99.a képletből kiderül, hogy amennyiben valamely B pont A ponthoz viszonyított relatív gyorsulása ellentétes az A pont pillanatnyi gyorsulásával, akkor a B pont gyorsulása zérus. lesz, vagyis a síkmozgáshoz tartozó haladó és forgómozgások gyorsulásai kioltják egymást.

Jelölje a továbbiakban J a *gyorsuláspólust*, azaz azt a pontot, amelynek zérus a gyorsulása. Mivel a mozgás egy adott időpillanatában, (a vizsgálat időpillanatában) ismertnek tekintjük az A pont gyorsulását, a szögsebességet és a szöggyorsulást, a J pont gyorsulásvektorának eltűnése két olyan skaláregyenlettel egyenértékű, amelyekben a $\vec{\rho}_{JA}$ vektor koordinátái lineárisan szerepelnek. Másként fogalmazva, annak eldöntésére, hogy létezik-e olyan J pont ahol zérus a gyorsulás, azt kell megvizsgálni, hogy a kérdéses egyenleteknek van-e megoldásuk a $\vec{\rho}_{JA}$ vektorra.

A számítások célja most már a zérus gyorsulású J pont A-hoz viszonyított azaz S_1 koordináta-rendszerbeli $\vec{\rho}_{JA}$ helyvektorának, illetve az álló S_0 koordináta-rendszerbeli $\vec{r}_J$ abszolút helyvektorának meghatározása. Ezért a (98) egyenletben a tetszőleges pont B indexét J-re írjuk át, majd az így kapott képlet baloldalát zérussal tesszük egyenlővé. Érdemes ezt az eredményt még balról vektoriálisan $\vec{\varepsilon}$ vektorral megszorozni:

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon} \times \vec{0} &= \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{JA} - \omega^2 \vec{\rho}_{JA} \\ 0 &= \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{JA} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{JA}) - \omega^2 (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{JA})\end{aligned}$$

Az $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{JA}$ vektorszorzatot az alapegyenletből kell kifejezni:

$$\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{JA} = -\vec{a}_A + \omega^2 \vec{\rho}_{JA}$$

A kettős vektorszorzat felbontásakor használjuk ki, hogy az $\vec{\varepsilon}$ és $\vec{\rho}_{JA}$ vektorok merőlegesek, tehát skalárszorzatuk zérus. Elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$0 = \vec{\varepsilon} \times \vec{a}_A + (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\rho}_{JA}) \vec{\varepsilon} - \varepsilon^2 \vec{\rho}_{JA} - \omega^2 (-\vec{a}_A) - \omega^2 \omega^2 \vec{\rho}_{JA}$$

Innen, azonnal adódik a J pont, azaz a *gyorsuláspólus* helyvektora az A origójú, mozgó S_1 koordináta-rendszerben:

$$\vec{\rho}_{JA} = \frac{\vec{\varepsilon} \times \vec{a}_A + \omega^2 \vec{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (101)$$

A vektorszorzat kifejtésével megkapjuk a J pólus mozgó koordináta-rendszerbeli $(x_1^{(j)}, y_1^{(j)})$ helyét:

$$\begin{cases} x_1^{(j)} = \frac{-\varepsilon a_{y_1}^{(A)} + \omega^2 a_{x_1}^{(A)}}{\varepsilon^2 + \omega^4} \\ y_1^{(j)} = \frac{-\varepsilon a_{x_1}^{(A)} + \omega^2 a_{y_1}^{(A)}}{\varepsilon^2 + \omega^4} \end{cases} \quad (102)$$

A (102) alatti parametrikus egyenletekben a t idő a paraméter. Geometriai értelmezésük szerint a fenti egyenletek azon síkgörbe egyenletei, amely a pillanatnyi gyorsuláspólusok mértani helyét adja meg az S_1 mozgó rendszerben. Ezt a görbét a *gyorsulások mozgó pólusgörcbéjének* nevezzük.

A *gyorsulások álló pólusgörcbéje* a gyorsuláspólusok mértani helye a rögzített helyzetű S_0 koordináta-rendszerben. A gyorsulások álló pólusgörcbéjének egyenleteit könnyen meg lehet kapni a (100) vektoregyenletből, ha a $\vec{\rho}_{JA}$ helyvektort a J és A pontok álló rendszerbeli helyvektorainak különbségként írjuk fel:

$$\vec{\rho}_{JA} = \vec{r}_J - \vec{r}_A$$

Ezt felhasználva az S_0 koordinátarendszerben tekintett (101) egyenletből azonnal adódik a gyorsulások álló pólusgörcbéjének paraméteres egyenlete:

$$\begin{cases} x_0^{(j)} = x_0^{(A)} + \frac{-\varepsilon a_{y_0}^{(A)} + \omega^2 a_{x_0}^{(A)}}{\varepsilon^2 + \omega^4} \\ y_0^{(j)} = y_0^{(A)} + \frac{-\varepsilon a_{x_0}^{(A)} + \omega^2 a_{y_0}^{(A)}}{\varepsilon^2 + \omega^4} \end{cases} \quad (103)$$

A gyorsulások álló és mozgó pólusgörcbéi mindig a pillanatnyi J pólusban metszik egymást, *de nem gördülnek le csúszásmentesen egymáson, mint a sebesség pólusgörcbéi!*

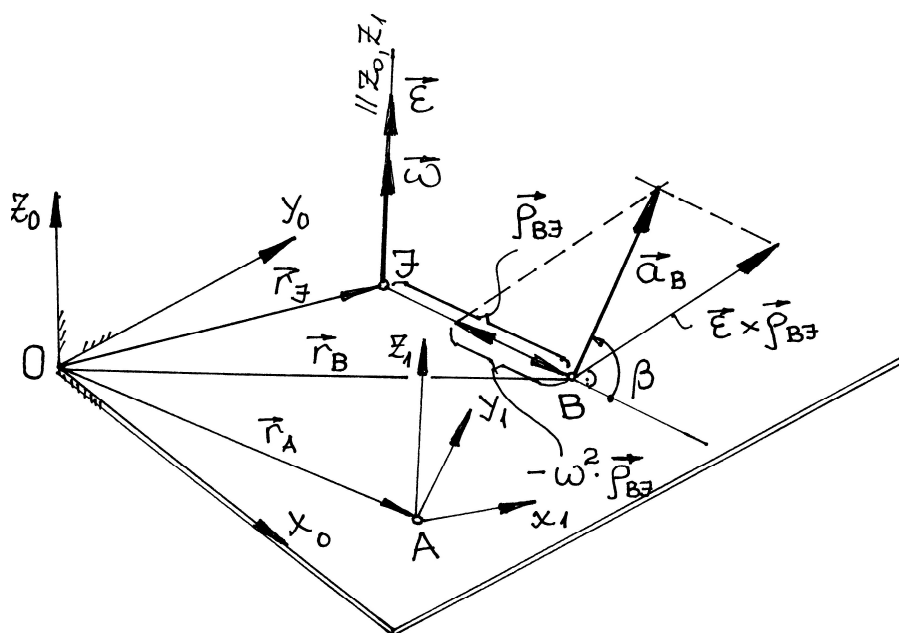
2.3.2.8. A gyorsulás tulajdonságai

Ha a gyorsuláspólust ismert gyorsulású pontként használjuk a gyorsulások számítása során, akkor egyszerűsödik a tetszőleges másik, mondjuk a B pont, gyorsulását adó képlet. Az általános gyorsulás-összefüggést alkalmazzuk a J pontra (99a. képlet), majd $\vec{a}_J = 0$ figyelembevételével a következő egyenletet kapjuk:

$$\vec{a}_B = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{BJ} - \omega^2 \vec{\rho}_{BJ} \quad (104)$$

A gyorsulásvektor abszolút értékének számításakor ki kell használni azt a körülményt, hogy $\vec{\varepsilon}$, $\vec{\rho}_{BJ}$, valamint $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{BJ}$ páronként merőlegesek egymásra. A 25. ábra alapján

$$a_B = \sqrt{(\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{BJ})^2 + (-\omega^2 \vec{\rho}_{BJ})^2} = \sqrt{\varepsilon^2 \rho_{BJ}^2 + \omega^4 \rho_{BJ}^2} = \rho_{BJ} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (105)$$



25. ábra.

A gyorsuláspólus és a gyorsulásvektor összetevői

A (105) képletből látszik, hogy síkmozgás esetében a gyorsulás abszolút értéke egyenesen arányos a pólustól mért távolsággal.

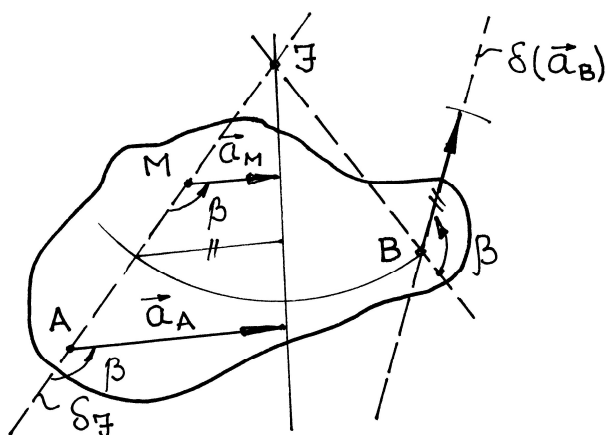
Ha a (104) képlettel megadott gyorsulásvektort skalárisan megszorozzuk a $\vec{\rho}_{BJ}$ helyvektorral, akkor az $\vec{a}_B$ gyorsulásvektor, és az említett helyvektor szögét a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\cos \beta = \frac{\vec{a}_B \cdot \vec{\rho}_{BJ}}{|\vec{a}_B| \cdot |\vec{\rho}_{BJ}|} = \frac{(\vec{\epsilon} \times \vec{\rho}_{BJ} - \omega^2 \vec{\rho}_{BJ}) \cdot \vec{\rho}_{BJ}}{\rho_{BJ} \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} \rho_{BJ}} = \frac{-\omega^2}{\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\omega^2}\right)^2 + 1}} \quad (106)$$

A (106) képletből következik, hogy $\beta \in (\pi/2, \pi)$. Jelölje β_1 a β kiegészítő szögét. Elemi trigonometriai alapösszefüggésekből következik, hogy

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{\epsilon}{\omega^2} \quad (107)$$

2.3.2.9. A gyorsulás geometriai értelmezése

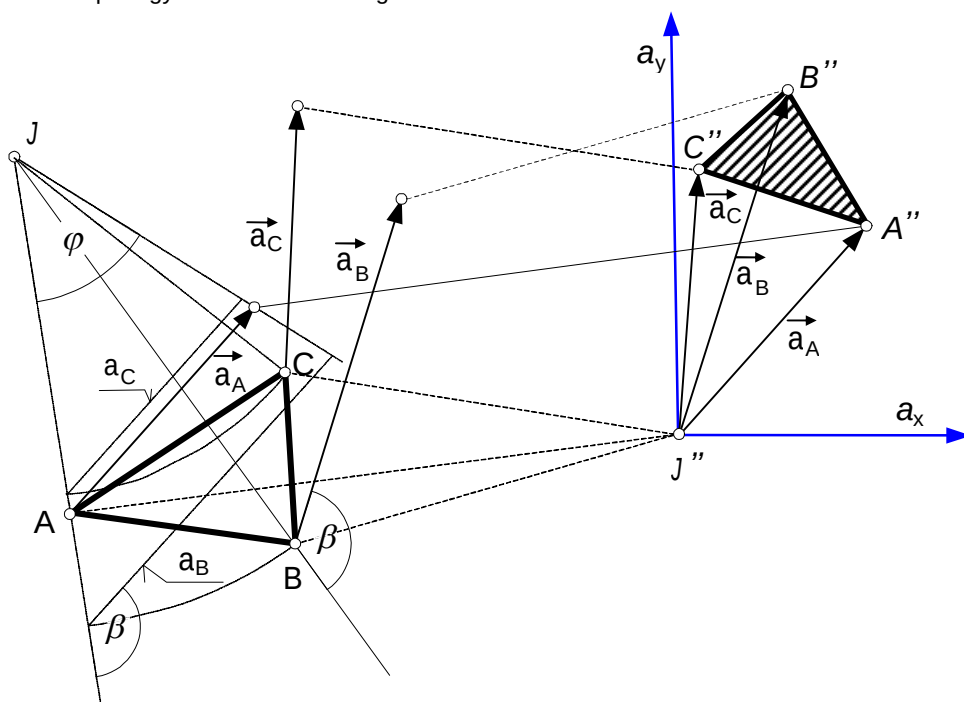


26. ábra.

Adott pont gyorsulásvektorának grafikus szerkesztése

A (106) és (107) képletekből látszik, hogy a gyorsulásvektor és a gyorsuláspólushoz viszonyított relatív helyvektor közötti szög, adott t időpillanatban állandó.

Megszerkeszthető a gyorsuláspólus abban az esetben, amennyiben ismert egy adott pontban a gyorsulásvektor, a szöggyorsulás, és a szögsebesség abszolút értéke vagy pedig két különböző pontban a gyorsulásvektorok iránya, a szöggyorsulás, és a szögsebesség abszolút értéke. A



27. ábra.

A gyorsulására szerkesztése és a Burmeister- féle tétel

szerkesztést a 26. ábrán szemléltetjük.

Az első esetben szerkesszük meg az A pontban valamilyen léptékben a gyorsulást, majd mérjük fel ugyanezen pontban a $\vec{\rho}_{JA}$ irányát kijelölő β szöget az óramutató járásával egyezően, ha pozitív a szöggyorsulás (az ábra ezt az esetet szemlélteti), illetve óramutató járásával ellentétesen, ha negatív a szöggyorsulás. Megjegyezzük, hogy érdemes a szög felmérésének szabályát illetően visszaidézni a 25. ábrát. A (105) képlet megadja a $\vec{\rho}_{JA}$ helyvektor hosszát. Mérjük fel ezt a távolságot az A ponttól a $\vec{\rho}_{JA}$ irányát kijelölő δ_j egyenesen, oly módon, hogy az egyenesszakasz gyorsulással bezárt kisebbik szöge $\pi - \beta$ legyen. A felmért egyenesszakasz másik végpontja a J pillanatnyi gyorsuláspólus.

A második esetben rajzoljuk meg a gyorsulások irányait adó egyeneseket az A és B pontokban, majd mérjük fel mindkét pontban a fentiekkel összhangban a β szöget. Az így kapott egyenesek metszése nyilvánvalóan a J pont lesz.

A második esetben rajzoljuk meg a gyorsulások irányait adó egyeneseket az A és B pontokban, majd mérjük fel mindkét pontban a fentiekkel összhangban a β szöget. Az így kapott egyenesek metszése nyilvánvalóan a J pont lesz.

A (105) összefüggés szerint a gyorsulás abszolút értéke arányos a gyorsuláspólustól mért távolsággal. A gyorsulás iránya pedig úgy kapható meg, hogy a J pontból a kérdéses pontba mutató helyvektort eltoljuk a kérdéses pontba, majd pedig elforgatjuk ott β szöggel a szöggyorsulás megszabta módon (óramutató járásával ellentétesen ha az pozitív, egyezően, ha az negatív). A 26. ábra a fentiek kihasználásával tünteti fel az M pont gyorsulásának szerkesztését. Érdemes leolvasni az ábráról a B ponthoz tartozó gyorsulás szerkesztését is. Itt az okoz látszólag nehézséget, hogy a B nincs rajta a JA egyenesszakaszon. Ez a nehézség feloldható ha átforgatjuk a B pontot a JA egyenesre, mivel az átforgatással kapott pont gyorsulása a B pont gyorsulásának abszolút értéke.

A (106) összefüggés geometriai értelmezése úgy fogalmazható meg, hogy a *pólusból bármely pont gyorsulása ugyanazon szög alatt látszik*. Valóban, a 26. ábrán – a JA szakaszon felvett M testpont $\vec{a}_M$ gyorsulásvektora a JM egyenessel, a (106) reláció értelmében, szintén β szöget alkot. Könnyen belátható, hogy a vektorok végpontjainak mértani helye egy egyenes, és az ebből származó arányosság a Thalész-tételt érvényesíti, ami bizonyítja a feltevést.

Akár a sebességek esetében, a gyorsuláseloszlásra is megszerkeszthető a gyorsulásábra, mely a síkmozgást végző merev test alapszelvényének gyorsulásállapotát jeleníti meg. A gyorsulásábra a testpontok gyorsulásait a közös J" eredőpontba felvéve szemlélteti a $J''a_xa_y$ koordináta-rendszerben, melynek a_x és a_y tengelyei az x_0 illetve y_0 tengellyel párhuzamosak. A szerkesztést a 27. ábra vázolja. Az ábra baloldali részén látható a síkmozgást végző merev test három, nem kollineáris, A, B, és C pontja. Feltételezzük, hogy ismert az

$\vec{a}_A$ gyorsulásvektor, az $\vec{\omega}$ szögsebesség-, illetve az $\vec{\varepsilon}$ szöggyorsulás-vektor, és így ismertnek vehető a gyorsuláspólus pillanatnyi J helyzete is.

Az ábra feltünteti a B pont és a C pont gyorsulásának szerkesztését: először a gyorsulások abszolút értékeinek megfelelő szakaszokat szerkesztjük meg ugyanúgy, mint a 26. ábra esetén. A B pontra fordítva a figyelmet, a gyorsulás abszolút értékének ismeretében és a β szög felhasználásával irányhelyesen is adódik a B pont gyorsulása – a B ponthoz kötötten. Ezt párhuzamos eltolással helyezzük át a $J''a_x a_y$ rendszerbe. Az áthelyezés az A és C pontok esetén is ugyanígy történik.

Figyeljük meg a 27. ábrán a paralelogrammákat!

A gyorsulásábrára is érvényes a Burmeister- féle tétel: a gyorsulásábra A"B"C" háromszöge hasonló a merev test A, B, C pontjai által meghatározott háromszöghöz, és ahhoz képest β szöggel van elfordulva, a szöggyorsulásvektor irányításának megfelelően: az óramutató járásával ellentétesen ha a szöggyorsulás pozitív és azzal egyező irányban, ha a szöggyorsulás negatív.

A tétel igazolása a(99a.) és (100) összefüggésekre alapoz. Első lépésként kifejezzük a (99a.)-ból két tetszőleges testpont gyorsulásának különbségét, jelen esetben a B és A pontok gyorsulásának különbségét:

$$\vec{a}_B - \vec{a}_A = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{BA} - \omega^2 \vec{\rho}_{BA}$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet bal oldalán álló vektorkülönbség abszolút értéke a gyorsulásábra A"B" szakaszával egyenlő, másrészt pedig a $\vec{\rho}_{BA}$ abszolút értékével, azaz az A és B pontok helyvektorai különbségének abszolút értékével egyenesen arányos. Ez utóbbi nem más, mint a gyorsulásábra AB szakasza. Nyilvánvaló, hogy a gyorsulások különbsége és a helyvektorok különbsége által bezárt szög pedig a (106) képletre vezető gondolatmenettel adódik:

$$\frac{(\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{BA} - \omega^2 \vec{\rho}_{BA}) \cdot \vec{\rho}_{BA}}{|\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_{BA} - \omega^2 \vec{\rho}_{BA}| \rho_{BA}} = \frac{-\omega^2 \rho_{BA} \rho_{BA}}{\rho_{BA} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \rho_{BA}} = \frac{-\omega^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} = \cos \beta$$

Mivel a fentiek bármely két pontra érvényesek, könnyen belátható ezek alkalmazhatósága a kérdéses háromszögek AC és A"C", illetve BC és B"C" oldalaira is, aminek következtében az ABC és A"B"C" háromszögek hasonlósága egyértelművé válik.

B. Mátrixmódszer

2.3.2.10. A sebességeloszlás mátrixos tárgyalása.

A mátrixos tárgyalás a koordináta-transzformáción és a mátrixegyenletek deriválásán alapszik. Ismertnek tételezzük fel a síkmozgást végző szerkezeti elem mozgástörvényét, mivel ha ez ismert, akkor bármely időpillanatra felírható a helyálló S_0 és a merev testhez kötött és ezzel együtt mozgó S_1 koordináta-rendszerek között a transzformáció. A mozgástörvényt akkor ismerjük, ha ismeretes a merev test adott pontjának a pályája, és az alapsíkban fekvő tetszőleges két pontját összekötő

egyenes x_0 tengellyel bezárt szöge. Nem sérti az általánosságot, amennyiben az ismert pályájú A testpont lesz az S_1 origója, az ismert irány pedig az Ax_1 tengely. A fentebb megfogalmazott feltételek matematikai alakja a következő:

$$\begin{cases} x_0^{(A)} = x_0^{(A)}(t) & y_0^{(A)} = y_0^{(A)}(t) & z_0^{(A)} = 0 \\ \angle(\vec{i}_0, \vec{i}_1) = \varphi(t) \end{cases} \quad (108)$$

A koordináta-rendszereket a 28. ábra szemlélteti. A mozgás alapsíkja az x_0y_0 sík. Ebben ismertnek tekintjük az alábbi vektorokat:

- a mozgó A origó helyvektorát az S_0 koordinátarendszerben;
- a merev test alapsíkban fekvő – egyébként tetszőleges – B pontjának helyvektorát az S_0 koordináta-rendszerben.

A felsorolt vektorok koordinátái mind az S_0 álló-, mind az S_1 mozgó koordináta-rendszerben felírhatók. A geometriai viszonyokat szemléltető 28. ábráról leolvasható, hogy fennáll az

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}_1^{(B)} \quad (109)$$

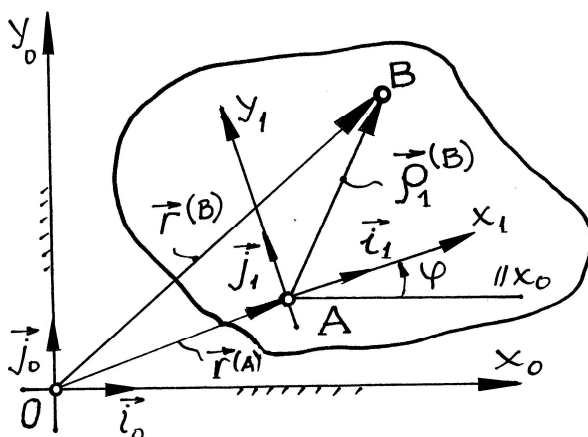
egyenlet. Az A és a B pont koordinátái időfüggőek az S_0 -ban. A B pont S_1 -beli koordinátái időfüggetlenek. A (108) mozgástörvény alapján, a B pont S_0 és S_1 rendszerbeli homogén koordinátái között a következő összefüggés áll fenn:

$$\underline{\mathbf{r}}_0^{(B)} = \mathbf{M}_{01} \underline{\mathbf{r}}_1^{(B)} \quad (110a.)$$

Az $\mathbf{M}_{01}$ transzformációs mátrix egy forgatás és egy eltolás (transzláció) szuperpozíciója:

$$\mathbf{M}_{01} = \mathbf{L}_{01} + \mathbf{T}_{01} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & x_0^{(A)} \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & y_0^{(A)} \\ 0 & 0 & 1 & z_0^{(A)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_0^{(A)} \\ 0 & 0 & 0 & y_0^{(A)} \\ 0 & 0 & 0 & z_0^{(A)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (110b.)$$



28. ábra.
A mátrixmódszer alapjai

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

Emlékezzünk, hogy a bázisvektorok kölcsönös merőlegessége miatt az $\mathbf{L}_{01}$ forgatómátrix ortogonális, és determinánsa egységnyi, így $\mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{01}^T = \mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{01}^{-1} = \hat{\mathbf{E}}$, ahol $\hat{\mathbf{E}}$ a módosított negyedrendű egységmátrix, melynek jobb alsó sarokeleme zérus.

A (110b.) felbontással a (110a) összefüggés a következőképpen írható:

$$\underline{\mathbf{r}}_0^{(B)} = \mathbf{L}_{01} \underline{\mathbf{r}}_1^{(B)} + \mathbf{T}_{01} \underline{\mathbf{r}}_1^{(B)} \quad (111)$$

A B pont sebességét a a helytálló az S_0 rendszerben a (111) képlet idő szerinti deriválásával határozzák meg:

$$\dot{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(B)} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{01} \right) \underline{\mathbf{r}}_1^{(B)} + \left(\frac{d}{dt} \mathbf{T}_{01} \right) \underline{\mathbf{r}}_1^{(B)} \quad (112)$$

A további számításokhoz szükség lesz a következő részeredményekre:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{01}) = \frac{d\varphi}{dt} \begin{bmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi & 0 & 0 \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega;$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{x}_0^{(A)} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{y}_0^{(A)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \left(\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{01} \right) \mathbf{L}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{\omega}_0$$

Mivel a (112) képlet utolsó tagja az A pont S_0 rendszerbeli sebessége – ez a $\mathbf{T}_{01}$ deriváltjának helyettesítése után azonnal következik – a (112) egyenlet az alábbi alakra írható át:

$$\underline{\mathbf{v}}_0^{(B)} = \dot{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(B)} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{01} \right) \underline{\mathbf{r}}_1^{(B)} + \dot{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(A)} \quad (113)$$

A (113) képlet alkalmas a gyakorlati számítások elvégzésére, mivel a feladat bemenő adataira támaszkodik; ezek a mozgást végző test geometriája, illetve a mozgástörvény transzformációs mátrixszal megadott alakja. Annak belátásához, hogy a (113) egyenlet valójában megegyezik a sebességek közötti összefüggést jelentő (91) egyenlettel, azonos átalakításokra van szükség. Az $\underline{\mathbf{r}}_1^{(B)}$ oszlopot, balról, az $\mathbf{L}_{10} \mathbf{L}_{01} = \hat{\mathbf{E}}$ alakban felírt egységmátrixszal szorozzák:

$$\dot{\mathbf{r}}_0^{(B)} = \underbrace{\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{10}}_{\tilde{\omega}_0} \underbrace{\mathbf{L}_{01} \mathbf{r}_1^{(B)}}_{\mathbf{r}_0^{(BA)}} + \mathbf{r}_0^{(A)} = \tilde{\omega}_0 (\mathbf{r}_0^{(A)} - \mathbf{r}_0^{(B)}) + \mathbf{r}_0^{(A)} \quad (114)$$

Valóban, az $\mathbf{L}_{01} \mathbf{r}_1^{(B)}$ transzformáció a $\vec{\rho}_{BA}$ helyvektor S_0 -ban felírt koordinátáinak $\mathbf{r}_0^{(BA)}$ oszlopa. Tehát egyértelmű, hogy ez nem más, mint a B pont és az A pont S_0 -beli koordinátáinak (a két pont S_0 -beli helyvektorainak) különbsége. A fenti (114) képlet jobboldalából, figyelembe véve az $\tilde{\omega}_0$ ferdeszimmetrius voltát, illetve fizikai jelentését, azonnal látszik, hogy az azonos a vektoriális tárgyalásmód (91) egyenletével.

2.3.2.11. A pólusgörbék mátrixos alakja

A pólusgörbék a sebességpólusok mértani helyei, az álló S_0 , illetve a mozgó S_1 koordináta-rendszerekben. A (113) képlet alkalmas az álló pólusgörbe meghatározására. Essen egybe a B pont a pillantnyi I pólussal. Ekkor a baloldalon zérusmátrix áll. Szorozzuk meg az így adódó egyenletet balról az $\tilde{\omega}_0$ szögsebességmátrixszal. Kapjuk, hogy:

$$\tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(I)} = \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_0 (\mathbf{r}_0^{(I)} - \mathbf{r}_0^{(B)}) + \tilde{\omega}_0 \mathbf{r}_0^{(A)} = 0 \quad (115)$$

Ebben a képletben

$$\tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\omega^2 \mathbf{D}$$

Megjegyezzük, hogy a $\mathbf{D}$ mátrixot az utóbbi képlet értelmezi. Mivel a síkmozgásban a sebességnek csak két, x, illetve y irányú összetevője van, az eredmény semmiben sem változik, ha a $\mathbf{D}$ mátrixot az $\hat{\mathbf{E}}$ módosított egységmátrixszal helyettesítik. Fentiek figyelembevételével a (115) az

$$\mathbf{r}_0^{(I)} = \mathbf{r}_0^{(A)} + \frac{1}{\omega^2} \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} \quad (116)$$

alakra hozható. Ez az egyenlet az álló pólusgörbe egyenlete mátrixokkal felírva.

A mozgó pólusgörbe egyenletét úgy határozzuk meg, hogy kiszámítjuk a sebességpólus helyét a mozgó S_1 koordináta-rendszerben, koordináta-transzformációt alkalmazva S_0 -ból S_1 -be. Ehhez szükségünk lesz az $\mathbf{M}_{01}$ mátrix $\mathbf{M}_{10}$ inverzének felbontására, az alább közölt számításokkal:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{10} = \mathbf{M}_{01}^{-1} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & -x_0^{(A)} \cos \varphi - y_0^{(A)} \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & -y_0^{(A)} \sin \varphi + x_0^{(A)} \cos \varphi \\ 0 & 0 & 1 & -z_0^{(A)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -x_0^{(A)} \cos \varphi - y_0^{(A)} \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & -y_0^{(A)} \sin \varphi + x_0^{(A)} \cos \varphi \\ 0 & 0 & 0 & -z_0^{(A)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \mathbf{L}_{01}^T + \mathbf{T}_{10} = \mathbf{L}_{10} + \mathbf{T}_{10}
 \end{aligned}$$

Ennek figyelembevételével a (116) képletből kapjuk, hogy

$$\underline{\mathbf{r}}_1^{(1)} = \mathbf{M}_{10} \underline{\mathbf{r}}_0^{(1)} = \mathbf{M}_{10} \left\{ \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{1}{\omega^2} \tilde{\omega}_0 \dot{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(A)} \right\} = \underbrace{\mathbf{M}_{10} \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}}_{=0} + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \dot{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(A)} + \underbrace{\frac{1}{\omega^2} \mathbf{T}_{10} \tilde{\omega}_0 \dot{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(A)}}_{=0} \quad (117a.)$$

A fenti egyenlet jobboldalán álló első tag azért nulla-oszlop, mert visszatranszformálja az A pont koordinátáit S_0 -ból az S_1 -be (origó). Az utolsó tag pedig azért tűnik el, mert zérus a $\mathbf{T}_{10}$ mátrix első három oszlopa.

A ferdeszimmetrikus $\tilde{\omega}_0$ szögsebességmátrix változatlan mindkét koordináta-rendszerben, azaz fennáll az $\tilde{\omega}_0 = \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \mathbf{L}_{01} = \tilde{\omega}_1$ összefüggés, mely ezt a tulajdonságot fejezi ki. A függelékben részletesen bizonyítjuk, hogy

$$\tilde{\omega}_i = \mathbf{L}_{ij} \tilde{\omega}_j \mathbf{L}_{ji}$$

Az S_1 koordináta-rendszerre való rátérés céljából a (117a.)-ra azonos átalakításokat alkalmazunk:

$$\underline{\mathbf{r}}_1^{(1)} = \frac{1}{\omega^2} \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \dot{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(A)} = \frac{1}{\omega^2} \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \underbrace{\mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{10}}_{\mathbf{E}} \dot{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(A)} = \frac{1}{\omega^2} \underbrace{\mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \mathbf{L}_{01}}_{\tilde{\omega}_1} \mathbf{L}_{10} \dot{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(A)} = \frac{1}{\omega^2} \tilde{\omega}_1 \dot{\underline{\mathbf{r}}}_1^{(A)} \quad (117b.)$$

A (117b) kifejezés azt mutatja, hogy a mozgó pólusgörbe egyaránt számítható az S_0 , vagy pedig az S_1 koordináta-rendszerbeli sebességek ismeretében.

2.3.2.12. A pólusgörbék kölcsönös burkolása

A pólusgörbék a mozgás során a sebességpólusban érintkeznek. Előbb kijelentettük, hogy a mozgó pólusgörbe az álló pólusgörbén legördül. Ha a megfigyelő a mozgó S_1 koordináta-rendszerhez kötött, akkor számára az álló pólusgörbe

mozgó pólusgörbéhez viszonyított mozgása lesz észlelhető. A pólusgörbe-elmélet alkalmazásaiban – például a fogaskerékkapcsolás elméletében – a hajtópár tagjainak egyméshoz viszonyított mozgása síkmozgás, tehát a pólusgörbékét a hajtás tagjaihoz kötött koordináta-rendszerekben értelmezzük. Ennek következtében nyilvánvalóvá válik a pólusgörbék kölcsönös legördülésének fogalma, aminek szigorú matematikai bizonyításához azt kell megmutatni, hogy a *pólusvándorlás sebessége a két pólusgörbén azonos*.

Az álló pólusgörbe (116) egyenletének idő szerinti deriváltja a pólusvándorlási sebességet fejezi ki az álló pólusgörbén:

$$\dot{\mathbf{r}}_0^{(I)} = \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega^2} \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} \right) = \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} - \frac{2\varepsilon}{\omega^3} \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{1}{\omega^2} \tilde{\varepsilon}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{1}{\omega^2} \tilde{\omega}_0 \ddot{\mathbf{r}}_0^{(A)} \quad (118a.)$$

A (117b) idő szerinti deriváltja a pólus vándorlási sebességét eredményezi a mozgó centroidán:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1^{(I)} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega^2} \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} \right) = & -\frac{2\varepsilon}{\omega^3} \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{1}{\omega^2} \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{10}) \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \\ & + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{L}_{10} \tilde{\varepsilon}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \ddot{\mathbf{r}}_0^{(A)} \end{aligned} \quad (118b.)$$

A mozgó pólusgörbe sebességvektorát át kell írni az S_0 rendszerbe ahhoz, hogy összehasonlítható legyen az álló pólusgörbe pólusvándorlási sebességével (118a.). Ennek érdekében a (118b.) egyenletet, balról, az $\mathbf{L}_{01}$ mátrixszal meg kell szorozni:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{01} \dot{\mathbf{r}}_1^{(I)} = & -\frac{2\varepsilon}{\omega^3} \mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{L}_{01} \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{10}) \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \\ & + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{10} \tilde{\varepsilon}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \ddot{\mathbf{r}}_0^{(A)} = \\ = & -\frac{2\varepsilon}{\omega^3} \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{1}{\omega^2} \mathbf{L}_{01} \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{10}) \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{1}{\omega^2} \tilde{\varepsilon}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{1}{\omega^2} \tilde{\omega}_0 \ddot{\mathbf{r}}_0^{(A)} \end{aligned} \quad (118c.)$$

A (118c.) és (118a.) egybevetéséből azonnal következik, hogy csak akkor állhat fenn egyenlőség, ha

$$\omega^{-2} \mathbf{L}_{01} \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{10}) \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} = \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} \quad (119)$$

Az utóbbi képlet igazolásánál kihasználjuk majd, hogy zérus értékű az $\mathbf{L}_{10} \mathbf{L}_{01} = \hat{\mathbf{E}}$ szorzat idő szerinti deriváltja, azaz fennáll a

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{01}\right)\mathbf{L}_{10} + \mathbf{L}_{01}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{10}\right) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{L}_{01}\left(\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{10}\right) = -\left(\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{01}\right)\mathbf{L}_{10} = -\tilde{\omega}_0 \quad (120)$$

egyenlet – emlékeztetjük ehelyütt az olvasót a (112) egyenletet követő legutolsó részeredményre, valamint a (115) képletet követő képletsorra, ami az $\tilde{\omega}$ ferdeszimmetrikus mátrix négyzetét tárgyalja, és bevezeti a $\mathbf{D}$ mátrixot.

A fentieket figyelembe véve, a (119) egyenlet baloldala a következőképpen alakítható át:

$$\omega^{-2} \underbrace{\mathbf{L}_{01} \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{10})}_{-[\tilde{\omega}_0]} \tilde{\omega}_0 \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} = -\omega^{-2} \underbrace{\tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_0}_{-\omega^2 \mathbf{D}} \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} = -\omega^{-2} (-\omega^2) \mathbf{D} \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)} = \dot{\mathbf{r}}_0^{(A)}$$

Ez az eredmény állításunk szigorú igazolását jelenti: a pólusgörbék csúszásmentesen gördülnek le egymáson, mivel a pólusban azonos a pólusvándorlás sebessége. Emlékezzünk, hogy ez a következtetés a vektormódszer ismertetésekor logikai megfontolásokra alapozottan volt kijelentve.

A fogaskerékkapcsolás elméletében kiemelt fontosságú alkalmazást nyer a pólusgörbék elmélete. A kapcsolódás sajátosságainak feltárása lehetetlen a pólusgörbék egymáson történő legördülésének tanulmányozása nélkül.

2.3.2.13. Gyorsuláseloszlás mátrixokkal

A gyorsulás a sebesség idő szerinti deriválásával határozható meg. A (112) képlet alapján írhatjuk, hogy:

$$\underline{\mathbf{a}}_0^{(B)} = \underline{\mathbf{v}}_0^{(B)} = \underline{\dot{\mathbf{r}}}_0^{(B)} = \underline{\dot{\mathbf{r}}}_0^{(A)} + \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{L}_{01})\mathbf{r}_1^{(B)} \quad (121)$$

A (120) összefüggés alapján felírható, hogy:

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{01}\right)\mathbf{L}_{10} = \tilde{\omega}_0, \quad \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \underbrace{\mathbf{L}_{10}\mathbf{L}_{01}}_{\tilde{\mathbf{E}}} = \tilde{\omega}_0 \mathbf{L}_{01} \Rightarrow \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} = \tilde{\omega}_0 \mathbf{L}_{01}$$

összefüggést:

$$\frac{d^2\mathbf{L}_{01}}{dt^2} = \left(\frac{d}{dt}\tilde{\omega}_0\right)\mathbf{L}_{01} + \tilde{\omega}_0 \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} = \tilde{\epsilon}_0 \mathbf{L}_{01} + \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_0 \mathbf{L}_{01} = \tilde{\epsilon}_0 \mathbf{L}_{01} - \omega^2 \mathbf{D} \mathbf{L}_{01} \quad (122)$$

A (122) képlet (121)-be történő helyettesítésével, továbbá $\mathbf{D}$ értelmezésének és a transzformáció szabályának kihasználásával kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}_0^{(B)} &= \underline{\dot{\mathbf{r}}}_0^{(A)} + (\tilde{\epsilon}_0 \mathbf{L}_{01} - \omega^2 \mathbf{D} \mathbf{L}_{01})\mathbf{r}_1^{(B)} = \underline{\dot{\mathbf{r}}}_0^{(A)} + \tilde{\epsilon}_0 \mathbf{L}_{01} \mathbf{r}_1^{(B)} - \omega^2 \mathbf{L}_{01} \mathbf{r}_1^{(B)} = \\ &= \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} + \tilde{\epsilon}_0 \underline{\mathbf{q}}_0^{(BA)} - \omega^2 \underline{\mathbf{q}}_0^{(BA)} \end{aligned}$$

Az eredmény felírásakor kihasználtuk, hogy az S_1 koordináta-rendszer origójához felírt $\vec{\rho}_{BA}$ helyvektor $\underline{\mathbf{r}}_1^{(B)}$ koordinátáinak transzformáltja az S_0 koordináta-rendszerbe $\underline{\mathbf{p}}_0^{(BA)}$ ami a B és A pontok S_0 -beli koordinátáinak különbségeként állítható elő. Ennek alapján a gyorsulás végleges mátrixos alakja a következőképpen írható fel:

$$\underline{\mathbf{a}}_0^{(B)} = \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(B)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}) - \omega^2 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(B)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}) \quad (123)$$

Ez a képlet ugyanolyan szerkezetű, mint a vektoros tárgyalásmód esetén:

- $\underline{\mathbf{a}}_0^{(A)}$ az A pont gyorsulása a rögzített koordináta-rendszerben;
- $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(B)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)})$ a B pont A pont körüli elfordulásából adódó tangenciális gyorsulás;
- $-\omega^2 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(B)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)})$ a B pont A pont körüli elfordulásából adódó normálgyorsulás.

A gyorsulás mátrixos alakját az S_1 mozgó koordinátarendszerben a (123) egyenletből kapjuk meg, ha végigszorozzuk azt balról az $\mathbf{L}_{10}$ transzformációs mátrixszal:

$$\underline{\mathbf{a}}_1^{(B)} = \mathbf{L}_{10} \underline{\mathbf{a}}_0^{(B)} = \mathbf{L}_{10} \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} + \mathbf{L}_{10} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(B)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}) - \omega^2 \mathbf{L}_{10} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(B)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)})$$

Azonos átalakításokkal, a már korábban is látott lépésekkel, az $\mathbf{L}_{01}\mathbf{L}_{10}$ felírású egység mátrix megfelelő felhasználásával kapjuk, hogy

$$\underline{\mathbf{a}}_1^{(B)} = \underbrace{\mathbf{L}_{10} \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)}}_{\underline{\mathbf{a}}_1^{(A)}} + \underbrace{\mathbf{L}_{10} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \mathbf{L}_{01}}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1} \underbrace{\mathbf{L}_{10} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(B)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)})}_{\underline{\mathbf{r}}_1^{(B)}} - \omega^2 \underbrace{\mathbf{L}_{10} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(B)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)})}_{\underline{\mathbf{r}}_1^{(B)}}$$

Egyszerűsítve

$$\underline{\mathbf{a}}_1^{(B)} = \underline{\mathbf{a}}_1^{(A)} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \underline{\mathbf{r}}_1^{(B)} - \omega^2 \underline{\mathbf{r}}_1^{(B)} \quad (124)$$

2.3.2.14. A gyorsuláspólus

A gyorsuláspólus mátrixos számításának menete hasonló a vektormódszer esetén bemutatott számításhoz. Ennek megfelelően lokalizáljuk a (123) egyenletet a J pontra (írjunk J-t a B helyére az egyenletben):

$$\underline{\mathbf{a}}_0^{(J)} = \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(J)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}) - \omega^2 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(J)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}) = 0 \quad (125)$$

Szorozzuk most végig az egyenletet balról $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ -val és használjuk ki eközben, hogy $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 = -\varepsilon^2 \mathbf{D}$. Kapjuk, hogy

$$0 = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} - \varepsilon^2 \mathbf{D} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(J)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}) - \omega^2 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(J)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)})$$

Helyettesítsük most ebbe az egyenletbe a (125) egyenletből az

$$\tilde{\epsilon}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(j)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}) = \omega^2 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(j)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}) - \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)}$$

szorzatot. Behelyettesítve ezt az antiszimmetrikus gyorsulásmátrixszal szorzott alakba, következik, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{\epsilon}_0 \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} - \epsilon^2 \mathbf{D} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(j)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}) - \omega^2 (\omega^2 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(j)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}) - \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)}) = \\ &= \tilde{\epsilon}_0 \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} - (\epsilon^2 + \omega^4) (\underline{\mathbf{r}}_0^{(j)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)}) + \omega^2 \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} \end{aligned}$$

Innen, a gyorsuláspólus helyét az S_0 koordinátarendszerben megadó mátrix:

$$\underline{\mathbf{r}}_0^{(j)} = \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)} + \frac{\omega^2}{\epsilon^2 + \omega^4} \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} + \frac{1}{\epsilon^2 + \omega^4} \tilde{\epsilon}_0 \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} ; \quad \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} = \underline{\mathbf{r}}_0^{(A)} \quad (126)$$

A gyorsuláspólus helyzetét a mozgó koordináta-rendszerben úgy határozzuk meg, hogy az S_0 -ból S_1 -be alakító $\mathbf{M}_{10} = \mathbf{M}_{01}^T$ transzformáció mátrixával, balról átszorozzuk a (126) egyenletet. A számítás a mozgó pólusgörbe mátrixos egyenletével kapcsolatos gondolatmenet ismétlésével végezhető el (visszautalunk ezzel kapcsolatban a (117b) képletre vezető gondolatmenetre). Ehelyütt csak a végeredményt közöljük:

$$\underline{\mathbf{r}}_1^{(j)} = \frac{\omega^2}{\epsilon^2 + \omega^4} \underbrace{\mathbf{L}_{10} \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)}}_{\underline{\mathbf{a}}_1^{(A)}} + \frac{1}{\epsilon^2 + \omega^4} \mathbf{L}_{10} \tilde{\epsilon}_0 \underbrace{\mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{10}}_{\mathbf{E}} \underline{\mathbf{a}}_0^{(A)} = \frac{\omega^2}{\epsilon^2 + \omega^4} \underline{\mathbf{a}}_1^{(A)} + \frac{1}{\epsilon^2 + \omega^4} \tilde{\epsilon}_1 \underline{\mathbf{a}}_1^{(A)} \quad (127)$$

2.3.3. A gömbmozgás

2.3.3.1. A gömbmozgás meghatározása

A gömbmozgás a a gépészeti alkalmazásokban, itt elsősorban a robotokra, egyes hajtóművekre és térbeli mozgást megvalósító különböző mechanizmusokra gondolunk, gyakran fellépő mozgás. A robotok esetében, ha két szerkezeti elemet (robotkart) gömbcsukló köt össze, az egyik szerkezeti elem másik szerkezeti elemhez viszonyított mozgása gömbmozgás lesz. Hasonló a helyzet akkor is, amikor egymást metsző tengelyű fogaskerék-hajtás (kúpfogaskerék-hajtás) biztosítja a mozgásátvitelt. Ebben az esetben a kúpfogaskerékpár bármelyik tagja gömbmozgást végez a másik kerékhez viszonyítva. A gépjárművek hajtóműveiben nélkülözhetetlen differenciálmű (29. ábra) kúpkerékei is gömbmozgást végeznek.

Gömbmozgásról akkor beszélünk, ha mozgó test egy pontja mozdulatlan marad a mozgás során. Ezt a pontot a gömbmozgás középpontjának, vagy pólusának nevezik. Helyzetét tekintve a pólus lehet a vizsgált merev test egy pontja, vagy pedig a testen kívül, de annak felszínéhez mereven köthött módon helyezkedik el.



29. ábra.

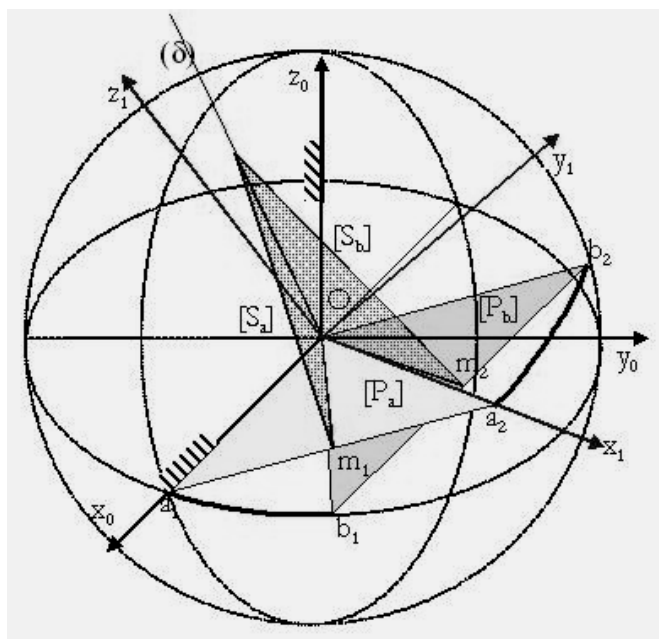
Differenciálmű

[http://www.4x4akademia.hu/er-06011-differencialmu_tortenete.shtml]

A test pontjai tehát olyan gömbfelületeken mozognak, melyeknek a pólus közös középpontja, a sugaruk pedig a testpont pólushoz viszonyított távolsága. Innen ered a mozgás neve is. Szokás a mozgást helytálló pont körüli forgásnak is nevezni.

