

VILLAMOS MOZDONYOK HAJTÓMŰVÉNEK DYNAMIKUS IGÉNYBEVÉTELE KERÉKCSÚSZÁS KÖVETKEZTÉBEN.

† KANDÓ KÁLMÁN lev. tagtól.*

Mindaddig, amíg a kerekek csúszás nélkül gördülnek a síneken, lényegesen nagyobb erő a hajtóműben nem léphet fel, mint amennyi a kerekek és a sínek közötti surlódás legyőzésére szükséges. Az a különbség, amivel a hajtómű által a kerekeknek átadott erő a kerék és sín közötti surlódást túlhaladhatja, a kerekek megcsúszása előtt csak néhány százalék; a *kerekek megcsúszása után azonban elméletileg korlátlanul, a gyakorlatban valamelyik alkatrész töréséig, fokozódhatnak.*

Amint a továbbiakban látni fogjuk, ezek a *dynamikus túlerők lengések kíséretében lépnek fel és a lengés amplitudójával nőnek.*

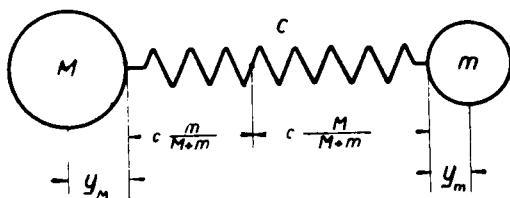
A motor forgó tömege a kerekek forgó tömegével a hajtómű révén rugalmas kapcsolatban van. Tehát ezek a tömegek egymáshoz képest lengésbe jöhetnek. A szabad lengés frekvenciája

* Előterjesztette HOOR TEMPIS MÓRIC r. t., aki a hátrahagyott értekezést az elhunyt szerző sógorától dr. PÖSCH GYULA úrtól, 1937. tavaszán vette át előterjesztés céljából.

KANDÓ KÁLMÁN lev. tag az értekezést már 1930 őszén fejezte be és székfoglalónak szánta. 1931. évi január 13-án váratlanul bekövetkezett halála óta a család — nem tudva azt, hogy az értekezést tagtársunk halála után is lehet az Akadémia színe elé terjeszteni — a hagyatéki tárgyak között őrizte az értekezést.

Az értekezés tárgya ma is korszerű, a levezetett eredmények újdonságukból és jelentőségükből most — hat és fél év múltán — semmit sem veszítettek.

$f = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{M+m}{Mmc}}$ lengés percenként, ahol M a motor forgó tömege, m a kerekeké (mindkettő a forgattyú sugárja vonatkoztatva), c m/kg pedig a hajtómű rugalmassága (a hajtómű hosszváltozása méterben egy kg erő hatása alatt, a forgattyú körön mérve). Ez a képlet nem veszi tekintetbe a lengést csillapító erők befolyását, azért a valóságnál valamivel nagyobb értékeket ad, ha a csillapítás nem elhanyagolható. A vizsgált esetekben azonban rendesen beérhetjük azzal a pontossággal, amit ez a képlet nyújt. Az igazolása az ismert $f = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{1}{Mc}}$ képletre való visszavezetéssel a következő módon történhetik: Lengés következtében a két tömeg közös tömegközéppontja nem változtatja a helyét, tehát lengési elongációik y_M és y_m állandóan a tömegekkel fordított arányban vannak, $\frac{y_M}{y_m} = \frac{m}{M}$ és így a hajtóműnek (az ábrán c rugó által jelképezve) egy pontja állandóan



1. ábra.

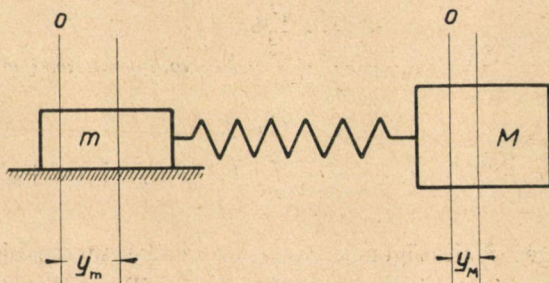
nyugalomban marad. A hajtóműnek ezen pont által elválasztott két részének a rugalmassága az elongációkkal van egyenes arányban, tehát az M felőli rész rugalmassága $c \frac{m}{M+m}$; az m felőli pedig $c \frac{M}{M+m}$. Mivel a nyugalomban levő pontot úgy is tekinthetjük, mintha az egy végtelen nagy tömeghez volna kötve, f fenti képletébe akár M -et és $c \frac{m}{M+m}$ -et, akár m -et és $c \frac{M}{M+m}$ -et helyettesítve, megkapjuk a két tömeg közös lengési frekvenciáját $f = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{M+m}{Mmc}}$. A továbbiakban a lengési frekvencia — f — helyett a képletek egyszerűsítése végett a lengési szög sebességét