A gömbmozgás értelmezése a síkmozgás esetében alkalmazott gondolatmenettel is lehetséges. Kiválasztható egy tetszőleges sugarú alapgömb, amelynek középpontja egybeesik a mozgás pólusával. Az alapszelvényt a mozgást végző merev test alapgömbön elhelyezkedő pontjainak halmaza alkotja. A mozgás vizsgálatakor az alapszelvény alapgömbön való elmozdulását tekintjük.

A gömbmozgás geometriai értelmezése a 30. ábrán látható. Az ábra egyaránt szemlélteti alapgömböt, valamint a mozgás leírásához szükséges paramétereket, továbbá feltünteti a helytálló S_0 és a testhez kötött S_1 koordináta-rendszer tengelyeit is. Legyen az a_1 és b_1 az alapgömbön kiválasztott, egymástól különböző egyébként tetszőleges, két testpont a mozgás t_0 időpillanatában. Megjegyezzük, hogy nem sérti az általánosságot az a körülmény, hogy ez a két pont az x_0y_0 koordináta-síkban fekszik, mivel ezt a körülményt nem használjuk majd ki a gondolatmenet során. (A mozgás elemzése, akár a síkmozgás esetében, a mozgást végző test két, tetszőlegesen választott, pontjának tanulmányozásával valósul meg. Bármely más pont, a test merevsége folytán, a kiválasztott pontokhoz kötött, tehát ezekkel együtt mozog.) Δt idő elteltével, a $t_0 + \Delta t$ pillanatban, az a_1b_1 ív az a_2b_2 helyzetbe kerül. A kezdeti és végső helyzeteket illetően megszerkeszthetők az a_1Oa_2 , illetve a b_1Ob_2 egyenlő szárú háromszögek, melyek az $[P_a]$, illetve $[P_b]$ ekvatoriális síkokban helyezkednek el. Legyen m_1 az a_1a_2 , illetve m_2 a b_1b_2 szakaszok felezőpontja. Az $[S_a]$, illetve az $[S_b]$ síkokat egyrészt az Om_1 , illetve az Om_2 felező merőlegesek, másrészt az $[P_a]$, illetve $[P_b]$ síkokra az O pontban állított



30. ábra.

A gömbmozgás értelmezése

merőleges egyenesek feszítik ki. Világos, hogy az $[S_a]$ sík bármely pontja az a_1 és a_2 pontoktól egyenlő távolságra található. Ugyanez érvényes, az $[S_b]$ síkot tekintve, a b_1 és b_2 pontokra nézve is. Az S_a és S_b síkok $[\delta] = [S_a] \cap [S_b]$ metszéspontjának bármely C pontjára érvényes az $a_1C = a_2C$ és $b_1C = b_2C$ egyenlőség, tehát a C szimmetrikus a kezdeti és végpontokhoz. Másrészt, a szerkesztéséből adódóan, a $[\delta]$ egyenes merőleges az a_1a_2 , illetve a b_1b_2 szakaszokra, azaz létezik két olyan, a $[\delta]$ -ra merőleges (következésképp egymással párhuzamos), sík me-

lyeknek egyik tartóegyenese a_1a_2 illetve b_1b_2 . A fentebb mondottak alapján belátható, hogy a $[\delta]$ körüli forgatással egyidőben jut el a_1 az a_2 -re, és b_1 a b_2 -re. Ha a Δt időintervallum a nullához tart, akkor az a_1a_2 és b_1b_2 ívek, illetve szakaszok elemi hosszúságúak lesznek, de a geometriai szerkesztés így is érvényben marad, azaz a $[\delta]$ egyenes a pillanatnyi forgástengely szerepét tölti be.

2.3.3.2. A gömbmozgás szabadságfoka

A gömbmozgásnak 3 a szabadságfoka. Ennek igazolására tekintsük a gömbmozgást végző merev test három, nem kollineáris és nem feltétlenül egyetlen pólusközéppontú gömbre illeszkedő, A, B, C pontját. Az A, B, C pontok koordinátái nyilvánvalóan időfüggőek az S_0 koordináta-rendszerben. Ez összesen 9 időfüggő koordinátát jelent, amelyek 6 kényszerfeltételnek kötelesek elegendet tenni. A kényszerfeltételek a tekintett pontok pólustól és egymástól mért távolságainak állandóságát fejezik ki:

$$\begin{cases} x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = R_i^2 & i \in \{A, B, C\} \\ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = l_{jk}^2 & i, j, k \in \{A, B, C\}, i \neq j \neq k \end{cases} \quad (128)$$

Nyilvánvaló az előzőek alapján, hogy a (128) összefüggésekkel megadott 6 kényszerfeltétel a 9 koordinátából csupán hármat hagy szabadon, így a gömbmozgásnak, a síkmozgáshoz hasonlóan, három a szabadságfoka. A három szabad koordináta azonban nem köthető ugyanazon ponthoz! Minden pont egy adott sugarú, pólusközéppontú gömbi pályát ír le, aminek következtében az adott pont koordinátáinak négyzetösszege a pályatartó gömb sugarának értékére állandósul – így legfeljebb két koordináta lehet független, a harmadik a kényszerfeltételből adódik. A megmaradt szabadságfokot pedig egy, az előbbtől különböző pont *egyetlen* koordinátájához lehet kötni.

Ugyanakkor a gömbmozgás pólusa helytálló: a mozgásban tehát nincs eltolódás (transzláció). Ebből adódik, hogy mindhárom szabadságfok valójában elfordulás jellegű. Megjegyezzük, hogy adott esetben különbséget kell tenni a szabadságfok geometriai értelmezése és a mozgást leíró koordináták matematikai megadása között. A (128) egyenletekben a szabad helykoordináták száma három, ugyanakkor maga a formalizmus nem tükrözi közvetlenül, hogy a gömbmozgást végző test három egymást követő forgatással jut el a egyik helyzetéből a másikba.

A gömbmozgás a merev test végtelenül sok, egymástól különböző, de a póluson mindig áthaladó tengelyek körül végzett, elemi forgásainak sorozata.

A három szabadságfokot, a 30. ábra segítségével, pusztán geometriai gondolatmenettel is ki lehet mutatni. A gondolatmenet célja annak tisztázása, hány független paraméter kell a merev test helyzetét egyértelműen meghatározó a_1b_1 gömbi ív helyének megadásához: Az a_1 pont az R sugarú gömbön szabadon mozoghat, így a helyzetét két gömbi szögkoordináta (ezek mondjuk (a) az Oa_1 egyenes és a Z_0 koordinátatengely által kifeszített gömbi fősík x_0y_0 koordinátasíkkal alkotott metszészvonala, valamint az x_0 tengely közötti szög – ez az ábrán zérus értékű –, illetve (b) az Oa_1 egyenes és a Z_0 koordinátatengely közötti szög – ez az ábrán 90° – egyértelműen meghatározza. Ez két szabad koordináta, aminek természetesen két szabadságfok felel meg. Továbbmenve nyilvánvaló, hogy a b_1 pont az a_1 ponttól a_1b_1 távolságra fekvő olyan gömbi körön fekszik, (a) amelynek síkja merőleges az Oa_1 sugárra, (b) középpontja pedig az Oa_1 sugáron van. A b_1 pont helyét ezen a körön egy skalárparaméter (mondjuk a kör egy P pontjától mért ívkoordináta, vagy pedig az Oa_1 tengely körüli elfordulás szöge) egyértelműen meghatározza. Ez a paraméter további szabadságfokot jelent. A mozgásnak tehát valóban 3 a szabadságfoka.

Ha a mozgás folytonos az időben, akkor az úgy tekinthető mint végtelenül sok, végtelenül kicsi időintervallum-különbségekkel előálló testhelyzetek sorozata. Ez esetben a merev test két, végtelenül közeli, testhelyzet közötti elmozdulása olyan elemi forgómozgás, melynek tengelye áthalad a póluson. Ezt a tengelyt, a síkmozgás esetéhez hasonlóan, *pillanatnyi forgástengelynek* nevezzük.

2.3.3.3. A gömbmozgás pályaegyenletei

A. Az egyenletek általános alakja

A gömbmozgást végző merev test pontjainak pályái gömbfelületeken fekszenek. Az is nyilvánvaló emellett, hogy a póluson áthaladó egyenesek pontjainak pályái olyan kúpfelületeken fekszenek, melyek csúcsa a mozgás O pólusa, vezérgörbéje pedig az egyenes valamely pontjának pályája. Az egyes pályagörbék, illetve a kúpfelületek a mozgástörvény ismeretében határozhatók meg.

A mozgástörvény többféleképpen adható meg. Mindhárom szabadságfokhoz tartozik egy-egy – egymástól független – időfüggvény, amely a test helyzetét egyértelműen megadó geometriai mennyiséget fejez ki (alkalmas szög-, vagy hosszkoordináta). A mozgástörvényt, a feladat sajátosságai alapján, úgy kell megfogalmazni, hogy a vizsgált szerkezet felépítését is figyelembe véve, matematikailag a lehető legegyszerűbb legyen.. A korábbiakhoz hasonlóan kitüntetett szerepet kap a vizsgálatokban az álló $x_0y_0z_0$, a továbbiakban S_0 , és a testhez kötött, azzal együtt mozgó $x_1y_1z_1$ (a továbbiakban S_1) koordináta-rendszer. Általános esetben úgy fejezhető ki a legkönnyebben a mozgástörvény, ha minden időpillanatban ismert a két koordináta-rendszer közötti kapcsolat.

Ismertnek tekintjük a mozgást végző test geometriáját, az S_1 koordináta-rendszerben. A tetszőlegesen választott A testpont – ebben a koordináta-rendszerben állandó – helyvektora az

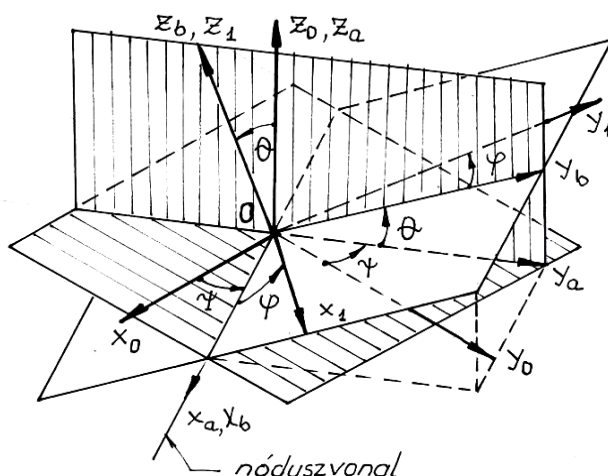
$$\vec{r}_1^{(A)} = x_1^{(A)} \vec{i}_1 + y_1^{(A)} \vec{j}_1 + z_1^{(A)} \vec{k}_1 \quad (129)$$

alakban írható fel. Az S_0 és S_1 koordináta-rendszerek közötti kapcsolatot pedig az

$$\begin{cases} \vec{i}_1 = \alpha_1 \vec{i}_0 + \beta_1 \vec{j}_0 + \gamma_1 \vec{k}_0 \\ \vec{j}_1 = \alpha_2 \vec{i}_0 + \beta_2 \vec{j}_0 + \gamma_2 \vec{k}_0 \\ \vec{k}_1 = \alpha_3 \vec{i}_0 + \beta_3 \vec{j}_0 + \gamma_3 \vec{k}_0 \end{cases} \quad (130)$$

egyenletrendszer adja meg. Az iránykoszinuszok alkotta transzformációs mátrix – ezt a szokott módon $\mathbf{L}_{10}$ jelöli – ortogonalitása a 9 iránykoszinusz között 6 független összefüggés felírását teszi lehetővé, így a három szabadságfok fennmarad. Ez azt jelenti, hogy elvben a kilenc iránykoszinusz közül bármelyik három elegendő a mozgás leírásához

Legyen $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, $\xi_3(t)$, a mozgás egy-egy szabadságának megfelelő, egymástól független, egyébként az időtől függő paraméter. Figyelembe véve, hogy általános esetben az iránykoszinuszok a bevezetett három paraméter függvényei, átírható a (130) egyenlet:



31. ábra
Az Euler-féle szögek definíciója

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & \beta_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & \gamma_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \alpha_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & \beta_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & \gamma_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \alpha_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & \beta_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) & \gamma_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{10}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \begin{bmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{bmatrix} \quad (131)$$

Ha a (129) egyenletbe helyettesítjük a (131) egyenlettel kifejezett egységvektorokat, akkor az A pont pályájának a vektoregyenletét kapjuk, a rögzített S_0 koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0^{(A)} = & (\alpha_1 x_1^{(A)} + \alpha_2 y_1^{(A)} + \alpha_3 z_1^{(A)}) \vec{i}_0 + (\beta_1 x_1^{(A)} + \beta_2 y_1^{(A)} + \beta_3 z_1^{(A)}) \vec{j}_0 + \\ & + (\gamma_1 x_1^{(A)} + \gamma_2 y_1^{(A)} + \gamma_3 z_1^{(A)}) \vec{k}_0 \end{aligned} \quad (132)$$

B. A pályagörbe tárgyalása Euler-szögekkel

A mozgó és az álló koordináta-rendszer közötti kapcsolatot, azaz a mozgástörvényt, az Euler szögek (ezek pontos értelmezésére még visszatérünk) segítségével is le lehet írni. Ekkor a három szabadságfoknak megfelelő, időtől függő, szögkoordináta szerepét töltik be. A mozgástörvényt, az Euler szögek segítségével az alábbi módon adható meg:

$$\psi = \psi(t); \quad \theta = \theta(t); \quad \varphi = \varphi(t). \quad (133)$$

A számítások a 31. ábra alapján végezhetők el.

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

A mozgás kezdetekor egybeesik az álló és mozgó koordináta-rendszer. Adott Δt idő elteltével a mozgórendszer az $X_1 Y_1 Z_1$ helyzetbe kerül. Az X_1, Y_1, Z_1 koordinátatengelyek helyzetét a három Euler szög megszabta forgatás határozza meg:

- A ψ szög az álló koordináta-rendszer Z_0 tengelye körüli elfordulás (forgatás) szöge, ami az X_a, Y_a, Z_a helyzetbe viszi át az X_1, Y_1, Z_1 koordináta-tengelyeket;
- a θ szög az X_a tengely körüli elfordulás (forgatás) szöge, ez az X_b, Y_b, Z_b helyzetbe viszi át az X_a, Y_a, Z_a koordináta-tengelyeket;
- a φ szög a Z_a tengely körüli forgatás szöge, ez a végső X_1, Y_1, Z_1 helyzetbe viszi át az X_b, Y_b, Z_b koordináta-tengelyeket;

Vegyük észre, hogy az álló koordináta-rendszerrel kezdetben egybeeső mozgó koordináta-rendszer két további, S_a és S_b jelű, koordináta-rendszeren keresztül jut el végső helyzetébe. A ψ szöggel történő forgatás az S_0 koordináta-rendszert az S_a -ba, a θ szöggel történő forgatás az S_a koordináta-rendszert az S_b -be, és végül a φ szöggel történő forgatás az S_b koordináta-rendszert a merev test végső állapotához kötött S_1 koordináta-rendszerbe viszi át. A két segédkoordináta-rendszer a mozgó test két közbülső (mozgás közbeni) helyzetéhez tartozik.

Figyelembe véve a forgatások sorrendjét, valamint ezek sajátosságait, a merev test tetszőleges M pontjának koordinátái az álló rendszerben a

$$\underline{r}_0 = \mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} \underline{r}_1 \quad (134)$$

képlettel határozhatók meg. A transzformáció mátrixait a 31. ábra alapján írjuk fel; ezek rendre az S_a -ból az S_0 -ba, az S_b -ből az S_a -ba, és végül az S_1 -ből az S_b -be történő transzformáció mátrixai:

$$\mathbf{M}_{0a} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{ab} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

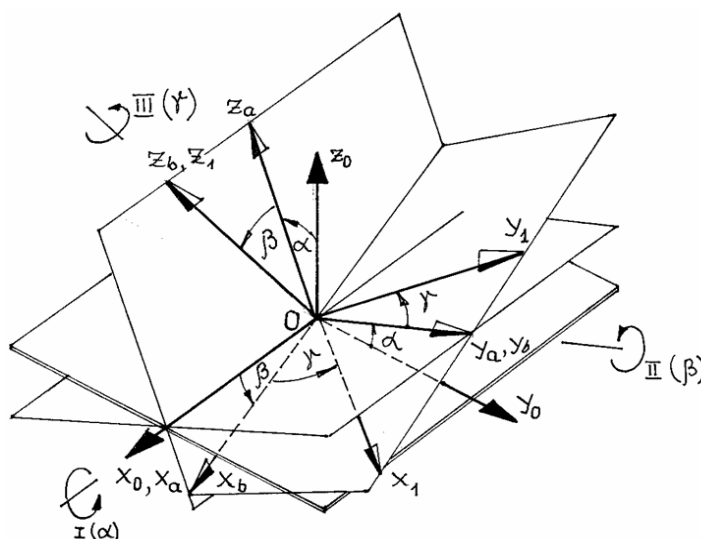
$$\mathbf{M}_{b1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (135)$$

A (134) és (135) összefüggések mindegyike függ az Euler-szögeken keresztül az időtől, következésképp adott $\underline{r}_1$ helyvektorú testpont pályagörbéjének parametrikus egyenleteit a (134) mátrixegyenletből, a (135) figyelembevételével, elemi számításokkal kapjuk:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_1(\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi) - y_1(\cos\psi \sin\varphi + \sin\psi \cos\theta \cos\varphi) + \\ \quad + z_1 \sin\psi \sin\theta \\ y_0(t) = x_1(\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi) - y_1(\sin\psi \sin\varphi - \cos\psi \cos\theta \cos\varphi) - \\ \quad - z_1 \cos\psi \sin\theta \\ z_0(t) = x_1 \sin\theta \sin\varphi + y_1 \sin\theta \cos\varphi + z_1 \cos\theta \end{cases} \quad (136)$$

C. A pályagörbe tárgyalása koordináta-tengelyek körüli forgatásokkal

A fent bemutatottakhoz hasonló alakban adódik a pályagörbe egyenlete, ha nem az Euler szögeket, hanem a koordináta-tengelyek körüli elfordulásokat – ezeket az alábbiak részletezik – tekintjük paraméternek. (A korábbi jelöléseket is használjuk majd, de ez nem okozhat félreértést.) A 32. ábra alapján az álló S_0 koordináta-rendszerrel kezdetben egybeeső helyzetű S_1 mozgó koordináta-rendszert először az x_0 körül forgatjuk el α szöggel, így S_a helyzetbe hozzuk; majd az y_a körül forgatjuk el β szöggel, hogy S_b -vel egybeessen, legvégül pedig a z_b tengely körül γ szöggel. Az α , β és γ szögek az idő függvényei. A pályagörbét most is a (134) egyenlet adja meg, de mások a transzformációs mátrixok:



32. ábra.

A koordináta-tengelyek körüli forgatások rendszere

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{0a} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{M}_{ab} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{M}_{b1} &= \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (137)$$

A fentebb bemutatott két módszer különbségének az a lényege, ezt ismét hangsúlyozni kívánjuk, hogy a kordináta-tengelyek körüli forgatásnál a mozgó rendszernek az álló rendszerhez viszonyított helyzetét a három koordinátatengely körüli forgatás határozza meg, ellentétben az Euler-szöges felírással, ahol a z tengelyek körül kétszer forgatunk.

2.3.3.4. A sebességeloszlás

A. Vektormódszer

A gömbmozgást végző merev test adott pontjának sebessége a pillanatnyi forgástengely ismeretében határozható meg a legkönnyebben. Mivel a mozgás végtelenül kicsi, változó helyzetű tengelyek körüli forgatások sorozata, meg kell határozni a pillanatnyi forgástengelyt, és a pillanatnyi szögsebességet. A vektormódszer a pillanatnyi szögsebességvektor helyzetének és abszolút értékének geometriai észrevételek alapján történő meghatározását jelenti.

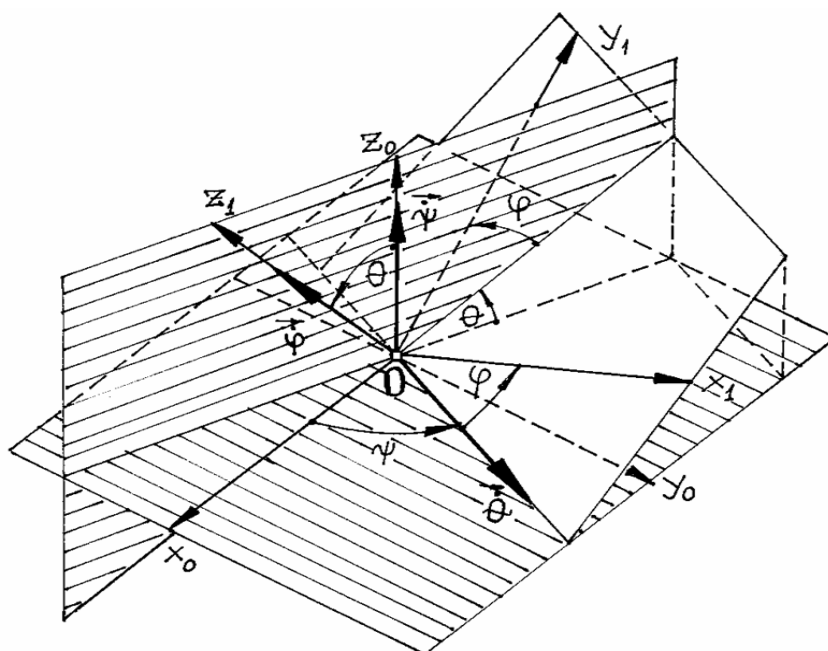
Legyen a mozgó koordináta-rendszer helyzete adott t időpillanatban a $\psi(t)$, $\theta(t)$ és $\varphi(t)$ szögfüggvények pillanatnyi értékével meghatározott. Elemi dt idő eltelte után ezek a szögek elemi mértékben megváltoznak. E változás linearizált alakban az alábbi módon írható fel:

$$\begin{cases} \psi(t+dt) \approx \psi(t) + \frac{d\psi}{dt} dt \\ \theta(t+dt) \approx \theta(t) + \frac{d\theta}{dt} dt \\ \varphi(t+dt) \approx \varphi(t) + \frac{d\varphi}{dt} dt \end{cases} \quad (138)$$

Ezek szerint a mozgó koordináta-rendszer dt elemi idő eltelte után egy végtelenül közeli, új helyzetbe kerül, melynek Euler-szögei $d\psi$, $d\theta$ illetve $d\varphi$ infinitezimális értékkel különböznek a t időbeli értékeiktől. Ezek a szögváltozások az Euler-féle

szögek elsőrendű differenciáljai. Az elsőrendű deriváltak geometriai értelmezését a 33. ábra szemlélteti. Az Euler-szögek változását kifejező infinitezimális elfordulások az elemi idő eltelte után helyzetüket nem változtató forgástengelyek körül történnek. A $d\psi/dt$, $d\theta/dt$, $d\varphi/dt$ mennyiségek az Euler-szögek változásának megfelelő skaláris szögsebességek. Ezek előjeles mennyiségek. Az 1.3.4. pontban tárgyaltakkal egyező gondolatmenetet alkalmazva az elemi forgatások tengelyeire a fentebb említett skaláris szögsebességeknek vektor-értelmezést is adunk – a vektorok tartóegyenesei a Z_0 , X_a és Z_1 tengelyek, melyeknek az S_0 koordináta-rendszerben felírt egységvektorai rendre a következők:

$$\vec{k}_0, \quad \vec{i}_a = \cos\psi \vec{i}_0 + \sin\psi \vec{j}_0, \quad \vec{k}_1 = \sin\theta \sin\psi \vec{i}_0 - \sin\theta \cos\psi \vec{j}_0 + \cos\theta \vec{k}_0$$



33. ábra.

Az Euler szögek segítségével véghezvitt forgatás

A szögsebesség-vektorok a skaláris szögsebességek és a fenti képletekkel megadott egységvektorok szorzatai. Vegyük észre, hogy a a 31. és 33. ábrákon feltüntetett pozitív irányításoknak az óramutató járásával ellentétes irányú elfordulás felel meg. A $\vec{\psi}$, $\vec{\theta}$, $\vec{\varphi}$ szögsebesség-vektorok összetevői az S_0 koordináta-rendszerben:

$$\begin{cases} \vec{\psi}_0 = \dot{\psi} \vec{k}_0 \\ \vec{\theta}_0 = \dot{\theta} \cos \psi \vec{i}_0 + \dot{\theta} \sin \psi \vec{j}_0 \\ \vec{\phi}_0 = -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \vec{i}_0 - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \vec{j}_0 + \dot{\phi} \cos \theta \vec{k}_0 \end{cases} \quad (139)$$

Némi figyelemmel leolvasható a 33.-as ábráról, hogy az Euler szögek változását kifejező szögsebesség-vektorok az S_1 – testhez kötött – kordináta-rendszerben

$$\begin{cases} \vec{\psi}_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \vec{i}_1 + \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \vec{j}_1 + \dot{\psi} \cos \theta \vec{k}_1 \\ \vec{\theta}_1 = \dot{\theta} \cos \varphi \vec{i}_1 - \dot{\theta} \sin \varphi \vec{j}_1 \\ \vec{\phi}_1 = \dot{\phi} \vec{k}_1 \end{cases} \quad (140)$$

A gömbmozgás pillanatnyi szögsebességvektora a fenti három-három vektor összege mind a helytálló, mind a mozgó koordináta-rendszerben tehát:

$$\vec{\omega}_i = \vec{\psi}_i + \vec{\theta}_i + \vec{\phi}_i \quad i \in \{0;1\} \quad (141)$$

Megjegyezzük, hogy a fenti összeg vektorainak (alsó) indexsze azt a kordináta-rendszert jelöli, amelyikben a vektorkoordinátákat tekintjük. Itt és a továbbiakban is, a zérus index az S_0 helytálló, az 1-es index pedig a mozgó S_1 koordináta-rendszerre vonatkozik.

A (139), illetve (140) kifejezéseknek a (141) képletbe való helyettesítésével megkapjuk a pillanatnyi szögsebesség koordinátáit:

$$\begin{cases} \omega_{x_0} = -\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \omega_{y_0} = -\dot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ \omega_{z_0} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (142)$$

$$\begin{cases} \omega_{x_1} = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_{y_1} = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_{z_1} = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{cases} \quad (143)$$

A (143) képletek ellenőrzése inverz transzformáció végrehajtását igényli. Ez nem nehéz feladat, ha figyelembe vesszük a transzformációs mátrixok ortogonalitását.

A merev test adott pontjának sebessége a pillanatnyi szögsebesség-vektor és a helyvektor vektoriális szorzata mindkét koordináta-rendszerben:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i, \quad i \in \{0;1\} \quad (144)$$

Ugyanígy határozható meg a pillanatnyi forgástengely a koordinátatengelyek körüli forgatásokkal megadott mozgástörvényre nézve. Az x, y_a és z_b tengelyek körüli forgatások α, β, γ szögeire érvényesek a (138) képletekkel formailag egyező

$$\begin{cases} \alpha(t+dt) \approx \alpha(t) + \frac{d\alpha}{dt} dt \\ \beta(t+dt) \approx \beta(t) + \frac{d\beta}{dt} dt \\ \gamma(t+dt) \approx \gamma(t) + \frac{d\gamma}{dt} dt \end{cases} \quad (145)$$

összefüggések. Az infinitezimális szögváltozásokhoz itt is, akár az előző esetben, szögsebességvektorokat rendelünk hozzá – ezek összetevőit a 32. ábra alapján lehet meghatározni. A helyálló és a mozgó kordinátarendszer tengelyeihez tartozó szögsebesség-vektorok kifejezései az alábbi összefüggésekkel adóttak:

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_0 = \dot{\alpha} \vec{i}_0 \\ \vec{\beta}_0 = \dot{\beta} \cos \alpha \vec{j}_0 + \dot{\beta} \sin \alpha \vec{k}_0 \\ \vec{\gamma}_0 = \dot{\gamma} \sin \beta \vec{i}_0 - \dot{\gamma} \cos \beta \sin \alpha \vec{j}_0 + \dot{\gamma} \cos \beta \cos \alpha \vec{k}_0 \end{cases} \quad (146)$$

$$\begin{cases} \vec{\alpha}_1 = \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \vec{i}_1 - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma \vec{j}_1 + \dot{\alpha} \sin \beta \vec{k}_1 \\ \vec{\beta}_1 = \dot{\beta} \cos \gamma \vec{i}_1 + \dot{\beta} \sin \gamma \vec{j}_1 \\ \vec{\gamma}_1 = \dot{\gamma} \vec{k}_1 \end{cases} \quad (147)$$

A pillanatnyi szögsebesség most is ezek összege:

$$\vec{\omega}_i = \vec{\alpha}_i + \vec{\beta}_i + \vec{\gamma}_i, \quad i \in \{0; 1\} \quad (148)$$

B. Mátrixmódszer

A mátrixmódszer, hasonlóan az eddigiekhez, az álló és mozgó koordináta-rendszerek közötti transzformáción alapul. A koordináta-rendszerek közötti transzformációs mátrix az idő függvénye, az iránykoszinuszok pedig a mozgástörvény megszabta módon változnak.

Ha idő szerint deriváljuk a (134) egyenletet, akkor megkapjuk azon pont S_0 koordináta-rendszerben megfigyelt sebességét, melynek S_1 koordinátarendszerbeli homogén koordinátáit az $\underline{\mathbf{r}}_1$ oszlop mátrix tartalmazza:

$$\underline{\mathbf{v}}_0 = \dot{\underline{\mathbf{r}}}_0 = \frac{d}{dt}(\mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} \underline{\mathbf{r}}_1) \quad (149)$$

A számítások elvégzése után,

$$\begin{bmatrix} v_{x_0} \\ v_{y_0} \\ v_{z_0} \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\left(\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{0a} \right) \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{ab} \right) \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{b1} \right) \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (150)$$

a sebességmátrix, ahol a derivált mátrixok a (135) alapján írhatók fel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{M}_{0a}) &= \dot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{M}_{ab}) = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{M}_{b1}) &= \dot{\phi} \begin{bmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi & 0 & 0 \\ \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (151)$$

A (150) és (151) egyenletek megadják az S_0 koordináta-rendszerben megfigyelt sebességet, ha ismert a mozgástörvény, valamint a tekintett testpont koordinátái a *testhez kötött*, S_1 mozgó koordináta-rendszerben. Tehát ez az egyenlet mozgó-rendszerbeli koordinátákhoz csatol állórendszerben kifejezett sebességet. Ettől eltérő a vektoriális írásmódú egyenletek használata, ahol a bennük szereplő valamennyi mennyiséget egy és ugyanazon koordináta-rendszerben tekintjük. Ha tehát a mátrixos írásmód esetén is az a cél, hogy minden tényező ugyanabban a rendszerben (a jelen esetben ez az álló, koordináta-rendszer) legyen kifejezve, akkor a vizsgált testpont koordinátáit is ebbe a koordináta-rendszerbe kell transzformálni. Ez esetben a (150) egyenlet a következő alakot ölti:

$$\begin{bmatrix} v_{x_0} \\ v_{y_0} \\ v_{z_0} \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\left(\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{0a} \right) \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{ab} \right) \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{b1} \right) \right) \mathbf{M}_{10} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} \right) \mathbf{M}_{1b} \mathbf{M}_{ba} \mathbf{M}_{a0} \mathbf{r}_0 = \\
 &= \left(\frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \overbrace{\mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} \mathbf{M}_{1b}}^{\mathbf{E}} \mathbf{M}_{ba} \mathbf{M}_{a0} + \mathbf{M}_{0a} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \underbrace{\mathbf{M}_{b1} \mathbf{M}_{1b}}_{\mathbf{E}} \mathbf{M}_{ba} \mathbf{M}_{a0} + \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} \mathbf{M}_{1b} \mathbf{M}_{ba} \mathbf{M}_{a0} \right) \mathbf{r}_0 = \\
 &= \left(\frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \mathbf{M}_{a0} + \mathbf{M}_{0a} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \mathbf{M}_{ba} \mathbf{M}_{a0} + \mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} \mathbf{M}_{10} \right) \mathbf{r}_0
 \end{aligned}
 \tag{150a.}$$

A (135) és (151) képletek alapján kapjuk meg(150a.) összefüggésben szereplő, az idő szerinti deriváltakat tartalmazó tagokat:

$$\frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \mathbf{M}_{a0} = \dot{\psi} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{0a} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \mathbf{M}_{ba} \mathbf{M}_{a0} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} \mathbf{M}_{10} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} 0 & -\cos\theta & -\sin\theta\cos\psi & 0 \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta\sin\psi & 0 \\ \sin\theta\cos\psi & \sin\theta\sin\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy az összes részeredmény ferdeszimmetrikus mátrix, tehát ezek összege is ferdeszimmetrikus lesz. A számítások eredménye a

$$\underline{\mathbf{v}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -E_z & E_y & 0 \\ E_z & 0 & -E_x & 0 \\ -E_y & E_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{r}}_0 \quad (152)$$

alakú tömör egyenlet. Ebben a ferdeszimmetrikus mátrix nem azonosan zérus elemei az alábbi képletekből számíthatók:

$$\begin{cases} E_x = -\dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ E_y = -\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi \\ E_z = \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi} \end{cases} \quad (153)$$

Összevetve a (153) és a (142) képleteket, azonnal látszik, hogy a (152) összefüggésben álló ferdeszimmetrikus mátrix nem más, mint az álló koordináta-rendszerben felírt pillanatnyi szögsebességvektor ferdeszimmetrikus mátrixa, tehát

$$\underline{\mathbf{v}}_0 = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \underline{\mathbf{r}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_0} & \omega_{y_0} & 0 \\ \omega_{z_0} & 0 & -\omega_{x_0} & 0 \\ -\omega_{y_0} & \omega_{x_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (154)$$

Ha a mozgástörvényt nem az Euler-szögekkel, hanem az x_0, y_a és $z_1 \equiv z_b$ tengelyek körüli forgásokkal írjuk fel, akkor is ugyanerre ez eredményre jutunk, azzal a különbséggel, hogy ebben az esetben az $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0$ szögsebességvektor koordinátáit a (146) és (148) egyenletekből számítjuk.

Amennyiben a sebességet a mozgó koordináta-rendszerben kell meghatározni, a (149) egyenlettel adott oszlop mátrixot át kell transzformálni az álló S_0 rendszerből a S_1 mozgó rendszerbe:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}}_1 &= \mathbf{M}_{10} \underline{\mathbf{v}}_0 = \mathbf{M}_{10} \frac{d}{dt} (\mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} \underline{\mathbf{r}}_1) = \\ &= \mathbf{M}_{1b} \mathbf{M}_{ba} \mathbf{M}_{a0} \left(\frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} \right) \underline{\mathbf{r}}_1 = \\ &= \left(\mathbf{M}_{10} \frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{1b} \mathbf{M}_{ba} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{1b} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} \right) \underline{\mathbf{r}}_1 \end{aligned} \quad (155)$$

A számítások gondolatmenete és módszere azonos az álló rendszerbeli és fentebb áttekintett számításokéhoz. A végeredmény

$$\underline{\mathbf{v}}_1 = \tilde{\underline{\omega}}_1 \underline{\mathbf{r}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_1} & \omega_{y_1} & 0 \\ \omega_{z_1} & 0 & -\omega_{x_1} & 0 \\ -\omega_{y_1} & \omega_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (156)$$

ahol a szögsebességmátrix elemei a (143) képletből vehetők.

A gyakorlati feladatok megoldásában a mátrixmódszernek vitathatatlan előnyei vannak, amelyek közül feltétlenül meg kell említeni a következőket:

- a számítások strukturálásának lehetősége, ami egyszerű részmatrixok megjelenésével valósul meg;
- a mozgástörvény alapján egyszerűbb felírni az álló és mozgó koordináta-rendszer közötti transzformációt, mint geometriai megfigyelések alapján meghatározni az $\tilde{\underline{\omega}}$ szögsebességvektor összetevőit, bármelyik rendszerhez viszonyítva;
- a mátrixmódszer kiválóan alkalmazható ha ezeket a számításokat algoritmizálni és számítógépre vinni áll a szándékunkban.

2.3.3.5. Álló és mozgó alapfelületek

Alapfelületeknek nevezzük a pillanatnyi forgástengely mértani helyeit az álló, illetve a mozgó koordináta-rendszerben. A síkmozgás vizsgálatakor bevezetett szóhasználat alapján, a pillanatnyi forgástengelyek által a mozgás során a mozgó koordináta-rendszerben alkotott felület a mozgó alapfelület, a helytálló koordináta-rendszerben megfigyelt felület pedig az álló alapfelület.

A gömbmozgás alapfelületei olyan kúpok, melyeknek közös alkotója a pillanatnyi forgástengely, valamint és csúcsa az álló és mozgó koordináta-rendszer közös origója.

Gömbmozgás esetében a pillanatnyi forgástengely helyzete egyszerűbben adódik, mint a síkmozgás esetén, mivel az mindig áthalad az origón, irányát pedig a mozgástörvény segítségével egyszerűen meg lehet határozni.

A pillanatnyi szögsebességvektor koordinátáinak ismeretében az alapfelületek parametrikus egyenleteit az álló és a mozgó koordináta-rendszerben egyaránt az időtől függő irányú forgástengely parametrikus egyenletéből lehet levezetni:

$$\frac{x_i}{\omega_{x_i}} = \frac{y_i}{\omega_{y_i}} = \frac{z_i}{\omega_{z_i}} = u, \quad i \in \{0; 1\}$$

ahol a képletben álló u a paraméter, az i index pedig, összhangban az eddigiekkel, az álló, illetve a mozgó koordináta-rendszert azonosítja. Ha kifejezzük a fenti egyenletekből a helykoordinátákat, akkor kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} x_i(u, t) = u \omega_{x_i}(t) \\ y_i(u, t) = u \omega_{y_i}(t) \\ z_i(u, t) = u \omega_{z_i}(t) \end{cases} \quad i \in \{0; 1\} \quad (157)$$

A (157) parametrikus egyenletek az álló, illetve mozgó alapfelületek egyenletei. Az alapfelületek, a síkmozgás pólusgörbéihez hasonlóan, csúszásmentesen gördülnek le egymáson. Ezen állítás igazolásához azt kell megmutatni, hogy a két felületnek minden pillanatban van közös érintősíkjá, ezenfelül az érintkezési pontokban zérus a két felület egymáshoz viszonyított sebessége.

A két alapfelület sajátossága abban áll, hogy vonalfelületek, közös pontjaik minden esetben a pillanatnyi forgástengelyen vannak. Közös érintő sík akkor létezik, ha minden P érintkezési pontban egybeesik a két alapfelület normálisának iránya. A szigorú matematikai igazoláshoz a jelölések további pontosítására van szükség. A 90. oldalon, a (141) képlet utáni bekezdésben kijelentettük, hogy a vektorok alsó indexe a vektorkoordináták koordináta-rendszerét jelöli: következésképpen 0 a helytálló S_0 koordináta-rendszer, 1 pedig a mozgást végző testhez kötött, mozgó S_1 koordináta-rendszer jele. A két alapfelülethez tartozó két normálvektor hovatarozását ugyancsak a 0, illetve 1 indexek jelölik, de ezek zárójelbe tett felső indexek: így például az $\vec{n}_0^{(1)}$ vektor a mozgó alapfelület normálvektora, melynek koordinátái az S_0 -ban vannak felírva.

A közös érintő sík létezése akkor és csak akkor lehetséges, ha a két felület normális vektorai között teljesül a

$$\vec{n}_i^{(0)}(P) = \lambda \vec{n}_i^{(1)}(P), \quad \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad i \in \{0; 1\}$$

A (155) egyenletrendszerrel megadott felületek esetében a normálvektort az

$$\vec{n}_q^{(q)} = \begin{vmatrix} \vec{i}_q & \vec{j}_q & \vec{k}_q \\ \frac{\partial x_q}{\partial u} & \frac{\partial y_q}{\partial u} & \frac{\partial z_q}{\partial u} \\ \frac{\partial x_q}{\partial t} & \frac{\partial y_q}{\partial t} & \frac{\partial z_q}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}_q & \vec{j}_q & \vec{k}_q \\ \omega_{x_q} & \omega_{y_q} & \omega_{z_q} \\ \dot{\omega}_{x_q} & \dot{\omega}_{y_q} & \dot{\omega}_{z_q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i}_q & \vec{j}_q & \vec{k}_q \\ \varepsilon_{x_q} & \varepsilon_{y_q} & \varepsilon_{z_q} \end{vmatrix}, \quad q \in \{0; 1\}$$

összefüggéssel számítják. Az utóbbi egyenlet mátrixokkal is felírható:

$$\underline{n}_q^{(q)} = \tilde{\omega}_q \underline{\varepsilon}_q = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_q} & \omega_{y_q} \\ \omega_{z_q} & 0 & -\omega_{x_q} \\ -\omega_{y_q} & \omega_{x_q} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{x_q} \\ \varepsilon_{y_q} \\ \varepsilon_{z_q} \end{bmatrix}, \quad q \in \{0; 1\} \quad (158)$$

A (158) mátrixegyenletben álló $\underline{\varepsilon}_q$ mátrix a szöggyorsulás-mátrix. A szöggyorsulás- mátrixot a szögsebesség koordinátáinak idő szerinti deriváltjaiból építjük fel. Az említett koordináták a mozgástörvény alakjától, azaz a koordináta-rendszerek közötti kapcsolat matematikai alakjától függenek, és a (142) és (143), illetve a (146), (147) és (148) képletek segítségével számíthatók ki.

A két normálvektor párhuzamoságát csak akkor tudjuk könnyen ellenőrizni, ha azokat ugyanabban a koordináta-rendszerben írjuk fel. Az álló alapfelület normálvektorának koordinátáit a mozgó S_1 koordináta-rendszerben az alábbi transzformációval lehet meghatározni:

$$\underline{n}_1^{(0)} = \underline{L}_{10} \underline{n}_0^{(0)} = \underline{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \underline{\varepsilon}_0 \quad (159)$$

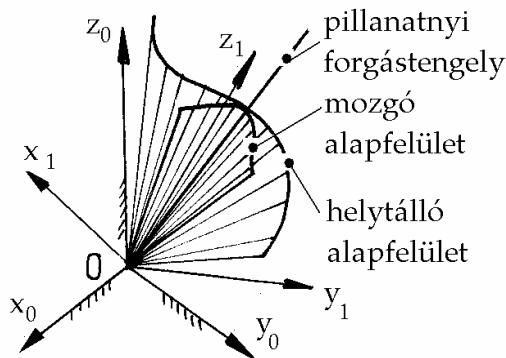
Vegyük azt is észre, hogy a mozgó alapfelületet normálvektorát adó $\underline{n}_1^{(1)} = \tilde{\omega}_1 \underline{\varepsilon}_1$ képlet jobboldalának két szorzótényezője kifejezhető az álló koordináta-rendszerbeli megfelelőikkel. Ha emellett figyelembe vesszük a (117) képletre vezető gondolatmenet során már felhasznált és az 1. Függelékben formálisan is igazolt $\tilde{\omega}_1 = \underline{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \underline{L}_{01}$ összefüggést, akkor azonos átalakításokkal írhatjuk, hogy

$$\underline{n}_1^{(1)} = \tilde{\omega}_1 \underline{\varepsilon}_1 = \underbrace{\underline{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \underline{L}_{01}}_{\tilde{\omega}_1} \overbrace{\underline{L}_{10} \underline{\varepsilon}_0}^{\underline{\varepsilon}_1} = \underline{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \underline{\varepsilon}_0 = \underline{L}_{10} \underline{n}_0^{(0)} = \underline{n}_1^{(0)} \quad (160)$$

ami azt jelenti, hogy megegyezik a két normális. Ezáltal bizonyítottuk, hogy a két alapfelületnek minden időpillanatban közös érintősíkja van, ami a pillanatnyi forgástengelyen halad át.

Másrészt, a pillanatnyi forgástengelyen lévő testpontoknak zérus a pillanatnyi sebessége. Úgy is fogalmazhatunk, hogy zérus az érintkezési pontokban a mozgó alapfelület álló alapfelülethez viszonyított (relatív) sebessége, vagyis csúszásmentesen gördül a mozgó alapfelület az álló alapfelületen. Ezt kívántuk igazolni.

Az alapfelületek relatív helyzetét a 34. ábra szemlélteti.



34. ábra.

A helytálló és a mozgó alapfelület

2.3.3.6. A gyorsuláseloszlás

A. Vektormódszer

A gömbmozgást végző merev test adott pontjának gyorsulását a vizsgált testpont sebességvektorának idő szerinti deriválásával kapjuk meg, mind az álló, mind a mozgó koordináta-rendszerben. A továbbiakban az i index értékére érvényesek az előbbiekben tett kikötések: a nulla értéke az álló, 1 értéke pedig a mozgó koordináta-rendszerre vonatkozik. A d/dt operátort a (144) sebességképletre kell alkalmazni, de ugyanakkor nyilvánvalóan figyelembe kell venni a pillanatnyi szögsebesség-koordinátákra vonatkozó (142) és (143), illetve a (146), (147) összefüggéseket a mozgástörvény felírási módjának függvényében:

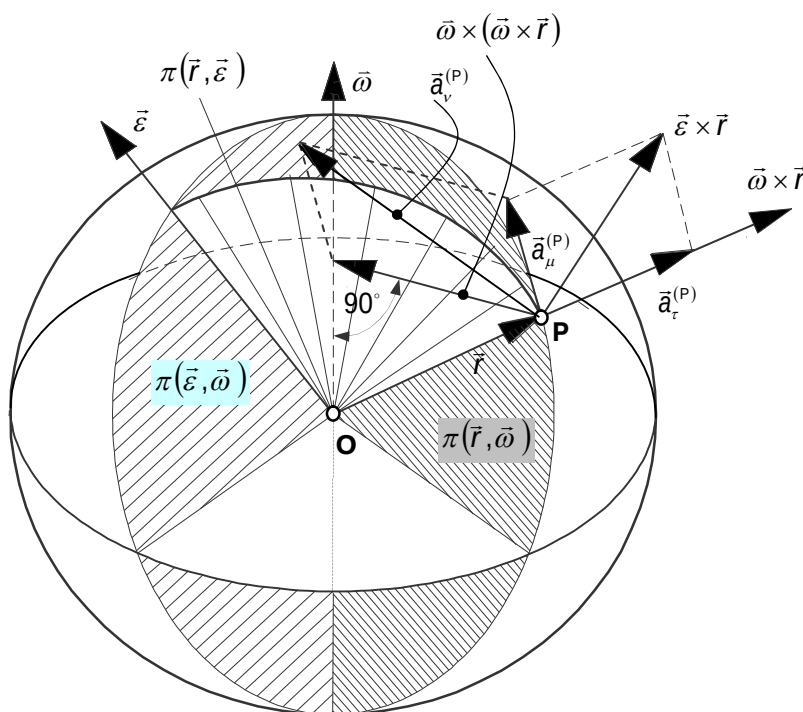
$$\vec{a}_i = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i) = \vec{\varepsilon}_i \times \vec{r}_i + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i) = \vec{\varepsilon}_i \times \vec{r}_i + \vec{\omega}_i \times \vec{v}_i \quad (161)$$

A szöggyorsulásvektor koordinátái az álló rendszerben a (142) összefüggés deriválásával adódnak:

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{x_0} &= \frac{d\omega_{x_0}}{dt} = -\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \sin \psi - \ddot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \ddot{\psi} \dot{\theta} \sin \psi - \\ &\quad - \ddot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \ddot{\theta} \cos \psi \\ \varepsilon_{y_0} &= \frac{d\omega_{y_0}}{dt} = -\dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta \cos \psi - \ddot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \ddot{\psi} \dot{\theta} \cos \psi - \\ &\quad - \ddot{\phi} \sin \theta \cos \psi + \ddot{\theta} \sin \psi \\ \varepsilon_{z_0} &= \frac{d\omega_{z_0}}{dt} = -\dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta + \ddot{\phi} \cos \theta + \ddot{\psi} \end{aligned} \right. \quad (162)$$

Hasonló módon számíthatók a szöggyorsulásvektor koordinátái a mozgó-rendszerben:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_1} &= \frac{d\omega_{x_1}}{dt} = \dot{\theta} \ddot{\psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \ddot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \phi + \\ &\quad + \ddot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \ddot{\theta} \cos \phi \\ \varepsilon_{y_1} &= \frac{d\omega_{y_1}}{dt} = \dot{\theta} \ddot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \ddot{\psi} \sin \theta \sin \phi - \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \phi + \\ &\quad + \ddot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \ddot{\theta} \sin \phi \\ \varepsilon_{z_1} &= \frac{d\omega_{z_1}}{dt} = -\dot{\theta} \ddot{\psi} \sin \theta + \ddot{\psi} \cos \theta + \ddot{\phi} \end{aligned} \quad (163)$$



35. ábra.

A gyorsulásvektor összetevői és ezek helyzete

Ha a mozgástörvényt a koordinátatengelyek körüli elfordulások, mint szögkoordináták felhasználásával írjuk fel, akkor a szöggyorsulás-koordinátákat a (147) és (148) összefüggések idő szerinti deriválásával kapjuk meg.

A gömbmozgás esetében számolni kell azzal a körülménnyel, hogy a szögsebesség-vektor iránya – ellentétben az eddig tanulmányozott mozgások szögsebesség-vektorával – nem állandó. Így annak időbeli változása mind a nagyságát, mind pedig az irányát is érinti. Következésképpen $\vec{\epsilon}$ és $\vec{\omega}$ vektorok általában nem egytengelyűek (nem párhuzamosak).

A szögsebesség- és szöggyorsulásvektorok kölcsönös helyzetét a 35. ábra szemlélteti. A merev test P pontja az r sugarú gömbön mozog, és pillanatnyi helyzetét az $\vec{r}$ helyzetvektor határozza meg. A mozgást az adott pillanatban az $\vec{\omega}$ és $\vec{\epsilon}$ vektorok határozzák meg. Ez a három vektor az ábrán feltüntetett legáltalánosabb esetben a következő három síkot határozza meg:

- $[\pi(\vec{r}, \vec{\epsilon})]$ – az $\vec{r}$ és $\vec{\epsilon}$ vektorok által kifeszített sík;
- $[\pi(\vec{r}, \vec{\omega})]$ – az $\vec{r}$ és $\vec{\omega}$ vektorok által kifeszített sík;
- $[\pi(\vec{\epsilon}, \vec{\omega})]$ – az $\vec{\epsilon}$ és $\vec{\omega}$ vektorok által kifeszített sík.

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

A P pont sebessége, definíciójából adódóan, merőleges az $\vec{r}$ helyvektorra és, értelmezését is figyelembe véve, merőleges a $[\pi(\vec{r}, \vec{\omega})]$ síkra. Hasonló tulajdonságú az $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ gyorsulásösszetevő is, mivel az a $[\pi(\vec{r}, \vec{\varepsilon})]$ síkra merőleges. Az $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ és $\vec{\omega} \times \vec{r}$ vektorok olyan síkot alkotnak, amely P-ben érinti az r sugarú gömböt, és így merőleges a $[\pi(\vec{r}, \vec{\omega})]$ és a $[\pi(\vec{r}, \vec{\varepsilon})]$ síkokra. Tartóegyeneseik szöge megegyezik tehát a a $[\pi(\vec{r}, \vec{\omega})]$ és $[\pi(\vec{r}, \vec{\varepsilon})]$ által bezárt szöggel. Az $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ gyorsulásösszetevő a gömb P-beli érintősíkjában két összetevőre bontható fel: ezek a sebességgel párhuzamos $\vec{a}_\tau$, illetve az arra merőleges $\vec{a}_\mu$. Nyilvánvaló, hogy az $\vec{a}_\tau$ összetevő a P anyagi pont tangenciális gyorsulása. Az $\vec{a}_\mu$ összetevő pedig a $[\pi(\vec{r}, \vec{\omega})]$ síkban fekszik, hiszen merőleges az $\vec{\omega} \times \vec{r}$ sebességvektorra.

Másrészt, az $\vec{\omega} \times \vec{v} \equiv \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ gyorsulásösszetevő is a $[\pi(\vec{r}, \vec{\omega})]$ síkban fekszik. A P anyagi pont $\vec{a}_v^{(P)}$ normálirányú gyorsulását az $\vec{\omega} \times \vec{v}$ és az $\vec{a}_\mu$ vektorok összege adja. Következésképpen, a P testpont gyorsulása az:

$$\vec{a}_i^{(P)} \equiv \vec{\varepsilon}_i \times \vec{r}_i^{(P)} + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i^{(P)}) = \vec{a}_{\tau i}^{(P)} + \vec{a}_{\nu i}^{(P)}, \quad i \in \{0; 1\} \quad (164)$$

alakban írható fel.

A tangenciális és a normálgyorsulás számítását a 35. ábra alapján lehet elvégezni. A tangenciális gyorsulás a gyorsulásvektor vetülete a sebesség irányára. Ezért először a sebesség irányához tartozó egységvektort határozzuk meg:

$$\vec{e}_{\nu i} = \frac{\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i^{(P)}}{|\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i^{(P)}|}, \quad i \in \{0; 1\} \quad (165)$$

A 35. ábrából világosan kitűnik, hogy az $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ gyorsuláskomponensnek zérus a vetülete a sebesség irányára. Ez azt eredményezi, hogy tangenciális összetevő kizárólag az $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ komponensből keletkezhet:

$$\vec{a}_{\tau i}^{(P)} = [(\vec{\varepsilon}_i \times \vec{r}_i) \cdot \vec{e}_{\nu i}] \vec{e}_{\nu i} \quad (166)$$

Az $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ komponensnek a forgástengelyt is tartalmazó $[\pi(\vec{r}, \vec{\omega})]$ síkba eső $\vec{a}_\mu$ vetületét az $\vec{e}_{\nu}$ -re merőleges, és a gömb P pontbeli érintősíkjába fekvő $\vec{\mu}$ egységvektor segítségével számítjuk. A $\vec{\mu}$ meghatározásakor figyelembe vesszük, hogy az $\vec{r}$, $\vec{e}_\nu$, $\vec{\mu}$ kölcsönösen merőlegesek egymásra és így:

$$\vec{\mu}_i = \frac{\vec{r}_i^{(P)} \times \vec{e}_{\nu i}}{|\vec{r}_i^{(P)} \times \vec{e}_{\nu i}|}, \quad i \in \{0; 1\} \quad (167)$$

A $\vec{\mu}$ egységvektor ismeretében, az $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ vektor $\vec{\mu}$ irányú összetevője az alábbi képletből adódik:

$$\vec{a}_{\mu i}^{(P)} = ((\vec{\varepsilon}_i \times \vec{r}_i) \cdot \vec{\mu}_i) \vec{\mu}_i, \quad i \in \{0, 1\} \quad (168)$$

Ezzel a P testpont normálgyorsulása a (166) és az $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ összetevő vektoriális összege:

$$\vec{a}_{vi}^{(P)} = \vec{a}_{\mu i}^{(P)} + \vec{\omega}_i \times (\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i^{(P)}) \quad (169)$$

A normálgyorsulás a P pont helyzetvektora és a pillanatnyi szögsebességvektor által kifeszített $[\pi(\vec{r}, \vec{\omega})]$ síkban fekszik, és a pályagörbe P pontbeli görbületi középpontjának irányába mutat. A pályagörbe P pontbeli simulósíkját a tangenciális és normál irányú gyorsulás-összetevők határozzák meg. A számítást lehet egyszerűsíteni, ha figyelembe vesszük, hogy a tangenciális gyorsulás-összetevő a P pontbeli pillanatnyi sebességgel azonos irányú; ez esetben a pályagörbének adott pontjába rendelt Frénet-féle vektorhármás bázisvektorai és a mozgás kinematikai jellemzői között a következő összefüggések állíthatók fel:

$$\begin{cases} \vec{\tau}_0^{(P)} = \frac{\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_0^{(P)}}{|\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_0^{(P)}|} \\ \vec{v}_0^{(P)} = \frac{\vec{a}_{v0}^{(P)}}{|\vec{a}_{v0}^{(P)}|} \\ \vec{\beta}_0^{(P)} = \vec{\tau}_0^{(P)} \times \vec{v}_0^{(P)} \end{cases} \quad (170)$$

ahol a harmadik vektor a binormális irányú egységvektor. Ismét hangsúlyozzuk, hogy a gömbmozgás, a kinematikai jellemzők szempontjából abban különbözik a síkmozgástól, hogy a szöggyorsulás-vektor és a szögsebesség-vektor *általában* véve nem azonos irányú, vagyis nem esnek egybe a $[\pi(\vec{r}, \vec{\omega})]$ és $[\pi(\vec{r}, \vec{\varepsilon})]$ síkok. A két sík egymással bezárt δ szöge a normálisaik segítségével számítható:

$$\delta = \arccos \frac{(\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i^{(P)}) \times (\vec{\varepsilon}_i \times \vec{r}_i^{(P)})}{|\vec{\omega}_i \times \vec{r}_i^{(P)}| |\vec{\varepsilon}_i \times \vec{r}_i^{(P)}|} \quad (171)$$

δ akkor lesz nulla, ha a vizsgált testpontok a $[\pi(\vec{r}, \vec{\varepsilon})]$ síkban fekszenek, vagy pedig ha a mozgástörvény következményeként egy adott időpillanatban azonos a szögsebesség-vektor és a szöggyorsulás-vektor iránya.

B. Mátrixmódszer

A mátrixmódszer alkalmazása a rögzített S_0 és a testhez kötött, mozgó S_1 koordináta-rendszerek közötti kapcsolatra, valamint a sebesség mátrixos formalizmusára épül. A korábbiakhoz hasonlóan itt is a sebességmátrix idő szerinti deriváltja eredményezi a gyorsulásmátrixot.

A gyakorlati számítások számára az a legcélszerűbb ha a gyorsulásmátrixot a rögzített S_0 koordináta-rendszerben írjuk fel, de a képletekben a tekintett testpont S_1 koordináta-rendszerbeli koordinátáit használjuk, mivel ezek időfüggetlen mennyiségek. Emiatt a sebesség (150) alatti előállításából indulunk ki, és ezt deriváljuk az idő szerint.

$$\begin{bmatrix} a_{x_0} \\ a_{y_0} \\ a_{z_0} \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{d^2 \mathbf{M}_{0a}}{dt^2} \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} + \frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \mathbf{M}_{b1} + \frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \mathbf{M}_{ab} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} + \right. \\ \left. + \frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \cdot \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \frac{d^2 \mathbf{M}_{ab}}{dt^2} \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} + \right. \\ \left. + \frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \mathbf{M}_{ab} \cdot \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} + \mathbf{M}_{0a} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} + \mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \frac{d^2 \mathbf{M}_{b1}}{dt^2} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (172)$$

A (172) képletben szereplő mátrixokat a (137), idő szerinti első deriváltjaikat pedig a (151) képletek adják. Az idő szerinti második deriváltak a következőképpen alakulnak:

$$\frac{d^2 \mathbf{M}_{0a}}{dt^2} = \ddot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dot{\psi}^2 \begin{bmatrix} -\cos \psi & \sin \psi & 0 & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{M}_{ab}}{dt^2} = \ddot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta}^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{M}_{b1}}{dt^2} = \ddot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dot{\varphi}^2 \begin{bmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (173)$$

A (172) képlettel történő számítás, figyelembe véve az alkalmazandó (137), (151) és (173) mátrixokat, első látásra kényelmetlennek tűnhet; ha viszont ezt a formalizmust egy mechanizmus mozgó elemének számítógépes elemzésére használjuk fel, akkor vitathatatlan a mátrixos módszer előnye. A vektoriális alak és a mátrixos alak egyenértékűsége a (154) egyenlet idő szerinti deriválásával igazolható. Valóban

$$\underline{\mathbf{a}}_0 = \frac{d}{dt}(\underline{\mathbf{v}}_0) = \frac{d}{dt}(\tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{r}}_0) = \left(\frac{d}{dt} \tilde{\omega}_0 \right) \underline{\mathbf{r}}_0 + \tilde{\omega}_0 \frac{d}{dt}(\underline{\mathbf{r}}_0) = \tilde{\varepsilon}_0 \underline{\mathbf{r}}_0 + \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{r}}_0 \quad (174)$$

ami nem más, mint a (161) képlet mátrixos alakja, az álló koordináta-rendszerben tekintve.

A mozgórendszerhez viszonyított gyorsuláskoordináták meghatározására a koordináta-transzformációval lehetséges. A (172) képletből kiindulva kapjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} a_{x1} \\ a_{y1} \\ a_{z1} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{10} \begin{bmatrix} a_{x0} \\ a_{y0} \\ a_{z0} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{10} \left(\frac{d^2 \mathbf{M}_{0a}}{dt^2} \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} + \frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \mathbf{M}_{b1} + \frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \mathbf{M}_{ab} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} + \right. \\ \left. + \frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \frac{d^2 \mathbf{M}_{ab}}{dt^2} \mathbf{M}_{b1} + \mathbf{M}_{0a} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} + \right. \\ \left. + \frac{d\mathbf{M}_{0a}}{dt} \mathbf{M}_{ab} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} + \mathbf{M}_{0a} \frac{d\mathbf{M}_{ab}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{b1}}{dt} + \mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \frac{d^2 \mathbf{M}_{b1}}{dt^2} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (175)$$

Ez a számítási mód csak akkor használható, ha már ismerjük mind a szögsebesség-, mind pedig a szöggyorsulás-mátrixot az álló koordináta-rendszerben.

Ha felírjuk a szögsebesség- illetve szöggyorsulás ferdeszimmetrikus mátrixait az álló rendszerben, akkor a (159) összefüggést is figyelembevéve a (174) mátrixegyenlet a következő alakba írható át:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{a}}_1 &= \underline{\mathbf{L}}_{10} \underline{\mathbf{a}}_0 = \underline{\mathbf{L}}_{10} (\tilde{\underline{\varepsilon}}_0 \underline{\mathbf{r}}_0 + \tilde{\underline{\omega}}_0 \tilde{\underline{\omega}}_0 \underline{\mathbf{r}}_0) = \underline{\mathbf{L}}_{10} \left(\tilde{\underline{\varepsilon}}_0 \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{01} \underline{\mathbf{L}}_{10}}_{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\mathbf{r}}_0 + \tilde{\underline{\omega}}_0 \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{01} \underline{\mathbf{L}}_{10}}_{\underline{\mathbf{E}}} \tilde{\underline{\omega}}_0 \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{01} \underline{\mathbf{L}}_{10}}_{\underline{\mathbf{E}}} \underline{\mathbf{r}}_0 \right) = \\ &= \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{10} \tilde{\underline{\varepsilon}}_0 \underline{\mathbf{L}}_{01}}_{\tilde{\underline{\varepsilon}}_1} \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{10} \underline{\mathbf{r}}_0}_{\underline{\mathbf{r}}_1} + \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{10} \tilde{\underline{\omega}}_0 \underline{\mathbf{L}}_{01}}_{\tilde{\underline{\omega}}_1} \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{10} \tilde{\underline{\omega}}_0 \underline{\mathbf{L}}_{01}}_{\tilde{\underline{\omega}}_1} \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{10} \underline{\mathbf{r}}_0}_{\underline{\mathbf{r}}_1} = \tilde{\underline{\varepsilon}}_1 \underline{\mathbf{r}}_1 + \tilde{\underline{\omega}}_1 \tilde{\underline{\omega}}_1 \underline{\mathbf{r}}_1\end{aligned}\quad (176)$$

2.3.3.7. A gyorsuláspólus lehetséges helyzetei

A gyorsuláspólus a mozgó testnek az a pontja, amelynek egy adott időpillanatban zérus a gyorsulása. A síkmozgás vizsgálatakor igazoltuk, hogy ennél a mozgástípusnál mindig létezik az álló és mozgó pólusgörbe. A gömbmozgás esetében, tekintettel a gömbmozgás sajátosságára, a mozgás pólusa mindig kielégíti a nulla gyorsulás feltételét. Felvetődik azonban, természetes módon, az a kérdés, hogy van-e a helytálló pont körül forgó testnek más olyan pontja is, ahol zérus értékű a gyorsulás. A kérdés megválaszolása a

$$\tilde{\underline{\mathbf{a}}}_i = 0 \Leftrightarrow \tilde{\underline{\varepsilon}}_i \times \tilde{\underline{\mathbf{r}}}_i + \tilde{\underline{\omega}}_i \times (\tilde{\underline{\omega}}_i \times \tilde{\underline{\mathbf{r}}}_i) = 0, \quad i \in \{0; 1\} \quad (177)$$

feltétel teljesülésének vizsgálatát igényli. A vizsgálatot a helytálló koordináta-rendszerben végezzük el. Ha $i = 0$, a vektoriális szorzatok kiszámítása után a következő alakot ölti a (177) egyenlet:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{y_0} z_0 - \varepsilon_{z_0} y_0 \\ \varepsilon_{z_0} x_0 - \varepsilon_{x_0} z_0 \\ \varepsilon_{x_0} y_0 - \varepsilon_{y_0} x_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{x_0} \\ \omega_{y_0} \\ \omega_{z_0} \end{bmatrix} (\omega_{x_0} x_0 + \omega_{y_0} y_0 + \omega_{z_0} z_0) - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} (\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (178)$$

A (178) mátrixegyenlet a következő homogén lineáris egyenletrendszerrel lesz egyenértékű, melyben a gyorsuláspólus x_0, y_0, z_0 koordinái az ismeretlenek:

$$\begin{cases} -(\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2)x_0 + (\omega_{x_0} \omega_{y_0} - \varepsilon_{z_0})y_0 + (\omega_{z_0} \omega_{x_0} + \varepsilon_{y_0})z_0 = 0 \\ (\omega_{x_0} \omega_{y_0} + \varepsilon_{z_0})x_0 - (\omega_{z_0}^2 + \omega_{x_0}^2)y_0 + (\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \varepsilon_{x_0})z_0 = 0 \\ (\omega_{x_0} \omega_{z_0} - \varepsilon_{y_0})x_0 + (\omega_{z_0} \omega_{y_0} + \varepsilon_{x_0})y_0 - (\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2)z_0 = 0 \end{cases} \quad (179)$$

A helytálló pont koordinátái a fenti egyenletrendszer triviális megoldása. Egyéb, a triviálisról eltérő megoldások keresésére feltételezhető, hogy a rendszer főmátrixának rangja kisebb, mint 3 (ha zérus az együtthatómátrix determinánsa). A rendszer fődeterminánsa a következő:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -(\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2) & \omega_{x_0} \omega_{y_0} - \varepsilon_{z_0} & \omega_{z_0} \omega_{x_0} + \varepsilon_{y_0} \\ \omega_{x_0} \omega_{y_0} + \varepsilon_{z_0} & -(\omega_{z_0}^2 + \omega_{x_0}^2) & \omega_{y_0} \omega_{z_0} - \varepsilon_{x_0} \\ \omega_{z_0} \omega_{x_0} - \varepsilon_{y_0} & \omega_{y_0} \omega_{z_0} + \varepsilon_{x_0} & -(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) \end{vmatrix} \quad (180)$$

A determináns kiszámolásakor el lehet egymástól különíteni a kizárólag szögsebesség-koordinátákat tartalmazó tagokat, és a vegyes tagokat. Az eredmény jelentősen egyszerűsödik, ha figyelembe vesszük, hogy az ω -át önmagában tartalmazó tagoknak zérus az összege, így a fődetermináns számítási képlete a

$$\Delta = 2\varepsilon_{x_0} \varepsilon_{y_0} \omega_{x_0} \omega_{y_0} + 2\varepsilon_{y_0} \varepsilon_{z_0} \omega_{y_0} \omega_{z_0} + 2\varepsilon_{z_0} \varepsilon_{x_0} \omega_{z_0} \omega_{x_0} - \varepsilon_{z_0}^2 (\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) - \varepsilon_{x_0}^2 (\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2) - \varepsilon_{y_0}^2 (\omega_{z_0}^2 + \omega_{x_0}^2)$$

lesz. Teljes négyzet alakú kifejezés létrehozásával a fenti determináns számítását tovább lehet egyszerűsíteni. Figyelembe véve a vektorszorzatként felírt vektorok skaláris szorzatának képletét, vagyis

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

a számított fődetermináns a következő alakra hozható:

$$\begin{aligned} \Delta &= (\omega_{x_0} \varepsilon_{x_0} + \omega_{y_0} \varepsilon_{y_0} + \omega_{z_0} \varepsilon_{z_0})^2 - \omega_{x_0}^2 \varepsilon_{x_0}^2 - \omega_{y_0}^2 \varepsilon_{y_0}^2 - \omega_{z_0}^2 \varepsilon_{z_0}^2 - \\ &\quad - \varepsilon_{z_0}^2 (\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) - \varepsilon_{x_0}^2 (\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2) - \varepsilon_{y_0}^2 (\omega_{z_0}^2 + \omega_{x_0}^2) = \\ &= (\omega_{x_0} \varepsilon_{x_0} + \omega_{y_0} \varepsilon_{y_0} + \omega_{z_0} \varepsilon_{z_0})^2 - (\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2)(\varepsilon_{x_0}^2 + \varepsilon_{y_0}^2 + \varepsilon_{z_0}^2) = \\ &= (\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\varepsilon}_0) \cdot (\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\varepsilon}_0) - (\vec{\omega}_0 \cdot \vec{\omega}_0) \cdot (\vec{\varepsilon}_0 \cdot \vec{\varepsilon}_0) = -(\vec{\omega}_0 \times \vec{\varepsilon}_0) \cdot (\vec{\omega}_0 \times \vec{\varepsilon}_0) \end{aligned} \quad (181)$$

A (181) képletből világosan látszik, hogy a (179) egyenletrendszernek akkor, és csak akkor lehetnek a triviálistól eltérő megoldásai, amennyiben a szögsebességvektor és a szöggyorsulásvektor vektoriális szorzata nulla. Ez a következő esetekben lehetséges:

- a) a szögsebesség-vektor nulla;
- b) a szöggyorsulás-vektor nulla;
- c) a szögsebesség- és szöggyorsulás-vektorok egyirányúak.

Az a) esetben, figyelembe véve a pólus tulajdonságát, a test nyugalmi állapotban van, a b) esetben pedig a szögsebességvektor időben állandó kell legyen, ami helytálló tengelyű mozgásra (forgó- illetve csavarmozgásra) vezethető vissza, ennél fogva e két eset nem jellemző a gömbmozgásra. A következőkben a c) eset következményeit vizsgáljuk.

A vizsgálat során tekintsük az $\vec{\omega}_0, \vec{\varepsilon}_0$ vektorok koordinátáit a (142), illetve a (162) képletek alapján. Amennyiben a két vektor tartóegyenese közös, koordinátáik arányosak, tehát felírható, hogy:

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

$$\frac{\omega_{x_0}}{\varepsilon_{x_0}} = \frac{\omega_{y_0}}{\varepsilon_{y_0}} = \frac{\omega_{z_0}}{\varepsilon_{z_0}} \quad (182)$$

Tegyük egymással egyenlővé az első és a második, illetve az első és a harmadik törtet. A számítások elvégzése után, ezeket nem részletezzük, az alábbi differenciálegyenlet-rendszert kapjuk:

$$\begin{cases} \dot{\theta}^2 \dot{\psi} - \dot{\theta} \ddot{\varphi} \sin \theta - \dot{\theta}^2 \dot{\varphi} \cos \theta + \ddot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta + \dot{\varphi}^2 \dot{\psi} \sin^2 \theta = 0 \\ (\ddot{\psi} \dot{\theta} - \dot{\psi} \ddot{\theta}) \cos \psi + (\ddot{\varphi} \dot{\theta} - \dot{\varphi} \ddot{\theta}) \cos \theta \cos \psi + (\ddot{\psi} \dot{\varphi} - \dot{\psi} \ddot{\varphi}) \sin \theta \sin \psi - \\ - \dot{\varphi} (\dot{\theta}^2 - \dot{\psi}^2) \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} (\dot{\psi}^2 - \dot{\varphi}^2) \sin \psi - \dot{\varphi}^2 \dot{\psi} \sin \theta \cos \theta \cos \psi = 0 \end{cases} \quad (183)$$

A (183) nemlineáris másodrendű differenciálegyenlet-rendszer három ismeretlen függvényt tartalmaz. Következésképpen, még abban az esetben is, ha netán ismert az egyik függvény a három közül, egy másodrendű, kétismeretlenes differenciálegyenlet-rendszert kapunk. Ez azt valószínűsíti, hogy végtelen sok olyan speciális eset lehetséges, amikor a gömbmozgás során közös a szögsebesség- és a szöggyorsulásvektorok tartóegyenese, ennél fogva létezik a gyorsulás-pólustengely.

Vegyük észre, hogy zérustól különböző a (180) determináns első eleméhez tartozó al-determináns:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -(\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2) & \omega_{x_0} \omega_{y_0} - \varepsilon_{z_0} \\ \omega_{x_0} \omega_{y_0} + \varepsilon_{z_0} & -(\omega_{z_0}^2 + \omega_{x_0}^2) \end{vmatrix} = \omega_{y_0}^2 \omega_{z_0}^2 + \omega_{z_0}^4 + \omega_{z_0}^2 \omega_{x_0}^2 + \varepsilon_{z_0}^2 \quad (184)$$

Ennek alapján a (179) egyenlet megoldható a $z_0 = \lambda$, $\lambda \in \Re$ paraméterre. A megoldás nem más, mint a keresett, zérus gyorsulású pontok mértani helye az álló koordináta-rendszerben, azaz a pillanatnyi gyorsulás-pólustengely:

$$\begin{cases} x_0(\lambda) = \lambda \frac{\begin{vmatrix} -(\omega_{z_0} \omega_{x_0} + \varepsilon_{y_0}) & \omega_{x_0} \omega_{y_0} - \varepsilon_{z_0} \\ \omega_{y_0} \omega_{z_0} - \varepsilon_{x_0} & -(\omega_{z_0}^2 + \omega_{x_0}^2) \end{vmatrix}}{\Delta_1} \\ y_0(\lambda) = \lambda \frac{\begin{vmatrix} -(\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2) & -(\omega_{z_0} \omega_{x_0} - \varepsilon_{y_0}) \\ \omega_{x_0} \omega_{y_0} + \varepsilon_{z_0} & -(\omega_{y_0} \omega_{z_0} - \varepsilon_{x_0}) \end{vmatrix}}{\Delta_1} \\ z_0(\lambda) = \lambda \end{cases} \quad (185)$$

2.3.4. A merev test szabad mozgása

2.3.4.1. A mozgás leírása

Merev test akkor végez szabad mozgást, ha nincsenek mozgást korlátozó kényszerek. Így mind a hat szabadságfok megmarad. Ez azt jelenti, hogy a test egy tetszőleges pontja szabadon mozoghat a térben, miközben a test az illető ponton áthaladó, időben változó irányú tengely körül is foroghat.

A korábbi esetekhez hasonlóan, a mozgást egy helytálló (abszolút) S_0 koordináta-rendszerben vizsgáljuk, míg a test geometriáját a testhez kötött, vele együtt mozgó S_1 koordináta-rendszerben adjuk meg. Ily módon a mozgás vizsgálata a mozgó koordináta-rendszer állóhoz viszonyított mindenkori helyzetének ismeretén alapul.

Egy test helyzete a térben egyértelműen meghatározott, ha ismerjük három, nemkollineáris pontjának koordinátáit. Jelölje ezeket a pontokat rendre A, B, C koordinátáit pedig $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, z_B, x_C, y_C, z_C$. Mivel a test merev, az ABC háromszög alakját és méretét a mozgás során megőrzi, tehát az oldalak hossza nem változik:

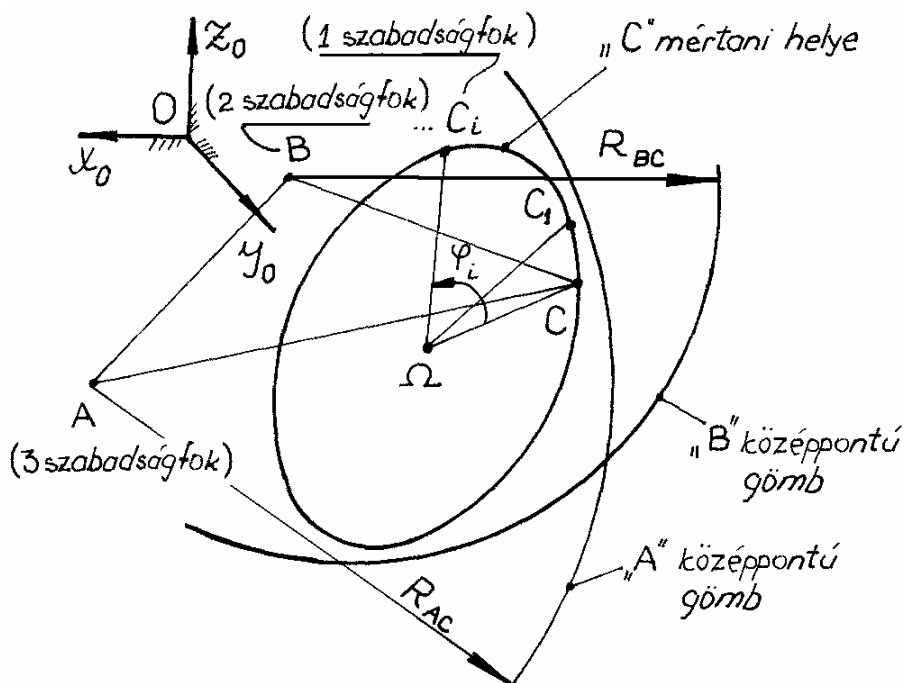
$$\begin{cases} \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \overline{AB} = C_1 \\ \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2} = \overline{BC} = C_2 \\ \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = \overline{CA} = C_3 \end{cases} \quad (187)$$

A (187) egyenletek a kilenc koordinátára előírt és a test merevségét kifejező három kényszerfeltételt jelentik. Következésképpen a fennmaradó szabadságfokok száma hat, vagyis az összes lehetséges. A szabadságfokok geometriai jelentését a 36. ábrán szemléltetjük. Leolvasható az ábráról, hogy nem lehet mind a hat szabadságfokot két ponthoz kötni. Tételezzük fel ugyanis, hogy az A pont szabadon mozoghat, azaz három a szabadságfoka. Bármelyik pontot választjuk is hozzá, – mondjuk a B pontot – kiderül, hogy annak már csak két koordinátáját lehet szabadon megválasztani, mivel a harmadik abból következik, hogy az AB oldal hosszúsága állandó. Feltételezvé, hogy x_B , és y_B független, a z_B koordináta a (187) első egyenletéből következik.

Továbbá képzeljük el, hogy az A és B középpontokkal két olyan gömböt szerkesztünk, melyek sugarai az AC, illetve a BC oldalak hosszával egyenlő. A két gömb metszésvonala egy kör, amelynek egyik, tetszőleges pontja lesz a háromszög harmadik, vagyis C csúcsa. A C csúcs helyzete a körön már egyetlen paraméterrel, például adott értékű központi szöggel adható meg.

A fentiek alapján egy könnyen átlátható geometriai jelentés rendelhető a merev test szabad mozgása esetén a mozgás hat szabadságfokához.

A merev test szabad mozgásának másik lehetséges geometriai leírása a gömbmozgáson alapul. A 37. ábra a vizsgálat tárgyát képező merev testet, az álló S_0 és a mozgó S_1 koordináta-rendszereket is szemlélteti.

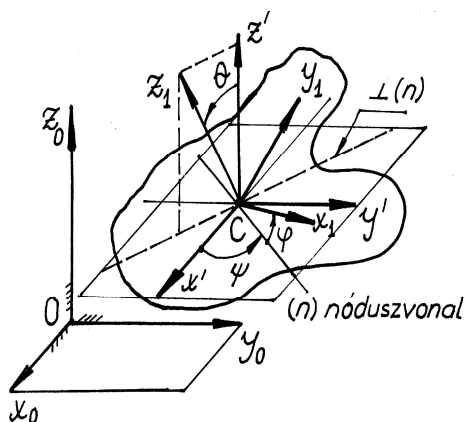


36. ábra

A szabadságfok geometriai értelmezése általános mozgás esetén

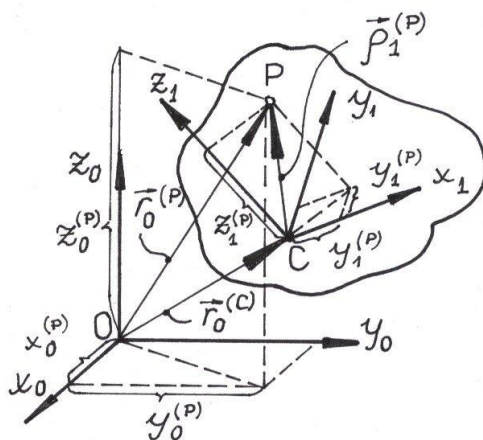
A merev test C pontjához (az S_1 koordináta-rendszer origójához) egy további, a $Cx'y'z'$ koordináta-rendszert kötjük. Ennek tengelyei, feltevés szerint, párhuzamosak maradnak a mozgás során az S_0 koordináta-rendszer tengelyeivel. A merev test mozgásának leírásához ismernünk kell a C pont mozgását – ez három helykoordináta ismeretét tételezi fel és három szabadságfokot jelent –, továbbá a merev test mozgását a $Cx'y'z'$ koordináta-rendszerben. Ez újabb három koordináta és további három szabadságfok. Következésképp a mozgástörvényt az alábbi egyenletek jelentik:

$$\begin{cases} x_0^{(C)} = f(t) & y_0^{(C)} = g(t) & z_0^{(C)} = h(t) \\ \psi = \psi(t) & \theta = \theta(t) & \varphi = \varphi(t) \end{cases} \quad (188)$$



37. ábra.

Az alkalmazott koordináta-rendszerek



38. ábra.

Az általános mozgás értelmezése
Euler-szögekkel

2.3.4.2. A merev test egy pontjának pályagörbéje

A. Vektormódszer

Ismertnek tekintjük a merev test tetszőlegesen választott P pontjának koordinátáit a mozgó S_1 rendszerben. A választott pont pályagörbéjének parametrikus egyenleteit úgy kapjuk meg, hogy a (188) mozgástörvényt kihasználásával felírjuk a P pont koordinátáit az álló S_0 rendszerben. A 38. ábra alapján felírható, hogy a választott pont helyvektora, az álló koordináta-rendszerben, mindig a mozgórendszerbeli helyvektor, valamint a mozgó origó helyvektorának összege:

$$\vec{r}_0^{(P)} = \vec{r}_0^{(C)} + \vec{\rho}_1^{(P)} = f(t)\vec{i}_0 + g(t)\vec{j}_0 + h(t)\vec{k}_0 + x_1^{(P)}\vec{i}_1 + y_1^{(P)}\vec{j}_1 + z_1^{(P)}\vec{k}_1 \quad (189)$$

Az $\vec{r}_0^{(P)}$ helyvektor időfüggő. Az $\vec{r}_0^{(C)}$ mozgó origó helyvektor koordinátái az f, g, h időfüggvények. A tekintett testpont $\vec{\rho}_1^{(P)} = x_1^{(P)}\vec{i}_1 + y_1^{(P)}\vec{j}_1 + z_1^{(P)}\vec{k}_1$ mozgó koordináta-rendszerbeli helyvektora csak a mozgó koordináta-rendszerhez viszonyítva konstans, mivel a forgás miatt az $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ bázis időfüggő. Nyilvánvaló a 38.-as ábra alapján, hogy a $Cx_1y_1z_1$ -ből a $Cx'y'z'$ -be való transzformáció ugyanaz, mint a gömbmozgás esetén a mozgó rendszerből az álló rendszerbe történő koordináta-transzformáció. Figyelembe véve a gömbmozgás transzformációját leíró (135) részmatricákat, a mozgórendszer bázisának időfüggvényei a következőképpen számíthatók:

$$\mathbf{M}_{1'1} = \begin{bmatrix} \vec{i}_0 \cdot \vec{i}_1 & \vec{i}_0 \cdot \vec{j}_1 & \vec{i}_0 \cdot \vec{k}_1 & 0 \\ \vec{j}_0 \cdot \vec{i}_1 & \vec{j}_0 \cdot \vec{j}_1 & \vec{j}_0 \cdot \vec{k}_1 & 0 \\ \vec{k}_0 \cdot \vec{i}_1 & \vec{k}_0 \cdot \vec{j}_1 & \vec{k}_0 \cdot \vec{k}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{M}_{0a} \mathbf{M}_{ab} \mathbf{M}_{b1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\varphi - & -\cos\psi \sin\varphi - & \sin\psi \sin\theta & 0 \\ -\sin\psi \cos\theta \sin\varphi & -\sin\psi \cos\theta \cos\varphi & & \\ \sin\psi \cos\varphi + & -\sin\psi \sin\varphi + & -\cos\psi \sin\theta & 0 \\ +\cos\psi \cos\theta \sin\varphi & +\cos\psi \cos\theta \cos\varphi & & \\ \sin\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (190)$$

A (190) mátrix első, második és harmadik oszlopának első három eleme rendre az $\vec{i}_1$, $\vec{j}_1$, és $\vec{k}_1$ egységvektorok koordinátái. Nyilvánvaló, hogy ezek a koordináták az Euler-szögeken keresztül függnak az időtől. A teljesség kedvéért külön is kiírjuk az egységvektorokat az álló rendszerben:

$$\begin{cases} \vec{i}_1 = (\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi) \vec{i}_0 + \\ \quad + (\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi) \vec{j}_0 + \sin\theta \sin\varphi \vec{k}_0 \\ \vec{j}_1 = (-\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi) \vec{i}_0 + \\ \quad + (-\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\theta \cos\varphi) \vec{j}_0 + \sin\theta \cos\varphi \vec{k}_0 \\ \vec{k}_1 = \sin\psi \sin\theta \vec{i}_0 - \cos\psi \sin\theta \vec{j}_0 + \cos\theta \vec{k}_0 \end{cases} \quad (191)$$

A vizsgált P pont (189) alatti helyvektora a (191) egységvektorok helyettesítése után a pályagörbe vektoregyenlete:

$$\begin{aligned} \vec{r}_0^{(P)} = & \left[\mathbf{f}(t) + \mathbf{x}_1^{(P)} (\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi) + \right. \\ & \left. + \mathbf{y}_1^{(P)} (-\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi) + \mathbf{z}_1^{(P)} \sin\psi \sin\theta \right] \vec{i}_0 + \\ & + \left[\mathbf{g}(t) + \mathbf{x}_1^{(P)} (\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi) + \right. \\ & \left. + \mathbf{y}_1^{(P)} (-\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\theta \cos\varphi) - \mathbf{z}_1^{(P)} \cos\psi \sin\theta \right] \vec{j}_0 + \\ & + \left[\mathbf{h}(t) + \mathbf{x}_1^{(P)} \sin\theta \sin\varphi + \mathbf{y}_1^{(P)} \sin\theta \cos\varphi + \mathbf{z}_1^{(P)} \cos\theta \right] \vec{k}_0 \end{aligned} \quad (192)$$

Belátható, hogy a pályagörbe egyenletei meglehetősen bonyolultak. Ugyanakkor észrevehető, hogy a (192) vektoregyenlet bármely testpont pályá-

görbájének kiszámítására alkalmas, ha a P pont mozgórendszerbeli koordinátáit a megfelelő pont koordinátaival helyettesítik.

B. Mátrixmódszer

A mátrixmódszer alapja a mozgó és álló koordináta-rendszerek közötti koordináta-transzformáció. Figyelembe véve azt, hogy a mozgás során a helytálló és mozgórendszer kölcsönös helyzete változik (38. ábra), könnyen belátható, hogy a tetszőlegesen választott P testpont álló rendszerbeli, időfüggő koordinátái képezik az általa leírt pályagörbe parametrikus egyenleteit. A mozgórendszerből az álló rendszerbe való átalakítás mátrixegyenlete:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{M}_{01'} \mathbf{M}_{11} \mathbf{r}_1 \quad (193)$$

ahol

$$\mathbf{M}_{01'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0^{(c)} \\ 0 & 1 & 0 & y^{(c)} \\ 0 & 0 & 1 & z_0^{(c)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & f(t) \\ 0 & 1 & 0 & g(t) \\ 0 & 0 & 1 & h(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{M}_{11}$ pedig a (190) rotációs mátrix. A mátrixszorzás eredményeként kapjuk az $\mathbf{M}_{11}$ transzformációs mátrixot:

$$\mathbf{M}_{01} = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\varphi - & -\cos\psi \sin\varphi - & \sin\psi \sin\theta & f(t) \\ -\sin\psi \cos\theta \sin\varphi & -\sin\psi \cos\theta \cos\varphi & & \\ \sin\psi \cos\varphi + & -\sin\psi \sin\varphi + & -\cos\psi \sin\theta & g(t) \\ +\cos\psi \cos\theta \sin\varphi & +\cos\psi \cos\theta \cos\varphi & & \\ \sin\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta & h(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (194)$$

Ezzel a pályagörbe mátrixos alakja:

$$\begin{bmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{01} \begin{bmatrix} x_1^{(P)} \\ y_1^{(P)} \\ z_1^{(P)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (195)$$

Ha a merev test szabad mozgása esetén a pályagörbe egyenletét nem az Euler-szögekkel, hanem a koordinátatengelyek körüli forgások szögeivel kívánjuk felírni, akkor a transzformációs mátrixot a fentebb bemutatott módon számítjuk, azzal a különbséggel, hogy ekkor az $S_{1'}$ segédrendszer és az S_1 mozgórendszer közötti transzformáció mátrixát a 32. ábra alapján levezetett (132) képletek segítségével írjuk fel.

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

A vektor- és a mátrixmódszer összehasonlítása kapcsán ismét hangsúlyozzuk, – mint ahogyan azt az eddig vizsgált mozgástípusok mindegyikénél megtettük –, hogy a mátrixmódszer fő előnye a rendszerezettsége, és könnyebb algoritmizálhatósága gépi számítások esetén.

A (194) mátrixra a következő felbontást alkalmazzuk:

$$\mathbf{M}_{01} = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\varphi - & -\cos\psi \sin\varphi - & \sin\psi \sin\theta & 0 \\ -\sin\psi \cos\theta \sin\varphi & -\sin\psi \cos\theta \cos\varphi & & \\ \sin\psi \cos\varphi + & -\sin\psi \sin\varphi + & & \\ +\cos\psi \cos\theta \sin\varphi & +\cos\psi \cos\theta \cos\varphi & -\cos\psi \sin\theta & 0 \\ \sin\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & f(t) \\ 0 & 0 & 0 & g(t) \\ 0 & 0 & 0 & h(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3,3} & f(t) \\ g(t) \\ h(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (196)$$

A képletben álló $\mathbf{R}_{01}$ az $\mathbf{M}_{01}$ mátrix rotációs része, vagyis az iránykoszinuszok alkotta 3x3-as mátrix, az $\mathbf{O}_{3,3}$ pedig a 3x3-as zérusmátrix. A fenti felbontás figyelembevételével a (195) alatti mozgástörvény (a pályagörbe egyenlete) az

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3,3} & f(t) \\ g(t) \\ h(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1^{(P)} \\ y_1^{(P)} \\ z_1^{(P)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(P)} \\ y_1^{(P)} \\ z_1^{(P)} \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{q}}_0^{(P)} + \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)} \quad (197)$$

ahol $\underline{\mathbf{q}}_0^{(P)}$ a P pont mozgórendszer C origójához viszonyított helyvektorának, $\underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}$ pedig a C origó helyvektorának homogén koordinátáit tartalmazó mátrixai,. Mindkettőt az álló rendszerben kaptuk meg.

A (197) képlet – mechanikai tartalmát tekintve – megegyezik a vektormódszerrel felírt (189) egyenlettel. A képletben álló valamennyi helykoordinátát a helytálló rendszerben írtuk fel. Megjegyezzük, hogy a vektormódszer alkalmazásakor külön gondot kellett arra fordítani, hogy a műveletekben szereplő vektorok ugyanazon koordináta-rendszerben legyen kifejezve. A mátrixmódszernél ez nem jelent gondot – a transzformációs mátrix eleve tartalmazza az iránykoszinuszokat.

2.3.4.3. A sebességeloszlás

A sebességeloszlás a helyvektor (mozgástörvény) idő szerinti deriváltja. Ennek számítása a vektor- illetve mátrixmódszer alkalmazása esetén a (189), illetve a (195) képletek idő szerinti deriválását igényli.

A. Vektormódszer

A helyvektor deriválásánál figyelembe vesszük, hogy a $\vec{\rho}_1^{(P)}$ mozgórendszerbeli helyvektor csak az irányát változtatja, abszolút értékét nem, tehát csak a mozgó koordináta-rendszer egységvektorait kell deriválni. Ezek számítása a (30) alatti Poisson-féle képletek értelemszerű alkalmazását igényli. A számításokat az alábbiak részletezik:

$$\begin{aligned}\vec{v}_0^{(P)} = \dot{\vec{r}}_0^{(P)} &= \dot{\vec{r}}_0^{(C)} + \dot{\vec{\rho}}_1^{(P)} = \underbrace{\dot{\vec{r}}(t)\vec{i}_0 + \dot{\vec{g}}(t)\vec{j}_0 + \dot{\vec{h}}(t)\vec{k}_0}_{\vec{v}_0^{(C)}} + x_1^{(P)}\dot{\vec{i}}_1 + y_1^{(P)}\dot{\vec{j}}_1 + z_1^{(P)}\dot{\vec{k}}_1 = \\ &= \vec{v}_0^{(C)} + x_1^{(P)}(\vec{\omega} \times \vec{i}_1) + y_1^{(P)}(\vec{\omega} \times \vec{j}_1) + z_1^{(P)}(\vec{\omega} \times \vec{k}_1) = \\ &= \vec{v}_0^{(C)} + \vec{\omega} \times (x_1^{(P)}\vec{i}_1 + y_1^{(P)}\vec{j}_1 + z_1^{(P)}\vec{k}_1) = \vec{v}_0^{(C)} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)}\end{aligned}\tag{198}$$

A (198) képletben:

- $\vec{v}_0^{(C)}$ – a mozgó koordináta-rendszer C origójának sebességvektora;
- $\vec{\omega}$ – a C mozgó origóhoz kötöttnek vett szögsebesség-vektor;
- $\vec{\rho}_1^{(P)}$ – a választott P testpont helyvektora a mozgó C origóhoz képest.