$\frac{\pi}{30} f = \omega = \sqrt{\frac{M+m}{Mmc}}$ vezetjük be. Addig, amíg a kerek a síneken nem csúsznak, a lengési szögsebesség kicsiny, mert a kerek tömege a kerék-sín tapadás következtében a mozdony egész tömegével merev kapcsolatban van. A szekrény és a kerékgagyak rugalmassága t. i. a hajtómű rugalmassága mellett elhanyagolható, viszont a mozdony kapcsolata a vonattal a vonóhorog és az ütközők rugói következtében olyan laza, hogy a vonat tömege ezekben a lengésekben már nem vesz részt. A lengési szögsebességet tehát úgy számíthatjuk, mintha a kerek tömege m a mozdony egész tömegével M_1 megnőtt volna. A szögsebesség ebben az esetben

$$\omega' = \sqrt{\frac{M+m+M_1}{M(m+M_1)c}}$$

lesz.

Ha az időt a két különböző szögsebességű lengési szakasz kezdetétől, tehát a kerécsúszás kezdetétől, illetőleg annak meg-



2. ábra.

szüntétől számítjuk, az M és m , illetőleg $M+m$ tömegek lengését a következő képletek adják az idő függvényében:

A tömegek elmozdulása (lásd 2. ábrát).

$$y_M = y_0 + v_0 t + \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m} \frac{t^2}{2} + P_0 c \frac{m}{M+m} + A_M \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

$$y_m = y_0 + v_0 t + \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m} \frac{t^2}{2} - P_0 c \frac{M}{M+m} - A_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

P a motor által kifejtett erő,

P_{cs} a kerekek megcsúszásához szükséges erő,

$\frac{P_{cs}}{z}$ a surlódási erő kerékcúszás közben,

P_0 a hajtóműben fellépő erők algebrai középértéke, t. i. az az erő, amely akkor lépne fel, ha lengés nem volna.

Mind a négy erő a forgattyú sugárja van vonatkoztatva.

P_0c a hajtómű hosszváltozása a P_0 erő hatása alatt.

y_0 ; v_0 az M és m tömegek közös tömegközéppontjának kezdeti elmozdulása és kezdeti sebessége.

$P - \frac{P_{cs}}{z}$ az az állandó gyorsulás, amivel $P - \frac{P_{cs}}{z}$, a külső erők eredője az M és m tömegek közös tömegközéppontját gyorsítja.

A_M és A_m az M és m tömegek lengési amplitúdói.

A sebességek

$$v_M = \frac{dy_M}{dt} = v_0 + \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m} t - \omega A_M \sin(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

$$v_m = \frac{dy_m}{dt} = v_0 + \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m} t + \omega A_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (4)$$

A lengés fázisszögének φ -nek az értékét megszabják a megcsúszás, illetve a csúszás megszűnésének pillanatában ($t=0$) levő viszonyok.

A hajtómű hosszváltozása:

$$y_M - y_m = P_0c + (A_M + A_m) \cos \varphi = P_{cs}c. \quad (5)$$

A motor és a kerekek tömegének sebességkülönbsége:

$$v_M - v_m = -\omega (A_M + A_m) \sin \varphi = \Delta v. \quad (6)$$

A megcsúszás pillanatában:

$$A_m = \frac{M}{m} A_M$$

lévén

$$A_M + A_m = \frac{M+m}{m} A_M = \frac{M+m}{M} A_m.$$

(5)-ből és (6)-ból

$$\varphi = \arctg \left(- \frac{\Delta v}{\omega (P_{cs} - P_0) c} \right) \quad (7)$$

és

$$\Delta M + A_m = \sqrt{(P_{cs} - P_0)^2 c^2 + \left(\frac{\Delta v}{\omega} \right)^2}. \quad (8)$$

A hajtóműben fellépő erő maximuma:

$$\frac{1}{c} (y_M - y_m) = P_0 + \frac{A_M + A_m}{c}. \quad (9)$$

Ez Δv -től függ és Δv -vel együtt *tetszőleges értéket* vehet fel.

Óvatos indítás.