Innen világosan látszik, hogy a sebességvektor két részből áll:

- A mozgó koordináta-rendszer origójának elmozdulásából adódó $\vec{v}_0^{(C)}$ sebesség-összetevőből;
- A mozgó koordináta-rendszer origóján áthaladó pillanatnyi forgástengely körüli, elemi elfordulásból adódó, $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)}$ összetevőből.

Mivel a mozgástörvény matematikai megfogalmazásában az elfordulás formálisan azonos a gömbmozgás kapcsán bevezetett elfordulással, a pillanatnyi szögsebességvektor komponensei az álló rendszerben a (142), a mozgó rendszerben pedig a (143) képletekből számíthatók. A (198) képlet alkalmazásakor minden vektort ugyanabban a koordináta-rendszerben – ez akár az álló, akár a mozgó is lehet – kell felírni.

Amennyiben a sebességet az álló koordináta-rendszerben akarjuk felírni, az $\vec{\omega}$ vektor (koordinátáit a (142) képletből (az S_1 rendszer egységvektorait a $\vec{\rho}_1^{(P)}$ előállításában pedig a (191) képletből kell helyettesíteni:

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

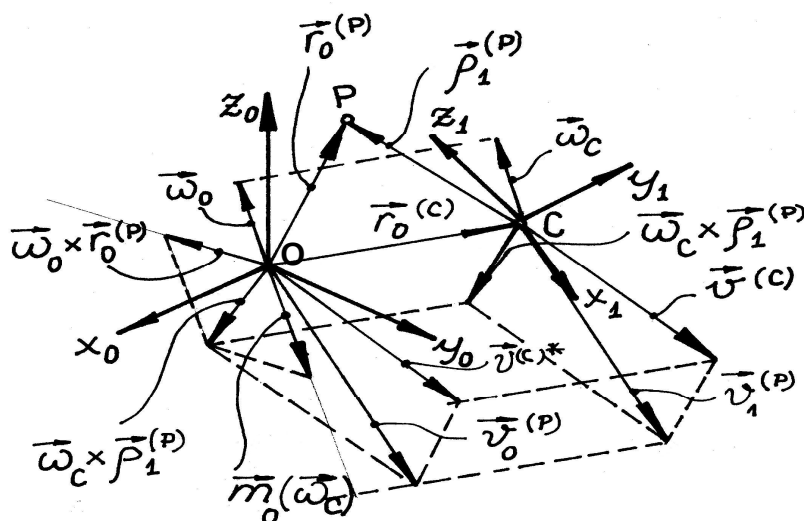
$$\begin{aligned}
 \vec{v}_0^{(P)} = & \dot{\vec{f}}(t)\vec{i}_0 + \dot{\vec{g}}(t)\vec{j}_0 + \dot{\vec{h}}(t)\vec{k}_0 + \\
 & + \vec{\omega}_0 \times \{[(\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi) x_1^{(P)} + \\
 & + (-\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi) y_1^{(P)} + (\sin\psi \sin\theta) z_1^{(P)}] \vec{i}_0 + \\
 & + [(\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi) x_1^{(P)} + \\
 & + (-\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\theta \cos\varphi) y_1^{(P)} - (\cos\psi \sin\theta) z_1^{(P)}] \vec{j}_0 + \\
 & + [(\sin\theta \sin\varphi) x_1^{(P)} + (\sin\theta \cos\varphi) y_1^{(P)} + (\cos\theta) z_1^{(P)}] \vec{k}_0 \} \quad (199)
 \end{aligned}$$

Ha a sebességvektort a mozgó S_1 rendszerben akarjuk felírni, akkor a szögsebesség-koordinátákat a (143) képletből, az álló koordináta-rendszer egységvektorainak koordinátáit pedig a (190) alatti mátrix ortogonalitását figyelembe véve, annak soraiból, – mindig az első három elemet véve – kell helyettesíteni:

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_1^{(P)} = & \dot{\vec{f}}(t) [(\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi) \vec{i}_1 + \\
 & + (-\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi) \vec{j}_1 + (\sin\psi \sin\theta) \vec{k}_1] \\
 & + \dot{\vec{g}}(t) [(\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi) \vec{i}_1 + \\
 & + (-\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\theta \cos\varphi) \vec{j}_1 + (-\cos\psi \sin\theta) \vec{k}_1] + \\
 & + \dot{\vec{h}}(t) [\sin\theta \sin\varphi \vec{i}_1 + \sin\theta \cos\varphi \vec{j}_1 + \cos\theta \vec{k}_1] + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)} = \\
 = & [\dot{\vec{f}}(t) (\cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\theta \sin\varphi) + \\
 & + \dot{\vec{g}}(t) (\sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\theta \sin\varphi) + \dot{\vec{h}}(t) \sin\theta \sin\varphi] \vec{i}_1 + \\
 & + [\dot{\vec{f}}(t) (-\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\theta \cos\varphi) + \\
 & + \dot{\vec{g}}(t) (-\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\theta \cos\varphi) + \dot{\vec{h}}(t) \sin\theta \cos\varphi] \vec{j}_1 + \\
 & + [\dot{\vec{f}}(t) \sin\psi \sin\theta - \dot{\vec{g}}(t) \cos\psi \sin\theta + \dot{\vec{h}}(t) \cos\theta] \vec{k}_1 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)} \quad (200)
 \end{aligned}$$

A fenti két összefüggés viszonylag bonyolult szerkezetű. Az egyszerűbb áttekinthetőség végett célszerű konkrét esetben a (198) képletet alkalmazni, úgy, hogy a képletben szereplő valamennyi vektort ugyanabban a koordináta-rendszerben írjuk fel. A 39. ábráról leolvasható, hogy $\vec{\rho}_1^{(P)} = \vec{r}_0^{(P)} - \vec{r}_0^{(C)}$, amivel a (198) sebességeképlet az álló rendszerben a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_0^{(P)} = & \vec{V}_0^{(C)} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_0^{(P)} - \vec{r}_0^{(C)}) = \vec{V}_0^{(C)} + (\vec{r}_0^{(C)} - \vec{r}_0^{(P)}) \times \vec{\omega} = \\
 = & \vec{V}_0^{(C)} + \vec{\omega} \times \vec{r}_0^{(P)} - \vec{\omega} \times \vec{r}_0^{(C)} = \vec{V}_0^{(C)} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_0^{(P)} + \vec{r}_0^{(C)} \times \vec{\omega}}_{\text{a forgásból adódó összetevő}} \quad (201)
 \end{aligned}$$



39. ábra.

A szögsebességvektor nyomatéka

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy a (201) sebességeképlet a merev test tetszőlegesen választott P pontjának sebességét az álló koordináta-rendszerben fejezi ki, és ehhez kizárólag álló koordináta-rendszerben felírt vektorokat használ fel. Valóban, a $\vec{v}_0^{(C)}$ a mozgó S_1 rendszer origójának sebessége, az $\vec{\omega} \times (\vec{r}_0^{(P)} - \vec{r}_0^{(C)}) = (\vec{r}_0^{(C)} - \vec{r}_0^{(P)}) \times \vec{\omega}$ tag pedig a forgásból adódó sebesség. Figyeljük meg, hogy az utóbbi vektorszorzat formálisan azonos az erővektor pontnyomatékának kifejezésével! Az $\vec{\omega}$ úgy viselkedik, mint egy olyan erő, amelynek támadási pontja a C pont, a forgásból adódó sebesség pedig akár a nyomaték. Az $(\vec{r}_0^{(C)} - \vec{r}_0^{(P)})$ a C pont relatív helyvektora a P ponthoz. Így a forgásból adódó sebesség nem más, mint a C pontba helyezett $\vec{\omega}$ szögsebességvektor nyomatéka a P pontban. Tömören összefoglalva azt mondhatjuk, hogy a merev test szögsebessége olyan erőként viselkedik, amelynek sebesség a nyomatéka. Ennek figyelembevételével a (201) alapján a

$$\vec{v}_0^{(P)} = \vec{v}_0^{(C)} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_0^{(C)} - \vec{r}_0^{(P)})$$

módon írható egyenletnek (a sebességek közötti összefüggésnek) a következő az olvasata: ha ismerjük egy adott pontban (jelen esetben a C pontban) a sebességet (az erő nyomatékát), és a szögsebességet (az erőt), akkor egy másik pontbeli (jelen esetben a P pontbeli) sebesség (nyomaték) úgy számítható, hogy az adott pontbeli (jelen esetben a C pontbeli) sebességhez (nyomatékhoz) hozzáadjuk az

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

adott ponthoz (jelen esetben a C ponthoz) kötötnnek tekintett szögsebesség (erő) nyomatékát a másik pontra (jelen esetben a P pontra).

Ez az eredmény a merev test bármilyen mozgása, vagyis az eddigi mozgások bármelyike esetén változatlanul érvényes.

A fent elmondottakat a fogaskerék kapcsolódás vizsgálatában az alkalmazott koordináta-rendszerek origóira felírva alkalmazzák. Visszatérve a (201) képletre és a 39-es ábrára belátható hogy $\vec{\omega} \times \vec{r}_0^{(P)}$ a helytálló koordináta-rendszer origójához kötötnnek tekintett pillanatnyi szögsebesség-vektortól származó sebesség-komponens, $\vec{m}_O(\vec{\omega}_C) = \vec{r}_0^{(C)} \times \vec{\omega}$ pedig a C ponthoz kötötnnek gondolt szögsebesség-vektor nyomatéka az O pontra.

A fent kijelentettek alapján a sebesség adott koordináta-rendszerben való kifejezésére a következő általános jellegű eljárást alkalmazzák: a szögsebesség-vektort, illetve a szögsebesség-vektorokat a kezdeti támadási pontjukból a kiválasztott koordináta-rendszer origójába helyezik át, és az új helyzet alapján felírható $\vec{v}_0^{(P)} = \vec{v}_0^{(C)} + \vec{\omega} \times \vec{r}_0^{(P)}$ sebességet *kiegészítik a C ponthoz kötötnnek vélt szögsebességvektor nyomatékával az O origóra nézve.*

B. Mátrixmódszer.

A mátrixos számítás az $\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} = \mathbf{M}_{01} \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)}$ koordináta- transzformáción alapul.

Az S_1 -ből S_0 -ba történő transzformáció $\mathbf{M}_{01}$ mátrixát a (196) összefüggés alapján két részre bontva alkalmazzuk:

$$\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{R}_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{g}(t) \\ \mathbf{h}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)}$$

Az idő szerinti deriválás a következő műveletek végrehajtását igényli:

$$\underline{\mathbf{v}}_0^{(P)} = \dot{\underline{\mathbf{r}}}_0^{(P)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \left[\frac{d}{dt} \mathbf{R}_{01} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}(t) \\ \dot{\mathbf{g}}(t) \\ \dot{\mathbf{h}}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left[\frac{d}{dt} \mathbf{R}_{01} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}(t) \\ \dot{\mathbf{g}}(t) \\ \dot{\mathbf{h}}(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Innen

$$\underline{\mathbf{v}}_0^{(P)} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{x_0}^{(P)} \\ \mathbf{v}_{y_0}^{(P)} \\ \mathbf{v}_{z_0}^{(P)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_0^{(P)} \\ \dot{\mathbf{y}}_0^{(P)} \\ \dot{\mathbf{z}}_0^{(P)} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{01}) \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}(t) \\ \dot{\mathbf{g}}(t) \\ \dot{\mathbf{h}}(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{01}) \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} + \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)} \quad (202)$$

A fenti képlet világosan mutatja a korábbi eredményt miszerint a szabad mozgást végző merev test tetszőleges pontjának a sebessége két sebességvektor összege: az első a merev test egy kiválasztott pontjának sebessége (jelen esetben ez a mozgó koordináta-rendszer C origója), a második pedig a C ponthoz viszonyított forgásból adódó sebesség. Mivel semmilyen megkötést nem tettünk a C pont kiválasztását illetően, a szabad mozgást végző merev test esetében egyszerű végtelenségnyi a mozgástörvény felírására vontkozó lehetőségek száma. A gyakorló mérnök tehát, egy konkrét alkalmazásban azt az alakot kell, hogy kiválassza, amelyik a lehető legegyszerűbb számítási képletekre vezet. A (202) összefüggés alkalmazása feltételezi, hogy ismert a merev test mozgórendszerbeli geometriája (a $\bar{\rho}_1$ ismerete minden testpontra), az $\mathbf{L}_{01}$ rotációs mátrix deriváltja, illetve a C origó sebessége (azaz ennek a helyzetét megadó $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ koordináták idő szerinti deriváltja). A gyakorlati feladatok vizsgálatában ez a képlet ajánlott, egyszerűsége és áttekinthetősége miatt.

Ha a sebességeképlet minden tagját az álló rendszerben óhajtjuk kifejezni, akkor a $\underline{\mathbf{q}}_1^{(P)}$ oszlop mátrixot az álló rendszerből kell áttranszformálni:

$$\underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} = \mathbf{M}_{10} \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} = \left(\mathbf{L}_{10} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1^{(O)} \\ 0 & 0 & 0 & y_1^{(O)} \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{(O)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} \quad (203)$$

Emlékeztetésül megjegyezzük, hogy a fenti képletben szereplő $\mathbf{M}_{10}$ inverz-mátrix $\mathbf{L}_{10}$ forgatórésze az $\mathbf{L}_{01}$ rotációs mátrix transzponáltja, a translációs rész utolsó oszlopa pedig az O origó koordinátáit tartalmazza a mozgó koordináta-rendszerben. Ezek kifejezéseit az eredeti $\mathbf{M}_{01}$ mátrix megfelelő oszlopainak skaláris szorzatából nyerik, a következőképpen:

$$\begin{cases} x_1^{(O)} = -(\mathbf{M}_{01}^{(1)})^T \mathbf{M}_{01}^{(4)} \\ y_1^{(O)} = -(\mathbf{M}_{01}^{(2)})^T \mathbf{M}_{01}^{(4)} \\ z_1^{(O)} = -(\mathbf{M}_{01}^{(3)})^T \mathbf{M}_{01}^{(4)} \end{cases} \quad (204)$$

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

A (204)-ben az $\mathbf{M}_{01}^{(i)}$ jelölés az $\mathbf{M}_{01}$ mátrix i -edik oszlopát jelenti, a felső indexben álló T pedig a transzponálás jele.

Ha a (203) relációt a (202)-be helyettesítjük, akkor a sebességmátrix képlete a következőképpen alakul:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{v}}_0^{(P)} &= \left(\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{01} \right) \left(\mathbf{L}_{10} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1^{(O)} \\ 0 & 0 & 0 & y_1^{(O)} \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{(O)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)} = \\ &= \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{01}) \mathbf{L}_{10} \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \frac{d}{dt} (\mathbf{L}_{01}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1^{(O)} \\ 0 & 0 & 0 & y_1^{(O)} \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{(O)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)}\end{aligned}$$

A gömbmozgás vizsgálatok igazoltuk, hogy $(d\mathbf{M}_{01}/dt)\mathbf{M}_{10} = \tilde{\omega}_0$. Érdemes azt is felidézni, hogy a gömbmozgás esetében egybeesik az álló és a mozgó-rendszer origója. Ez azt jelenti, hogy a transzformációs mátrix tiszta forgatómátrix, azaz megegyezik formálisan a szabad mozgás esetére érvényes transzformációs mátrix forgatórészével. Ennek alapján

$$\left(\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{01} \right) \mathbf{M}_{10} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{01} \right) \mathbf{L}_{10} = \tilde{\omega}_0$$

Kihasználva az utóbbi képletet azonos átalakításokkal folytatjuk a levezetést:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{v}}_0^{(P)} &= \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{01} \begin{bmatrix} x_1^{(O)} \\ y_1^{(O)} \\ z_1^{(O)} \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)} = \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \frac{d}{dt} \mathbf{L}_{01} \underbrace{\mathbf{L}_{10} \mathbf{L}_{01}}_{\mathbf{E}} \begin{bmatrix} x_1^{(O)} \\ y_1^{(O)} \\ z_1^{(O)} \\ 0 \end{bmatrix} + \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)} = \\ &= \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \tilde{\omega}_0 \mathbf{L}_{01} \underline{\mathbf{r}}_1^{(O)} + \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)}\end{aligned}$$

A továbbiakban az $\mathbf{L}_{01} \underline{\mathbf{r}}_1^{(O)}$ kifejezés vizsgálatára fordítjuk a figyelmet. Mivel az $\mathbf{L}_{01}$ homogén forgatómátrix, az $\mathbf{L}_{01} \underline{\mathbf{r}}_1^{(O)}$ szorzat az O origó S_1 mozgó-rendszerbeli koordinátáit viszi át az $x'y'z'C$ rendszerbe. Ez pedig nem más, mint a $\overline{CO}$ helyvektor három koordinátája az álló koordináta-rendszerrel párhuzamos helyzetű $x'y'z'C$ rendszerben. Tekintettel a $\overline{CO} + \overline{OC} = 0$ összefüggésre is nyilvánvaló,

hogy a C pont állórendszerbeli koordinátáit kapjuk ellenkező előjellel. Így felírható, hogy

$$\mathbf{L}_{01} \mathbf{r}_1^{(O)} = -\mathbf{r}_1^{(C)},$$

és ezzel a sebességeképlet mátrixos alakja a következő lesz:

$$\mathbf{v}_0^{(P)} = \mathbf{v}_0^{(C)} + \tilde{\omega}_0 (\mathbf{r}_0^{(P)} - \mathbf{r}_0^{(C)}) = \mathbf{v}_0^{(C)} + \tilde{\omega}_0 \mathbf{r}_0^{(P)} - \tilde{\omega}_0 \mathbf{r}_0^{(C)} \quad (205)$$

A (205) képlet a vektormódszerrel levezetett (201) összefüggés mátrixos alakja. Az első egyenlőségjel utáni második tag valójában a C ponthoz kötöttnek gondolt szögsebesség nyomatéka a P pontra, a második egyenlőségjel utáni kifejezés középső tagja pedig a pillanatnyi szögsebességvektor nyomatéka az O origóra. Természetesen ezt ki lehetett volna fejezni $\tilde{\mathbf{r}}_0^{(C)} \underline{\omega}_0$ alakban is, ebben az esetben – a vektorszorzat szabálya szerint – az előjel változott volna.

A sebességmátrix a mozgó koordináta-rendszerben a (205) képletet transzformációjával számítható. Visszaidezve a (203) képletet és a sebességmátrix szerkezetét írhatjuk, hogy

$$\mathbf{v}_1^{(P)} = \mathbf{L}_{10} \mathbf{v}_0^{(P)} = \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \mathbf{r}_0^{(P)} - \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \mathbf{r}_0^{(C)} + \mathbf{L}_{10} \mathbf{v}_0^{(C)}$$

Amint azt már többször láttuk, felhasználva az 1. sz. Függelékben levezetett $\mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \mathbf{L}_{01} = \tilde{\omega}_1$ összefüggést, szorozzuk meg a fenti egyenletben a ferdeszimmetrikus $\tilde{\omega}_0$ mátrixot, jobbról, az $\mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{10} = \hat{\mathbf{E}}$ mátrixsal. Azonos átalakításokkal kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^{(P)} &= \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \underbrace{\mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{10}}_{\hat{\mathbf{E}}} \mathbf{r}_0^{(P)} - \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \underbrace{\mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{10}}_{\hat{\mathbf{E}}} \mathbf{r}_0^{(C)} + \mathbf{L}_{10} \mathbf{v}_0^{(C)} = \\ &= \tilde{\omega}_1 \mathbf{L}_{10} \mathbf{r}_0^{(P)} - \tilde{\omega}_1 \mathbf{L}_{10} \mathbf{r}_0^{(C)} + \mathbf{L}_{10} \mathbf{v}_0^{(C)} \end{aligned}$$

Vegyük figyelembe, hogy a P pont helyvektora C origó helyvektorának és a $\vec{\rho}_1^{(P)}$ helyvektornak összege. Fennáll tehát a homogén koordinátákat tartalmazó oszlop mátrixok tekintetében a

$$\mathbf{r}_0^{(P)} = \mathbf{r}_0^{(C)} + \mathbf{q}_0^{(P)}$$

egyenlet. Ezt is felhasználva, megkapjuk a sebességmátrix végleges alakját a mozgó koordináta-rendszerben:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1^{(P)} &= \tilde{\omega}_1 \mathbf{L}_{10} (\mathbf{r}_0^{(C)} + \mathbf{q}_0^{(P)}) - \tilde{\omega}_1 \mathbf{L}_{10} \mathbf{r}_0^{(C)} + \mathbf{L}_{10} \mathbf{v}_0^{(C)} = \\ &= \mathbf{v}_1^{(C)} + \tilde{\omega}_1 \mathbf{q}_1^{(P)} \end{aligned} \quad (206)$$

2.3.4.4. A pillanatnyi forgástengely létezésének feltétele

Jogos feltenni azt a kérdést – hasonlóan a síkmozgás, illetve a gömbmozgás esetéhez –, hogy léteznek-e a merev test szabad mozgása estén olyan testpontok, melyek sebessége zérus értékű a mozgás egy adott időpillanatában. Ha létezik ilyen **I** pont egy adott időpillanatban, akkor a két különböző testpont sebessége közötti kapcsolatot adó (198) képlet szerint fenn kell állnia a

$$\vec{v}^{(C)} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(I)} = 0 \quad (207)$$

egyenletnek. Ahhoz, hogy a (207) egyenlet teljesüljön, az egyenletben szereplő vektorok az alábbi feltételeknek kell, hogy eleget tegyenek:

- a) a C mozgó origó sebessége ugyanolyan irányú mint a forgásból adódó $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(I)}$ sebességvektor;
- b) A C ponthoz kötöttnek gondolt $(\vec{v}^{(C)}, \vec{\omega})$ vektorok által kifeszített sík a teret két féltérre osztja. A $\vec{\rho}_1^{(I)}$ helyvektor abban a féltérben helyezkedik el amelyben mindig fennáll, hogy az $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(I)}$ irányítása ellentétes a $\vec{v}^{(C)}$ irányításával (a két vektor előjelben különbözik egymástól).

- c) a $\vec{\rho}_1^{(I)}$ helyvektor csak azokra az **I** pontokra mutathat, amelyre teljesül, hogy

$$|\vec{\rho}_1^{(I)}| |\vec{\omega}| \sin(\angle(\vec{\rho}_1^{(I)}, \vec{\omega})) = |\vec{v}^{(C)}|$$

A geometriai összefüggéseket a 40. ábra szemlélteti. Az a) feltétel következménye, hogy a $\vec{v}^{(C)}$ sebesség merőleges az $\vec{\omega}$ és $\vec{\rho}_1^{(I)}$ vektorok által kifeszített Q_1 síkra, tehát

$$\vec{v}^{(C)} \perp \vec{\rho}_1^{(I)} \text{ és } \vec{v}^{(C)} \perp \vec{\omega}$$

Amennyiben ez a feltétel teljesül, az általános mozgásnak a törvénye meg kell engedje, hogy a választott C pont sebessége a pillanatnyi szögsebességvektorra merőleges legyen. Ebben az esetben látszólagos ellentmondás merül fel, a szabad mozgás sajátosítása révén. Ha alaposabban megvizsgáljuk a merőlegességi feltételt, ez teljesülhet, anélkül, hogy a mozgás síkmozgássá (a szögsebességvektor iránya mindig merőleges bármely pont sebességére), vagy akár gömbmozgássá (a nulla sebességű C pont sebességvektora elvileg merőleges bármilyen irányú szögsebességvektorra) egyszerűsödne. A helytálló tengelyű forgó-, illetve csavarmozgás eleve kizárt. Így olyan mozgástörvény, amelynek egyetlen megkötése, hogy a kiválasztott pont sebessége merőleges legyen a mindenkor szögsebességvektorra, a szabad mozgás kategóriába sorolható.

A b) feltétel teljesítése abban áll, hogy az **I** pont az $\vec{\omega} \times \vec{v}^{(C)}$ vektorszorzat irányításának megfelelő féltérbe kell illeszkedjen. A 40. ábra szemlélteti az **I** pont helyzetét. Az első feltételt is figyelembe véve a helyzetvektor és a C pont sebességvektora merőlegesek, így az **I** pont lehetséges helye a $\vec{v}^{(C)}$ sebességvektor tartóegyenésére merőleges félsíkra szűkül.

Nyilvánvaló, hogy amennyiben létezik egyetlen I pont amelyre a c) feltétel teljesül, úgy az említett feltétel egyszerű végtelenségnyi pontra teljesülni fog, és ezen pontok mértani helye egy, az $\vec{\omega}$ szögsebességvektor tartóegyenesevel párhuzamos egyenes. A keresett mértani hely, a pillanatnyi forgástengely

$$d = \frac{|\vec{v}^{(C)}|}{|\vec{\omega}|} \quad (208)$$

távolságra helyezkedik az $\vec{\omega}$ szögsebességvektortól. Ezt az eredményt a φ_j szög 90° -nyi értékére kapjuk.

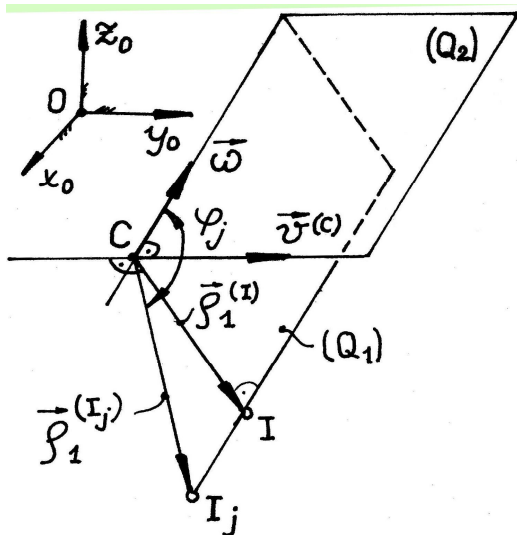
Másrészt a $\vec{\rho}_1^{(I_j)}$ vektor, az $I I_j C$ derékszögű háromszög átfogója, a (207) feltételnek eleget tesz.

Az elmondottak alapján leszögezhető, hogy amennyiben a választott pont sebessége és a pillanatnyi szögsebességvektor egymásra merőlegesek akkor végtelen számú pontra igaz a (207) kikötés, vagyis adott időpillanatban végtelen számosságú zérus sebességű pontja van a vizsgált testnek. A szabad mozgás, ebben a pillanatban, a talált mértani hely körüli infinitezimális forgással ekvivalens.

Az eredményt analitikus úton is megkaphatjuk, legegyszerűbben akkor, ha a mozgó koordináta-rendszerben számolunk. Az I pontra felírt (206) mátrioxszefűgés a következő, x_1, y_1, z_1 -ben lineáris egyenletrendszerrel egyenértékű:

$$\begin{cases} -\omega_{z_1} y_1 + \omega_{y_1} z_1 = -v_{x_1}^{(C)} \\ \omega_{z_1} x_1 - \omega_{x_1} z_1 = -v_{y_1}^{(C)} \\ -\omega_{y_1} x_1 + \omega_{x_1} y_1 = -v_{z_1}^{(C)} \end{cases} \quad (209)$$

Észrevehető, hogy a (209) egyenletrendszer fődeterminánsa zérus, mivel ferdeszimmetrikus. Így a rendszer rangja kisebb, mint 3. Feltételezvé, hogy a mozgás nem egyszerűsödik haladó mozgássá, vagyis $\vec{\omega} \neq 0$, akkor a rendszer rangja 2. Valóban, ha $\omega_{z_1} \neq 0$, az első két egyenletet használjuk fel, x_1, y_1 ismeretlenekben; ha $\omega_{y_1} \neq 0$, akkor az első és a harmadik egyenletet választjuk x_1, z_1 ismeretlenekben; ha pedig $\omega_{x_1} \neq 0$, akkor a második és harmadik egyenletet y_1, z_1 -ben.



40.ábra

A pillanatnyi forgástengely lehetőségének vizsgálata

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

Tekintsük az első két egyenletet ahol $z_1 = \mu$, $\mu \in \mathbb{R}$ paraméter. Az egyenletrendszer megoldható, ha egyetlen karakterisztikus determinánsa zérus, vagyis

$$\begin{vmatrix} 0 & -\omega_{z_1} & -V_{x_1}^{(C)} \\ \omega_{z_1} & 0 & -V_{y_1}^{(C)} \\ -\omega_{y_1} & \omega_{x_1} & -V_{z_1}^{(C)} \end{vmatrix} = 0$$

A számítások elvégzése után kapjuk, hogy

$$\omega_{z_1} \omega_{x_1} V_{x_1}^{(C)} + \omega_{z_1} \omega_{y_1} V_{y_1}^{(C)} + \omega_{z_1} \omega_{z_1} V_{z_1}^{(C)} = 0 \quad (210)$$

Vegyük észre, hogy a fenti kifejezés az $\vec{\omega}$ és $\vec{V}_1^{(C)}$ vektorok ω_{z_1} -gyel végigszorított skaláris szorzata. A kiindulási feltétel értelmében $\omega_{z_1} \neq 0$, tehát a (210) egyenlet akkor, és csak akkor igaz, ha az $\vec{\omega}$ és $\vec{V}_1^{(C)}$ vektorok merőlegesek egymásra. Világos, hogy a (209) egyenletrendszer csak abban az esetben megoldható, ha az $\vec{\omega}$ és $\vec{V}_1^{(C)}$ eleget tesznek a merőlegességi feltételnek.

A (209) egyenletrendszer megoldása a következő:

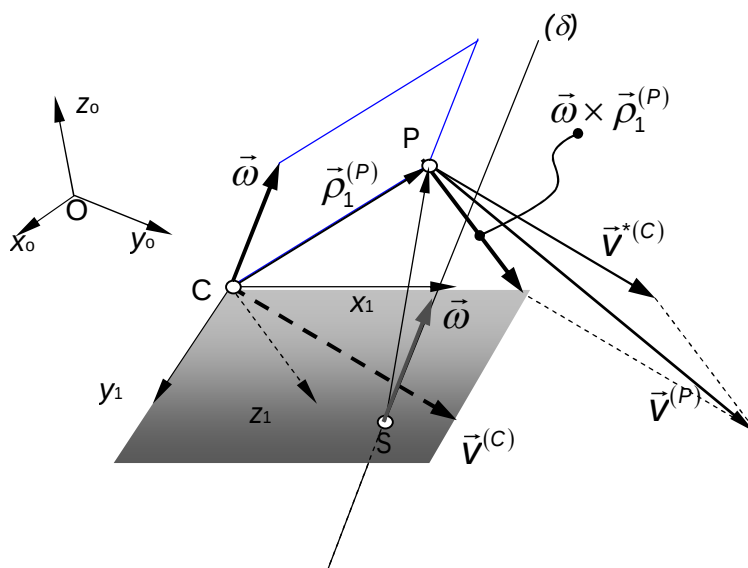
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{V_{y_1}^{(C)}}{\omega_{z_1}} + \frac{\omega_{x_1}}{\omega_{z_1}} \mu \\ y_1 = \frac{V_{x_1}^{(C)}}{\omega_{z_1}} + \frac{\omega_{y_1}}{\omega_{z_1}} \mu \\ z_1 = \mu \end{cases} \quad (211)$$

Mivel a megoldás μ -ben lineáris, következik, hogy a zérus sebességű pontok adott t időpillanatban egy egyenesre illeszkednek.

A (211) képleteket $\mu = 0$ -ra sajátosítva, kapjuk a talált egyenes és a Cx_1y_1 sík S dőféspontjának koordinátáit:

$$x_1^{(S)} = -\frac{V_{y_1}^{(C)}}{\omega_{z_1}}; y_1^{(S)} = \frac{V_{x_1}^{(C)}}{\omega_{z_1}}; z_1^{(S)} = 0 \quad (212)$$

A $\mu_1 = \mu / \omega_{z_1}$ paramétercserével valamint a fenti eredmény figyelembevételével a (211) egyenletek a következő alakra hozhatók:



41. ábra

A sebesség kifejezése a pillanatnyi forgástengely segítségével

$$\frac{x_1 + \frac{v_{y_1}^{(C)}}{\omega_{z_1}}}{\omega_{x_1}} = \frac{y_1 - \frac{v_{x_1}^{(C)}}{\omega_{z_1}}}{\omega_{y_1}} = \frac{z_1}{\omega_{z_1}} \quad (213)$$

A (213) felírásból látható, hogy a keresett mértani hely az $\vec{\omega}$ szögsebességvektorral párhuzamos egyenes.

A zérus sebességű pontok egyenese a sebességeloszlás számítását lényegesen egyszerűsíti. Az említett egyeneshez kötött sebességfelírást a 41. ábrán szemléltetjük. A vektorokat a mozgó (testhez kötött) koordináta-rendszerben írjuk fel. A tetszőlegesen választott P testpont sebességét a C mozgó origó $\vec{V}^{(C)}$ sebessége, és az $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)}$ forgásból adódó sebesség összege adja. Másrészt, figyelembe véve a (δ) egyenest, ugyanazt a sebességet kifejezhetjük az erre helyezett $\vec{\omega}$ szögsebességvektor és a P pont – a tengely tetszőlegesen választott pontjához viszonyított – helyvektorának vektoriális szorzatával. A 41. ábrán látható a P pontba helyezett $\vec{V}^{(C)}$ sebességvektor, az $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)}$ vektor és ezek $\vec{V}_1^{(P)}$ összege. A P pont sebessége ugyanakkor $\vec{\omega} \times \vec{SP}$ -ként is felírható, hiszen

$$\vec{v}^{(P)} = \vec{v}^{(C)} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)} = \vec{\omega} \times \vec{SP} = \vec{\omega} \times (\vec{\rho}_1^{(P)} - \vec{CS}) = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)} + \vec{\omega} \times \vec{SC} \quad (214)$$

A fenti összefüggésben az $\vec{\omega} \times \vec{SC}$ szorzat a C pont sebessége. A talált eredmény könnyen ellenőrizhető, ha felhasználjuk a sebesség általános felírási módját az adott koordináta-rendszerben. Kössük ebben az esetben a (δ) tengelyhez az $\vec{\omega}$ szögsebességvektort. Vigyük a szögsebességvektort a mozgórendszer C origójába, és adjuk hozzá a C-hez viszonyított nyomatékát. A sebesség ezzel a

$$\vec{v}_1^{(P)} = \vec{\omega}_c \times \vec{\rho}_1^{(P)} + \vec{m}_c(\vec{\omega}) = \vec{\omega}_c \times \vec{\rho}_1^{(P)} + \vec{CS} \times \vec{\omega}_c = \vec{\omega}_c \times \vec{\rho}_1^{(P)} + \vec{\omega}_c \times \vec{SC} = \vec{\omega}_c \times \vec{\rho}_1^{(P)} + \vec{v}^{(C)}$$

alakot ölti.

A $\vec{v}^{(P)} = \vec{\omega} \times \vec{SP}$ képletet akkor alkalmazhatjuk hatékonyan, ha átírjuk a vizsgált test geometriáját az S_2 segédrendszerbe, amit úgy kapunk, hogy az S_1 rendszert az S dőféspontba helyezzük át. A dőféspont koordinátáinak ismeretében (212 összefüggések) felírható koordináta-transzformáció mátrixegyenlete a következő:

$$\underline{\underline{\mathbf{q}}}_2^{(P)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1^{(S)} \\ 0 & 1 & 0 & -y_1^{(S)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (215)$$

Ezzel a P pont sebességét az új helyvektor segítségével is ki lehet fejezni:

$$\vec{v}_2^{(P)} \equiv \vec{v}_1^{(P)} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_2^{(P)} \quad (216)$$

A zérus sebességű pontok koordinátáit a helytálló S_0 koordináta-rendszerben az ismert mátrixtranszformáció alkalmazásával kapjuk:

$$\begin{bmatrix} x_0(\mu, t) \\ y_0(\mu, t) \\ z_0(\mu, t) \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{01}(t) \begin{bmatrix} x_1(\mu, t) \\ y_1(\mu, t) \\ z_1(\mu, t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (217)$$

2.3.4.5. A pillanatnyi csavartengely

Az eddigi vizsgálat során a szabad mozgást egy haladó és egy forgómozgás szuperponálásával írtuk le. A mozgástörvényt a vizsgált merev test választott C pontjához kötöttük. Ez egyben a mozgó koordináta-rendszer origója is. A C pont sebességvektora, akár a hozzákötött szögsebesség-vektor időben változik. Belátható tehát, hogy a szabad mozgás infinitezimális elmozdulások, és ezeknek megfelelő infinitezimális forgások végtelen sorozataként fogható fel. A haladó- és a forgómozgásokból kiindulva, feltevődik a kérdés, hogy létezhetnek-e olyan pontok, amelyeknek sebessége párhuzamos a szögsebességvektorral? Ha a feltevés

igaznak bizonyul, akkor ezek a pontok úgy viselkednek, mint a csavartengely pontjai, csavarmozgást végző merev test esetében.

Ha a szabadon mozgó merev test tetszőleges P pontjának sebességvektora a pillanatnyi szögsebességvektorral párhuzamos, akkor felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{v}_i^{(P)} \times \vec{\omega} = 0, \quad i \in \{0; 1\} \quad (218)$$

Akár az előzőekben, az alsó index azt a koordináta-rendszert jelöli, amiben a vektorokat felírni szándékozunk. A (198) egyenletet átírjuk a mozgó koordináta-rendszerre, majd $\vec{\omega}$ -val jobbról átszorozzuk:

$$(\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1^{(P)}) \times \vec{\omega}_1 + \vec{V}_1^{(C)} \times \vec{\omega}_1 = 0 \quad (219)$$

Emlékezzünk, hogy a (198) relációban a C pont sebessége $\vec{V}_0^{(C)}$ jelöléssel szerepel, ám itt a zérus index azt jelenti, hogy a pont a rögzített koordináta-rendszer origójához viszonyítva mozdul el. A zérus index 1-re váltása nyomán az *előbbi sebességvektor koordinátáit a mozgó rendszerben írjuk fel*. Kifejtve a kettős vektorszorzatot az egyenlet a következő alakra hozható:

$$\omega_1^2 \vec{\rho}_1^{(P)} - (\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\rho}_1^{(P)}) \vec{\omega}_1 + \vec{V}_1^{(C)} \times \vec{\omega}_1 = 0$$

Ha a fenti vektoregyenletnek azt a sajátos $\vec{\rho}_1^{(P_0)}$ megoldását keressük, amely merőleges az $\vec{\omega}_1$ szögsebességvektorra, és ezáltal a második tag értéke zérus lesz, akkor:

$$\vec{\rho}_1^{(P_0)} = \frac{\vec{\omega}_1 \times \vec{V}_1^{(C)}}{\omega_1^2} \quad (220)$$

A (220) sajátos megoldás alapján felírható az általános megoldás:

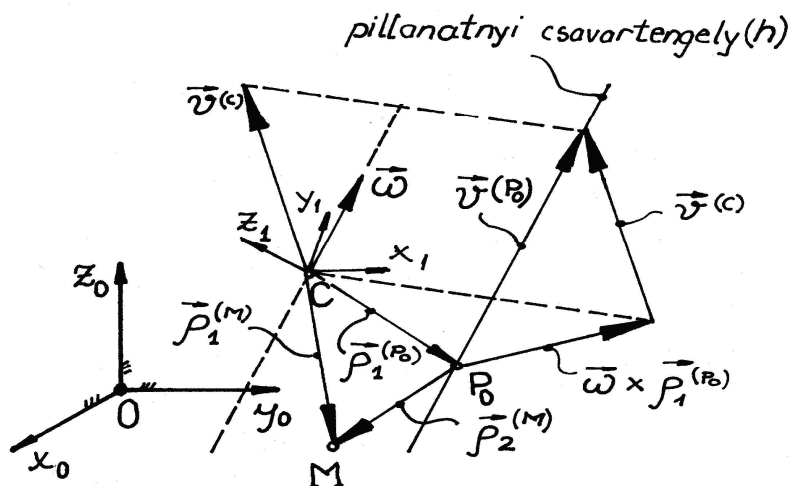
$$\vec{\rho}_1 = \frac{\vec{\omega}_1 \times \vec{V}_1^{(C)}}{\omega_1^2} + \lambda \vec{\omega}_1, \quad \lambda \in \Re \quad (221)$$

Valóban, ha a (221) megoldást a (219) kiinduló egyenletbe helyettesítjük, a kettős vektorszorzat zárójele a következőképpen alakul:

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1 = \vec{\omega}_1 \times \left(\frac{\vec{\omega}_1 \times \vec{V}_1^{(C)}}{\omega_1^2} + \lambda \vec{\omega}_1 \right) = \vec{\omega}_1 \times \frac{\vec{\omega}_1 \times \vec{V}_1^{(C)}}{\omega_1^2} + \underbrace{\vec{\omega}_1 \times (\lambda \vec{\omega}_1)}_{=0} = \vec{\omega}_1 \times \vec{\rho}_1^{(P_0)}$$

Ezáltal igazoltuk, hogy a (221) kifejezéssel megadott $\vec{\rho}_1$ vektor általános megoldása a (219) egyenletnek.

A (221) megoldás egy, a pillanatnyi szögsebességvektorral párhuzamos egyenes vektoregyenlete. A (219) szögsebességvektor – sebességvektor kollinearitást végtelenül sok, adott pillanatban egyetlen egyenesre illeszkedő, pont elégíti ki.



42. ábra.

A szabad mozgás pillanatnyi csavartengelye

A továbbiakban a P tetszőleges testpont sebességét a talált mértani hely tetszőleges pontjának segítségével írjuk fel. A geometriai összefüggéseket a 42. ábrán szemléltettük. A P_0 ponton áthaladó (h) egyenes a talált mértani hely, melynek minden pontjában a sebességvektor $\vec{\omega}$ -val párhuzamos. A tetszőleges M testpont helyzetét megadhatjuk a C mozgó origóhoz a $\vec{\rho}_1^{(M)}$ helyvektorral, valamint a (h) egyenes tetszőleges P_0 pontjához a $\vec{\rho}_2^{(M)}$ helyvektorral. Az M pont sebessége kétféleképpen írható fel, attól függően, hogy a C origóhoz, vagy pedig a P_0 ponthoz viszonyítjuk:

$$\vec{v}^{(M)} = \vec{v}^{(C)} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(M)} = \vec{v}^{(C)} + \vec{\omega} \times (\vec{\rho}_1^{(P_0)} + \vec{\rho}_2^{(M)}) = (\vec{v}^{(C)} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P_0)}) + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_2^{(M)} \quad (222)$$

Vegyük észre, hogy a zárójelben levő kifejezés nem más, mint a P_0 pont sebessége. A tetszőleges M testpont sebessége tehát úgy is felírható, mint a talált mértani hely adott pontja sebességének és egy forgásból adódó sebesség összege.

Figyeljük meg, hogy a (h) egyenes pontjainak sebessége ugyanaz, mint a P_0 sebessége. Valóban, ha M a (h) egyenes pontja, akkor $\vec{\rho}_2^{(M)} = \mu \vec{\omega}$, $\mu \in \mathfrak{R}$, és így az $\vec{\omega} \times \vec{\rho}_2^{(M)}$ vektorszorzat zérus értékű.

A fentebb elért eredmények alapján kijelenthetjük, hogy a szabadon mozgó merev testre, a mozgás minden pillanatában, található egy olyan tengely amely párhuzamos a pillanatnyi szögsebességvektorral, és pontjainak sebessége

egyforma és tengelyirányú. Ezenkívül, a tengelyen kívül illeszkedő testpontok sebessége, a tengely tetszőleges pontjának sebessége felhasználásával pont úgy írható fel, mint a csavarmozgást végző merev test esetében. Tehát a talált mértani hely a szabad mozgást jellemző *pillanatnyi csavartengely*.

A szabad mozgást tehát végtelen sok infinitezimális csavarmozgások sorozataként is felfoghatjuk. A pillanatnyi csavartengelyek mértani helyét alapfelületeknek nevezzük. A mozgó koordináta-rendszerben felírt felület a mozgó, a helytálló rendszerben felírt pedig az álló alapfelület. A két alapfelület minden pillanatban vonal mentén érintkezik, tehát az érintkezési vonal minden pontjában létezik közös normális. A sík-, illetve gömbmozgás esetében jelentkező alapfelületekkel ellentétben, ezek nem gördülnek le csúszásmentesen egymáson, hanem az érintkezési vonal, a pillanatnyi csavartengely mentén *el is csúsznak egymáson*.

Az álló alapfelület egyenleteit többféleképpen lehet levezetni. A továbbiakban a (218) egyenletet az álló rendszerben írjuk fel. A C ponthoz kötöttnek képzeltek $\vec{\omega}$ szögsebességvektort az O álló origóba helyezzük át, és ennek megfelelően kiegészítjük az O-hoz viszonyított nyomatékával. A (218) egyenlet ezzel a következő alakra hozható:

$$\vec{V}_0^{(P)} \times \vec{\omega}_0 = (\vec{V}_0^{(C)} + \vec{\omega}_0 \times \vec{r}_0^{(P)} + \vec{r}_0^{(C)} \times \vec{\omega}_0) \times \vec{\omega}_0 = 0 \quad (223a.)$$

A kettős vektorszorzatok kifejtése után a fenti egyenlet egyszerűsödik:

$$\vec{V}_0^{(C)} \times \vec{\omega}_0 + \omega_0^2 (\vec{r}_0^{(P)} - \vec{r}_0^{(C)}) - [\vec{\omega}_0 \cdot (\vec{r}_0^{(P)} - \vec{r}_0^{(C)})] \vec{\omega}_0 = 0 \quad (223b.)$$

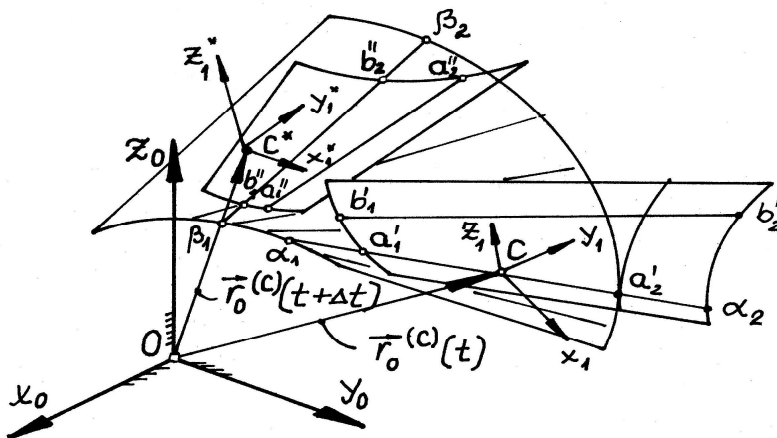
A mozgó alapfelület levezetéséhez hasonlóan, azt a P_0 pontot kell megkeresni, amelynek helyzetvektorára az $\vec{\omega}_0 \cdot (\vec{r}_0^{(P)} - \vec{r}_0^{(C)})$ skalárszorzat zérus értékű lesz. Ezzel a (223b.) egyenletből a P_0 pont helyzetvektora:

$$\vec{r}_0^{(P_0)} = \vec{r}_0^{(C)} + \frac{\vec{\omega}_0 \times \vec{V}_0^{(C)}}{\omega_0^2} \quad (224)$$

Az álló alapfelület vektoregyenletét a sajátos megoldás és a szögsebességvektorral párhuzamos, tetszőleges abszolút értékű vektor összegeként írjuk fel:

$$\vec{r}_0^{(P)} = \vec{r}_0^{(C)} + \frac{\vec{\omega}_0 \times \vec{V}_0^{(C)}}{\omega_0^2} + \lambda \vec{\omega}_0, \lambda \in \Re \quad (225)$$

A mozgó alapfelület (221) vektoregyenletéből is levezethető az álló alapfelület (225) egyenlete. Figyeljük meg, hogy a (221) egyenletben a $\vec{\rho}_1^{(P)}$ helyvektorral a P pontot a C mozgó origóhoz kötjük. Ilyenformán, $\vec{\rho}_1^{(P)} = \vec{r}_0^{(P)} - \vec{r}_0^{(C)}$, és a képletben szereplő összes vektort az álló rendszerben fejezzük ki, akkor a (225) egyenletre jutunk. Ha a (225) egyenletben az $\vec{r}_0^{(C)}$ vektort átvisszük a baloldalra, és az



43. ábra.

Az álló és mozgó alapfelületek szabad mozgás esetén

$\vec{r}_0^{(P)} - \vec{r}_0^{(C)}$ különbséget, valamint a többi vektort a mozgó koordináta-rendszerben írjuk fel, a (221) egyenletre jutunk.

Az álló és a mozgó alapfelületnek az érintkezési vonal minden pontjában, minden t időpillanatban van közös normálisa. A bizonyítás a felületi normális kifejezéseinek álló-, illetve mozgórendszerbeli felírásán és ezek összehasonlításán alapul. Az álló alapfelület vektoregyenlete $\vec{r}_0^{(P)} = \vec{r}_0^{(P)}(t, \lambda)$ alakú. A felület normálisa elvben a felület két t_0, λ_0 paramétere által meghatározott M_0 pontjában általában az érintők vektoriális szorzata:

$$\vec{n}_0(t_0, \lambda_0) = \left. \frac{\partial \vec{r}_0^{(P)}}{\partial t} \right|_{(t_0, \lambda_0)} \times \left. \frac{\partial \vec{r}_0^{(P)}}{\partial \lambda} \right|_{(t_0, \lambda_0)} = \left. \frac{\partial \vec{r}_0^{(P)}}{\partial t} \right|_{(t_0, \lambda_0)} \times \vec{\omega}_0 \quad (226)$$

Kivételt képeznek azonban a pillanatnyi csavartengelyre illeszkedő pontok, mivel a (226) képletben a helyvektor $\partial \vec{r}_0^{(P)} / \partial t$ idő szerinti deriváltja az adott pontban fel lépő sebességvektor. Ez a pillanatnyi csavartengely pontjaiban párhuzamos a szögsebesség-vektorral és így zérus értékű a fenti vektoriális szorzat. Következésképpen a (226) képletet nem lehet, az alapfelületek érintkezési vonalán fekvő pontokban, a felületek normálvektorának meghatározására felhasználni, annak ellenére, hogy ezek közönséges pontok, tehát a felületeknek van normálisa az említett érintkezési vonalon.

A normálvektort az alapfelületek pillanatnyi érintkezési vonalán egyéb geometriai megfontolásokkal határozzuk meg. A két alapfelület kölcsönös helyzetének

időbeli alakulását a 43. ábra szemlélteti. Legyen a két felület érintkezési vonala, adott t_0 időpillanatban $\alpha_1 - \alpha_2$ az álló és $a_1 - a_2$ a mozgó alapfelületen. Adott δt idő elteltével a mozgó alapfelület, és vele együtt a hozzá *mereven kötött* mozgó koordináta-rendszer elmozdul. Az új érintkezési vonal $\beta_1 - \beta_2$ lesz az álló és $b_1'' - b_2''$ a mozgó alapfelületen. Az eredeti érintkezési vonalak természetesen valamelyest eltávolodtak egymástól. A közös normálist úgy határozzuk meg, hogy a két felület közös érintősíkjában keresünk egy, az érintkezési vonaltól eltérő irányú, irányvektort mind az álló, mind pedig a mozgó alapfelületen, majd képezzük ezen irányok vektorális szorzatát a közös érintkezési vonal irányát adó szögsebességvektorral.

A szögsebességvektortól eltérő, de a közös érintősíkjában fekvő másik irány előállítására érdekében felírjuk az alapfelületeken végigfutó helyvektor megváltozását a felületi paraméterek függvényében. Ez a vonatkozó Taylor sor lineáris tagja, amit természetesen lokalizálni kell az érintkezési vonalra. Legyen $P(t_0, \lambda_0)$ az érintkezési vonal egy pontja. A helyvektor megváltozását, vagyis a felületen való elemi elmozdulást, ennek a pontnak a környezetében a fentiek alapján a

$$\vec{q}_i(t_0, \lambda_0) = \left(\frac{\partial \vec{\rho}_i^{(P)}}{\partial t} \delta t + \frac{\partial \vec{\rho}_i^{(P)}}{\partial \lambda} \delta \lambda \right) \Big|_{(t_0, \lambda_0)} \quad (227)$$

képlet adja meg, amelyben a 0 index index az álló, az 1 index pedig a mozgó alapfelülethez tartozik. Az álló alapfelület $\vec{\rho}_0^{(P)}$ helyvektorát adó (225), illetve a mozgó alapfelület $\vec{\rho}_1^{(P)}$ helyvektorát adó (221) képletek felhasználásával, a szükséges deriválások elvégzése és az eredmény (227)-be történő helyettesítése után

$$\begin{cases} \vec{q}_0 = \left(\frac{\vec{\varepsilon}_0 \times \vec{V}_0^{(C)}}{\omega_0^2} + \frac{\vec{\omega}_0 \times \vec{a}_0^{(C)}}{\omega_0^2} - \frac{2\varepsilon_0(\vec{\omega}_0 \times \vec{V}_0^{(C)})}{\omega_0^3} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_0^{(C)}}_{=0} + \lambda \vec{\varepsilon}_0 \right) \delta t + \delta \lambda \vec{\omega}_0 \\ \vec{q}_1 = \left(\frac{\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{V}_1^{(C)}}{\omega_1^2} + \frac{\vec{\omega}_1 \times \vec{a}_1^{(C)}}{\omega_1^2} - \frac{2\varepsilon_1(\vec{\omega}_1 \times \vec{V}_1^{(C)})}{\omega_1^3} + \lambda \vec{\varepsilon}_1 \right) \delta t + \delta \lambda \vec{\omega}_1 \end{cases} \quad (228)$$

a két elemi elmozdulás. Vegyük észre, hogy az első képletben a C pont helyvektora (a C a közös érintkezési vonalon van) időfüggetlen, mivel az álló alapfelületen vagyunk. Geometriai jelentése az időbeli függetlenségnek az, hogy adott időpillanatban óhajtjuk előállítani az alapfelületen a szögsebességvektor irányától eltérő irányt, azaz a megfigyelő elmozdul az alapfelületen, miközben az álló és mozgó alapfelületek helyzete változatlan marad. Ezt természetesen kihasználtuk. A normálvektorok az elemi elmozdulások és a szögsebességvektor vektoriális szorzatai:

$$\begin{aligned}\vec{n}_0 &= \vec{q}_0 \times \vec{\omega}_0 = \left(\frac{\vec{\varepsilon}_0 \times \vec{V}_0^{(C)}}{\omega_0^2} + \frac{\vec{\omega}_0 \times \vec{a}_0^{(C)}}{\omega_0^2} - \frac{2\varepsilon_0 (\vec{\omega}_0 \times \vec{V}_0^{(C)})}{\omega_0^3} + \lambda \vec{\varepsilon}_0 \right) \times \vec{\omega}_0 \\ \vec{n}_1 &= \vec{q}_1 \times \vec{\omega}_1 = \left(\frac{\vec{\varepsilon}_1 \times \vec{V}_1^{(C)}}{\omega_1^2} + \frac{\vec{\omega}_1 \times \vec{a}_1^{(C)}}{\omega_1^2} - \frac{2\varepsilon_1 (\vec{\omega}_1 \times \vec{V}_1^{(C)})}{\omega_1^3} + \lambda \vec{\varepsilon}_1 \right) \times \vec{\omega}_1\end{aligned}\quad (229)$$

A (229) képletekben álló vektorok alsó indexei egyrészt arra utalnak, hogy melyik alapfelületről van szó, másrészt pedig azt a koordináta-rendszert azonosítják, amelyben felírtuk a kérdéses képletet. Mivel a képletekben szereplő vektorok objektív, azaz koordináta-rendszertől független mennyiségek, a két egyenlet azonos. Ezzel igazoltuk, hogy a merev test szabad mozgása esetén, feltéve hogy a mozgás elemei csavarmozgások sorozata, az alapfelületek csúszással gördülnek le egymáson.

2.3.4.6. A gyorsuláseloszlás

A gyorsuláseloszlás vizsgálatát, ugyanúgy mint eddig, mind vektormódszerrel, mind pedig mátrixmódszerrel tárgyalni fogjuk.

A. Vektormódszer

A gyorsulásvektor meghatározása céljából a (198) sebességeképletet az idő szerint deriváljuk:

$$\vec{a}_0^{(P)} = \dot{\vec{V}}_0^{(P)} = \frac{d}{dt} (\vec{V}_0^{(C)} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)}) = \vec{a}_0^{(C)} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_1^{(P)} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)}) \quad (230)$$

A (230) összefüggésben álló vektorok jelentését az alábbiak részletezik:

- $\vec{a}_0^{(C)}$ – a C mozgó origó gyorsulásvektora;
- $\vec{\omega}$ – a szabad mozgást végző merev test C pontjához kötöttnek tekintett szögsebesség-vektor;
- $\vec{\varepsilon}$ – a szabad mozgást végző merev test C pontjához kötöttnek tekintett szöggyorsulás-vektor;
- $\vec{\rho}_1^{(P)}$ – a választott P testpont mozgó C origóhoz viszonyított helyvektora.

Megfigyelhető, hogy a gyorsulásvektornak három összetevője van:

- $\vec{a}_0^{(C)}$ a mozgó koordináta-rendszer origójának sebességéből számított gyorsulás-összetevő;
- $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_1^{(P)}$ – a $\vec{\rho}_1^{(P)}$ -re és a szöggyorsulásra merőleges gyorsulásösszetevő;
- $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)})$ – a pillanatnyi forgásból adódó gyorsulás összetevő.

A P testpont pályagörbéjéhez tartozó normál- illetve tangenciális gyorsulás-összetevők számítása meglehetősen bonyolult képletekre vezet. A tangenciális gyorsulás számításához a (230) relációt skalárisan szorozzuk a sebességvektor irányának egységvektorával, majd az így kapott skalárt ismét megszorozzuk ezzel az egységvektorral:

$$\bar{\mathbf{a}}_{0r}^{(P)} = (\bar{\mathbf{a}}_0^{(P)} \cdot \bar{\mathbf{e}}_v) \cdot \bar{\mathbf{e}}_v = \frac{(\bar{\mathbf{a}}_0^{(P)} \cdot \bar{\mathbf{v}}_0^{(P)}) \cdot \bar{\mathbf{v}}_0^{(P)}}{|\bar{\mathbf{v}}_0^{(P)}|^2} \quad (231)$$

A normálgyorsulás a (231) és a (230) egybevetéséből adódik:

$$\bar{\mathbf{a}}_{0v}^{(P)} = \bar{\mathbf{a}}_0^{(P)} - \bar{\mathbf{a}}_{0r}^{(P)} \quad (232)$$

A (230)-(232) képletek mind az álló, mind pedig a mozgó rendszerben érvényesek;. Megjegyezzük, hogy az álló rendszerben $\bar{\rho}_1^{(P)}$ helyett a P és C pontok helyvektorainak különbségét kell szerepeltetni a képletekben.

B. Mátrixmódszer

A kiindulásként szolgáló egyenlet a tetszőlegesen választott P testpont sebességének álló koordináta-rendszerbeli (205) mátrixegyenlete:

$$\underline{\mathbf{v}}_0^{(P)} = \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)} + \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)}$$

Idő szerinti deriválással kapjuk innen a gyorsulásvektor álló rendszerbeli koordinátáit:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}_0^{(P)} &= \frac{d}{dt}(\underline{\mathbf{v}}_0^{(P)}) = \tilde{\epsilon}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{v}}_0^{(P)} - \tilde{\epsilon}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)} - \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)} + \underline{\mathbf{a}}_0^{(C)} = \\ &= \tilde{\epsilon}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)} + \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)} - \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)} + \underline{\mathbf{a}}_0^{(C)} = \\ &= \tilde{\epsilon}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \underline{\mathbf{a}}_0^{(C)} \end{aligned} \quad (233)$$

Vegyük észre, hogy a (233) mátrixegyenlet egyenértékű a (230) vektoregyenlettel. Ennek belátásához csak azt kell ismét visszaidézni, hogy a vektoregyenletben szereplő $\bar{\rho}_1^{(P)}$ helyvektor a P pontnak C ponthoz (a mozgó origóhoz) viszonyított helyvektora, azaz a P és C pontok O origóhoz viszonyított helyvektorainak különbsége. Amennyiben tehát az idézett vektoregyenletet az álló koordináta-rendszerben tekintjük, az említett két helyvektor különbségével kell számolni.

A gyakorlati számítások szempontjából egyszerűbb képletre lehet jutni, ha a (202) egyenletet deriváljuk az idő szerint:

$$\underline{\mathbf{a}}_0^{(P)} = \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{01} \right) \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} + \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)} \right) = \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{L}_{01}) \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} + \underline{\mathbf{a}}_0^{(C)} \quad (234)$$

A fenti gyorsulásképlet a transzformációs mátrix 4x4-es homogén rotációs részének második deriváltját, a tekintett P testpont mozgó rendszerbeli homogén koordinátáit és a mozgó C origó gyorsulásmátrixát tartalmazza. A képlet alkalmazása egyszerű, de első pillantásra nem látszik belőle a pillanatnyi szöggyorsulás-vektor szerepe. A (233) és a (234) egyenértékűségének belátásához a (202) egyenletet a

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

$$\underline{\mathbf{v}}_0^{(P)} = \left(\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{L}}_{01} \right) \underline{\mathbf{L}}_{10} \underline{\mathbf{q}}_0^{(P)} + \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)} = \left(\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{L}}_{01} \right) \underline{\mathbf{L}}_{10} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)}$$

alakra hozva elvégezzük az idő szerinti deriválást és az átalakítások során kihasználjuk az

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0 &= \frac{d \underline{\mathbf{L}}_{01}}{dt} \underline{\mathbf{L}}_{10} \\ \tilde{\varepsilon}_0 &= \frac{d}{dt} (\tilde{\omega}_0) = \frac{d^2 \underline{\mathbf{L}}_{01}}{dt^2} \underline{\mathbf{L}}_{10} + \frac{d \underline{\mathbf{L}}_{01}}{dt} \frac{d \underline{\mathbf{L}}_{10}}{dt} \\ \frac{d}{dt} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)}) &= \frac{d \underline{\mathbf{L}}_{01}}{dt} \underline{\mathbf{L}}_{10} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \underline{\mathbf{v}}_0^{(C)} \end{aligned}$$

összefüggéseket. A fenti három képlet figyelembevételével valóban a kívánt eredményre vezet. A részleteket elhagyjuk.

A gyorsulás felírása a mozgó koordináta-rendszerben a (233) és (234) képletek átalakításával lehetséges. Az álló rendszerből a mozgórendszerbe való koordináta transzformációt alkalmazva:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}_1^{(P)} &= \underline{\mathbf{L}}_{10} \underline{\mathbf{a}}_0^{(P)} = \underline{\mathbf{L}}_{10} \tilde{\varepsilon}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \underline{\mathbf{L}}_{10} \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \underline{\mathbf{L}}_{10} \underline{\mathbf{a}}_0^{(C)} = \\ &= \underline{\mathbf{L}}_{10} \tilde{\varepsilon}_0 \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{01} \underline{\mathbf{L}}_{10}}_{\tilde{\varepsilon}} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \underline{\mathbf{L}}_{10} \tilde{\omega}_0 \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{01} \underline{\mathbf{L}}_{10}}_{\tilde{\varepsilon}} \tilde{\omega}_0 \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{01} \underline{\mathbf{L}}_{10}}_{\tilde{\varepsilon}} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \underline{\mathbf{a}}_1^{(C)} = \\ &= \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{10} \tilde{\varepsilon}_0 \underline{\mathbf{L}}_{01} \underline{\mathbf{L}}_{10}}_{\tilde{\varepsilon}_1} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{10} \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{L}}_{01}}_{\tilde{\omega}_1} \underbrace{\underline{\mathbf{L}}_{10} \tilde{\omega}_0 \underline{\mathbf{L}}_{01}}_{\tilde{\omega}_1} \underline{\mathbf{L}}_{10} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \underline{\mathbf{a}}_1^{(C)} \end{aligned}$$

Innen pedig azonnal adódik a képlet végleges alakja:

$$\underline{\mathbf{a}}_1^{(P)} = \tilde{\varepsilon}_1 \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} + \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_1 \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} + \underline{\mathbf{a}}_1^{(C)} \quad (235)$$

A (230) vektorösszefüggéssel való azonosság – csak az írásmód mátrixos – azonnal észrevehető.

Ha a (234) gyakorlati számításokra alkalmasabb képletből indulunk ki, akkor

$$\underline{\mathbf{a}}_1^{(P)} = \underline{\mathbf{L}}_{01} \frac{d^2 \underline{\mathbf{L}}_{01}}{dt^2} \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} + \underline{\mathbf{a}}_1^{(C)} \quad (236)$$

2.3.4.7. A gyorsuláspólus

A gyorsuláspólus, ugyanúgy mint az eddig vizsgált mozgások során, az a pont, amelynek zérus a pillanatnyi gyorsulása. Ha van ilyen pont, jelölje ezt mondjuk P_0 , akkor a (233) alapján felírt

$$\underline{\mathbf{a}}_0^{(P_0)} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\varepsilon}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P_0)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \tilde{\omega}_0 \tilde{\omega}_0 (\underline{\mathbf{r}}_0^{(P_0)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}) + \underline{\mathbf{a}}_0^{(C)} = 0 \quad (237)$$

mátrixegyenlet megoldható kell legyen $\mathbf{r}_0^{(P_0)}$ -ra. Rendezés után az egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \left(\mathbf{r}_0^{(P_0)} - \mathbf{r}_0^{(C)} \right) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \left(\mathbf{r}_0^{(P_0)} - \mathbf{r}_0^{(C)} \right) = -\mathbf{a}_0^{(C)}$$

Vezessük be az $\mathbf{r}_0^{(P_0)} - \mathbf{r}_0^{(C)} = \mathbf{X}$ jelölést. Ezzel

$$\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \right) \mathbf{X} = -\mathbf{a}_0^{(C)} \quad (238)$$

a megoldandó egyenlet alakja. Mivel az ismeretlen $\mathbf{X}$ oszlop két pont homogén koordináta-mátrixának különbsége, negyedik eleme zérus értékű, ugyanúgy mint az $\mathbf{a}_0^{(C)}$ gyorsulásmátrix utolsó eleme. Ez azt jelenti, hogy feleslegessé válik a 4x4-es mátrixok használata. A (238) mátrixegyenlet megoldhatósága a fentiek alapján 3x3-as mátrixnak tekintett $\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \right)$ együtthatómátrix determinánsának értékétől, valamint a jobboldal értékétől függ.

Az együtthatómátrix értéke egyszerűen adódik:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z0} & \omega_{y0} \\ \omega_{z0} & 0 & -\omega_{x0} \\ -\omega_{y0} & \omega_{x0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z0} & \omega_{y0} \\ \omega_{z0} & 0 & -\omega_{x0} \\ -\omega_{y0} & \omega_{x0} & 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_{z0} & \varepsilon_{y0} \\ \varepsilon_{z0} & 0 & -\varepsilon_{x0} \\ -\varepsilon_{y0} & \varepsilon_{x0} & 0 \end{bmatrix} = \quad (239) \\ &= \begin{bmatrix} -(\omega_{z0}^2 + \omega_{y0}^2) & \omega_{x0} \omega_{y0} - \varepsilon_{z0} & \omega_{z0} \omega_{x0} + \varepsilon_{y0} \\ \omega_{x0} \omega_{y0} + \varepsilon_{z0} & -(\omega_{x0}^2 + \omega_{z0}^2) & \omega_{y0} \omega_{z0} - \varepsilon_{x0} \\ \omega_{z0} \omega_{x0} - \varepsilon_{y0} & \omega_{y0} \omega_{z0} + \varepsilon_{x0} & -(\omega_{y0}^2 + \omega_{x0}^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ezzel a (238) mátrixegyenlet a következő alakot ölti :

$$\begin{bmatrix} -(\omega_{z0}^2 + \omega_{y0}^2) & \omega_{x0} \omega_{y0} - \varepsilon_{z0} & \omega_{z0} \omega_{x0} + \varepsilon_{y0} \\ \omega_{x0} \omega_{y0} + \varepsilon_{z0} & -(\omega_{x0}^2 + \omega_{z0}^2) & \omega_{y0} \omega_{z0} - \varepsilon_{x0} \\ \omega_{z0} \omega_{x0} - \varepsilon_{y0} & \omega_{y0} \omega_{z0} + \varepsilon_{x0} & -(\omega_{y0}^2 + \omega_{x0}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^{(P)} - x_0^{(C)} \\ y_0^{(P)} - y_0^{(C)} \\ z_0^{(P)} - z_0^{(C)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{x0}^{(C)} \\ a_{y0}^{(C)} \\ a_{z0}^{(C)} \end{bmatrix} \quad (240)$$

A (240) egyenletrendszer determinánsának értéke pedig

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

$$\begin{aligned}\Delta &= 2(\omega_{z_0} \omega_{x_0} \varepsilon_{z_0} \varepsilon_{x_0} + \omega_{y_0} \omega_{z_0} \varepsilon_{y_0} \varepsilon_{z_0} + \omega_{x_0} \omega_{y_0} \varepsilon_{x_0} \varepsilon_{y_0}) - \\ &\quad - \varepsilon_{x_0}^2 (\omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2) - \varepsilon_{y_0}^2 (\omega_{x_0}^2 + \omega_{z_0}^2) - \varepsilon_{z_0}^2 (\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2) = \\ &= 2(\omega_{z_0} \omega_{x_0} \varepsilon_{z_0} \varepsilon_{x_0} + \omega_{y_0} \omega_{z_0} \varepsilon_{y_0} \varepsilon_{z_0} + \omega_{x_0} \omega_{y_0} \varepsilon_{x_0} \varepsilon_{y_0}) + \\ &\quad + \varepsilon_{x_0}^2 \omega_{x_0}^2 + \varepsilon_{y_0}^2 \omega_{y_0}^2 + \varepsilon_{z_0}^2 \omega_{z_0}^2 - (\varepsilon_{x_0}^2 + \varepsilon_{y_0}^2 + \varepsilon_{z_0}^2)(\omega_{x_0}^2 + \omega_{y_0}^2 + \omega_{z_0}^2)\end{aligned}$$

Ez a képlet sokkal áttekinthetőbbé válik, ha a determináns értékét vektorműveletek segítségével fejezzük ki. Nem nehéz ellenőrizni, hogy

$$\Delta = (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\omega})^2 - (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon})(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) = \varepsilon^2 \omega^2 \cos^2 \varphi - \varepsilon^2 \omega^2 = -\varepsilon^2 \omega^2 \sin^2 \varphi \quad (241)$$

ahol a φ a szögsebesség és szöggyorsulás vektorok által bezárt szög. A (238) egyenlet megoldhatóságának vizsgálata, a Δ determináns értékének vizsgálatát kívánja meg. Az alábbi eseteket érdemes megkülönböztetni:

A. A determináns értéke és a C origó gyorsulása nullától különböznek.

Ebben az esetben, nem nehéz belátni – a (241) képletet is kihasználva –, hogy $\vec{\varepsilon}$ és $\vec{\omega}$ vektorok nem nullák, és az általuk bezárt φ szög sem nulla. Ekkor a (240) egyenletrendszer összeférhető és határozott, megoldásának mátrixos alakja pedig:

$$\underline{\mathbf{r}}_0^{(P_0)} = \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)} - \mathbf{A}^{-1} \underline{\mathbf{a}}_0^{(C)} \quad (242)$$

A megoldást adó fenti képletben $\mathbf{A}$ jelöli a (240) egyenletrendszer együtthatómátrixát.

B. A determináns nem zérus, de a C origó gyorsulása nulla.

Ha a C origó gyorsulása nulla, akkor a gyorsuláspólus egybeesik a C origóval. Az egyenletrendszer ebben az esetben is megoldható, és nyilvánvaló hogy a triviális megoldás (a zérus megoldás) a rendszer megoldása.

C. A fődetermináns értéke nulla, a C origó gyorsulása nullától különbözik.

Ebben az esetben feltételezhetően létezik olyan másodrendű al-determináns, melynek zérustól különböző az értéke. Alkalmas átrendezéssel mindig elérhető, hogy ez a másodrendű determináns az első főminor (a baloldali felső 2x2-es al-mátrix) determinánsa legyen. Ez esetben az első két egyenlet független, és a megoldás paraméterként tartalmazza a harmadik ismeretlent. Az inhomogén egyenletrendszer pedig csak akkor oldható meg, ha a rendszer karakterisztikus determinánsa zérus értékű. Ez csak abban az esetben lehetséges, ha a C origó gyorsulásának oszlopmátrixa az $\mathbf{A}$ együtthatómátrix első két oszlopának egy lineáris kombinációjaként állítható elő. Ha nincs szükség átrendezésre, akkor a kiindulási feltétel szerint fennáll az

$$\begin{vmatrix} -(\omega_{z0}^2 + \omega_{y0}^2) & \omega_{x0} \omega_{y0} - \varepsilon_{z0} & \omega_{z0} \omega_{x0} + \varepsilon_{y0} \\ \omega_{x0} \omega_{y0} + \varepsilon_{z0} & -(\omega_{x0}^2 + \omega_{z0}^2) & \omega_{y0} \omega_{z0} - \varepsilon_{x0} \\ \omega_{z0} \omega_{x0} - \varepsilon_{y0} & \omega_{y0} \omega_{z0} + \varepsilon_{x0} & -(\omega_{y0}^2 + \omega_{x0}^2) \end{vmatrix} = 0;$$

egyenlet, az első főminor detereminánsa nyilván nem zérus és a három gyorsulás-koordináta pedig az első két oszlop lineáris kombinációja azaz fenn kell, hogy álljanak a

$$\begin{vmatrix} -(\omega_{z0}^2 + \omega_{y0}^2) & \omega_{x0} \omega_{y0} - \varepsilon_{z0} \\ \omega_{x0} \omega_{y0} + \varepsilon_{z0} & -(\omega_{x0}^2 + \omega_{z0}^2) \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} -(\omega_{z0}^2 + \omega_{y0}^2) & \omega_{x0} \omega_{y0} - \varepsilon_{z0} & a_{x0}^{(C)} \\ \omega_{x0} \omega_{y0} + \varepsilon_{z0} & -(\omega_{x0}^2 + \omega_{z0}^2) & a_{y0}^{(C)} \\ \omega_{z0} \omega_{x0} - \varepsilon_{y0} & \omega_{y0} \omega_{z0} + \varepsilon_{x0} & a_{z0}^{(C)} \end{vmatrix} = 0$$

egyenletek is. Ez esetben maga a megoldandó egyenletrendszer pedig az

$$\begin{cases} -(\omega_{z0}^2 + \omega_{y0}^2)(x_0^{(P_0)} - x_0^{(C)}) + (\omega_{x0} \omega_{y0} - \varepsilon_{z0})(y_0^{(P_0)} - y_0^{(C)}) = \\ \quad = a_{x0}^{(C)} - (\omega_{z0} \omega_{x0} + \varepsilon_{y0})(z_0^{(P_0)} - z_0^{(C)}) \\ (\omega_{x0} \omega_{y0} + \varepsilon_{z0})(x_0^{(P_0)} - x_0^{(C)}) - (\omega_{x0}^2 + \omega_{z0}^2)(y_0^{(P_0)} - y_0^{(C)}) = \\ \quad = a_{y0}^{(C)} - (\omega_{y0} \omega_{z0} - \varepsilon_{x0})(z_0^{(P_0)} - z_0^{(C)}) \\ z_0^{(P_0)} - z_0^{(C)} = \lambda, \quad \lambda \in \Re \end{cases} \quad (243)$$

alakban írható fel.

D. A determináns értéke és a C origó gyorsulása egyidejűleg nulla.

Ez esetben, ha az $\vec{\varepsilon}$ és $\vec{\omega}$ vektorok nem zérus értékűek, akkor párhuzamosak, vagy pedig az egyikük zérus értékű. (Ha mindkettő nulla, akkor az általános mozgás haladó mozgássá egyszerűsödik, és gyorsuláspólust keresni értelmetlen). A vonatkozó egyenletrendszer pedig homogén és határozatlan – zérus a determinánsa. Amennyiben most is létezik egy nullától különböző másodrendű al-determináns, akkor a rendszer mindig megoldható (az egyetlen karakterisztikus determináns nulla, mert a kiegészítő oszlop nulla).

Az előbbieken elvégzett elemzés alapján kijelenthető, hogy a szabad mozgást végző merev testenek van gyorsuláspólusa, ha a pillanatnyi mozgása nem haladó mozgás.

2. Fejezet. Merev testek kinematikája

Akkor a legegyszerűbb a gyorsuláspólus képlete a mozgó koordináta-rendszerben, ha a (240) egyenletrendszerben szereplő vektormennyiségeket eleve a mozgó koordináta-rendszerben tekintjük. Figyelembe kell venni, hogy az ismeretlenek oszlopát adó $\underline{\mathbf{r}}_0^{(P_0)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(C)}$ különbség a mozgó rendszerben a P_0 pólus $\underline{\mathbf{q}}_1^{(P_0)}$ koordináta-oszlópa. Ezzel a megoldást adó lineáris egyenletrendszer alakja a következő lesz:

$$\begin{bmatrix} -(\omega_{z1}^2 + \omega_{y1}^2) & \omega_{x1} \omega_{y1} - \varepsilon_{z1} & \omega_{z1} \omega_{x1} + \varepsilon_{y1} \\ \omega_{x1} \omega_{y1} + \varepsilon_{z1} & -(\omega_{x1}^2 + \omega_{z1}^2) & \omega_{y1} \omega_{z1} - \varepsilon_{x1} \\ \omega_{z1} \omega_{x1} - \varepsilon_{y1} & \omega_{y1} \omega_{z1} + \varepsilon_{x1} & -(\omega_{y1}^2 + \omega_{x1}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(P_0)} \\ y_1^{(P_0)} \\ z_1^{(P_0)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{x1}^{(C)} \\ a_{y1}^{(C)} \\ a_{z1}^{(C)} \end{bmatrix} \quad (244)$$

3. Fejezet. A relatív mozgás

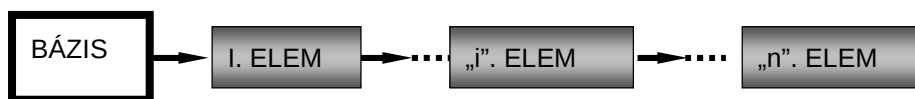
3.1. A relatív mozgás értelmezése

3.1.1. A relatív mozgás elve

Az előző két fejezet az anyagi pont és az anyagi test álló koordináta-rendszerhez viszonyított mozgásával foglalkozott, azt tekintette át részletesen. Az anyagi pont esetén a mozgástörvényt meghatározó mozgáskoordinátákat kizárólag az álló koordináta-rendszerben adtuk meg. Az anyagi test mozgása esetén két koordináta-rendszer szerepelt a vizsgálatokban. Az egyik a testhez viszonyítva mozdulatlan helyzetű S_0 rendszer, a másik pedig a testhez mereven kötött, azzal együtt mozgó S_1 koordináta-rendszer volt. Az utóbbi lehetővé tette a test geometriájának leírását. A pályagörbék egyenleteit minden esetben az álló koordináta-rendszerben határoztuk meg. Ez természetes, hiszen a test feltevés szerint merev, és így zérus az egyik testpont másikkal viszonyított elmozdulása. A sebesség- és a gyorsulásvektor koordinátái azonban mindkét koordináta-rendszerben felírhatók. A szöveg hangsúlyozottan emeli ki azt a körülményt, hogy a testtel együtt mozgó koordináta-rendszerben megadott sebesség vagy gyorsulásvektor nem azt jelenti, hogy a test mozog is a hozzá kötött koordináta-rendszerben. Az átszámítás mindössze egy koordinátatranszformációt igényel ami önmagában csak egy matematikai művelet, amit a mozgás vizsgálata igényel. Magát a mozgást, legyen szó akár anyagi pontról, akár merev testről ezideig *kizárólag az álló koordináta-rendszerben vizsgáltuk*. Ezeket a mozgásokat gyakran *abszolút mozgásoknak* nevezik.

A mechanizmusok elméletében gyakran merül fel az a kíváncsiság, hogy a mechanizmus egy adott elemének (tagjának) mozgását egyidejűleg a mechanizmus egy másik eleméhez, illetve a bázishoz (gépállványhoz) viszonyítva vizsgáljuk. Az ilyen és ehhez hasonló esetekben a tekintett elem bázishoz viszonyított mozgásának vizsgálata meglehetősen bonyolult matematikai modellekre vezet, és ezek sokszor nehezen kezelhetők. Áttekinthetőbbé válik a mozgást leíró matematikai modell, ha alkalmas hierarchiát vezetünk be. Közismert tény, hogy a mechanizmusok egymáshoz kapcsolódó elemeinek egymáshoz viszonyított mozgása forgó-, csavar-, haladó- vagy gömbmozgás, melyek könnyen azonosíthatók, és aránylag egyszerűen leírhatók. Ezt a körülményt kihasználva, adott elem bázishoz viszonyított mozgását a kapcsolódó elemek egymáshoz viszonyított mozgásának szuperpozíciójával írjuk majd le. A hierarchia azt mondja meg, hogy egy adott elem hányadik a bázistól való távolságát illetően. A 44. ábra egy soros mechanizmus strukturális vázlatát szemlélteti.

A *báziselem* képezi a hierarchia alapját. A gyakorlatban ez a gépállvány, ami a gépálarhoz van rögzítve és így nyugalmi állapotban van. Az első elem a bázishoz viszonyítva mozdul el, a második az elsőhöz viszonyítva, és így tovább. Minél távolabb van egy adott elem a bázistól, annál magasabb hierarchikus szinten áll.



44. ábra.

Soros mechanizmus strukturális vázlata

Az „i”-edik elem az előtte levő „i–1”-edik elemhez kapcsolódik. A bázishoz viszonyított mozgásának leírásához ismerni kell mindazokat a mozgásokat, amelyeket az alatta levő szinten elhelyezkedő elemek végeznek. A mozgások együttes vizsgálata, szuperpozíciója teszi lehetővé az adott elem bázishoz viszonyított mozgásának leírását.

Mivel egy kiválasztott mechanizmus-elem általában nem közvetlenül kapcsolódik a báziselemhez, ezért, az eddigiek alapján, csak a hierarchikus szinten közvetlenül alatta elhelyezkedő elemhez viszonyított mozgását tudjuk vizsgálni. A báziselemhez viszonyított mozgás leírása az alatta levő szinteken elhelyezkedő elemek egymáshoz viszonyított mozgásának, illetve az első elem bázishoz viszonyított mozgásának ismeretében lehetséges. Így egy adott elem elmozdulásának leírása a rögzített bázishoz viszonyítva általában nem közvetlenül, hanem több elem közvetítése révén történik. Nem nehéz belátni, hogy az első szintnél magasabb hierarchikus szinten álló elemek mozgása összetett mozgás.

Legyen a legegyszerűbb eset az, amikor a 44. ábrán látható mechanizmus bázisból és két elemből áll. A második elemnek bázishoz viszonyított elmozdulása az első elem bázishoz viszonyított elmozdulása és a második elem elsőhöz viszonyított elmozdulása szuperpozíciójának tekinthető.

A második elem elmozdulásait, a viszonyítás alapjától függően, többféleképpen vizsgálhatjuk.

Relatív mozgásnak nevezzük a második elem a hierarchikus szinten közvetlenül alatta álló első elemhez viszonyított mozgását.

Abszolút mozgásnak nevezzük a második elem bázishoz viszonyított mozgását.

Szállító mozgásnak nevezzük a második elem bázishoz viszonyított mozgását, abban az esetben, amikor ez *kizárólag az első elem elmozdulásának következménye* – matematikai leírást később adunk.

Ez utóbbi mozgás tulajdonképpen az összekötő kapocs az abszolút és a relatív mozgás között. Legegyszerűbben úgy lehet szemléletessé tenni, hogy azt tételezzük fel, hogy a második elemnek megszűnik egy adott időpillanatban az első elemhez viszonyított relatív mozgása, vagyis az mereven hozzá van kötve a bázishoz közvetlenül kapcsolódó egyes elemhez (ily módon vele együtt mozog). A kettes elem bázishoz viszonyított elmozdulása ebben az esetben kizárólag annak tulajdonítható, hogy az egyes elem mozog a bázishoz képest, azaz *szállítja* a kettes elemet. Innen ered a mozgás elnevezése. A kettes, vagyis a vizsgált elem abszolút mozgása ennek fényében tehát nem más, mint az egyes elemhez viszonyított relatív mozgás, és az egyes elemmel merev kapcsolatban, a bázishoz viszonyított, szállítómozgás összegzése.

A fentebb megfogalmazott gondolatmenet alapján fejezhető ki az összetett mozgások alapelve:

$$\textbf{Abszolút mozgás} = \textbf{Relatív mozgás} + \textbf{Szállító mozgás}$$

A séma alapján a vizsgált elem abszolút mozgása úgy tekinthető, mint végtelenül kicsi – szállító és relatív – mozgások szabályosan váltakozó (alternatív) sorozata. A példaként bemutatott kételemes mechanizmus tökéletes alapot jelent a matematikai modell megalkotásának szempontjából. A bázishoz viszonyított abszolút mozgás leírása csak közvetetten, az alatta lévő elem mozgásának figyelembevételével történik. Emiatt a szakirodalomban az ilyen összetett mozgást *relatív mozgásnak* is nevezik. Erre való tekintettel különös körültekintéssel kell figyelni a kiválasztott elem mozgásának leírására megfogalmazni, leginkább többszörösen összetett mozgások esetében.

Általános esetben is, az „ i ”-edik elem abszolút mozgása nem más, mint az „ $i-1$ ”-edik elemhez viszonyított relatív mozgás, és az „ $i-1$ ”-ed rendű szállítómozgás összegzése. Ez utóbbit úgy kell elképzelni, hogy a kettes, hármas, ..., „ $i-1$ ”-ed és „ i ”-ed rendű elemek egymáshoz viszonyított relatív mozgása megszűnik, csak az egyes elem mozdul el a bázishoz viszonyítva, és szállítja a merev testté átminősített 1-2-...-($i-1$)- i elemsort.

3.1.2. A relatív mozgás matematikai modellje

A matematikai modell felállítása három koordináta-rendszer bevezetését igényli:

- az S_0 álló helyzetű koordináta-rendszer a bázishoz kötött, és ehhez viszonyítjuk az abszolút, illetve a szállítómozgást;
- az S_1 mozgó koordináta-rendszer a bázishoz viszonyítva végzi mozgását, és ehhez viszonyítjuk (ebben írjuk le) a tekintett elem relatív mozgását;
- az S_2 , a vizsgált testhez (elemhez) rögzített koordináta-rendszer, amelyben a vizsgált test geometriáját adjuk meg.

Sajátos esetben, ha a vizsgálat tárgya nem anyagi test, hanem anyagi pont, akkor az S_2 koordináta-rendszer fölöslegessé válik. Ez nyilvánvaló, hiszen az egyetlen anyagi ponttá zsugorított merev test helye az S_2 koordináta-rendszerben, az általánosság elvének megsértése nélkül, az S_2 origója lehet, és ily módon fölöslegessé válnak a koordinátatengelyek.

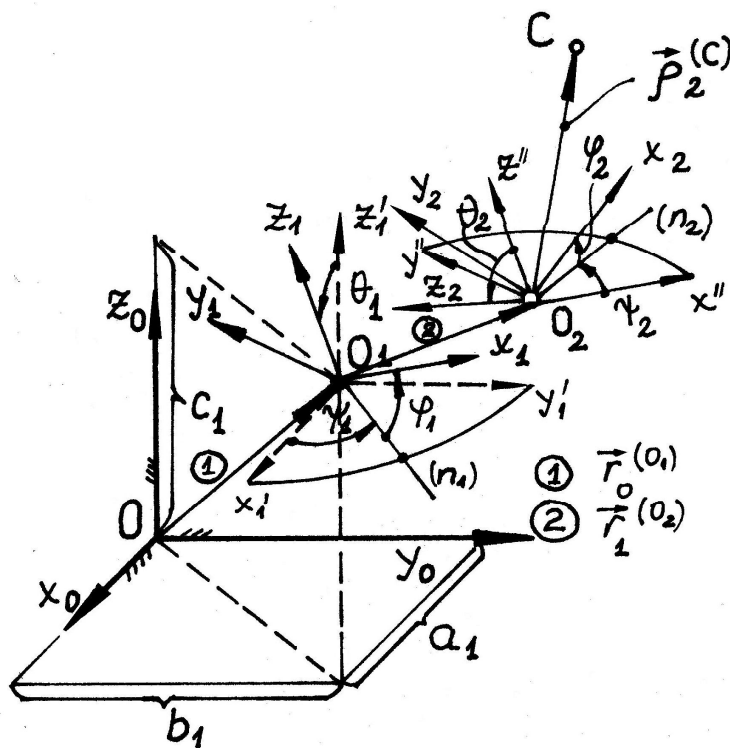
A modellnek tartalmaznia kell az egyes koordináta-rendszerek kapcsolatát. A legáltalánosabb esetben ez 12 paraméter megadásával érhető el, a következőképpen:

- Három paramétert jelentenek a mozgó O_1 origó koordinátái S_0 -ban;
- Három paramétert igényel az S_1 rendszer koordinátatengelyei irányának megadása az S_0 -ban;
- Három paramétert jelentenek a merev testhez kötött S_2 rendszer O_2 origójának koordinátái az S_1 -ben;
- Három paramétert igényel a vizsgált testhez kötött S_2 rendszer koordinátatengelyei irányának megadása az S_1 -ben.

3. Fejezet. A relatív mozgás

Ha a vizsgálat tárgya anyagi pont, akkor nincs szükség az S_2 tengelyeinek irányára és így 9 a maximális száma a szükséges paramétereknek.

A relatív mozgás vizsgálatához szükséges koordináta-rendszerek a 45. ábra szemlélteti. A világosabb átláthatóság érdekében az ábrán két segéd koordináta-rendszer is szerepel: az $O_1x'y'z'$ követőrendszer tengelyei mindig párhuzamosak maradnak az S_0 megfelelő tengelyeivel, míg az $O_2x''y''z''$ tengelyei az S_1 megfelelő tengelyeivel. Így könnyebbé válik az S_1 , illetve az S_2 rendszerek tengelyeinek iránymegadása.



45. ábra.

A relatív mozgás vizsgálata során alkalmazott koordináta-rendszerek

3.2. Vektor abszolút és helyi deriváltja

Legyen $\vec{\rho}_1^{(P)}$ a P pont helyvektora a mozgó S_1 koordináta-rendszerben– lásd a 46. ábrát. Ha a P pont elmozdul az S_1 rendszerben, akkor nemcsak a $\vec{\rho}_1^{(P)}$ koordinátái, hanem az S_1 bázisa is az idő függvénye:

$$\vec{\rho}_1^{(P)}(t) = x_1^{(P)}(t) \vec{i}_1(t) + y_1^{(P)}(t) \vec{j}_1(t) + z_1^{(P)}(t) \vec{k}_1(t) \quad (245)$$

Ennek figyelembevételével $\vec{\rho}_1^{(P)}$ idő szerinti deriváltja a

$$\dot{\vec{\rho}}_1^{(P)} = \dot{x}_1^{(P)} \vec{i}_1 + \dot{y}_1^{(P)} \vec{j}_1 + \dot{z}_1^{(P)} \vec{k}_1 + x_1^{(P)} \dot{\vec{i}}_1 + y_1^{(P)} \dot{\vec{j}}_1 + z_1^{(P)} \dot{\vec{k}}_1$$

alakban írható fel. Mivel a bázisvektorok egységvektorok, ezek idő szerinti deriváltjai a Poisson-féle képletekkel számíthatók. Ennek figyelembevételével

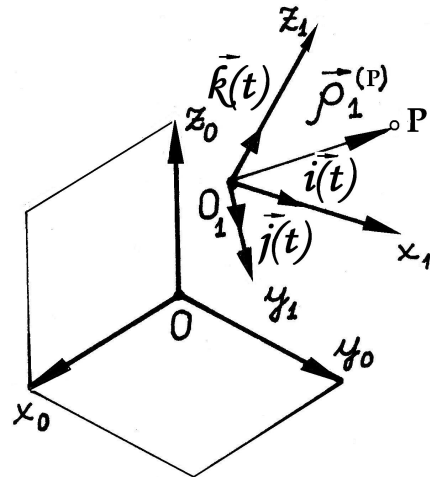
$$\begin{aligned} \dot{\vec{\rho}}_1^{(P)} &= \dot{x}_1^{(P)} \vec{i}_1 + \dot{y}_1^{(P)} \vec{j}_1 + \dot{z}_1^{(P)} \vec{k}_1 + x_1^{(P)} (\vec{\omega} \times \vec{i}_1) + y_1^{(P)} (\vec{\omega} \times \vec{j}_1) + z_1^{(P)} (\vec{\omega} \times \vec{k}_1) = \\ &= \dot{x}_1^{(P)} \vec{i}_1 + \dot{y}_1^{(P)} \vec{j}_1 + \dot{z}_1^{(P)} \vec{k}_1 + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_1^{(P)} \end{aligned} \quad (246)$$

A fenti képletekben a szögsebességvektor a merev testnek tekintett mozgó S_1 rendszer pillanatnyi szögsebessége az álló S_0 rendszerben. A (246) képlettel megadott deriváltat a $\vec{\rho}_1^{(P)}$ abszolút deriváltjának nevezzük.