Vizsgáljuk előbb azt a különleges esetet, amikor a megcsúszás pillanatát megelőzőleg még nincsen lengés, tehát $\Delta v = 0$. Ez a gyakorlatban megfelel annak az esetnek, amikor megfeszült vonóhorgokkal óvatosan indítunk, amikor a motor ereje P lassan növekedve éri el a P_{cs} értéket. A megcsúszás pillanatában $t=0$, $v_0=0$, $P=P_{cs}$, tehát $\varphi=0$,

$$P_0 = P_{cs} \left[\frac{1}{z} + \frac{m}{M+m} \left(1 - \frac{1}{z} \right) \right] \text{ és } A_M + A_m = c(P_{cs} - P_0)$$

$$A_m = \frac{M}{M+m} (A_M + A_m) = \frac{P_{cs} c M}{M+m} \left[1 - \frac{1}{z} - \frac{m}{M+m} \left(1 - \frac{1}{z} \right) \right].$$

Ezeket helyettesítve, (4) egyenletbe és elrendezve, a kerek sebessége:

$$\begin{aligned} v_m &= P_{cs} \frac{1 - \frac{1}{z}}{M+m} \left(t + \omega \frac{cM^2}{M+m} \sin \omega t \right) = \\ &= P_{cs} \frac{1 - \frac{1}{z}}{M+m} \left(t + \frac{M}{\omega m} \sin \omega t \right). \end{aligned}$$

A kerékesúszás megszűnik abban a pillanatban, amikor $v_m=0$ lesz, vagyis

$$\frac{\omega t}{\sin(\omega t)} = -\frac{M}{m}. \quad (10)$$

Mivel $\frac{\omega t}{\sin(\omega t)}$ legkisebb negatív értéke -4.6 (ez $\omega t = 257\frac{1}{2}^\circ$ -nál van) fenti egyenletet $\frac{M}{m} < 4.6$ értékei már nem elégíthetik ki. Más szóval, ha a motor forgó tömege nem éri el a kerek forgó tömegének a 4.6-szorosát és óvatos indítás dacára a kerek megcsúsznak, mert P eléri P_{cs} értékét, a megcsúszás csak akkor szűnik meg, ha a motor ereje P lecsökken. Viszont, ha a csúszás nem szűnik meg, akkor a bekövetkező lengés sem okoz nagyobb erőt, mint P_{cs} , mert $y_M - y_m$ maximuma

$$P_0 + \frac{A_M + A_m}{c} = P_0 + \frac{c(P_{cs} - P_0)}{c} = P_{cs}.$$

Valamivel nagyobb erők lépnek fel a hajtóműben, ha v_m egy pillanatban 0 lesz, a csúszás rövid időre megszűnik és az $\omega = \sqrt{\frac{M+m}{Mmc}}$ szögsebességű lengés átmegy $\omega' = \sqrt{\frac{M+m+M_1}{M(m+M_1)c}}$ szögsebességű lengésre.

Vizsgáljuk meg azt a határesetet, amikor $\frac{M}{m} = 4.6$. A csúszás $t = \frac{\omega t}{\omega} = \frac{257\frac{1}{2}^\circ}{360^\circ} 2\pi = \frac{4.49}{\omega}$ mp-ig tart. Ezalatt a $\frac{P_{cs}}{z}$ erő gyorsítja az egész vonatot. A csúszás megszűnésének a pillanatában a kerek sebessége egyenlő a mozdony és a vonat együttes sebességével.¹ Ez azonban a pár század mp-ig tartó csúszás alatt olyan kis értéket ér el, hogy bátran elhanyagolhatjuk, tehát az ω' szögsebességű lengés amplitúdói az (1) és (2) képletek szerint lesznek:

$$y_M - y'_m = P'_0 c + (A'_M + A'_m) \cos(\omega' t' + \varphi') \quad (11)$$

¹ Minden erő, tömeg és sebesség a forgattyúk sugarára van vonatkoztatva. Az elmozdulások, sebességek, gyorsulások és az erők irányát pozitívnak vesszük, ha az a mozdony előrehaladásának felel meg. Így p. o., ha a mozdony előttünk balról jobbra halad, a kerek és a motor forgásának pozitív iránya megegyezik az óramutatóéval.