A helyvektor S_1 -hez viszonyított változását az úgynevezett *lokális derivált* írja le. Mivel ennek számításakor nem kell figyelembe venni a bázis időbeli változását, kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \vec{\rho}_1^{(P)}}{\partial t} = \dot{x}_1^{(P)} \vec{i}_1 + \dot{y}_1^{(P)} \vec{j}_1 + \dot{z}_1^{(P)} \vec{k}_1 \quad (247)$$

A (246) és (247) egybevetése szerint a lokális és az abszolút derivált azonos, ha a mozgó S_1 rendszer haladó mozgást végez az S_0 -hoz viszonyítva (a pillanatnyi szögsebesség-vektor nulla lesz), vagy ha párhuzamos a pillanatnyi szögsebesség-vektor a helyvektorral.

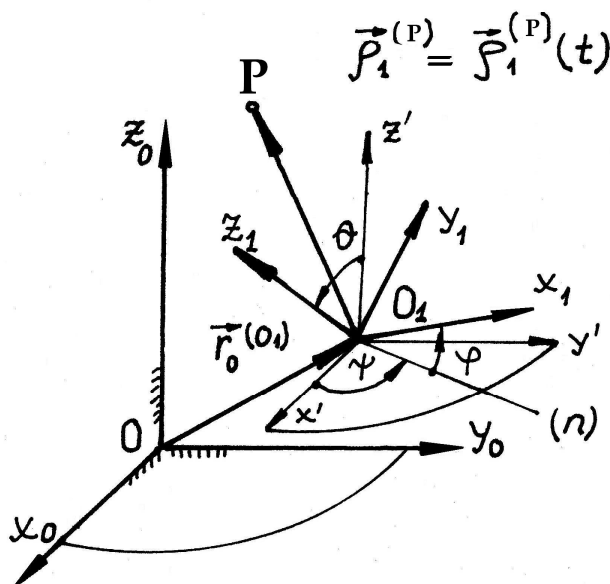


46. ábra.
Vektor abszolút és helyi deriváltja

3.3. Anyagi pont relatív kinematikája

3.3.1. Anyagi pont pályája a relatív mozgásban

A. Vektormódszer



47. ábra.

Anyagi pont relatív mozgásának geometriai modellje

Adott a P anyagi pont, amely az S_1 koordináta-rendszerben a $\vec{r}_1^{(P)} = \vec{r}_1^{(P)}(t)$ mozgástörvény szerint mozog, mialatt az S_1 koordináta-rendszer is mozog az S_0 -hoz viszonyítva. A legáltalánosabb esetben az S_1 , az álló S_0 -hoz viszonyítva, hat szabadságfokú szabadmozgást végez. A vonatkozó geometriai modell az 47. ábra szemlélteti. A mozgás matematikai leírása feltételezi az álló és mozgórendszerek kölcsönös helyzetének, valamint a P pont S_1 -hez viszonyított helyzetének ismeretét. Az S_1 és S_0 kölcsönös helyzetét a gömbmozgás elemzésekor levezetett képletek alapján lehet matematikailag megadni. A (134) és (135)

egyenletekből kiindulva, a szükséges műveletek elvégzése után eredményül megkapjuk a mozgó S_1 -ből az álló S_0 -ba történő transzformáció M_{01} homogén mátrixát. E mátrix forgatórészének transzponáltja az S_0 bázist (bázisvektorokat) viszi át az S_1 bázisvektoraiba. Végezetül meg kell adni az O_1 origó helyvektorát. Mindezeket figyelembe véve, a P pont helyzetének meghatározására a következő összefüggések szükségesek:

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - & \sin \psi \cos \varphi + & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \psi \cos \theta \sin \varphi & +\cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \\ \cos \psi \sin \varphi + & \sin \psi \sin \varphi - & \sin \theta \cos \varphi \\ +\sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \\ \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{i}_0 \\ \vec{j}_0 \\ \vec{k}_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{\rho}_1^{(P)}(t) &= \mathbf{f}_1(t) \vec{i}_1 + \mathbf{g}_1(t) \vec{j}_1 + \mathbf{h}_1(t) \vec{k}_1 \\ \vec{r}_0^{(P)}(t) &= \mathbf{f}_0(t) \vec{i}_0 + \mathbf{g}_0(t) \vec{j}_0 + \mathbf{h}_0(t) \vec{k}_0\end{aligned}\quad (248)$$

A 47. ábra alapján belátható, hogy a helyvektorok között fennáll az

$$\vec{r}_0^{(P)} = \vec{r}_0^{(O_1)} + \vec{\rho}_1^{(P)} \quad (249)$$

összefüggés.

A (248) mozgástörvény figyelembevételével adódik a P pont helyvektora S_0 -ban:

$$\begin{aligned}\vec{r}_0^{(P)} &= \mathbf{f}_0 \vec{i}_0 + \mathbf{g}_0 \vec{j}_0 + \mathbf{h}_0 \vec{k}_0 + \mathbf{f}_1 \vec{i}_1 + \mathbf{g}_1 \vec{j}_1 + \mathbf{h}_1 \vec{k}_1 = \\ &= \mathbf{f}_0 \vec{i}_0 + \mathbf{g}_0 \vec{j}_0 + \mathbf{h}_0 \vec{k}_0 + \\ &+ \mathbf{f}_1 \left((\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi) \vec{i}_0 + (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) \vec{j}_0 + \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \sin \varphi \vec{k}_0 \right) + \\ &+ \mathbf{g}_1 \left((\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \theta \cos \varphi) \vec{i}_0 + (\sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \theta \cos \varphi) \vec{j}_0 + \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \cos \varphi \vec{k}_0 \right) \\ &+ \mathbf{h}_1 \left(\sin \psi \sin \theta \vec{i}_0 + \cos \psi \sin \theta \vec{j}_0 + \cos \theta \vec{k}_0 \right)\end{aligned}$$

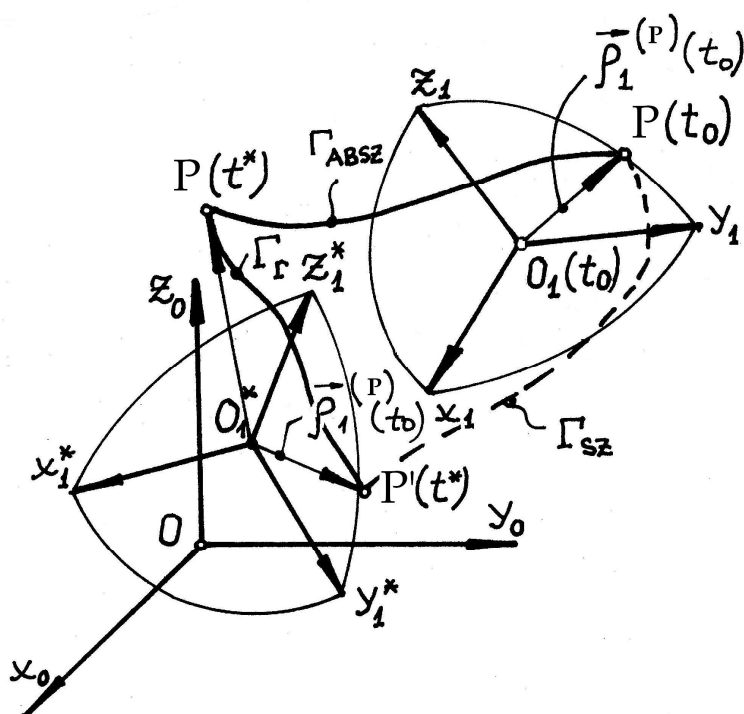
A helyvektor koordinátái a P pont S_0 -beli pályagörbéjének parametrikus egyenletei:

$$\begin{cases} x_0(t) = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 (\cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi) + \\ \quad + \mathbf{g}_1 (\cos \psi \sin \varphi + \sin \psi \cos \theta \cos \varphi) + \mathbf{h}_1 \sin \psi \sin \theta \\ y_0(t) = \mathbf{g}_0 + \mathbf{f}_1 (\sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi) + \\ \quad + \mathbf{g}_1 (\sin \psi \sin \varphi - \cos \psi \cos \theta \cos \varphi) + \mathbf{h}_1 \cos \psi \sin \theta \\ z_0(t) = \mathbf{h}_0 + \mathbf{f}_1 \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{g}_1 \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{h}_1 \cos \theta \end{cases} \quad (250)$$

A P pont álló rendszerbeli pályáját *abszolút pályának* nevezzük.

A vizsgált pontnak van pályája az S_1 mozgó koordináta-rendszerben is. Itt a pályagörbe parametrikus egyenleteit a $\vec{\rho}_1^{(P)}$ mozgórendszerbeli helyvektor $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{h}_1$ időfüggő koordinátái alkotják. A P pont pályáját a mozgó koordináta-rendszerben *relatív pályának* nevezzük.

Amennyiben egy adott $t = t_0$ pillanatban megszűnik a P pont mozgása az S_1 rendszerben akkor a relatív helyvektor időben állandó lesz, és így pályája egybeesik az S_1 rendszer azon pontjának pályájával, ahol a P pont található (úgy mozog a P pont mintha az S_1 -nek egy rögzített pontja lenne). Ez esetben az elmozdulás kizárólag annak köszönhető, hogy S_1 elmozdul az S_0 -hoz viszonyítva.



48. ábra.

Az abszolút, a relatív és a szállító pályagörbe

Következésképp a pályagörbe egyenletei azonosak formálisan a (250) parametrikus egyenletekkel, azzal a különbséggel, hogy most

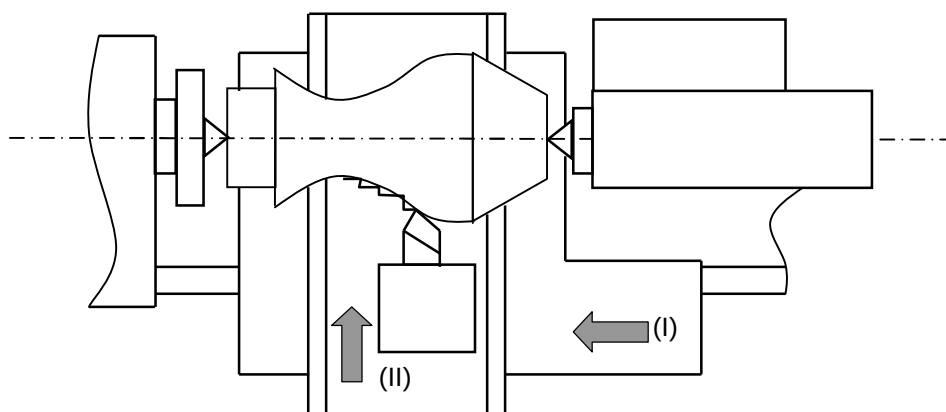
$$\begin{cases} f_1 = f_1(t_0) \\ g_1 = g_1(t_0) \\ h_1 = h_1(t_0) \end{cases}$$

Mivel a t_0 időpillanat a mozgás $[t_1, t_2]$ időintervallumában tetszőlegesen volt kiválasztva, következik, hogy egyszerűen végtelen sok olyan pályagörbe létezik amely a fentebb leírt módon társítható a szállítómozgással. Az abszolút pálya $t = t^*$ időpillanatnak megfelelő pontját a $t = t_0, t_1 \leq t_0 \leq t_2$ időpillanatnak megfelelő helyzetből induló P pont úgy is elérheti, hogy először a $[t_0, t^*]$ időintervallumban a t_0 -hoz tartozó Γ_{sz} szállítópályán halad végig, majd pedig a mozgást a Γ_r relatív

pályán folytatja ugyanazon $[t_0, t^*]$ időintervallumban. Az említett pályagörbékét valamint az abszolút Γ_{ABSZ} pályagörbét a 48. ábra szemlélteti. A relatív mozgás és a szállítómozgás leírt módon történő szuperpozíciója csak az abszolút mozgás egy elért pályapontjának meghatározására alkalmas. A valóságban az anyagi pont abszolút pályáját nem lehet a szállítópálya és a relatív pálya véges szakaszaiból összeállítani. Ha viszont mindkét pályát végtelen sokaságú, elemi hosszúságú szakaszokra tagolják, akkor ezek kombinációja létrehozza határértékben az abszolút pályagörbét.

A mérnöki gyakorlatban mindkét elképzelésnek van alkalmazása. A véges elmozdulásoknak megfelelő relatív és szállítópályák kombinálása a szerkezetek tervezésében igen hatékony módszer arra, hogy meghatározzuk egy adott elem kiválasztott pontjának a helyzetét, és ezáltal lehatároljuk az abszolút pályagörbét.

A kis terjedelmű, alternatív, véges elmozdulások révén lehetőség nyílik a számjegyvezérlésű szerszámgépek mozgásainak megvalósítására. Számjegyvezérlésű esztergapadon, tengelyirányú előtolással végzett alakos esztergálás esetében a munkadarab alkotóját a a hosszszánra illeszkedő keresztszánra szerelt szerszám élcsúcsának pályája adja. Világos, hogy a hosszszán végzi a szállítómozgást, a szerszámtartó keresztszán pedig a hosszánhoz viszonyítva, a relatív mozgást. A vezérlőtengelyek szekvenciális mozgásokat végeznek, ezért, bár az elméleti pályagörbétől való eltérés elhanyagolható, a valóságban végesen kis szállító és relatív mozgások váltakozó sorozata valósul meg (49. ábra).



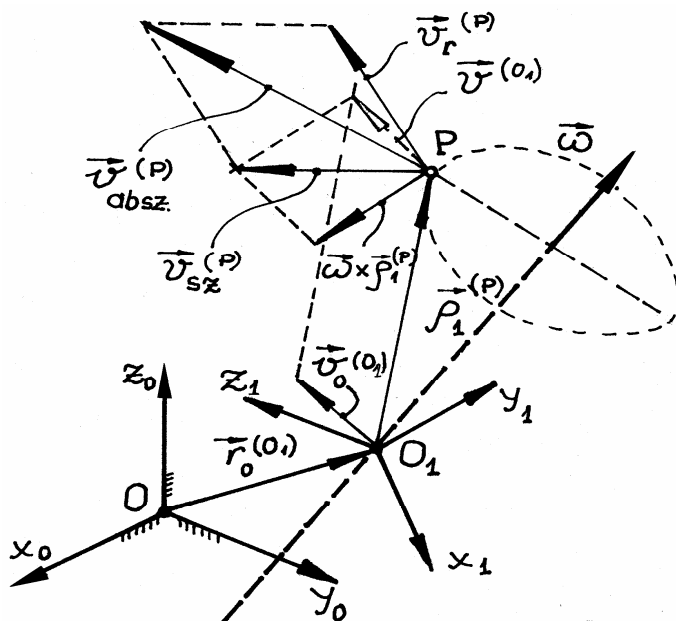
49. ábra.

Relatív és szállító pályaszakaszok sorozata
számvezérlésű esztergálás esetében

B. Mátrixmódszer

A mátrixmódszer is lehetővé teszi az abszolút pálya és a szállítópálya meghatározását. Mivel ismertnek tekintjük a P pont mozgástörvényét, ismert az S_1 -ből az S_0 -ba transzformáló mátrix is. Az $\mathbf{M}_{01}$ mátrixot valamint a P pont relatív koordinátáit a (248) vektoralakban megadott mozgástörvény felhasználásával lehet felírni. Ennek alapján a tekintett pont abszolút pályájának koordinátái, a relatív koordináták ismeretében, a transzformációs egyenletből következnek:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} &= \mathbf{M}_{01} \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\varphi - & \cos\psi \sin\varphi + & \sin\psi \sin\theta & f_0 \\ -\sin\psi \cos\theta \sin\varphi & +\sin\psi \cos\theta \cos\varphi & & \\ \sin\psi \cos\varphi + & \sin\psi \cdot \sin\varphi - & \cos\psi \sin\theta & g_0 \\ +\cos\psi \cos\theta \sin\varphi & -\cos\psi \cos\theta \cos\varphi & & \\ \sin\theta \sin\varphi & \sin\theta \cos\varphi & \cos\theta & h_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ g_1 \\ h_1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (251)$$



50. ábra.

Anyagi pont abszolút-, relatív- és szállítósebessége

Ha a (251) egyenletben a mozgó rendszerbeli $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{h}_1$ koordinátákat adott t_0 időpontra lokalizáljuk és a kapott értékeket állandónak tekintjük, akkor az $\mathbf{r}_0^{(P)}$ oszlop mátrix a szállítópálya homogén koordinátáit jeleníti meg.

3.3.2. Anyagi pont sebessége a relatív mozgásban

A. Vektormódszer

A sebesség meghatározása a helyvektorok közötti (249) összefüggés idő szerinti deriválásával történik. Figyelembe kell venni, hogy a $\vec{\rho}_1^{(P)}$ helyvektornak a koordinátái és a bázisa is időfüggő. Ennek következtében

$$\begin{aligned}\vec{v}_0^{(P)} &= \dot{\vec{r}}_0^{(P)} = \dot{\vec{r}}_0^{(O_1)} + \dot{\vec{\rho}}_1^{(P)} = \dot{\mathbf{f}}_0 \vec{i}_0 + \dot{\mathbf{g}}_0 \vec{j}_0 + \dot{\mathbf{h}}_0 \vec{k}_0 + \dot{\mathbf{f}}_1 \vec{i}_1 + \dot{\mathbf{g}}_1 \vec{j}_1 + \dot{\mathbf{h}}_1 \vec{k}_1 + \\ &\quad + \dot{\mathbf{f}}_1 \dot{\vec{i}}_1 + \dot{\mathbf{g}}_1 \dot{\vec{j}}_1 + \dot{\mathbf{h}}_1 \dot{\vec{k}}_1 = \\ &= \underbrace{\dot{\mathbf{f}}_1 \vec{i}_1 + \dot{\mathbf{g}}_1 \vec{j}_1 + \dot{\mathbf{h}}_1 \vec{k}_1}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\dot{\mathbf{f}}_0 \vec{i}_0 + \dot{\mathbf{g}}_0 \vec{j}_0 + \dot{\mathbf{h}}_0 \vec{k}_0}_{\vec{v}_{szT}} + \underbrace{\dot{\mathbf{f}}_1 (\vec{\omega} \times \vec{i}_1) + \dot{\mathbf{g}}_1 (\vec{\omega} \times \vec{j}_1) + \dot{\mathbf{h}}_1 (\vec{\omega} \times \vec{k}_1)}_{\vec{v}_{szR}} = \\ &= \underbrace{\dot{\mathbf{f}}_1 \vec{i}_1 + \dot{\mathbf{g}}_1 \vec{j}_1 + \dot{\mathbf{h}}_1 \vec{k}_1}_{\vec{v}_r} + \underbrace{\dot{\mathbf{f}}_0 \vec{i}_0 + \dot{\mathbf{g}}_0 \vec{j}_0 + \dot{\mathbf{h}}_0 \vec{k}_0}_{\vec{v}_{szT}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\dot{\mathbf{f}}_1 \vec{i}_1 + \dot{\mathbf{g}}_1 \vec{j}_1 + \dot{\mathbf{h}}_1 \vec{k}_1)}_{\vec{v}_{szR}}\end{aligned}\quad (252)$$

A P pont állórendszerhez viszonyított sebességét abszolút sebességnek nevezzük. Amint azt a (252) alatti kifejezés tagolása is jelzi, az abszolút sebesség három tag összege:

- az első tag a a P pont S_1 -hez viszonyított $\vec{v}_r$ sebessége – ezt *relatív sebességnek* nevezzük;
- a második tag az O_1 mozgó origó S_0 -hoz viszonyított $\vec{v}_{szT}$ sebessége;
- a harmadik tag az S_1 -hez mereven rögzítettnek tekintett P pont $\vec{v}_{szR}$ sebessége, az S_1 pillanatnyi forgásából adódóan.

A $\vec{v}_{szT}$ és $\vec{v}_{szR}$ sebességkomponensek összege a szabad mozgást végző merev test tetszőleges P pontjának sebességét adja. Nyilvánvaló, hogy a $\vec{v}_{szT}$ összetevő a mozgórendszer origójának sebessége, míg a $\vec{v}_{szR}$ a mozgórendszer forgásából adódó összetevő. Vegyük észre, hogy, hogy a $\vec{v}_{szT}$ nem tartalmazza a P pont mozgórendszerbeli koordinátáit, a $\vec{v}_{szR}$ kifejezésében pedig e koordináták a mozgórendszerbeli helyvektor összetevőiként szerepelnek, a pillanatnyi $\vec{\omega}$ szögsebesség szorozójaként. Mindez azt jelenti, hogy a $\vec{v}_{szT} + \vec{v}_{szR}$ összeg a merev testnek tekintett S_1 koordináta-rendszer azon pontjának sebessége, ahol a P pont tartózkodik a vizsgálat időpillanatában.

3. Fejezet. A relatív mozgás

A sebességnek azt az összetevőjét, amely az S_1 -hez mereven rögzített P pont mozgásából adódik, *szállítósebességnek* nevezzük. Az *abszolút sebesség* pedig a szállító- és relatív sebességek vektorösszege. A (252) képlet, a fent megfogalmazott elvek szellemében, a következőképpen írható fel:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_0^{(P)} = \vec{v}_{sz}^{(P)} + \vec{v}_r^{(P)} \\ \vec{v}_{sz}^{(P)} = \underbrace{\dot{f}_0 \vec{i}_0 + \dot{g}_0 \vec{j}_0 + \dot{h}_0 \vec{k}_0}_{\vec{v}_{szT}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{f}_1 \vec{i}_1 + \vec{g}_1 \vec{j}_1 + \vec{h}_1 \vec{k}_1)}_{\vec{v}_{szR}} \\ \vec{v}_r^{(P)} = \dot{f}_1 \vec{i}_1 + \dot{g}_1 \vec{j}_1 + \dot{h}_1 \vec{k}_1 \end{array} \right. \quad (253)$$

A sebességvektorokat az 50. ábra szemlélteti.

B. Mátrixmódszer

A mátrixmódszer a koordináta-transzformáció (251) mátrixegyenletén alapul. Mivel a transzformáció $\mathbf{M}_{01}$ mátrixa azonos a szabad mozgás vizsgálatakor a 2.3.4.3. alszakaszban már áttekintett transzformációs mátrixszal, azzal a különbséggel, hogy a jelen esetben a transzformációs mátrix jobboldalán álló szorzótényező (a P pont mozgórendszerbeli koordinátáinak homogén mátrixa) *időfüggő*, következésképpen:

$$\underline{\mathbf{v}}_0^{(P)} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{01} \right) \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} + \mathbf{M}_{01} \underline{\dot{\mathbf{q}}}_1^{(P)} \quad (254)$$

A (254) reláció baloldala a mozgó P pont homogén sebességkoordinátáinak oszlopmátrixa. A jobboldalon álló $(\frac{d}{dt} \mathbf{M}_{01}) \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)}$ tag a homogén szállítósebességkoordináták oszlopmátrixa. Az utolsó $\mathbf{M}_{01} \underline{\dot{\mathbf{q}}}_1^{(P)}$ tag a homogén relatív sebességkoordináták oszlopmátrixának transzformáltja S_0 -ba. Mivel a $\underline{\mathbf{q}}_1^{(P)}$ oszlopmátrix a P pont homogén koordinátáit tartalmazza, deriválással az oszlopmátrix negyedik eleme nulla lesz, és így a mátrixszorzáskor nullázza az $\mathbf{M}_{01}$ negyedik oszlopát. Ezért az $\mathbf{M}_{01}$ mátrix az $\mathbf{L}_{01}$ homogén rotációs mátrixszal helyettesíthető, amit úgy kapunk meg, hogy az $\mathbf{M}_{01}$ negyedik sorát és negyedik oszlopát kinullázzuk. Ennélfogva

$$\mathbf{M}_{01} \underline{\dot{\mathbf{q}}}_1^{(P)} = \mathbf{L}_{01} \underline{\dot{\mathbf{q}}}_1^{(P)}$$

A transzformációs mátrixnak a (196) összefüggés értelmében felbontott alakját kihasználva, illetve az S_1 -beli koordinátákat átranzformálva S_0 -ba, az abszolút sebességmátrix az alábbi módon írható:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{v}}_0^{(P)} &= \left(\frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} + \frac{d\mathbf{T}_{01}}{dt} \right) (\mathbf{L}_{10} + \mathbf{T}_{10}) \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \mathbf{L}_{01} \underline{\dot{\mathbf{r}}}_1^{(P)} = \\ &= \left(\underbrace{\frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10}}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0} + \frac{d\mathbf{T}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10} + \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{T}_{10} + \frac{d\mathbf{T}_{01}}{dt} \mathbf{T}_{10} \right) \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \mathbf{L}_{01} \underline{\dot{\mathbf{r}}}_1^{(P)}\end{aligned}$$

A zárójelpárban álló összeget kifejtve

$$\begin{aligned}\underbrace{\frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10}}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0} + \frac{d\mathbf{T}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10} + \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{T}_{10} + \frac{d\mathbf{T}_{01}}{dt} \mathbf{T}_{10} &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{f}}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{g}}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{h}}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{L}_{10} + \\ + \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{f}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{g}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{f}}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{g}}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{h}}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{f}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{g}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \\ = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{f}}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{g}}_0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\mathbf{h}}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &\end{aligned}$$

A kapott részeredmény visszahelyettesítése után

$$\underline{\mathbf{v}}_0^{(P)} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_0 \\ \dot{\mathbf{g}}_0 \\ \dot{\mathbf{h}}_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{01} \underline{\dot{\mathbf{r}}}_1^{(P)} \quad (255)$$

az abszolút sebességmátrix.

A (255) mátrixegyenlet egyenértékű a (254) mátrixegyenlettel. Gyakorlati számításokban előnyösebb a (254) alatti alakot használni, mivel a képlet jobb oldalán álló első tag a szállítósebesség, a második pedig az S_0 rendszerben adja meg a relatív sebesség koordinátáit. A (255) egyenlet megegyezik a (252) vektoregyenlet mátrixos alakjával. Összefoglalva, P pont abszolút sebességmátrixa három tag összege:

3. Fejezet. A relatív mozgás

- $\tilde{\omega}_0 \underline{r}_0^{(P)}$ – a pillanatnyi forgásból adódó szállítósebesség- mátrix;
- $\begin{bmatrix} \dot{f}_0 & \dot{g}_0 & \dot{h}_0 & 0 \end{bmatrix}^T$ – az O_1 mozgó origó sebességét adó sebességmátrix, azaz a szállítósebesség második része;
- $\underline{L}_{01} \dot{\underline{p}}_1^{(P)}$ – a relatív sebesség mátrixa az álló koordináta-rendszerben.

3.3.3. Anyagi pont gyorsulása a relatív mozgásban

A. Vektormódszer

A gyorsulás vektoriális képletét a (252) alatti sebességképlet idő szerinti deriválásával kapjuk meg. Megjegyezzük, hogy most is – akár a sebességképlet esetében – figyelembe kell venni a lokális és abszolút deriváltakat:

$$\begin{aligned} \bar{a}_0^{(P)} = \dot{v}_0^{(P)} = & \frac{d}{dt} (\dot{f}_1 \bar{i}_1 + \dot{g}_1 \bar{j}_1 + \dot{h}_1 \bar{k}_1) + \frac{d}{dt} (\dot{f}_0 \bar{i}_0 + \dot{g}_0 \bar{j}_0 + \dot{h}_0 \bar{k}_0) + \\ & + \frac{d}{dt} (\bar{\omega} \times (\dot{f}_1 \bar{i}_1 + \dot{g}_1 \bar{j}_1 + \dot{h}_1 \bar{k}_1)) \end{aligned} \quad (256)$$

A deriválás során az alábbi részeredmények adódnak:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\dot{f}_1 \bar{i}_1 + \dot{g}_1 \bar{j}_1 + \dot{h}_1 \bar{k}_1) &= (\ddot{f}_1 \bar{i}_1 + \ddot{g}_1 \bar{j}_1 + \ddot{h}_1 \bar{k}_1) + \dot{f}_1 \dot{\bar{i}}_1 + \dot{g}_1 \dot{\bar{j}}_1 + \dot{h}_1 \dot{\bar{k}}_1 = \\ &= (\ddot{f}_1 \bar{i}_1 + \ddot{g}_1 \bar{j}_1 + \ddot{h}_1 \bar{k}_1) + \bar{\omega} \times (\dot{f}_1 \bar{i}_1 + \dot{g}_1 \bar{j}_1 + \dot{h}_1 \bar{k}_1) \\ \frac{d}{dt} (\dot{f}_0 \bar{i}_0 + \dot{g}_0 \bar{j}_0 + \dot{h}_0 \bar{k}_0) &= \ddot{f}_0 \bar{i}_0 + \ddot{g}_0 \bar{j}_0 + \ddot{h}_0 \bar{k}_0 \\ \frac{d}{dt} (\bar{\omega} \times (\dot{f}_1 \bar{i}_1 + \dot{g}_1 \bar{j}_1 + \dot{h}_1 \bar{k}_1)) &= \dot{\bar{\omega}} \times (\dot{f}_1 \bar{i}_1 + \dot{g}_1 \bar{j}_1 + \dot{h}_1 \bar{k}_1) + \\ &+ \bar{\omega} \times (\dot{f}_1 \bar{i}_1 + \dot{g}_1 \bar{j}_1 + \dot{h}_1 \bar{k}_1) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times (\dot{f}_1 \bar{i}_1 + \dot{g}_1 \bar{j}_1 + \dot{h}_1 \bar{k}_1)) \end{aligned}$$

Megfelelő csoportosítás és átrendezés után a gyorsulás képlete a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} \bar{a}_0^{(P)} = & (\ddot{f}_1 \bar{i}_1 + \ddot{g}_1 \bar{j}_1 + \ddot{h}_1 \bar{k}_1) + \\ & + \{ \dot{\bar{\omega}} \times (\dot{f}_1 \bar{i}_1 + \dot{g}_1 \bar{j}_1 + \dot{h}_1 \bar{k}_1) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times (\dot{f}_1 \bar{i}_1 + \dot{g}_1 \bar{j}_1 + \dot{h}_1 \bar{k}_1)) + \\ & + \ddot{f}_0 \bar{i}_0 + \ddot{g}_0 \bar{j}_0 + \ddot{h}_0 \bar{k}_0 \} + 2 \bar{\omega} \times (\dot{f}_1 \bar{i}_1 + \dot{g}_1 \bar{j}_1 + \dot{h}_1 \bar{k}_1) \end{aligned} \quad (257)$$

A jobboldalon álló összeg három részre bontható, amit a következőkben részletezünk.

A relatív gyorsulás a P pont S_1 koordináta-rendszerhez viszonyított gyorsulása. Összetevői a relatív pálya koordinátáinak másodrendű deriváltjai, tehát

$$\vec{a}_r^{(P)} = \ddot{f}_1 \vec{i}_1 + \ddot{g}_1 \vec{j}_1 + \ddot{h}_1 \vec{k}_1 \quad (258)$$

Vegyük figyelembe, hogy a szállítómozgás során a vizsgált anyagi pont relatív koordinátái változatlanok maradnak. Az ennek megfelelő tagokat összegyűjtve, a szállítógyorsulásra írhatjuk, hogy:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{sz}^{(P)} = & \vec{\varepsilon} \times (\vec{f}_1 \vec{i}_1 + \vec{g}_1 \vec{j}_1 + \vec{h}_1 \vec{k}_1) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{f}_1 \vec{i}_1 + \vec{g}_1 \vec{j}_1 + \vec{h}_1 \vec{k}_1)) + \\ & + \ddot{f}_0 \vec{i}_0 + \ddot{g}_0 \vec{j}_0 + \ddot{h}_0 \vec{k}_0 \end{aligned} \quad (259)$$

A szállítógyorsulásnak három összetevője van:

- a szöggyorsulásból adódó $\vec{\varepsilon} \times (\vec{f}_1 \vec{i}_1 + \vec{g}_1 \vec{j}_1 + \vec{h}_1 \vec{k}_1)$ szöggyorsulás-vektorra merőleges összetevő;
- a pillanatnyi forgásból adódó $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{f}_1 \vec{i}_1 + \vec{g}_1 \vec{j}_1 + \vec{h}_1 \vec{k}_1))$ szögsebesség-vektorra merőleges összetevő és végül
- a mozgó origó $\ddot{f}_0 \vec{i}_0 + \ddot{g}_0 \vec{j}_0 + \ddot{h}_0 \vec{k}_0$ gyorsulása.

A (257) kifejezésben szerepel a $2\vec{\omega} \times (\dot{f}_1 \vec{i}_1 + \dot{g}_1 \vec{j}_1 + \dot{h}_1 \vec{k}_1)$ tag, ami nem más, mint a pillanatnyi szögsebesség, és a relatív sebesség vektorszorzatának kétszerese. A tag dimenziója nyilvánvalóan a gyorsulás dimenziója. Vegyük azt is észre, hogy ez kizárólag a relatív mozgás jellemzője, mivel szerepel benne a relatív sebesség. Ezt az összetevőt *Coriolis-féle gyorsulásnak* nevezi felfedezője nyomán a szakirodalom:

$$\vec{a}_c^{(P)} = 2\vec{\omega} \times (\dot{f}_1 \vec{i}_1 + \dot{g}_1 \vec{j}_1 + \dot{h}_1 \vec{k}_1) = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_r^{(P)} \quad (260)$$

A Coriolis-féle gyorsulásnak figyelembe vétele lényeges a szerkezetek mozgó alkatrészeinek méretezésekor. Megjelenése a Coriolis-féle járulékos erővel társul, ami bizonyos esetekben jelentős többletterhelést jelent. Ha ezt figyelmen kívül hagyjuk, nem lesz kielégítő a szerkezet méretezése (ellenőrzése). Ennek hibás működés, esetleg rongálódás lehet a következménye.

A Coriolis-féle gyorsulás nem jelenik meg a relatív mozgásban, ha:

- a mozgó rendszer haladó mozgást végez;
- Párhuzamos a vizsgált P pont relatív sebessége a pillanatnyi forgástengellyel;
- Zérus értékű a vizsgált P pont relatív sebessége.

B. Mátrixmódszer

Az abszolút gyorsulás meghatározása céljából deriválják idő szerint deriválják a (255) sebességmátrixot:

$$\underline{\mathbf{a}}_0^{(P)} = \frac{d}{dt} \underline{\mathbf{v}}_0^{(P)} = \left(\frac{d}{dt} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \right) \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} \right)}_{\underline{\mathbf{v}}_0^{(P)}} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_0 \\ \dot{\mathbf{g}}_0 \\ \dot{\mathbf{h}}_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} + \mathbf{L}_{01} \left(\frac{d}{dt} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} \right) \mathbf{1}$$

A (255) visszahelyettesítése és a kijelölt műveletek elvégzése után kapjuk, hogy

$$\underline{\mathbf{a}}_0^{(P)} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{f}}_0 \\ \dot{\mathbf{g}}_0 \\ \dot{\mathbf{h}}_0 \\ 0 \end{bmatrix}}_0 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \mathbf{L}_{01} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} + \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{f}}_0 \\ \ddot{\mathbf{g}}_0 \\ \ddot{\mathbf{h}}_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} + \mathbf{L}_{01} \ddot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)}$$

Vegyük észre, hogy

$$\frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} = \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \underbrace{\mathbf{L}_{10} \mathbf{L}_{01}}_{\mathbf{E}} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} = \left(\frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10} \right) \mathbf{L}_{01} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \mathbf{L}_{01} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)}$$

Az utóbbi részeredmény visszahelyettesítése és némi rendezés után az alábbi alakot ölti a gyorsulásmátrix:

$$\underline{\mathbf{a}}_0^{(P)} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{f}}_0 \\ \ddot{\mathbf{g}}_0 \\ \ddot{\mathbf{h}}_0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{L}_{01} \ddot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} + 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \mathbf{L}_{01} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} \quad (261)$$

A (261) képletben is elkülönül egymástól a szállító-, a relatív és a Coriolis-féle gyorsulás:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}_{sz}^{(P)} &= \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \underline{\mathbf{r}}_0^{(P)} + \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{f}}_0 \\ \ddot{\mathbf{g}}_0 \\ \ddot{\mathbf{h}}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{\mathbf{a}}_r^{(P)} &= \mathbf{L}_{01} \ddot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} \\ \underline{\mathbf{a}}_c^{(P)} &= 2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0 \mathbf{L}_{01} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} \end{aligned} \quad (262)$$

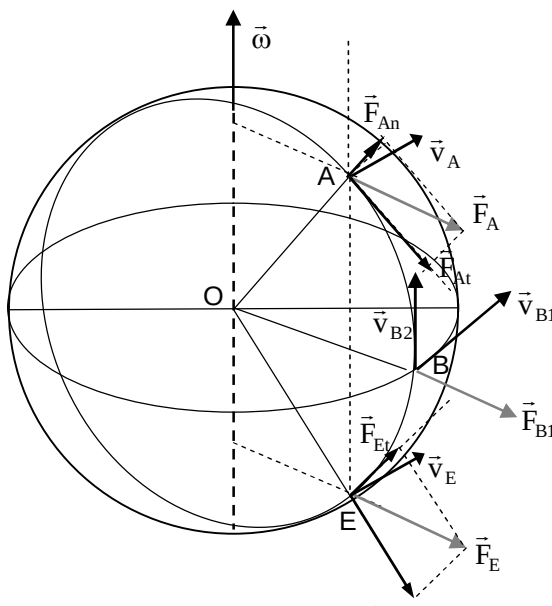
A (254) képlet idő szerinti deriválásával, és a transzformációs mátrixnak a homogén rotációs mátrixszal való felcserélése után – ez csak az első képletsor utolsó három tagja esetén lehetséges – a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{a}}_0^{(P)} &= \frac{d^2 \underline{\mathbf{M}}_{01}}{dt^2} \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} + \frac{d \underline{\mathbf{M}}_{01}}{dt} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} + \frac{d \underline{\mathbf{M}}_{01}}{dt} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} + \underline{\mathbf{M}}_{01} \ddot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} = \\ &= \frac{d^2 \underline{\mathbf{M}}_{01}}{dt^2} \underline{\mathbf{q}}_1^{(P)} + 2 \frac{d \underline{\mathbf{L}}_{01}}{dt} \dot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)} + \underline{\mathbf{L}}_{01} \ddot{\underline{\mathbf{q}}}_1^{(P)}\end{aligned}\quad (263)$$

A (263) összefüggés első tagja a szállítógyorsulás, a második a Coriolis-féle gyorsulás, az utolsó pedig a relatív gyorsulás. Ezt úgy lehet igazolni, hogy az $\underline{\mathbf{M}}_{01}$ mátrixot homogén rotációs és homogén transzlációs mátrixok összegére bontjuk fel, és a műveleteket a 3.3.2. paragrafusban leírt módon végezzük el. A részletes számításokat az Olvasóra bízunk.

A relatív mozgás egy fontos következménye, hogy a nem tehetetlenségi koordináta-rendszerben mozgó anyagi pontra (anyagi testre) a kölcsönhatásból származó erők mellett, további ún. járulékos (vagy tehetetlenségi) erők is hatnak. Ezek egyike a Coriolis-féle erő:

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{Coriolis}} = -2 \cdot \mathbf{m} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\mathbf{v}}_r) \quad (264)$$



51. ábra.
A Coriolis erő hatása

3. Fejezet. A relatív mozgás

A Coriolis-erő a nem tehetetlenségi (tehát a bázishoz viszonyítva elfordulást is végrehajtó) koordináta-rendszerekben jelentkezik. Mivel a Földhöz kötött koordináta-rendszer nem tehetetlenségi rendszer, a Föld saját tengelye körüli forgásának következményeként fellépő Coriolis erő meghatározza a fontosabb légáramlatokat, az tengeri áramlatokat, a folyómedrek alakulását és esetleges helyváltoztatását, valamint egyes mozgásokat is – gondoljunk itt pl. a műholdak mozgására. Az 51. ábra azt szemlélteti, hogy keleti vagy nyugati, illetve északi avagy déli irányú mozgás esetén (a mozgás Földhöz viszonyított sebessége a relatív sebesség a Coriolis gyorsulás képletében) miként jelenik meg a Coriolis erő. Az egyenlítőn felvett B pontban, ha a tekintett test $\vec{v}_{B1}$ sebességgel halad kelet felé, akkor az $\vec{F}_{B1}$ erőhatás a gravitáció ellen dolgozik. A nyugat felé haladó testek pedig nehezebbek lesznek! A B pontból induló, északra, avagy délre haladó testekre kezdetben zérus értékű ez az erőhatás – párhuzamos a relatív sebességgel és a Föld szögsebességgel.

Amennyiben az északi félgömb A pontjából kelet felé mozog a test $\vec{v}_A$ sebességgel, a keletkező $\vec{F}_A$ Coriolis-erő az A ponton áthaladó meridiánsíkban fekszik, és merőleges lesz a Föld forgástengelyére. A sugárirányú $\vec{F}_{An}$ összetevő csökkenti a súlyerőt, míg az $\vec{F}_{At}$ érintősíkban fekvő összetevő a testet a mozgás irányához képest jobbra próbálja eltéríteni. Ez a hatás mutatkozik meg abban, hogy a viszonylag egyenes irányú, tehát kis görbületű folyómedrek jobb partján a vízmosás hatása nagyobb mértékű, mint a bal partján. Egyes hidrográfiai tanulmányok, a Coriolis-erő alapján magyarázzák azt a jelenséget, hogy a folyómedrek idővel jobbra tolódnak el. Érdekes azt is megemlíteni, hogy a viszonylag nagy felületű és lapos edény központi lefolyóján kiáramló folyadék felszínén óramutató járásával ellentétes irányú a folyadék áramlása. Ez természetes, mivel az edény központja felé haladó folyadékelemet a Coriolis erő jobbra tereli.

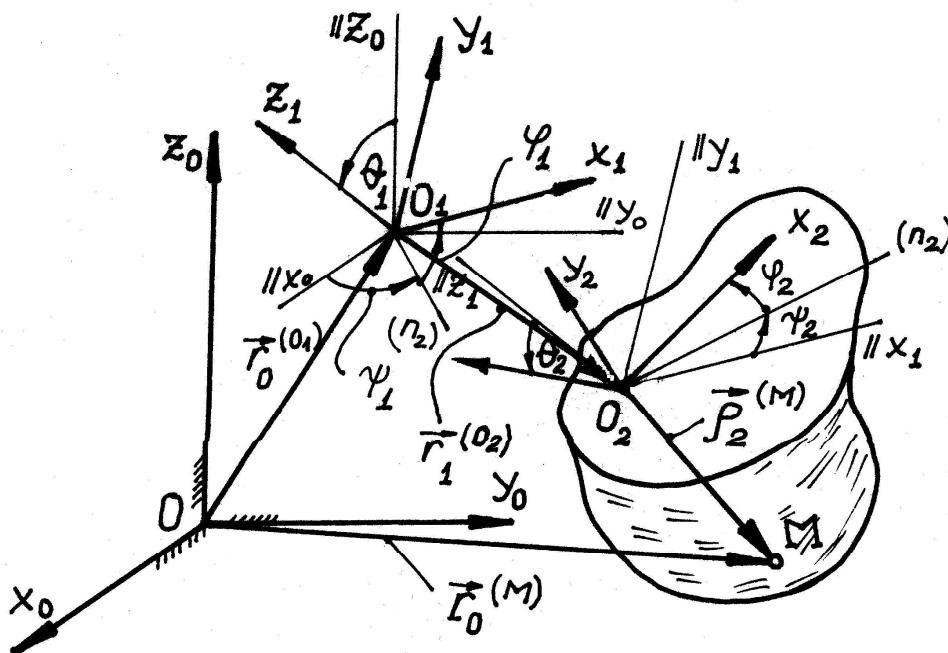
Hasonló gondolatmenettel vizsgálható a Coriolis erő hatása a déli félgömb E pontja esetén. Az ábra alapján belátható, hogy a tangenciális $\vec{F}_{Et}$ összetevő a mozgó testet a pályájáról balra próbálja eltéríteni. Az északi félgömbön jelentkező hatások fordítottja figyelhető meg, vagyis a folyók bal partján jelentkezik jobban az erózió, míg az edényből lefolyó víz felületén megjelenő áramlat az óramutató járásával megegyező. Érdekességként említjük meg, hogy már az első világháborús hadihajók lövegeinek irányzéka is a Coriolis-effektus kompenzálásával készült!

3.4. Anyagi test relatív kinematikája

3.4.1. Anyagi test relatív mozgásának sajátosságai

A relatív mozgás anyagi testre vonatkozó jelentése lényegét tekintve ugyanaz, mint az anyagi pont esetében ismertetett: *a test egy mozgó koordináta-rendszerben végez mozgást.*

Az anyagi test relatív mozgásának vázlatát az 52. ábra szemlélteti. A merev testhez rögzített S_2 koordináta-rendszer elmozdul az S_1 koordináta-rendszerben, miközben S_1 az S_0 rögzített koordináta-rendszerben mozog. Az anyagi pont esetétől eltérően, az anyagi test mozgásának kinematikai modellje *három* koordináta-rendszer kölcsönös helyzetének időbeli változását kell, hogy leírja.



52.ábra.

Az anyagi test relatív mozgásának geometriája

Az 52. ábrán szemléltetett merev test választott M pontjának $\vec{r}_2^{(M)}$ a helyvektora a testhez kötött S_2 koordináta-rendszerben. Ennek nyilvánvalóan állandók a koordinátái S_2 -ben. Feltevésünk szerint a merev test szabad mozgást végez az S_1

3. Fejezet. A relatív mozgás

koordináta-rendszerhez viszonyítva, melynek paraméterei, a (188) képlet szerint, az S_2 rendszer origójának helyzetét megadó koordináták, illetve a tengelyei irányát meghatározó Euler-szögek az S_1 koordináta-rendszerben. Az S_1 rendszer ugyan-csak szabad mozgást végez az S_0 -hoz képest. A három koordináta-rendszer adott időpillanatnak megfelelő helyzetét 12 skalárfüggvénnyel lehet leírni, amelyekben a változó az idő:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(O_2)} = f_2(t) \\ y_1^{(O_2)} = g_2(t) \\ z_1^{(O_2)} = h_2(t) \\ \psi_2 = \psi_2(t) \\ \theta_2 = \theta_2(t) \\ \varphi_2 = \varphi_2(t) \\ x_0^{(O_1)} = f_1(t) \\ y_0^{(O_1)} = g_1(t) \\ z_0^{(O_1)} = h_1(t) \\ \psi_1 = \psi_1(t) \\ \theta_1 = \theta_1(t) \\ \varphi_1 = \varphi_1(t) \end{array} \right. \quad (264)$$

A (264) képletekben a koordináta-függvények felső indexe a vizsgált pontra vonatkozik, az alsó pedig a koordináta-rendszert azonosítja. A merev test M pontja az S_1 rendszerhez viszonyítva *relatív mozgást* végez. Ha az M pontot az S_1 rendszerrel mereven összekötöttnek tekintjük, akkor ennek S_0 -hoz viszonyított elmozdulása kizárólag annak tulajdonítható, hogy S_1 mozog az S_0 -hoz képest. Ebben az esetben, ugyanúgy mint az anyagi pont esetén, az S_1 -hez rögzítettnek tekintett M pont mozgását *szállítómozgásnak* nevezzük. Az M pont S_0 -hoz viszonyított mozgása pedig az *abszolút mozgás*, ami most is a relatív és a szállító mozgások szuperpozíciójából adódik, ugyanúgy, mint az anyagi pont esetén.

3.4.2. Anyagi test adott pontjának pályái a relatív mozgásban

Az 52. ábra alapján felírható a következő vektoregyenlet:

$$\vec{r}_0^{(M)} = \vec{r}_0^{(O_1)} + \vec{r}_0^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)} \quad (265)$$

Az egyenletben szereplő helyvektorok összege az M pont S_0 -beli helyzetét adja meg az idő függvényében, tehát $\vec{r}_0^{(M)}$ az M pont abszolút pályagörbéjének vektoregyenlete.

Amennyiben adott $t=t_0$ időpillanatban lerögzítjük a merev testet a mozgó S_1 rendszerben, akkor az S_0 rendszerből megfigyelt mozgása kizárólag az S_1 rendszer mozgásából adódik. Ennek leírásához a (264) összefüggések utolsó 6 egyenlete szükséges; az első 6 egyenlet ugyanis az S_2 -nek (azaz a testnek) az S_1 -ben végzett mozgását írja le. Nyilvánvaló, hogy a (265) egyenlet ebben az esetben a következő sajátos alakot ölti:

$$\vec{r}_0^{(M)}(t) = \vec{r}_0^{(O_1)} + \vec{r}_1^{(O_2)}(t_0) + \vec{\rho}_2^{(M)}(t_0) \quad (266)$$

A (266) egyenlet az M pont t_0 időpillanathoz tartozó szállítópályájának vektor-egyenlete.

A relatív pálya a merev test M pontjának az S_1 mozgó koordináta-rendszerben megfigyelt pályája. A pálya adott pontjának helyzetvektorát a (265) egyenlet jobb oldalának utolsó két tagja adja:

$$\vec{r}_1^{(M)} = \vec{r}_1^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)} \quad (267)$$

A relatív pályát meghatározó 6 koordinátát a (264) rendszer első 6 egyenlete értelmezi. (A szögkoordináták tekintetében más választás is lehetséges.)

3.4.3. Anyagi test adott pontjának sebessége a relatív mozgásban

A. Vektormódszer

Ugyanúgy, mint azt az anyagi pont esetén már láttuk, az M pont sebességének két összetevője van: az egyik a relatív sebesség, ez az M pont S_1 -hez viszonyított sebessége, és a szállítósebesség, amely az S_1 rendszerrel mereven összekötött M pont S_0 rendszerben megfigyelt sebessége (az S_1 rendszer azon pontjának sebessége, amely a vizsgálat időpontjában egybeesik az M ponttal)..

A relatív sebesség meghatározása céljából a (267) képletet deriváljuk az idő szerint:

$$\begin{aligned} \vec{v}_r^{(M)} &= \frac{d\vec{r}_1^{(M)}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(x_1^{(O_2)} \vec{i}_1 + y_1^{(O_2)} \vec{j}_1 + z_1^{(O_2)} \vec{k}_1 + x_2^{(M)} \vec{i}_2 + y_2^{(M)} \vec{j}_2 + z_2^{(M)} \vec{k}_2 \right) = \\ &= \underbrace{\dot{x}_1^{(O_2)} \vec{i}_1 + \dot{y}_1^{(O_2)} \vec{j}_1 + \dot{z}_1^{(O_2)} \vec{k}_1}_{\vec{v}_{O_2}} + x_2^{(M)} \dot{\vec{i}}_2 + y_2^{(M)} \dot{\vec{j}}_2 + z_2^{(M)} \dot{\vec{k}}_2 = \vec{v}_1^{(O_2)} + \vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)} \end{aligned} \quad (268)$$

A szállítósebesség a (266) képlet idő szerinti deriváltja. Figyelembe kell venni, hogy az M pontot az S_1 rendszerhez mereven hozákötöttnek tekintjük. Ennélfogva az M pont együtt mozog az S_1 rendszerrel, ennek a mozgástörvényét követi. A fent mondottaknak megfelelően

$$\vec{v}_{sz}^{(M)} = \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_0^{(O_1)} + \vec{r}_1^{(O_2)}(t_0) + \vec{\rho}_2^{(M)}(t_0) \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_0^{(O_1)} + \vec{O_1 M} \right) = \vec{v}_0^{(O_1)} + \vec{\omega}_1^{(1)} \times \vec{r}_1^{(M)} \quad (269)$$

3. Fejezet. A relatív mozgás

A (269) képletben az M pont helyvektorát az S_1 rendszerhez rögzítettnek tekintjük: állandóak tehát ebben a rendszerben az M pont koordinátái. Így a szállítósebesség, ugyanúgy mint az anyagi pont relatív mozgása esetén, az O_1 origó sebessége és az S_1 rendszernek S_0 -hoz viszonyított pillanatnyi forgásából adódó sebesség összege lesz.

A (268) és (269) képletek alapján felírható az M testpont abszolút sebessége:

$$\vec{V}_{absz}^{(M)} = \vec{V}_r^{(M)} + \vec{V}_{sz}^{(M)} = \vec{V}_1^{(O_2)} + \vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)} + \vec{V}_0^{(O_1)} + \vec{\omega}_1^{(1)} \times \vec{r}_1^{(M)} \quad (270a.)$$

Vegyük észre, hogy mind a szállító, mind a relatív sebesség egy pillanatnyi haladómozgás jellegű, és egy pillanatnyi forgás jellegű összetevő összege. A fenti vektoregyenlet gyakorlati számításokra csak úgy alkalmas, ha minden tagot ugyanabban a koordináta-rendszerben fejezünk ki. A (270a.) egyenletben szereplő vektorok alsó indexei, akár az előbbiekből, azt a koordináta-rendszert azonosítják, amelyben felírtuk a kérdéses vektorokat.

A test relatív mozgásának vizsgálatakor lényeges a sebességeloszlás ismerete. Az M -től különböző N testpont a sebességét a (270) reláció N -re való formális átírásával kapjuk meg:

$$\vec{V}_{absz}^{(N)} = \vec{V}_r^{(N)} + \vec{V}_{sz}^{(N)} = \vec{V}_1^{(O_2)} + \vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(N)} + \vec{V}_0^{(O_1)} + \vec{\omega}_1^{(1)} \times \vec{r}_1^{(N)} \quad (270b.)$$

Az N testpont M testponthoz viszonyított sebessége a (270 a) és (270) egyenletek különbsége:

$$\vec{V}^{(NM)} = \vec{V}_{absz}^{(N)} - \vec{V}_{absz}^{(M)} = \vec{\omega}_2^{(2)} \times (\vec{\rho}_2^{(N)} - \vec{\rho}_2^{(M)}) + \vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{r}_1^{(N)} - \vec{r}_1^{(M)})$$

A képletben álló $\vec{\rho}_2^{(N)} - \vec{\rho}_2^{(M)}$ és az $\vec{r}_1^{(N)} - \vec{r}_1^{(M)}$ különbségek az N pontnak az M ponthoz viszonyított helyvektorát adják. Az első az S_2 rendszerben, a második pedig az S_1 rendszerben van felírva. A pillanatnyi szögsebesség-vektorokra ugyanaz a megjegyzés érvényes. Ha a vektorokat ugyanabban a bázisban írjuk fel, akkor az N pont M ponthoz viszonyított sebessége:

$$\vec{V}_i^{(NM)} = (\vec{\omega}_i^{(2)} + \vec{\omega}_i^{(1)}) \times \overline{MN}_i, \quad i \in \{0; 1; 2\} \quad (271)$$

A fenti egyenlet megadja a mozgó merev test bármely két pontja közötti sebesség-különbséget. Az eddig tárgyaltaknak megfelelően, a képletben szereplő vektorok alsó indexe arra a koordináta-rendszerre utal, amelyikben a vektorkoordinátákat felírtuk – a jelen esetben N és M jelöli ezeket a pontokat. Érdemes megfigyelní, hogy az $\vec{\omega}^{(2)}$ szögsebességvektor a vizsgált merev test pillanatnyi szögsebessége az S_1 rendszerhez képest, és hogy $\vec{\omega}^{(1)}$ a szabad mozgást végzőnek feltételezett S_1 koordináta-rendszer pillanatnyi szögsebessége az S_0 -ban. Ha az egyszerűség kedvéért a (271) egyenletet az S_0 abszolút koordináta-rendszerben írjuk fel, akkor a két szögsebesség összege a merev test abszolút rendszerben megfigyelt szögsebessége.

Érdemes bevezetni a mozgás geometriai sajátosságait az eddigiekkel összhangban tükröző alábbi elnevezéseket:

- $\vec{\omega}^{(2)} = \vec{\omega}_r$ a relatív szögsebesség (mivel ez a szögsebesség a merev test S_2 rendszerben megfigyelt szögsebessége);
- $\vec{\omega}^{(1)} = \vec{\omega}_{sz}$ a szállító szögsebesség (mivel ezzel a szögsebességgel mozog a merev testet szállító S_1 koordinátarendszer) és végül
- $\vec{\omega}_{absz} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_{sz}$ a merev test S_0 rendszerben megfigyelt abszolút szögsebessége.

A (271) képlet olvasata ugyanaz, mint a sebességek közötti összefüggésé: az abszolút szögsebesség a szállító szögsebesség és a relatív szögsebesség összege.

Ha a testhez kötött S_2 koordináta-rendszer O_2 origóját választjuk referencia-pontnak, akkor a (271) egyenlet a következő, kedvezőbb alakot ölti:

$$\vec{v}_i^{(N_{O_2})} = (\vec{\omega}^{(2)} + \vec{\omega}_i^{(1)}) \times (\vec{\rho}_2^{(N)})_i, \quad i \in \{0; 1; 2\} \quad (272)$$

A helyvektorok esetén úgy alkalmazzuk az i indexet, hogy először zárójelpárba helyezzük a helyvektort: $(\vec{\rho}_2^{(N)})_i$ az N testpont S_2 -beli helyvektora az S_1 -ben.

B. Mátrixmódszer

A mátrixmódszer alkalmazása feltételezi az S_2 -ből az S_1 -be, illetve az S_1 -ből az S_0 -ba történő transzformáció mátrixainak ismeretét minden időpillanatban. Ezek a mátrixok megegyeznek formailag a szabad mozgás vizsgálatokor levezetett mátrixokkal, az elemeiket pedig a (264) mozgástörvény alapján lehet felírni.

Ezzel összhangban a tetszőlegesen választott M testpont homogén koordinátáit az S_0 rendszerben az

$$\underline{\mathbf{r}}_0^{(M)} = \mathbf{M}_{01} \mathbf{M}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} \quad (273)$$

mátrixegyenlet adja meg. Továbbá az első transzformáció mátrixát két részre bontjuk fel:

$$\mathbf{M}_{01} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \beta_1^1 & \gamma_1^1 & x_0^{(O_1)} \\ \alpha_2^1 & \beta_2^1 & \gamma_2^1 & x_0^{(O_1)} \\ \alpha_3^1 & \beta_3^1 & \gamma_3^1 & x_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \beta_1^1 & \gamma_1^1 & 0 \\ \alpha_2^1 & \beta_2^1 & \gamma_2^1 & 0 \\ \alpha_3^1 & \beta_3^1 & \gamma_3^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & x_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & x_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ahol a jobboldal első mátrixa az $\mathbf{L}_{01}$ forgatómátrix a második pedig a $\mathbf{T}_{01}$ transzlációs mátrix. Az $\mathbf{L}_{01}$ forgatómátrix első három oszlopa az S_1 rendszer $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ egységvektorainak koordinátáit tartalmazza az S_0 -ban:

3. Fejezet. A relatív mozgás

$$\begin{cases} \vec{i}_1 = \alpha_1^1 \vec{i}_0 + \alpha_2^1 \vec{j}_0 + \alpha_3^1 \vec{k}_0 \\ \vec{j}_1 = \beta_1^1 \vec{i}_0 + \beta_2^1 \vec{j}_0 + \beta_3^1 \vec{k}_0 \\ \vec{k}_1 = \gamma_1^1 \vec{i}_0 + \gamma_2^1 \vec{j}_0 + \gamma_3^1 \vec{k}_0 \end{cases}$$

Az $\mathbf{M}_{12}$ transzformációs mátrix ugyanígy bontható fel két részre:

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & x_0^{(O_2)} \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & y_0^{(O_2)} \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & z_0^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 0 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 0 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_0^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & y_0^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & z_0^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{L}_{12} + \mathbf{T}_{12}$$

Az M pont abszolút sebessége a (273) mátrixegyenlet idő szerinti deriváltja:

$$\underline{\mathbf{v}}_0^{(M)} = \left(\frac{d\mathbf{M}_{01}}{dt} \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{01} \frac{d\mathbf{M}_{12}}{dt} \right) \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} \quad (274)$$

A transzformációs mátrixok felbontásainak segítségével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}_{01}}{dt} \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{01} \frac{d\mathbf{M}_{12}}{dt} &= \left(\frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} + \frac{d\mathbf{T}_{01}}{dt} \right) (\mathbf{L}_{12} + \mathbf{T}_{12}) + (\mathbf{L}_{01} + \mathbf{T}_{01}) \left(\frac{d\mathbf{L}_{12}}{dt} + \frac{d\mathbf{T}_{12}}{dt} \right) = \\ &= \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{12} + \frac{d\mathbf{T}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{12} + \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{T}_{12} + \frac{d\mathbf{T}_{01}}{dt} \mathbf{T}_{12} + \\ &+ \mathbf{L}_{01} \frac{d\mathbf{L}_{12}}{dt} + \mathbf{T}_{01} \frac{d\mathbf{L}_{12}}{dt} + \mathbf{L}_{01} \frac{d\mathbf{T}_{12}}{dt} + \mathbf{T}_{01} \frac{d\mathbf{T}_{12}}{dt} \end{aligned}$$

Visszahelyettesítés után a következő nyolc tag jelenik meg a (274) jobboldalán:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{12} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} &= \underbrace{\frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10} \mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{12}}_{\tilde{\omega}_0^{(1)}} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = \tilde{\omega}_0^{(1)} \mathbf{L}_{02} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = \\ &= \tilde{\omega}_0^{(1)} \left(\underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} \right)_0 = \tilde{\omega}_0^{(1)} \left(\underline{\mathbf{r}}_0^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_2)} \right) \end{aligned} \quad (i)$$

$$\frac{d\mathbf{T}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{12} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dot{x}_1^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{y}_1^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dot{z}_1^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 0 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 0 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = \mathbf{0}_{4,4} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (ii)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{T}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} &= \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10} \mathbf{T}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \\
 &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^{(1)} \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \beta_1^1 & \gamma_1^1 & 0 \\ \alpha_2^1 & \beta_2^1 & \gamma_2^1 & 0 \\ \alpha_3^1 & \beta_3^1 & \gamma_3^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & y_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \\
 &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^{(1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_1^1 x_1^{(O_2)} + \beta_1^1 y_1^{(O_2)} + \gamma_1^1 z_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2^1 x_1^{(O_2)} + \beta_2^1 y_1^{(O_2)} + \gamma_2^1 z_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3^1 x_1^{(O_2)} + \beta_3^1 y_1^{(O_2)} + \gamma_3^1 z_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^{(M)} \\ y_2^{(M)} \\ z_2^{(M)} \\ 1 \end{bmatrix} = \quad (iii) \\
 &= \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^{(1)} \begin{bmatrix} x_0^{(O_2)} - x_0^{(O_1)} \\ y_0^{(O_2)} - y_0^{(O_1)} \\ y_0^{(O_2)} - y_0^{(O_1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^{(1)} (\mathbf{r}_0^{(O_2)} - \mathbf{r}_0^{(O_1)})
 \end{aligned}$$

Figyeljük meg, hogy az első három tag összege

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^{(1)} (\mathbf{r}_0^{(M)} - \mathbf{r}_0^{(O_2)}) + 0 + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^{(1)} (\mathbf{r}_0^{(O_2)} - \mathbf{r}_0^{(O_1)}) = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^{(1)} (\mathbf{r}_0^{(M)} - \mathbf{r}_0^{(O_1)})$$

ami a merev test $\tilde{\boldsymbol{\omega}}^{(1)}$ pillanatnyi szögsebességvektora és az $\overrightarrow{O_1 M}$ vektor vektoriális szorzatának mátrixos alakja az S_0 rögzített koordináta-rendszerben. A további tagok pedig:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{T}_{01}}{dt} \mathbf{T}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_0^{(O_1)} \\ (0)_{4,3} \dot{y}_0^{(O_1)} \\ \dot{z}_0^{(O_1)} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0^{(O_1)} \\ y_0^{(O_1)} \\ z_0^{(O_1)} \\ 1 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0^{(O_1)} \\ (0)_{4,3} \dot{y}_0^{(O_1)} \\ \dot{z}_0^{(O_1)} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^{(M)} \\ y_2^{(M)} \\ z_2^{(M)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0^{(O_1)} \\ \dot{y}_0^{(O_1)} \\ \dot{z}_0^{(O_1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{v}}_0^{(O_1)} \quad (iv)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{01} \frac{d\mathbf{L}_{12}}{dt} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} &= \mathbf{L}_{01} \underbrace{\frac{d\mathbf{L}_{12}}{dt}}_{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(2)}} \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \mathbf{L}_{01} \underbrace{\mathbf{L}_{10} \mathbf{L}_{01}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(2)} \mathbf{L}_{10} \mathbf{L}_{01}}_{\mathbf{E}} \mathbf{L}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \\
 &= \underbrace{\mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{10}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\mathbf{L}_{01} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(2)} \mathbf{L}_{10}}_{[\tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^{(2)}]} \mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_0^{(2)} (\underline{\mathbf{q}}_2^{(M)})_0 \quad (v)
 \end{aligned}$$

3. Fejezet. A relatív mozgás

$$\mathbf{T}_{01} \frac{d\mathbf{L}_{12}}{dt} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = \mathbf{0}_{4,4} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = \mathbf{0}_{4,1} \quad (\text{vi})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{01} \frac{d\mathbf{T}_{12}}{dt} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha_1^1 \dot{x}_1^{(O_2)} + \beta_1^1 \dot{y}_1^{(O_2)} + \gamma_1^1 \dot{z}_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2^1 \dot{x}_1^{(O_2)} + \beta_2^1 \dot{y}_1^{(O_2)} + \gamma_2^1 \dot{z}_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3^1 \dot{x}_1^{(O_2)} + \beta_3^1 \dot{y}_1^{(O_2)} + \gamma_3^1 \dot{z}_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^{(M)} \\ y_2^{(M)} \\ z_2^{(M)} \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \dot{x}_1^{(O_2)} + \beta_1^1 \dot{y}_1^{(O_2)} + \gamma_1^1 \dot{z}_1^{(O_2)} \\ \alpha_2^1 \dot{x}_1^{(O_2)} + \beta_2^1 \dot{y}_1^{(O_2)} + \gamma_2^1 \dot{z}_1^{(O_2)} \\ \alpha_3^1 \dot{x}_1^{(O_2)} + \beta_3^1 \dot{y}_1^{(O_2)} + \gamma_3^1 \dot{z}_1^{(O_2)} \\ 0 \end{bmatrix} = (\underline{\mathbf{v}}_1^{(O_2)})_0 \end{aligned} \quad (\text{vii})$$

A (vii) tag az O_2 origó S_1 -hez viszonyított sebessége az S_0 álló koordináta-rendszerben. A nyolcadik és utolsó tag pedig:

$$\mathbf{T}_{01} \frac{d\mathbf{T}_{12}}{dt} = \mathbf{0}_{4,4} \quad (\text{viii})$$

Összegyűjtve az (i)-(viii) részeredményeket a választott M testpont abszolút sebességének oszlopát kapjuk, az S_0 rendszerhez viszonyítva:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}}_0^{(M)} &= \tilde{\omega}_0^{(1)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_2)}) + \tilde{\omega}_0^{(1)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(O_2)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_1)}) + \underline{\mathbf{v}}_0^{(O_1)} + \\ &+ \tilde{\omega}_0^{(2)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_2)}) + \begin{bmatrix} \dot{x}_1^{(O_2)} \\ \dot{y}_1^{(O_2)} \\ \dot{z}_1^{(O_2)} \\ 0 \end{bmatrix}_0 = \\ &= \underbrace{\underline{\mathbf{v}}_0^{(O_2, O_1)} + \tilde{\omega}_0^{(2)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_2)})}_{\text{relatív sebesség}} + \underbrace{\underline{\mathbf{v}}_0^{(O_1)} + \tilde{\omega}_0^{(1)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_1)})}_{\text{szállító sebesség}} \end{aligned} \quad (275)$$

A (275) képlet tagjainak jelentése a következő:

- $\underline{\mathbf{v}}_0^{(O_2, O_1)}$ – az S_2 rendszer O_2 origójának (vagy ami ugyanaz: a merev test O_2 pontjának) sebessége az S_1 rendszerhez viszonyítva.
- $\tilde{\omega}_0^{(2)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_2)})$ – a merev test M pontjának sebessége az O_2 ponthoz kötöttnek gondolt pillanatnyi $\tilde{\omega}^{(2)}$ szögsebességű forgásából az S_1 -ben;
- $\underline{\mathbf{v}}_0^{(O_1)}$ – az S_1 mozgó rendszer O_1 origójának sebessége az S_0 -hoz viszonyítva;

- $\tilde{\omega}_0^{(1)} (\mathbf{r}_0^{(M)} - \mathbf{r}_0^{(O_1)})$ – az S_1 rendszerhez mereven kötöttnek gondolt M pont sebessége az S_1 rendszer pillanatnyi, $\tilde{\omega}_1$ szögsebességű forgásából (az O_1 -hez kötött $\tilde{\omega}_1$ nyomatéka az M -re).

Visszaidézve a (270) vektoregyenletet azonnal látszik, hogy a (275) képlet első két tagja a relatív sebesség, az utolsó két tagja pedig a szállítósebesség (mindkettő be van jelölve a képletben. Külön kiírva:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0^{(M)}{}_r = \mathbf{v}_0^{(O_2, O_1)} + \tilde{\omega}_0^{(2)} (\mathbf{r}_0^{(M)} - \mathbf{r}_0^{(O_2)}) \\ \mathbf{v}_0^{(M)}{}_{sz} = \mathbf{v}_0^{(O_1)} + \tilde{\omega}_0^{(1)} (\mathbf{r}_0^{(M)} - \mathbf{r}_0^{(O_2)}) \end{cases} \quad (276)$$

A (270) vektoregyenlettel szemben különbségnek tekintjük, hogy a (275) alatti mátrixos formalizmusban minden mennyiséget ugyanabban az álló S_0 rendszerben adtunk meg.

Vegyük észre, hogy a szállítósebesség az (i)-(iv), míg a relatív sebesség az (v)-(viii) részeredmények összevonásából adódik. Ha még arra is tekintettel vagyunk, hogy az (i)-(iv) részeredmények a (274) egyenletben álló $(d\mathbf{M}_{01}/dt)\mathbf{M}_{12}$ tag felbontásából származnak, akkor a (274) egyenlet alapján két egyszerű szerkezetű képlet írható fel a szállító és a relatív sebesség gyakorlati számítására:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_0^{(M)}{}_{sz} = \frac{d\mathbf{M}_{01}}{dt} \mathbf{M}_{12} \mathbf{q}_2^{(M)} \\ \mathbf{v}_0^{(M)}{}_r = \mathbf{M}_{01} \frac{d\mathbf{M}_{12}}{dt} \mathbf{q}_2^{(M)} \end{cases} \quad (277)$$

3.4.4. Anyagi testpont gyorsulása a relatív mozgásban

A gyorsulás a pillanatnyi sebesség idő szerinti deriváltja. Ezt az eddigiekkel összhangban kétféleképpen számítjuk.

A. Vektormódszer.

Az M testpont sebességét adó (270a.) egyenlet a számítás alapja:

$$\vec{v}_{absz}^{(M)} = \vec{v}_r^{(M)} + \vec{v}_{sz}^{(M)} = \vec{v}_1^{(O_2)} + \tilde{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)} + \vec{v}_0^{(O_1)} + \tilde{\omega}_1^{(1)} \times \vec{r}_1^{(M)}$$

A gyorsulásvektort a fenti képletben szereplő vektorok idő szerinti deriválásával kapjuk. Szem előtt kell tartani a deriválás során, hogy az illető tagot melyik koordináta-rendszerben irtuk fel, és ezzel összhangban azt is, hogy mi a tekintett tag idő szerinti deriváltja. Ez azért lényeges, mert időfüggők az S_1 és S_2 koordináta-rendszerek bázisai. Az egyes tagok deriváltjait külön-külön számítjuk:

a.) $\vec{v}_1^{(O_2)}$ -ez a tag az S_2 origó sebessége az S_1 rendszerben, tehát a relatív sebesség egyik összetevője. Ennélfogva

3. Fejezet. A relatív mozgás

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{v}_1^{(O_2)}) &= \frac{d}{dt}(\vec{v}_{x_1}^{(O_2)} \vec{i}_1 + \vec{v}_{y_1}^{(O_2)} \vec{j}_1 + \vec{v}_{z_1}^{(O_2)} \vec{k}_1) = \dot{\vec{v}}_{x_1}^{(O_2)} \vec{i}_1 + \dot{\vec{v}}_{y_1}^{(O_2)} \vec{j}_1 + \dot{\vec{v}}_{z_1}^{(O_2)} \vec{k}_1 + \\ &+ \vec{v}_{x_1}^{(O_2)} \dot{\vec{i}}_1 + \vec{v}_{y_1}^{(O_2)} \dot{\vec{j}}_1 + \vec{v}_{z_1}^{(O_2)} \dot{\vec{k}}_1 = \vec{a}_1^{(O_2)} + \vec{\omega}_1^{(1)} \times \vec{v}_1^{(O_2)} \end{aligned} \quad (278a.)$$

b.) $\vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}$ – ez a tag a relatív sebesség azon összetevője, amely az S_2 rendszer pillanatnyi forgásából keletkezik. Mivel ez is a relatív sebesség része, (a *test S_1 -hez viszonyított mozgásához tartozik*) a deriválásnál figyelembe kell venni az S_1 bázisának változását is. Ez a jobboldalon álló utolsó tagban jelenik meg:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}) = \vec{\varepsilon}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)} + \vec{\omega}_2^{(2)} \times (\vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}) + \vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}) \quad (278b.)$$

A deriválással kapott kifejezés utolsó tagja pont azt fejezi ki, hogy az $(\vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)})$ vektornak az S_1 rendszer forgásából is adódik időbeli változása.

c.) $\vec{v}_0^{(O_1)}$ – az S_1 rendszer O_1 origójának sebessége az S_0 álló rendszerben (a szállítósebesség egyik összetevője). deriválása a koordináták deriválásából áll – nincs szükség az S_1 bázisvektorainak deriváltjaira:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_0^{(O_1)}) = \vec{a}_0^{(O_1)} \quad (278c.)$$

d.) $\vec{\omega}_1^{(1)} \times \vec{r}_1^{(M)} = \vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{r}_1^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)})$ – a szállítósebesség azon része, mely az S_1 rendszerhez kötöttnek gondolt M pontnak az S_1 pillanatnyi forgásából adódó sebességét fejezi ki. A deriválás során figyelembe kell venni, hogy az M pont helyvektora az S_1 origójához kötött, és azt is, hogy a test (vagy ami ugyanaz: S_2) is mozog az S_1 -ben:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{r}_1^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)})) &= \vec{\varepsilon}_1^{(1)} \times (\vec{r}_1^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)}) + \vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{r}_1^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)})) + \\ &+ \vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{v}_1^{(O_2)} + \vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}) \end{aligned} \quad (278d.)$$

Az (278a.)–(278d.) részeredmények összegezése után az alábbi képlet adódik a vizsgált pont gyorsulásvektorára:

$$\begin{aligned} \vec{a}_0^{(M)} &= \vec{a}_1^{(O_2)} + \vec{\omega}_1^{(1)} \times \vec{v}_1^{(O_2)} + \vec{\varepsilon}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)} + \vec{\omega}_2^{(2)} \times (\vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}) + \vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}) + \\ &+ \vec{a}_0^{(O_1)} + \vec{\varepsilon}_1^{(1)} \times (\vec{r}_1^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)}) + \vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{r}_1^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)})) + \vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{v}_1^{(O_2)} + \vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}) = \\ &= \vec{a}_1^{(O_2)} + \vec{\varepsilon}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)} + \vec{\omega}_2^{(2)} \times (\vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}) + \vec{a}_0^{(O_1)} + \vec{\varepsilon}_1^{(1)} \times (\vec{r}_1^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)}) + \\ &+ \vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{r}_1^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)})) + 2\vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{v}_1^{(O_2)} + \vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}) \end{aligned} \quad (279)$$

A (279) képletben jól elkülöníthetők az anyagi pont relatív mozgása kapcsán megismert gyorsulás-összetevők.

A *relatív gyorsulás* a tekintett M testpont gyorsulása az S_1 szállítórendszerhez viszonyítva. Ez az O_2 origó gyorsulásából, tovább az S_2 szöggyorsulása, illetve az S_2 forgása okozta gyorsulásokból áll:

$$\vec{a}_r^{(M)} = \vec{a}_1^{(O_2)} + \vec{\varepsilon}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)} + \vec{\omega}_2^{(2)} \times (\vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}) \quad (280a.)$$

Vegyük észre, hogy a fenti képlet a merev test két pontjának gyorsulása közötti összefüggés képlete ha a merev test az S_1 rendszerben mozog, és ismerjük adott pontjának (O_2) gyorsulását, a test $\vec{\varepsilon}_2^{(2)}$ szöggyorsulását, $\vec{\omega}_2^{(2)}$ szögsebességét, valamint az M pont O_2 -re vonatkozó $\vec{\rho}_2^{(M)}$ helyvektorát. Érdemes a most mondottak alapján ezt az eredményt egybevetni a merev test szabad mozgásának esetére érvényes (230) alatti összefüggéssel.

A *szállítógyorsulás* a tekintett M testpont gyorsulása akkor, amikor az S_1 rendszerrel mereven kötöttnek tekintjük (azaz az S_1 rendszer azon pontjának gyorsulása amely egybeesik a relatív mozgást végző test M pontjával a vizsgálat időpillanatában). Mivel az S_1 rendszer a hozzá kötöttnek gondolt M ponttal együtt nyilvánvalóan merev testként viselkedik, a kapott eredmény meg kell hogy egyezzen, szerkezetét és tartalmát tekintve, a (230) képlettel. A vonatkozó tagokat összegyűjtve kapjuk, hogy

$$\vec{a}_{sz}^{(M)} = \vec{a}_0^{(O_1)} + \vec{\varepsilon}_1^{(1)} \times (\vec{r}_1^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)}) + \vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{r}_1^{(O_2)} + \vec{\rho}_2^{(M)})) \quad (280b.)$$

azaz a (230)-ból úgy következik a (280b.), hogy a C-nek O_1 , $\vec{\varepsilon}_1^{(1)}$ -nak, $\vec{\omega}_1^{(1)}$ -nak, a helyvektornak pedig helyvektor összeg a megfelelője.

A Coriolis-féle gyorsulás itt is, akár az anyagi pont relatív mozgása esetén, a szállító rendszer szögsebessége és a relatív sebesség vektoriális szorzatának kétszerese (Vegyük észre, hogy a zárójelpárban álló kifejezés, összhangban a (270a.) egyenlettel és a Coriolis-féle gyorsulás (260) alatti értelmezésével is, az M pont relatív sebessége.)

$$\vec{a}_C^{(M)} = 2\vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{v}_1^{(O_2)} + \vec{\omega}_2^{(2)} \times \vec{\rho}_2^{(M)}) \quad (280c.)$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy milyen összefüggés áll fenn a szöggyorsulások között. A (279), (280a.), (280b.) és (280c.) képletek egybevetése szerint a merev test szabadon választott M és N pontjára felírható a gyorsulás:

$$\begin{aligned} \vec{a}^{(M)} &= \vec{a}_r^{(M)} + \vec{a}_{sz}^{(M)} + \vec{a}_C^{(M)} \\ \vec{a}^{(N)} &= \vec{a}_r^{(N)} + \vec{a}_{sz}^{(N)} + \vec{a}_C^{(N)} \end{aligned}$$

Vonjuk ki az első egyenlethből a másodikat, és helyettesítsük a (280a.), (280b.) és (280c.) képleteket a különbségképzés során. Kapjuk, hogy

3. Fejezet. A relatív mozgás

$$\begin{aligned}
 \vec{a}^{(M)} - \vec{a}^{(N)} = & \\
 = & \underbrace{\vec{\varepsilon}_2^{(2)} \times (\vec{\rho}_2^{(M)} - \vec{\rho}_2^{(N)}) + \vec{\omega}_2^{(2)} \times (\vec{\omega}_2^{(2)} \times (\vec{\rho}_2^{(M)} - \vec{\rho}_2^{(N)}))}_{\vec{a}_r^{(M)} - \vec{a}_r^{(N)}} + \\
 & \underbrace{+\vec{\varepsilon}_1^{(1)} \times (\vec{\rho}_2^{(M)} - \vec{\rho}_2^{(N)}) + \vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{\rho}_2^{(M)} - \vec{\rho}_2^{(N)}))}_{\vec{a}_{sz}^{(M)} - \vec{a}_{sz}^{(N)}} + \\
 & \underbrace{+2\vec{\omega}_1^{(1)} \times (\vec{\omega}_2^{(2)} \times (\vec{\rho}_2^{(M)} - \vec{\rho}_2^{(N)}))}_{\vec{a}_c^{(M)} - \vec{a}_c^{(N)}}
 \end{aligned} \tag{281}$$

A Coriolis gyorsulás felbontásával, megfelelő átcsoportosítással és a kétszeres vektoriális szorzatok kifejtése mellett, a $\vec{\rho}^{(MN)} = \vec{\rho}_2^{(M)} - \vec{\rho}_2^{(N)}$ jelöléssel (emlékezzünk, hogy a vektor objektív mennyiség, tehát koordináta-rendszer-független, így az alsó index elhagyható – a jelölés olvasata az M pont N ponthoz viszonyított helyvektora, bármelyik koordináta-rendszerben), után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 \vec{a}^{(M)} - \vec{a}^{(N)} = & \\
 = & (\vec{\varepsilon}^{(1)} + \vec{\varepsilon}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)} + (\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times (\vec{\omega}^{(2)} \times \vec{\rho}^{(MN)}) + \vec{\omega}^{(1)} \times ((\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)}) = \\
 = & (\vec{\varepsilon}^{(1)} + \vec{\varepsilon}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)} + (\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times (((\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) - \vec{\omega}^{(1)}) \times \vec{\rho}^{(MN)}) + \\
 & + \vec{\omega}^{(1)} \times ((\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)}) = \\
 = & (\vec{\varepsilon}^{(1)} + \vec{\varepsilon}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)} + (\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times ((\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)}) - \\
 & - (\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times (\vec{\omega}^{(1)} \times \vec{\rho}^{(MN)}) + \vec{\omega}^{(1)} \times ((\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)}) = \\
 = & (\vec{\varepsilon}^{(1)} + \vec{\varepsilon}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)} + (\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times ((\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)}) - \\
 & - \vec{\omega}^{(2)} \times (\vec{\omega}^{(1)} \times \vec{\rho}^{(MN)}) + \vec{\omega}^{(1)} \times (\vec{\omega}^{(2)} \times \vec{\rho}^{(MN)})
 \end{aligned}$$

A fenti egyenlet jobboldalának két utolsó tagjában kifejtjük a kétszeres vektoriális szorzatokat és átrendezzük:

$$\begin{aligned}
 -\vec{\omega}^{(2)} \times (\vec{\omega}^{(1)} \times \vec{\rho}^{(MN)}) + \vec{\omega}^{(1)} \times (\vec{\omega}^{(2)} \times \vec{\rho}^{(MN)}) = & \\
 = -(\vec{\omega}^{(2)} \cdot \vec{\rho}^{(MN)})\vec{\omega}^{(1)} + (\vec{\omega}^{(1)} \cdot \vec{\omega}^{(2)})\vec{\rho}^{(MN)} + (\vec{\omega}^{(1)} \cdot \vec{\rho}^{(MN)})\vec{\omega}^{(2)} - (\vec{\omega}^{(1)} \cdot \vec{\omega}^{(2)})\vec{\rho}^{(MN)} = & \\
 = (\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)} &
 \end{aligned}$$

Ezzel a (281) egyenlet végleges alakja a következő:

$$\begin{aligned}
 \vec{a}^{(M)} - \vec{a}^{(N)} = & (\vec{\varepsilon}^{(1)} + \vec{\varepsilon}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)} + (\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times ((\vec{\omega}^{(1)} + \vec{\omega}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)}) + \\
 & + (\vec{\omega}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)}) \times \vec{\rho}^{(MN)}
 \end{aligned} \tag{282}$$

Az M pont N ponthoz viszonyított gyorsulását felírhatjuk a rögzített S_0 koordináta-rendszerben, a (230) képlet alapján. Eszerint

$$\vec{a}^{(M)} - \vec{a}^{(N)} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}^{(MN)} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}^{(MN)}) \quad (283)$$

Idézzük fel a 159. oldalon bevezetett elnevezéseket, és az ennek szellemében felírt $\vec{\omega} = \vec{\omega}^{(2)} + \vec{\omega}^{(1)} = \vec{\omega}_r + \vec{\omega}_{sz}$ abszolút rendszerben megfigyelt szögsebességet, majd terjesszük ki ezt a szöggyorsulás-vektorokra. Felírhatjuk, hogy

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}^{(2)} + \vec{\varepsilon}^{(1)} = \vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_{sz}$$

Végül, a (282) és (283) egyenletek egybevetéséből látható, hogy

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}^{(2)} + \vec{\varepsilon}^{(1)} + \vec{\omega}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)} = \vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_{sz} + \vec{\omega}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)} \quad (284)$$

A képletben álló $\vec{\varepsilon}^{(2)} = \vec{\varepsilon}_r$ és $\vec{\varepsilon}^{(1)} = \vec{\varepsilon}_{sz}$ rendre a relatív és szállító szöggyorsulás. Az utolsó $\vec{\omega}^{(1)} \times \vec{\omega}^{(2)} = \vec{\omega}_{sz} \times \vec{\omega}_r$ tag szerepe hasonló a Coriolis-féle gyorsuláshoz. A (284) képlet így az abszolút szöggyorsulás és a merev test relatív mozgásával kapcsolatos szöggyorsulások közötti összefüggés.

B. Mátrixmódszer

A mátrixmódszer alkalmazásával a gyorsulásvektor homogén koordinátáit (az ezekből felépített gyorsulásmátrixot) állítjuk elő az S_0 álló rendszerben. A számítás a (274) sebességegyenlet idő szerinti deriváltjának meghatározását jelenti:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}_0^{(M)} &= \frac{d}{dt}(\underline{\mathbf{v}}_0^{(M)}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{M}_{01}}{dt} \mathbf{M}_{12} + \mathbf{M}_{01} \frac{d\mathbf{M}_{12}}{dt} \right) \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{M}_{01}}{dt^2} \mathbf{M}_{12} + \frac{d\mathbf{M}_{01}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{12}}{dt} + \frac{d\mathbf{M}_{01}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{12}}{dt} + \mathbf{M}_{01} \frac{d^2\mathbf{M}_{12}}{dt^2} \right) \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \\ &= \frac{d^2\mathbf{M}_{01}}{dt^2} \mathbf{M}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} + 2 \frac{d\mathbf{M}_{01}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{12}}{dt} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} + \mathbf{M}_{01} \frac{d^2\mathbf{M}_{12}}{dt^2} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} \end{aligned} \quad (285)$$

Könnyen belátható, hogy a (285) egyenlet jobboldalának első tagja a szállító-, középső a Coriolis-, illetve legutolsó a relatív gyorsulás:

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{a}}_{0\ sz}^{(M)} = \frac{d^2\mathbf{M}_{01}}{dt^2} \mathbf{M}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} \\ \underline{\mathbf{a}}_{0\ c}^{(M)} = 2 \frac{d\mathbf{M}_{01}}{dt} \frac{d\mathbf{M}_{12}}{dt} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} \\ \underline{\mathbf{a}}_{0\ r}^{(M)} = \mathbf{M}_{01} \frac{d^2\mathbf{M}_{12}}{dt^2} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} \end{cases} \quad (286)$$

3. Fejezet. A relatív mozgás

A következőkben megmutatjuk, hogy egyenértékűek a vonatkozó vektor- és mátrixösszefüggések.

A számítások során, ugyanúgy mint azt a sebességmátrix számításánál tettük figyelembe vesszük a transzformációs mátrixok (273) képlete után részletezett felbontásait rotációs és translációs részekre. Felhasználjuk továbbá a sebességmátrix levezetése során kapott (i)-(viii) részeredményeket is. A pillanatnyi szöggyorsulás ferdeszimmetrikus mátrixának előállításakor figyelembe kell venni, hogy:

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \frac{d}{dt}(\tilde{\omega}_0) = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10} \right) = \frac{d^2 \mathbf{L}_{01}}{dt^2} \mathbf{L}_{10} + \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \frac{d\mathbf{L}_{10}}{dt}$$

Ezenkívül, a pillanatnyi szögsebességre vonatkozóan két egymással egyenértékű mátrixos kifejezést is elő lehet állítani. Deriváljuk ehhez az

$$\mathbf{L}_{01} \mathbf{L}_{10} = \hat{\mathbf{E}}$$

egyenlőséget az idő szerint. Kapjuk, hogy

$$\frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10} + \mathbf{L}_{01} \frac{d\mathbf{L}_{10}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathbf{L}_{01} \frac{d\mathbf{L}_{10}}{dt} = -\frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10} = -\tilde{\omega}_0^{(1)}$$

A fenti összefüggések figyelembevételével:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{a}}_0^{(M)} &= \frac{d^2 \mathbf{M}_{01}}{dt^2} \mathbf{M}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \left(\frac{d^2 \mathbf{L}_{01}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{T}_{01}}{dt^2} \right) (\mathbf{L}_{12} + \mathbf{T}_{12}) \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \\ &= \frac{d^2 \mathbf{L}_{01}}{dt^2} \underbrace{\mathbf{L}_{10} \mathbf{L}_{01}}_{\hat{\mathbf{E}}} \mathbf{L}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} + \underbrace{\frac{d^2 \mathbf{T}_{01}}{dt^2} \mathbf{L}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)}}_{=0} + \\ &+ \frac{d^2 \mathbf{L}_{01}}{dt^2} \underbrace{\mathbf{L}_{10} \mathbf{L}_{01}}_{\hat{\mathbf{E}}} \mathbf{T}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} + \frac{d^2 \mathbf{T}_{01}}{dt^2} \mathbf{T}_{12} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \\ &= \left(\underbrace{\frac{d^2 \mathbf{L}_{01}}{dt^2} \mathbf{L}_{10}}_{\tilde{\varepsilon}_0} + \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} - \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \frac{d\mathbf{L}_{01}}{dt} \right) \mathbf{L}_{02} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\underbrace{\frac{d^2 \mathbf{L}_{01}}{dt^2} \mathbf{L}_{10}}_{\tilde{\mathbf{e}}_0} + \frac{d \mathbf{L}_{01}}{dt} \frac{d \mathbf{L}_{01}}{dt} - \frac{d \mathbf{L}_{01}}{dt} \frac{d \mathbf{L}_{01}}{dt} \right) \mathbf{L}_{01} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & y_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} + \\
 & + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \ddot{x}_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ddot{y}_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & \ddot{z}_0^{(O_1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & y_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & z_1^{(O_2)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = \\
 & = \tilde{\mathbf{e}}_0^{(1)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_2)}) + \tilde{\omega}_0^{(1)} \tilde{\omega}_0^{(1)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_2)}) \\
 & + \tilde{\mathbf{e}}_0^{(1)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(O_2)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_1)}) + \tilde{\omega}_0^{(1)} \tilde{\omega}_0^{(1)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(O_2)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_1)}) + \underline{\mathbf{a}}_0^{(O_1)} = \\
 & = \underline{\mathbf{a}}_0^{(O_1)} + \tilde{\mathbf{e}}_0^{(1)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_1)}) + \tilde{\omega}_0^{(1)} \tilde{\omega}_0^{(1)} (\underline{\mathbf{r}}_0^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_0^{(O_1)})
 \end{aligned}$$

Első pillantásra látszik, hogy ez a képlet megegyezik, eltekintve attól a körülménytől, hogy mátrixokat tartalmaz vektorok helyett, a szállítógyorsulás (280b.) képletével. Figyelembe véve a kiindulásul szolgáló (286) alatti első képlet egyszerűségét, nem nehéz érzékelni a mátrixmódszer előnyeit.

A Coriolis gyorsulás elemzése hasonló módon történik:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{a}}_0^{(M)}{}_c &= 2 \frac{d \mathbf{M}_{01}}{dt} \frac{d \mathbf{M}_{12}}{dt} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = 2 \left(\frac{d \mathbf{L}_{01}}{dt} + \frac{d \mathbf{T}_{01}}{dt} \right) \left(\frac{d \mathbf{L}_{12}}{dt} + \frac{d \mathbf{T}_{12}}{dt} \right) \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = \\
 &= 2 \left(\frac{d \mathbf{L}_{01}}{dt} \frac{d \mathbf{L}_{12}}{dt} + \underbrace{\frac{d \mathbf{T}_{01}}{dt} \frac{d \mathbf{L}_{12}}{dt}}_{=0} + \frac{d \mathbf{L}_{01}}{dt} \frac{d \mathbf{T}_{12}}{dt} + \underbrace{\frac{d \mathbf{T}_{01}}{dt} \frac{d \mathbf{T}_{12}}{dt}}_{=0} \right) \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = \\
 &= 2 \left(\frac{d \mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10} \mathbf{L}_{01} \frac{d \mathbf{L}_{12}}{dt} \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{12} + \frac{d \mathbf{L}_{01}}{dt} \mathbf{L}_{10} \mathbf{L}_{01} \frac{d \mathbf{T}_{12}}{dt} \right) \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} = \\
 &= 2 \tilde{\omega}_0^{(1)} \left(\mathbf{L}_{01} \underbrace{\frac{d \mathbf{L}_{12}}{dt} \mathbf{L}_{21} \mathbf{L}_{12}}_{\tilde{\omega}_1^{(2)}} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} + \mathbf{L}_{01} \frac{d \mathbf{T}_{12}}{dt} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} \right) = \\
 &= 2 \tilde{\omega}_0^{(1)} \left(\mathbf{L}_{01} \tilde{\omega}_1^{(2)} (\underline{\mathbf{r}}_1^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_1^{(O_2)}) + \mathbf{L}_{01} \frac{d \mathbf{T}_{12}}{dt} \underline{\mathbf{e}}_2^{(M)} \right) = \\
 &= 2 \tilde{\omega}_0^{(1)} (\mathbf{L}_{01} \tilde{\omega}_1^{(2)} (\underline{\mathbf{r}}_1^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_1^{(O_2)}) + \mathbf{L}_{01} \underline{\mathbf{v}}_1^{(O_2 O_1)})
 \end{aligned}$$

3. Fejezet. A relatív mozgás

Az összehasonlítás kedvéért idézzük vissza a Coriolis-féle gyorsulás (280c.) összefüggését. A fenti képlet utolsó képletsorát kell vele összevetni. Megkönnyíti az összehasonlítást, hogy ugyanaz az egymásnak megfelelő tagok sorrendje. Fentebb az első szorzótényező a mozgó S_1 koordináta-rendszer (a szállító koordináta-rendszer) pillanatnyi szögsebességének ferdeszimmetrikus mátrixa (a vektor-egyenletben az S_1 szögsebessége). Azt sem nehéz ellenőrizni, hogy a nagy kerek zárójelpárban mindkét esetben az M pont relatív sebessége áll, mivel az első tag az O_2 sebessége a mozgó rendszerben, a második pedig az O_2 és M pontok sebességkülönbsége a test relatív mozgásából adódóan.