és a sebességei a (3) és (4) képlet szerint:

$$v'_M - v'_m = -\omega'(A'_M + A'_m) \sin(\omega't' + \varphi'). \quad (12)$$

Ha az időt ebben a lengési szakaszban a csúszás megszűnésének a pillanatától számítjuk, akkor ebben a pillanatban $t' = 0$; $t = t_0$ és $\omega t_0 + \varphi = 257\frac{1}{2}^\circ$ lévén

$$(y'_M - y'_m) = (y_M - y_m)_{t=t_0} = P_{cs}c + (A_M + A_m) \cos 257\frac{1}{2}^\circ = P_{cs}c \frac{1}{z}.$$

$$\begin{aligned} (v'_M - v'_m) &= (v_M - v_m)_{t=t_0} = -\omega (A_M + A_m) \sin 257\frac{1}{2}^\circ = \\ &= -0.8\omega P_{cs}c \left(1 - \frac{1}{z}\right). \end{aligned}$$

Ezen értékek segítségével e (11) és (12) képletből kiszámíthatjuk φ' és $A'_M + A'_m$ értékeit. Ez utóbbi

$$A'_M + A'_m = P_{cs}c \left(1 - \frac{1}{z}\right) \sqrt{1 + 0.64 \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2}$$

és a hajtóműben fellépő maximális erő a (9) képlet szerint:

$$P_{cs} + \frac{A'_M + A'_m}{c}$$

lenne, ha a kerekek újbóli megcsúszása az erő növekedésének gátat nem vetne. Most azonban a kerekkel együtt a mozdony egész tömege lengésben lévén, a lengő tömegeket gyorsító erőnek (az egész erő n -ed részének) egy kisebb része a kerekek tömegét gyorsítja és így a kerekek megcsúsztatásában nem vesz részt. Ezért a hajtóműben $\left(1 + \frac{1}{n} \frac{m}{m+M}\right) P_{cs}$ erőnek kell fellépni, hogy a kerekek újból megcsússzanak. Ha $z = 3$, $n \cong \frac{3}{2}$ -nek vehető fel. A kerekek tömege m az egész mozdony tömegének M_1 -nek csak kb. 5%-a lévén, a további számítás egyszerűsítése végett vegyük fel $\frac{M_1}{m}$ viszonyszámot állandónak, $\frac{M_1}{m} = 20$ -nak. A megcsúsztatáshoz e szerint kell

$$\left(1 + \frac{2}{3} \frac{1}{1+20}\right) P_{cs} \cong 1.03 P_{cs}$$

erő a hajtóműben. Így újbóli megcsúszás pillanatában

$$y'_M - y'_m = 1.03 P_{cs}$$

és

$$\cos(\omega' t'_0 + \varphi') = \frac{1.3 P_{cs} c - P'_0 c}{A'_M + A'_m}.$$

Mivel ebben a lengési szakaszban

$$P'_0 = P = P_{cs} \cos(\omega' t'_0 + \varphi') = \frac{0.03 P_{cs} c}{A'_M + A'_m}$$

és

$$\sin(\omega' t'_0 + \varphi') = \sqrt{1 - \left(\frac{0.03 P_{cs} c}{A'_M + A'_m} \right)^2},$$

$$\Delta v'' = -\omega'(A'_M + A'_m) \sin(\omega' t'_0 + \varphi') = -\omega' \sqrt{(A'_M + A'_m)^2 - (0.03 P_{cs} c)^2}$$

és az újbóli megcsúszás utáni lengés amplitúdói

$$\begin{aligned} A''_M + A''_m &= \sqrt{(P_{cs} - P_0)^2 c^2 + \left(\frac{\Delta v''}{\omega} \right)^2} = \\ &= P_{cs} c \left(1 - \frac{1}{z} \right) \sqrt{\left(\frac{M}{M+m} \right)^2 + \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 + 0.64 - \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{0.03}{1 - \frac{1}{z}} \right)^2}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 = \frac{\frac{M+M_1+m}{M(M_1+m)} c}{\frac{M+m}{Mmc}} = \frac{\frac{M}{m} + \frac{M_1}{m} + 1}{\left(\frac{M}{m} + 1 \right) \left(\frac{M_1}{m} + 1 \right)},$$

a határesetnek megfelelően pedig $\frac{M}{m} = 4.6$ és $\frac{M_1}{m} \cong 20$ -nak vétetett fel, $\left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 = 0.218$ és $A''_M + A''_m = 1.237 P_{cs} c \left(1 - \frac{1}{z} \right)$ lesz.

A hajtóműben a második megcsúszás után fellépő legnagyobb erő pedig:

$$P_{\max} = P_0 + \frac{A'_M + A''_m}{c} = P_{cs} \left(1.415 - \frac{0.415}{z} \right).$$

Ez már teljes mértékben létrejön, mert a kerekek a mozdonny tömegétől függetlenül lengenek és az egész tömeget gyorsító dinamikus túlerőt egyedül veszik fel. Ha a csúszás nélkül és

csúszás közben a kerekek és a sínek között fellépő súrlódási tényezők viszonyszámát $z=3$ -nak vesszük fel, ami homokozás nélkül száraz síneken körülbelül megfelel a valóságnak, a hajtóműben fellépő maximális erő:

$$P_{\max} = 1.28 P_{cs}$$

lesz.