Végül tekintsük át a relatív gyorsulás mátrixos alakját:

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{a}}_0^{(M)} &= \mathbf{M}_{01} \frac{d^2 \mathbf{M}_{12}}{dt^2} \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = (\mathbf{L}_{01} + \mathbf{T}_{01}) \left(\frac{d^2 \mathbf{L}_{12}}{dt^2} + \frac{d^2 \mathbf{T}_{12}}{dt^2} \right) \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \\
 &= (\mathbf{L}_{01} + \mathbf{T}_{01}) \left(\left(\frac{d^2 \mathbf{L}_{12}}{dt^2} \mathbf{L}_{21} + \frac{d \mathbf{L}_{12}}{dt} \frac{d \mathbf{L}_{21}}{dt} - \frac{d \mathbf{L}_{12}}{dt} \frac{d \mathbf{L}_{21}}{dt} \right) \mathbf{L}_{12} + \frac{d^2 \mathbf{T}_{12}}{dt^2} \right) \underline{\mathbf{q}}_2^{(M)} = \\
 &= \mathbf{L}_{01} \left\{ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{(2)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(2)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(2)} \right\} \left(\underline{\mathbf{r}}_1^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_1^{(O_2)} \right) + \mathbf{L}_{01} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_1^{(O_2)} \\ \ddot{\mathbf{y}}_1^{(O_2)} \\ \ddot{\mathbf{z}}_1^{(O_2)} \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \mathbf{L}_{01} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1^{(2)} \left(\underline{\mathbf{r}}_1^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_1^{(O_2)} \right) + \mathbf{L}_{01} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(2)} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1^{(2)} \left(\underline{\mathbf{r}}_1^{(M)} - \underline{\mathbf{r}}_1^{(O_2)} \right) + \left(\underline{\mathbf{a}}_1^{(O_2, O_1)} \right)_0
 \end{aligned}$$

Ismét könnyű a (280a.) vektorképlettel való összehasonlítás, mivel most is azonos a fenti egyenlet utolsó képletsorában, és a (280a.) képletben az egymásnak megfelelő tagok sorrendje.

Az $\tilde{\omega}_1 = \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_1 \mathbf{L}_{01}$ egyenlőség igazolása

A jelen függelékben 3x3-as mátrixokkal dolgozunk.

Legyen $\mathbf{L}_{10}$ az $\mathbf{M}_{10}$ homogén transzformációs mátrix rotációs része:

$$\mathbf{L}_{10} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

Jelölje $\mathbf{L}_{01}$ az $\mathbf{L}_{10}$ inverzét. Ez, figyelembe véve a rotációs mátrix ortogonalitását, nemcsak az $\mathbf{L}_{01}$ inverze, hanem egyben a transzponáltja is:

$$\mathbf{L}_{01} = \mathbf{L}_{10}^T = \mathbf{L}_{10}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

Figyelembe véve, hogy az $\mathbf{L}_{01}$ determinánsának értéke 1, az inverzmátrix elemei megegyeznek a mátrix adjungáltjával (ez az egyes elemek helyére írt előjeles aldeterminánsokkal felépített mátrix transzponáltja). Ennek alapján a következő összefüggések állnak fenn az $\mathbf{L}_{01}$ elemei között.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} & \beta_1 &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} & \gamma_1 &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \alpha_2 &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} & \beta_2 &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} & \gamma_2 &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} \\ \alpha_3 &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} & \beta_3 &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} & \gamma_3 &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{F.1.1})$$

A továbbiakban az $\mathbf{L}_{10} \cdot [\tilde{\omega}_0] \cdot \mathbf{L}_{01}$ kifejezés kiszámítása a cél.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \mathbf{L}_{01} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_0} & \omega_{y_0} \\ \omega_{z_0} & 0 & -\omega_{x_0} \\ -\omega_{y_0} & \omega_{x_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\omega_{z_0} \alpha_2 + \omega_{y_0} \alpha_3 & -\omega_{z_0} \beta_2 + \omega_{y_0} \beta_3 & -\omega_{z_0} \gamma_2 + \omega_{y_0} \gamma_3 \\ \omega_{z_0} \alpha_1 - \omega_{x_0} \alpha_3 & \omega_{z_0} \beta_1 - \omega_{x_0} \beta_3 & \omega_{z_0} \gamma_1 - \omega_{x_0} \gamma_3 \\ -\omega_{y_0} \alpha_1 + \omega_{x_0} \alpha_2 & -\omega_{y_0} \beta_1 + \omega_{x_0} \beta_2 & -\omega_{y_0} \gamma_1 + \omega_{x_0} \gamma_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{c}_{i,j})_{\substack{i \in \overline{1,3} \\ j \in \overline{1,3}}} \end{aligned} \quad (\text{F.1.2})$$

Függelék

A kijelölt szorzások végrehajtása és a szögsebesség-vektor koordinátái szerinti rendezés, valamint az (F.1.1) képletek figyelembevételével megkapjuk a $(\mathbf{c}_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,3} \\ j \in \overline{1,3}}}$

mátrix elemeit:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \alpha_1 (-\omega_{z_0} \alpha_2 + \omega_{y_0} \alpha_3) + \alpha_2 (\omega_{z_0} \alpha_1 - \omega_{x_0} \alpha_3) + \alpha_3 (-\omega_{y_0} \alpha_1 + \omega_{x_0} \alpha_2) = 0 \\
 c_{12} &= \alpha_1 (-\omega_{z_0} \beta_2 + \omega_{y_0} \beta_3) + \alpha_2 (\omega_{z_0} \beta_1 - \omega_{x_0} \beta_3) + \alpha_3 (-\omega_{y_0} \beta_1 + \omega_{x_0} \beta_2) = \\
 &= -\omega_{z_0} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) - \omega_{y_0} (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) - \omega_{x_0} (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) = \\
 &= -\omega_{x_0} \gamma_1 - \omega_{y_0} \gamma_2 - \omega_{z_0} \gamma_3 \\
 c_{13} &= \alpha_1 (-\omega_{z_0} \gamma_2 + \omega_{y_0} \gamma_3) + \alpha_2 (\omega_{z_0} \gamma_1 - \omega_{x_0} \gamma_3) + \alpha_3 (-\omega_{y_0} \gamma_1 + \omega_{x_0} \gamma_2) = \\
 &= \omega_{x_0} (\alpha_3 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_3) + \omega_{y_0} (\alpha_1 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_1) + \omega_{z_0} (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) = \\
 &= \omega_{x_0} \beta_1 + \omega_{y_0} \beta_2 + \omega_{z_0} \beta_3 \\
 c_{21} &= \beta_1 (-\omega_{z_0} \alpha_2 + \omega_{y_0} \alpha_3) + \beta_2 (\omega_{z_0} \alpha_1 - \omega_{x_0} \alpha_3) + \beta_3 (-\omega_{y_0} \alpha_1 + \omega_{x_0} \alpha_2) = \\
 &= \omega_{z_0} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) + \omega_{y_0} (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) + \omega_{x_0} (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) = \\
 &= \omega_{x_0} \gamma_1 + \omega_{y_0} \gamma_2 + \omega_{z_0} \gamma_3 = -c_{12} \\
 c_{22} &= \beta_1 (-\omega_{z_0} \beta_2 + \omega_{y_0} \beta_3) + \beta_2 (\omega_{z_0} \beta_1 - \omega_{x_0} \beta_3) + \beta_3 (-\omega_{y_0} \beta_1 + \omega_{x_0} \beta_2) = 0 \\
 c_{23} &= \beta_1 (-\omega_{z_0} \gamma_2 + \omega_{y_0} \gamma_3) + \beta_2 (\omega_{z_0} \gamma_1 - \omega_{x_0} \gamma_3) + \beta_3 (-\omega_{y_0} \gamma_1 + \omega_{x_0} \gamma_2) = \\
 &= -\omega_{x_0} (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) - \omega_{y_0} (\gamma_1 \beta_3 - \gamma_3 \beta_1) - \omega_{z_0} (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) = \\
 &= -\omega_{x_0} \alpha_1 - \omega_{y_0} \alpha_2 - \omega_{z_0} \alpha_3 \\
 c_{31} &= \gamma_1 (-\omega_{z_0} \alpha_2 + \omega_{y_0} \alpha_3) + \gamma_2 (\omega_{z_0} \alpha_1 - \omega_{x_0} \alpha_3) + \gamma_3 (-\omega_{y_0} \alpha_1 + \omega_{x_0} \alpha_2) = \\
 &= -\omega_{x_0} (\alpha_3 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_3) - \omega_{y_0} (\alpha_1 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_1) - \omega_{z_0} (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) = \\
 &= -\omega_{x_0} \beta_1 - \omega_{y_0} \beta_2 - \omega_{z_0} \beta_3 = -c_{13} \\
 c_{32} &= \gamma_1 (-\omega_{z_0} \beta_2 + \omega_{y_0} \beta_3) + \gamma_2 (\omega_{z_0} \beta_1 - \omega_{x_0} \beta_3) + \gamma_3 (-\omega_{y_0} \beta_1 + \omega_{x_0} \beta_2) = \\
 &= \omega_{x_0} (\beta_2 \gamma_3 - \beta_3 \gamma_2) + \omega_{y_0} (\alpha_1 \gamma_3 - \alpha_3 \gamma_1) + \omega_{z_0} (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) = \\
 &= \omega_{x_0} \alpha_1 + \omega_{y_0} \alpha_2 + \omega_{z_0} \alpha_3 = -c_{23} \\
 c_{33} &= \gamma_1 (-\omega_{z_0} \gamma_2 + \omega_{y_0} \gamma_3) + \gamma_2 (\omega_{z_0} \gamma_1 - \omega_{x_0} \gamma_3) + \gamma_3 (-\omega_{y_0} \gamma_1 + \omega_{x_0} \gamma_2) = 0
 \end{aligned}$$

(F.1.3)

A kapott eredmény szerint ferdeszimmetrikus a $(\mathbf{c}_{ij})_{\substack{i \in \overline{1,3} \\ j \in \overline{1,3}}}$ mátrix. Nem nehéz ellenőrizni, hogy $\mathbf{c}_{ij}, i \neq j$ elemei megegyeznek az $\underline{\omega}_1 = \mathbf{L}_{10} \underline{\omega}_0$ egyenlettel számított szorzat elemeivel. Ez pedig annak igazolása, hogy valóban fennáll az $\tilde{\omega}_1 = \mathbf{L}_{10} \tilde{\omega}_0 \mathbf{L}_{01}$ egyenlet.

Appendix

Pillanatnyi forgástengely, pillanatnyi csavartengely – elemi mozgások

Tételezzük fel, hogy a vizsgálat tárgyát képező merev test szabad mozgást végez, és hogy ismerjük a test egy tetszőlegesen kiragadott C pontjának $\vec{v}_C$ sebességét és a merev test $\vec{\omega}$ szögsebességét. A továbbiakban a szögsebességvektort egyelőre a C ponthoz kötöttnek tekintjük, és azt is feltételezzük, hogy a sebességvektor nem párhuzamos az $\vec{\omega}$ szögsebesség-vektorral. Következésképp az felbontható egy, a szögsebességgel párhuzamos, $\vec{v}_{C\parallel}$ és egy arra merőleges $\vec{v}_{C\perp}$ összetevőre:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C\parallel} + \vec{v}_{C\perp} \quad (\text{A.1})$$

Jelölje $\vec{e}_\omega$ az $\vec{\omega}$ irányú egységvektort:

$$\vec{e}_\omega = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}, \quad \omega = |\vec{\omega}| \quad (\text{A.2})$$

Ennek birtokában elemi geometriai megfontolásokból azonnal adódik, hogy

$$\vec{v}_{C\parallel} = (\vec{v}_C \cdot \vec{e}_\omega) \vec{e}_\omega \quad (\text{A.3})$$

amivel a $\vec{v}_C$ sebességvektor (A.1) felbontásából

$$\vec{v}_{C\perp} = \vec{v}_C - \vec{v}_{C\parallel} = \vec{v}_C - (\vec{v}_C \cdot \vec{e}_\omega) \vec{e}_\omega. \quad (\text{A.4})$$

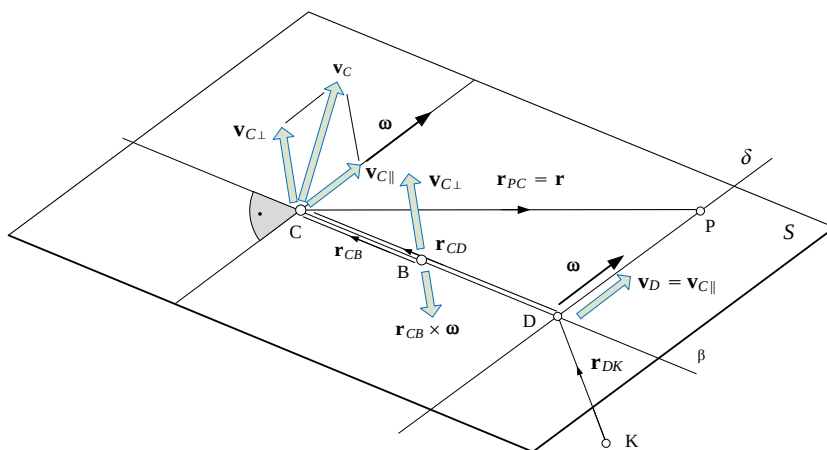
Ez a képlet tovább alakítható, ha figyelembe vesszük, hogy a kétszeres vektorzorzat kifejtési tétele szerint

$$\vec{e}_\omega \times (\vec{v}_C \times \vec{e}_\omega) = \underbrace{(\vec{e}_\omega \cdot \vec{e}_\omega)}_1 \vec{v}_C - (\vec{v}_C \cdot \vec{e}_\omega) \vec{e}_\omega \quad (\text{A.5})$$

Az utóbbi két képlet egybevetéséből az $\vec{e}_\omega$ egységvektor (A.2) alatti értelmezését is kihasználva

$$\vec{v}_{C\perp} = \vec{e}_\omega \times (\vec{v}_C \times \vec{e}_\omega) = \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times (\vec{v}_C \times \vec{\omega}) \quad (\text{A.6})$$

a C pont sebességének $\vec{\omega}$ -ra merőleges összetevője.



Az A1. ábra többek között szemlélteti a merev test egy belső anyagi S síkját – ez együtt mozog a testtel. Magát az S síkot egyrésztől a C ponthoz kötöttnek gondolt $\vec{\omega}$ szögsebességvektor mint a sík egy tartóegyenese, másrészt pedig az a körülmény határozza meg, hogy a sík feltevésünk szerint merőleges az $\vec{\omega}$ és $\vec{v}_C$ vektorok által a C pontban kifeszített síkra (a $\vec{v}_C$ vektorra). A β egyenes az S síkban fekszik, áthalad a C ponton és merőleges az $\vec{\omega}$ -ra. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a sebességvektor a β egyenes mentén. A C ponttól jobbra fekvő B pontban, visszaidézve a két pont sebessége közötti

alapösszefüggést és kihasználva az (A.1) felbontást írhatjuk, hogy

A fenti képletből kiolvasható, hogy a B pont sebességének $\vec{\omega}$ -val párhuzamos összetevője ugyanaz mint a C ponté, függetlenül a B pont helyétől a β egyenesen, hiszen az $\vec{\omega} \times \vec{r}_{BC} = \vec{r}_{CB} \times \vec{\omega}$ sebességváltozás merőleges az $\vec{\omega}$ -ra.

Az $\vec{\omega}$ -ra merőleges $\vec{v}_{C\perp}$ összetevőhöz hozzáadódik, a vele párhuzamos $\vec{r}_{CB} \times \vec{\omega}$, ami valójában a C ponthoz kötöttnek gondolt $\vec{\omega}$ nyomatéka a B pontra. Leolvasható az ábráról, amely feltünteti a B ponthoz kötötten mind a $\vec{v}_{C\perp}$ vektort, mind pedig az $\vec{r}_{CB} \times \vec{\omega}$ vektort, hogy ez a két vektor egymással ellentétes irányú.

Ha a fentiek mellett még azt is figyelembe vesszük, hogy annál nagyobb az $\vec{r}_{CB} \times \vec{\omega}$ minél távolabb vagyunk a C ponttól, akkor azonnal adódik a következtetés, hogy létezik a β egyenesen egy olyan pont, jelölje ezt D, amelyre nézve fennáll a

$$\vec{v}_{C\perp} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{DC} = \vec{v}_{C\perp} + \vec{r}_{CD} \times \vec{\omega} = 0 \quad (\text{A.9})$$

egyenlet. Következésképp

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{BC} = \vec{v}_{C\parallel} + \underbrace{\vec{v}_{C\perp} + \vec{r}_{CD} \times \vec{\omega}}_{=0} = \vec{v}_{C\parallel}, \quad (\text{A.10})$$

azaz párhuzamos egymással a D ponthoz kötöttnek gondolt $\vec{\omega}$ és a D pont $\vec{v}_D = \vec{v}_{C\parallel}$ sebessége. Az ábra ennek megfelelően tünteti fel a D pontban a $\vec{v}_D = \vec{v}_{C\parallel}$ sebességvektort, valamint az $\vec{\omega}$ szögsebességvektort.

A D pont helye az (A.6) és (A.9) képletek egybevetése alapján határozható meg. Elemi átalakításokkal kapjuk az (A.6)-ból, hogy

$$\vec{v}_{C\perp} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{DC} = \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times (\vec{v}_C \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times \vec{r}_{DC} = \vec{\omega} \times \left(\vec{r}_{DC} - \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_C}{\omega^2} \right) = 0 \quad (\text{A.11})$$

(az előjelváltást a második vektoriális szorzat sorrendcseréje okozta). A második sorban álló vektorszorzat két tényezője sosem lehet párhuzamos, hiszen a különbségben szereplő mindkét vektor merőleges az $\vec{\omega}$ -ra. Következésképpen csak akkor kapunk zérus eredményt, ha

$$\vec{r}_{DC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_C}{\omega^2}. \quad (\text{A.12})$$

A δ egyenes, értelmezése szerint, a D ponton áthaladó és az $\vec{\omega}$ vektorral párhuzamos egyenes. Mivel az $\vec{r}_{DC}$ merőleges az $\vec{\omega}$ -ra – és így a δ egyenesre is –, az $\vec{r}_{DC}$ vektor a δ egyenes C ponthoz legközelebb fekvő D pontjának a helyvektora – lásd az A1. ábrát.

Határozzuk most meg a sebességet a δ egyenes tetszőleges P pontjában. A két pont sebessége közötti (A.7) összefüggés értelemszerű alkalmazásával írható, hogy

$$\vec{v}_P = \vec{v}_D + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}_{PD}}_{\text{párhuzamosak, zérus}} = \vec{v}_D = \vec{v}_{C\parallel}, \quad (\text{A.13})$$

ami azt jelenti hogy a δ egyenes tetszőleges P pontjában állandó, $\vec{v}_P = \vec{v}_{C\parallel}$ értékű és az $\vec{\omega}$ vektorral párhuzamos a sebességvektor. Másként fogalmazva:

a δ egyenes azon pontok mértani helye, ahol párhuzamos egymással az egyenes mentén egyébként állandó sebességvektor és a szögsebességvektor, vagy

a δ egyenes azon pontok mértani helye, ahol zérus a sebességvektor szögsebességvektorra merőleges összetevője.

A δ egyenes egyenlete kétféleképpen is felírható.

Appendix

Egyrészt az ábra alapján azonnal felírható paraméteres alakban a P pont C-re vonatkozó helyvektora, ha figyelembe vesszük, hogy az $\vec{r}_{PD}$ vektor párhuzamos az $\vec{\omega}$ -ral és így mindig megadható az $\vec{r}_{PD} = \lambda \vec{\omega}$ alakban, ahol a λ alkalmas skalár-paraméter. Ezt kihasználva írható, hogy $\vec{r}_{PC} = \vec{r} = \vec{r}_{DC} + \vec{r}_{PD}$ azaz

$$\vec{r} = \vec{r}_{DC} + \lambda \vec{\omega} \quad (\text{A.14})$$

ahol az utóbbi egyenlet a δ egyenes paraméteres egyenlete – az $\vec{r}$ jelölést az egyszerűbb írásmód kedvéért vezettük be.

Másrészt írjuk fel a nyilvánvalóan zérus $\vec{v}_{P\perp}$ sebességösszetevőt. A képlet ugyanaz, mint a D pont esetére vonatkozó (A.10) összefüggés, mindössze annyi a különbség, hogy a D helyére P-t kell írni:

$$\vec{v}_{P\perp} = \vec{v}_{C\perp} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{PC} = \vec{v}_{C\perp} + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0. \quad (\text{A.15})$$

Innen az (A.11)-re vezető gondolatmenet átalakításának lépéseivel kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times (\vec{v}_C \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \left(\vec{r} - \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_C}{\omega^2} \right) = 0, \quad (\text{A.16})$$

vagy ami tekintettel a (A.11)-re ugyanaz, hogy

$$\vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_{DC}) = 0. \quad (\text{A.17})$$

A kapott eredmény a δ egyenes vektoregyenlete. Azt a nyilvánvaló feltételt fejezi ki, hogy párhuzamos egymással az $\vec{\omega}$ és a $\vec{r} - \vec{r}_{DC}$ különbség.

Legyen a K a merev test egy valamilyen rögzített pontja. A D pont adataival

$$\vec{v}_K = \vec{v}_D + \vec{r}_{DK} \times \vec{\omega} = \vec{v}_{C\parallel} + \underbrace{\vec{r}_{DK} \times \vec{\omega}}_{\perp \text{ a } \vec{v}_{C\parallel}\text{-ra}} \quad (\text{A.18})$$

a K pont sebessége. Ez azt jelenti, ha a test egy pontjában, mondjuk a C pontban, van a sebességnek a szögsebességgel párhuzamos összetevője, jelen esetben ez a $\vec{v}_{C\parallel}$, akkor a sebességvektor szögsebességgel párhuzamos összetevője minden más testpontban ugyanez az érték, hiszen a változást jelentő és a jobboldalon álló második tag merőleges rá.

A merev test adott időpillanatban végzett mozgásának jellegét, az úgynevezett pillanatnyi vagy elemi mozgást, az $\vec{\omega}$ szögsebesség, és egy adott, mondjuk a C pont $\vec{v}_C$ sebessége alapján tudjuk különböző csoportokba sorolni, ha emellett figyelembe vesszük a K pont sebességét a C pont sebességével megadó

$$\vec{v}_K = \vec{v}_{C\parallel} + \vec{v}_{C\perp} + \vec{r}_{CK} \times \vec{\omega} \quad (\text{A.19})$$

képletet és a fentebb mondottakat is.

Ha az $\vec{\omega}$ zérus és a $\vec{v}_C$ zérus, akkor az (A.19) szerint bármely más K pontban zérus a sebesség. Ez esetben *elemi nyugalomról* beszélünk.

Ha az $\vec{\omega}$ zérus de a $\vec{v}_C$ nem zérus, akkor az (A.19) szerint bármely más K pontban azonos és $\vec{v}_C$ értékű a sebesség. Ez esetben *elemi haladó mozgásról* beszélünk.

Ha az $\vec{\omega}$ és a $\vec{v}_C$ nem zérus, de $\vec{v}_{C\parallel} = 0$ (ebből azonnal következik az $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_C = \vec{\omega} \cdot (\vec{v}_{C\parallel} + \vec{v}_{C\perp}) = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_{C\perp} = 0$ egyenlet fennállása), akkor a δ egyenes valamennyi pontjában zérus a sebességvektor, vagyis a mozgás forgómozgás ezen tengely körül – ezt *elemi forgómozgásnak* nevezzük –, a δ pedig a *pillanatnyi forgástengely*.

Ha az $\vec{\omega}$, a $\vec{v}_C$ és a $\vec{v}_{C\perp}$ vektorok egyike sem zérus (ebből azonnal következik az $\vec{\omega} \cdot \vec{v}_C = \vec{\omega} \cdot (\vec{v}_{C\parallel} + \vec{v}_{C\perp}) = \vec{\omega} \cdot \vec{v}_{C\parallel} \neq 0$ egyenlet fennállása), akkor a δ egyenes valamennyi pontjában $\vec{v}_{C\parallel}$ a sebességvektor, és így egy tetszőleges K pontban is ugyanekkora a δ -val párhuzamos sebességösszetevő. A mozgás tehát forgómozgás plusz forgástengely-irányú haladó mozgás az adott pillanatban. Ezt a mozgást *elemi csavarmozgásnak* nevezzük, a δ tengely pedig a *pillanatnyi csavartengely*.

Mindez táblázatosan is összefoglalható:

1.a.	$\vec{\omega} = 0$	$\vec{v}_C = 0$	Elemi nyugalom
1.b.	$\vec{\omega} = 0$	$\vec{v}_C \neq 0$	Elemi haladó mozgás
2.a.	$\vec{\omega} \neq 0$	$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_C = 0$	Elemi forgó mozgás
2.b.	$\vec{\omega} \neq 0$	$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_C \neq 0$	Elemi csavarmozgás

Irodalom

1. Appel, P. Traité de mécanique rationnelle. Gauthier-Villars, 1955.
2. Atanasiu, M. Mecanica. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1973.
3. Bălan, Șt. Lecții complementare de mecanică. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1969.
4. Béda, Gy., Bezák, A. Kinematika és Dinamika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
5. Béda, Gy., Stépán, G. Analitikus mechanika. Műegyetemi kiadó, Budapest, 2000.
6. Beer, F.P., Johnston, E. R.. Vector Mechanics for Engineers, Dynamics. McGraw-Hill, Neww York, 1984.
7. Budó, Á. Mechanika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
8. Caius, I. Mecanica teoretică. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1971.
9. Csizmadia, B., Nándori, E. (szerk.). Mechanika mérnököknek, Mozgástan. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997.
10. Csizmadia, B., Hegedűs, A. Műszaki mechanika-Többszöveges fogalomtár. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2004.
11. Falk, S. Műszaki mechanika. Műszaki Kiadó, Budapest, 1971.
12. Gyémánt, I., Papp, Gy. Elméleti mechanika feladatok. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
13. Hain, K. Applied Kinematics. McGraw-Hill, Neww York, 1967.
14. Kilcevski, N.A. Elemente de calcul tensorial și aplicațiile ei în mecanică. Editura Tehnică, București, 1956.
15. Klepp, H., Lehmann, Th. Technische Mechanik, Band I-II. Hüthig Verlag, Heidelberg, 1987
16. Kósa, Cs. Mozgó rendszerek mechanikája (Műszaki mechanika III). Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
17. Kozák, I. Szeidl, Gy. Tenzorszámítás indexes jelölésmódban. Egyetemi jegyzet. Miskolc, 2009.
18. Lampariello, G. Lezioni di meccanica razionale. 3-a ed., Editrice Vincenzo Ferrara, Messina, 1952.
19. Litvin, F. L. A fogaskerékkapcsolás elmélete. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972.
20. Magnus, K. Kreisel. Theorie und Anwendungen. Springer Verlag, 1971.
21. Magyar, B. Mechanika III. Kinematika, Kinetika, lengéstan alapjai. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986.
22. Mangeron, D., Irimiciuc, N. Mecanica rigidelor cu aplicații în inginerie, Vol. I., II., III. Editura Tehnică, București, 1978-1981.
23. Muttnyánszki, Á. Kinematika és Kinetika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.

24. Olariu, V., Sima, P. Achiriloaie, V. Mecanica tehnică. Editura Tehnică, București, 1982.
25. Onicescu, O. Mecanica. Editura Tehnică, București, 1969.
26. Ripianu, A. Mecanica solidului rigid. Editura Tehnică, București, 1973.
27. Ripianu, A. Mecanica tehnică. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
28. Sályi, I. Műszaki mechanika I. A kinematika elemei. Tankönyvkiadó, Budapest, 1964.
29. Sályi, I. Műszaki mechanika elemei. A kinematika elemei. Tankönyvkiadó, Budapest, 1970.
30. Sályi, B. Mechanika III. Kinematika-Kinetika (Egyetemi jegyzet). Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
31. Sestini, G. Lezioni di meccanica razionale. Editrice Universitaria, Firenze, 1960.
32. Stoenescu, A., Silaș, Gh. Mecanica teoretică. Editura Tehnică, București, 1957.
33. Voinaroski, R. Mecanica teoretică. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968.
34. Voinea, R., Stroe, I. Introducere în teoria sistemelor dinamice. Editura Academiei Române, București, 2000.
35. Voinea, R., Voiculescu, D., Ceașu, V. Mecanica. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
36. Voinea, R., Voiculescu, D., Simion, F.P. Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie. Editura Academiei, București, 1989.

Kinematics

Contents

This book is firstly recommended in attention of the students from the faculties of engineering, especially followers of courses of Mechatronics and Manufacturing. It may be also useful to all interested in acquiring knowledge about kinematics of the rigid body, with application in engineering.

The work presents in three chapters the basic problems of kinematics with the aim to prepare a robust basic knowledge that will be necessary by accessing special engineering matter in the semesters that will follow. The first chapter titled „Kinematics of the material point” presents the calculus of motion parameters of the point. Several geometrical applications are added to this content, referring on the calculus of the curvature of the trajectory. Poisson's formula referring on the derivative of a unit vector versus time is demonstrated for the particular case of plain motion.

Chapter II, „Kinematics of the rigid body”, enumerates the most frequent motions with immediate application in the theory of mechanisms as follows: the translation, the rotation about a fixed axis, the helical motion, the plain motion, and the spherical motion. The chapter ends with the analysis of the general motion of the rigid body.

The analysis of the motions mentioned before focuses on the study of trajectories, the repartition of velocities and accelerations. The calculus is performed using both vector and matrix method. Each item ends through the demonstration of the equivalence of matrix and vector formulas. The use of both methods was introduced with the goal of comparison, emphasizing the advantages of vector calculus due to it's simplicity in theoretical models versus the efficiency of matrix method that rises up during the practical determinations and the model building up. The facility by computing is an incontestable advantage of the matrix method.

Chapter III, „The relative motion” focuses on relative motion in both cases of the material point and the rigid body.

The mathematical models were build-up accepting the non-relativistic hypotheses and the validity of the Euclidian space- still an efficient and agreeable approximation for the present day material existence.

Finally I like to explain my trust that this book will be a useful to ensure the indispensable skills for kinematic modeling of mechanical structures and will, increase the interest of the Reader for the matrix calculus- also indispensable if building up modern mathematical models.

Contents

Foreword	9
----------------	---

CHAPTER 1. KINEMATICS OF THE MATERIAL POINT

1.1. Basic concepts	11
1.2. Kinematic parameters of the material point	12
1.2.1. Trajectory of material point	12
1.2.2. Velocity of material point	13
1.2.3. Acceleration of material point	14
1.2.4. The calculus of components of the acceleration vector	16
1.2.5. Geometric application	17
1.3. Kinematics of material point in polar coordinates	18
1.3.1. The peculiarities of the motion in polar coordinates	18
1.3.2. The velocity in polar coordinates	20
1.3.3. The acceleration in polar coordinates	21
1.3.4. The angular velocity	22

CHAPTER 2. KINEMATICS OF THE RIGID BODY

2.1. Basic concepts	23
2.2. Simple motions	24
2.2.1. The translatory motion	24
A. Vector method	24
B. Matrix method	26
2.2.2. The rotation about a fixed axis	28
A. Vector method	28
2.2.2.1. The repartition of velocities	29
2.2.2.2. The repartition of accelerations	31
B. Matrix method	34
2.2.2.3. The motion law using matrix	34
2.2.2.4. The matrix form of the velocity	36
2.2.2.5. The calculus of acceleration using matrix	38
2.3. Compound motions	40
2.3.1. The helical motion	40
A. Vector method	41
2.3.1.1. The repartition of velocities	43

2.3.1.2. The repartition of accelerations	44
B. Matrix method	47
2.3.1.3. The matrix model of the motion.....	47
2.3.1.4. The matrix form of the velocity	49
2.3.1.5. The matrix form of the acceleration	51
2.3.2. The plane motion	53
A. Vector method	55
2.3.2.1. The repartition of velocities	56
2.3.2.2. The instantaneous pole of velocities	59
2.3.2.3. The centroids of the motion.....	61
2.3.2.4. Practical applications	62
2.3.2.5. Graphic methods	64
2.3.2.6. The repartition of accelerations	66
2.3.2.7. The instantaneous pole of accelerations	67
2.3.2.8. The peculiarities of the acceleration	68
2.3.2.9. The geometric aspect of the acceleration	70
B. Matrix method	72
2.3.2.10. The repartition of velocities using matrices.....	72
2.3.2.11. The matrix form of the centroids.....	75
2.3.2.12. The reciprocal enveloping of the centroids	76
2.3.2.13. The repartition of accelerations using matrices.....	78
2.3.2.14. The instantaneous pole of accelerations	79
2.3.3. The spherical motion.....	80
2.3.3.1. Definition of the spherical motion	80
2.3.3.2. The degrees of freedom of a rigid body by spherical motion...	82
2.3.3.3. The equations of the trajectories by spherical motion	84
A. General form of equations	84
B. Discussion on trajectories using Euler's angles.....	85
C. Discussion on trajectories using rotations about the axes of coordinate-system	87
2.3.3.4. The repartition of velocities	88
A. Vector method	88
B. Matrix method	91
2.3.3.5. The fixed and the mobile axode surfaces	95
2.3.3.6. The repartition of accelerations	98
A. Vector method	98
B. Matrix method	102
2.3.3.7. The study of the pole of accelerations	104
2.3.4. The general motion	107
2.3.4.1. Definition of the general motion.....	107
2.3.4.2. The equations of the trajectory of an arbitrary point	109
A. Vector method	109
B. Matrix method	111
2.3.4.3. The repartition of velocities	113
A. Vector method	113

Contents

B. Matrix method.....	116
2.3.4.4. The existence of the instantaneous axis of rotation.....	120
2.3.4.5. The instantaneous axis of helical motion	124
2.3.4.6. The repartition of accelerations	130
A. Vector method	130
B. Matrix method.....	131
2.3.4.7. The pole of accelerations	132

CHAPTER 3. THE RELATIVE MOTION

3.1. Definition of the relative motion.....	137
3.1.1. The principle of the relative motion	137
3.1.2. The mathematic model of the relative motion.....	139
3.2. The local and the absolute derivative of a vector.....	141
3.3. The relative kinematics of the material point.....	142
3.3.1. The trajectory of the material point executing a relative motion ..	142
A. Vector method	142
B. Matrix method.....	146
3.3.2. The velocity of the material point executing a relative motion	147
A. Vector method	147
B. Matrix method.....	148
3.3.3. The acceleration of the material point by relative motion	150
A. Vector method	150
B. Matrix method.....	152
3.4. The relative kinematics of the rigid body	155
3.4.1. Peculiarities of the relative motion of a rigid body.....	155
3.4.2. The trajectories of a point on the rigid body by relative motion	156
3.4.3. The velocity of a point of the rigid body by relative motion	157
A. Vector method	157
B. Matrix method.....	159
3.4.4. The acceleration of a point of the rigid body by relative motion.....	163
A. Vector method	163
B. Matrix method.....	167
Complements.....	171
Appendix.....	173
Bibliography	179
Kinematics (Summary)	181
Kinematik (Zusammenfassung)	185
Inhalt.....	186
Cinematică (Rezumat).....	189
Cuprins	190

Kinematik

Inhalt

Dieses Buch wird erstens Studenten der Fach-Ingenieur Hochschulen angeboten, insbesondere denjenigen die Mechatronik und Maschinenbautechnologie studieren. Es kann auch für diejenigen nützlich sein die ein Interesse für gründliche Kenntnisse im Feld der Kinematik des starren Körpers mit Anwendungen in der Ingenieurpraxis aufbauen möchten.

Die drei Teile dieses Buches behandeln die Grundprobleme der Kinematik und bieten dem Studenten Grundkenntnisse erforderlich in der Verständnis der technischen Fachgebieten in höheren Studienjahren.

Der erste Abschnitt, "Kinematik des materiellen Punktes" präsentiert die Berechnungen der Bewegungsparametern des Punktes. Einige geometrische Anwendungen sind beigelegt, wie zum Beispiel die Berechnung der Krümmung einer Flachkurve. Die Ableitung der Poissonsche Formel für die Zeitabhängigkeit des Einheitsvektors im Falle der Bewegung des Punktes in der Ebene wird ebenfalls in diesem Abschnitt demonstriert.

Der zweite Abschnitt, "Kinematik des starren Körpers" führt die meist angewendete Bewegungen im Gebiet der Maschinengetriebe ein, und zwar: die Translationsbewegung, die Drehbewegung über einer festen Achse, die Schraubenbewegung, die Bewegung in der Ebene und die sphärische Bewegung.

Der Abschnitt schliesst die Analyse der allgemeinen Bewegung des starren Körpers ein. Die Analyse der oben genannten Bewegungen enthält den Studium der Bahnkurven, sowie die Verteilung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Die Berechnungen sind mit Hilfe der Vektor- und Matrixverfahrens abgeleitet. Letztendlich werden die gesammten Analysen beider Verfahrens - Vektor und Matrixverfahren – als identisch bewiesen.

Die Verwendung beider Verfahren wird angeboten um die Vor- oder Nachteile durch Vergleich beider Methoden zu erkennen. Das Vektorverfahren ist wirksamer wenn in theoretischen Ableitungen verwendet, zum Gegensatz von dem Matrixverfahren, der durch seine modularität für die rechnerische Anwendungen (Bestimmungen, Modellaufbau) empfohlen ist.

Abschnitt III stellt die relative Bewegung des materiellen Punktes und des starren Körpers dar. Alle mathematische Modellen beruhen sich auf nonrelativistische Unterlage und auf die Eigenschaften des Euklidischen Raumes - eine noch wirkende und freundliche Näherung unserer täglichen materiellen Existenz.

Zum Schluss will ich hoffen, dass der Leser für die Matrixberechnungen, die unentbehrlich für die modernen Modellentwicklung sind, ein wahres Interesse erwecken wird.

INHALT

Vorwort	9
---------------	---

1. ABSCHNITT. KINEMATIK DES MATERIELLEN PUNKTES

1.1. Grundbegriffe	11
1.2. Bewegungsparameter des Punktes	12
1.2.1. Bahnkurve des Punktes	12
1.2.2. Geschwindigkeit des Punktes	13
1.2.3. Beschleunigung des Punktes	14
1.2.4. Berechnung der Beschleunigungskomponenten	16
1.2.5. Geometrische Anwendung	17
1.3. Kinematik des Punktes in Polarkoordinaten	18
1.3.1. Einzelheiten der Bewegung in Polarkoordinaten	18
1.3.2. Geschwindigkeit des Punktes in Polarkoordinaten	20
1.3.3. Beschleunigung des Punktes in Polarkoordinaten	21
1.3.4. Vektordarstellung der Winkelgeschwindigkeit	22

2. ABSCHNITT. KINEMATIK DES STARREN KÖRPERS

2.1. Grundbegriffe	23
2.2. Einfache Bewegungen	24
2.2.1. Translationsbewegung	24
A. Vektorische Verfahren	24
B. Matrixverfahren	26
2.2.2. Drehbewegung mit fester Achse	28
A. Vektorische Verfahren	28
2.2.2.1. Verteilung der Geschwindigkeit	29
2.2.2.2. Verteilung der Beschleunigung	31
B. Matrixverfahren	34
2.2.2.3. Bewegungsgesetz im Matrixdarstellung	34
2.2.2.4. Form der Geschwindigkeit im Matrixdarstellung	36
2.2.2.5. Form der Beschleunigung im Matrixdarstellung	38
2.3. Zusammengesetzte Bewegungen	40
2.3.1. Schraubenbewegung	40

A. Vektorische Verfahren	41
2.3.1.1. Verteilung der Geschwindigkeit.....	43
2.3.1.2. Verteilung der Beschleunigung	44
B. Matrixverfahren.....	47
2.3.1.3. Matrixmodell der Schraubenbewegung.....	47
2.3.1.4. Form der Geschwindigkeit im Matrixdarstellung	49
2.3.1.5. Form der Beschleunigung im Matrixdarstellung.....	51
2.3.2. Bewegung in der Ebene.....	53
A. Vektorische Verfahren	55
2.3.2.1. Verteilung der Geschwindigkeit.....	56
2.3.2.2. Die momentane Drehachse.....	59
2.3.2.3. Zentroiden der ebene Bewegung	61
2.3.2.4. Praktische Anwendungen.....	62
2.3.2.5. Grafische Verfahrenen	64
2.3.2.6. Verteilung der Beschleunigung	66
2.3.2.7. Die momentane Beschleunigungsachse	67
2.3.2.8. Eigenschaften der Beschleunigung.....	68
2.3.2.9. Die geometrische Deutung der Beschleunigung.....	70
B. Matrixverfahren.....	72
2.3.2.10. Matrixdarstellung der Geschwindigkeitsverteilung	72
2.3.2.11. Matrixform der Zentroiden	75
2.3.2.12. Die gegenseitigen Einhüllung der Zentroiden	76
2.3.2.13. Matrixberechnung der Beschleunigungsverteilung	78
2.3.2.14. Die momentane Beschleunigungsachse.....	79
2.3.3. Die sphärische Bewegung	80
2.3.3.1. Bestimmung der sphärische Bewegung.....	80
2.3.3.2. Freiheitsgraden der sphärische Bewegung.....	82
2.3.3.3. Bahngleichungen der sphärische Bewegung.....	84
A. Allgemeine Vorstellung	84
B. Darstellung der Bahn mit Eulerische Winkeln	85
C. Darstellung der Bahn mit elementäre Drehungen um die Axen der Koordinatensystem	87
2.3.3.4. Verteilung der Geschwindigkeit.....	88
A. Vektorische Verfahren	88
B. Matrixverfahren.....	91
2.3.3.5. Axoiden.....	95
2.3.3.6. Verteilung der Beschleunigung	98
A. Vektorische Verfahren	98
B. Matrixverfahren.....	102
2.3.3.7. Analyse der momentaner Beschleunigungsachse	104
2.3.4. Die verallgemeinerte Bewegung	107
2.3.4.1. Deutung der Bewegung.....	107
2.3.4.2. Bahngleichungen des bestimmten Punktes	109
A. Vektorische Verfahren	109
B. Matrixverfahren.....	111

2.3.4.3. Verteilung der Geschwindigkeit.....	113
A. Vektorische Verfahren	113
B. Matrixverfahren.....	116
2.3.4.4. Bedingung den Wesen der momentane Drehachse	120
2.3.4.5. Die momentane Schraubenachse	124
2.3.4.6. Verteilung der Beschleunigung	130
A. Vektorische Verfahren	130
B. Matrixverfahren.....	131
2.3.4.7. Die momentane Beschleunigungsachse	132

3. ABSCHNITT. DIE RELATIVE BEWEGUNG

3.1. Deutung der relative Bewegung	137
3.1.1. Das Prinzip der relative Bewegung.....	137
3.1.2. Die mathematische Modell der relative Bewegung.....	139
3.2. Der Absolute und Ortliche Abgeleiteter einer Vektor	141
3.3. Der relative Kinematik des materiellen Punktes.....	142
3.3.1. Bahn des Punktes im Relativbewegung	142
A. Vektorische Verfahren	142
B. Matrixverfahren.....	146
3.3.2. Geschwindigkeit des Punktes im Relativbewegung	147
A. Vektorische Verfahren	147
B. Matrixverfahren.....	148
3.3.3. Beschleunigung des Punktes im Relativbewegung	150
A. Vektorische Verfahren	150
B. Matrixverfahren.....	152
3.4. Der relative Kinematik des starren Körpers.....	155
3.4.1. Einzelheiten der relative Bewegung des starren Körpers.....	155
3.4.2. Bahne des Körperpunktes im Relativbewegung.....	156
3.4.3. Geschwindigkeit des Körperpunktes im Relativbewegung	157
A. Vektorische Verfahren	157
B. Matrixverfahren.....	159
3.4.4. Die Beschleunigung des Körperpunktes im Relativbewegung	163
A. Vektorische Verfahren	163
B. Matrixverfahren.....	167
Komplementen.....	171
Appendix	173
Fachlitteratur.....	179
Kinematics (Summary)	181
Contents.....	182
Kinematik (Zusammenfassung)	185
Cinematică (Rezumat)	189
Cuprins.....	190

Cinematică

Rezumat

Prezenta carte se adresează în primul rând studenților facultăților de inginerie, în special celor care urmează programele de studiu „Mecatronică” respectiv „Tehnologia construcțiilor de mașini”, dar poate fi utilă tuturor celor care doresc să dobândească cunoștințe fundamentale despre cinematica rigidului, cu aplicații în tehnică.

Lucrarea tratează, în trei capitole, problemele de bază ale cinematicii, cu propunerea pregătirii unui fundament solid de cunoștințe, în vederea accesării disciplinelor tehnice de domeniu și de specialitate, din anii superiori, care se bazează pe mecanică. Primul capitol, intitulat „Cinematica punctului material”, prezintă modalitatea de calcul al parametrilor cinematici ai punctului, adăugând, unde este cazul, și aplicații geometrice, privind calculul curburii curbei traiectorie, într-un punct dat, dacă se cunoaște legea de mișcare. Se demontrează formula lui Poisson cu privire la derivata vectorului unitar în funcție de timp, pentru cazul particular al mișcării în plan.

Capitolul II, „Cinematica solidului rigid”, trece în revistă cele mai întâlnite tipuri de mișcări particulare ale corpului solid, cu aplicație imediată în teoria mecanismelor: mișcarea de translație, mișcarea de rotație cu axă fixă, mișcarea elicoidală, mișcarea plan-paralelă și mișcarea de rotație cu punct fix. Prezentarea se încheie prin analiza mișcării generale a rigidului.

Problemele care se pun la analiza acestor mișcări vizează analiza traiectoriilor, distribuția vitezelor și cea a accelerațiilor. Analiza este efectuată atât pe cale vectorială, cât și matriceal, calculul terminându-se de fiecare dată prin demonstrația identității relațiilor vectoriale cu cele matriceale. S-a urmărit utilizarea simultană a celor două metode pentru a pune în evidență avantajele relațiilor vectoriale în calculele teoretice, și a celor matriceale, în determinările practice. Se accentuează posibilitățile vaste care sunt cuprinse în modul matriceal de conducere ale calculelor, mai ales posibilitatea automatizării acestora.

Capitolul III, „Mișcarea relativă”, încheie cartea, prin prezentarea detaliată a mișcării punctului, cât și al rigidului.

Relațiile de calcul și modelele matematice prezentate sunt deduse în ipoteză nerelativistă, cu acceptarea proprietăților geometrice ale spațiului euclidian – încă o eficientă și plăcută aproximație a existenței materiale cotidiene.

Îmi exprim speranța că, în urma parcurgerii celor trei capitole, cititorul va dobândi siguranța necesară modelării cinematice ale structurilor mecanice, și i se va stârni interesul pentru calculul matriceal – indispensabil în abordarea modernă a modelelor matematice.