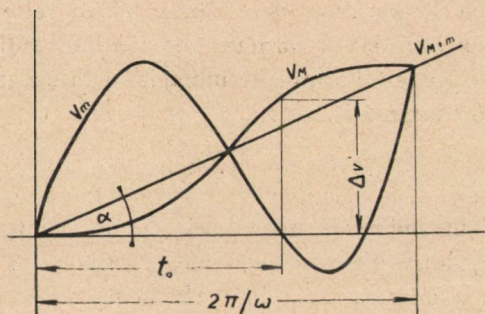
Tehát a másodszori megcsúszás után a maximális erő 28%-kal nagyobb, mint az első megcsúszás után volt. Ebben az állapotban a kerekek csúszása már nem szűnik meg többé, hacsak a motor ereje P nem csökken.

Amint az előbbieken láttuk, a motor és a keréktömegek viszonyszámának $\frac{M}{m} < 4.6$ értékei mellett az óvatos indításnál bekövetkezett kerékcúszás nem szűnik meg, mert a kerekek sebessége v_m nem lehet 0. Viszont $\frac{M}{m} > 4.6$ értékei mellett a csúszás hamarabb szűnik meg, mint a vizsgált esetben ($\frac{M}{m} = 4.6$) és így v_0 és vele együtt a lengési amplitudók és a dinamikus túlerők is kisebbek lesznek. Ezért a fent kiszámított 28%-ot abszolút maximumnak tekinthetjük, amelyet óvatos indításnál a dinamikus többleterő nem lép túl, hacsak $\frac{M}{m}$ nem olyan nagy, hogy a másodszor megindult kerékcúszás is megszűnhetik. Lásuk, mik ennek a feltételei?

Az világos, hogy $\frac{M}{m}$ -nek lényegesen nagyobbak kell lennie, mint 4.6, különben a másodszor megindult kerékcúszás nem szűnhetnék ismét meg. Az első csúszási szakasz tehát rövidebb tartamú, mint $\frac{257\frac{1}{2}^\circ}{360\omega} \cdot 2\pi = \frac{4.49}{\omega}$. A tartama $t_0 \cdot \frac{\pi}{\omega}$ és $1.43 \frac{\pi}{\omega}$ között lesz, tehát $\pi < \omega t_0 < 1.43\pi$.

A 3. ábra tünteti fel a v_M és v_m sebességeket az idő függvényében. v_{M+m} az M és m tömegek közös tömegközéppontjának a sebessége

$$v_{M+m} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m} t \quad \text{tg } \alpha = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m}.$$



3. ábra.

Az első megcsúszás után a lengések amplitúdói a (8) képlet szerint

$$A_M + A_m = \sqrt{(P_{cs} - P_0)^2 c^2 + \left(\frac{\Delta v}{\omega}\right)^2},$$

ahol $\Delta v = 0$ és $P = P_{cs}$ lévén

$$P_0 = P_{cs} \left[\frac{1}{z} + \frac{m}{M+m} \left(1 - \frac{1}{z} \right) \right]$$

és

$$P_{cs} - P_0 = P_{cs} \frac{M}{M+m} \left(1 - \frac{1}{z} \right),$$

amiből

$$A_M + A_m = P_{cs} \frac{Mc}{M+m} \left(1 - \frac{1}{z} \right). \quad (13)$$

A csúszás megszűnik, ha $v_m = 0$, ami bekövetkezik, ha

$$\frac{\omega t_0}{\sin \omega t_0} = -\frac{M}{m};^1$$

tehát

$$t_0 = -\frac{M}{m\omega} \sin \omega t_0$$

idő múlva. Ha a második lengési szakasznak az időszámítását

¹ Lásd (10) képletet.

az első csúszás megszűntétől kezdjük, ebben a pillanatban $t = t_0$ és $t' = 0$, tehát

$$(y_M - y_m)_{t=t_0} = (y'_M - y'_m)_{t'=0} \text{ és } (v_M - v_m)_{t=t_0} = (v'_M - v'_m)_{t'=0} = \Delta v'$$

és az (1), (2), (3), (4), (10) és (12) képletek szerint lesz

$$P_0 c + (A_M + A_m) \cos \omega t_0 = P'_0 c + (A'_M + A'_m) \cos \varphi'$$

és

$$-\omega (A_M + A_m) \sin \omega t_0 = -\omega' (A'_M + A'_m) \sin \varphi'$$

$$P'_0 = P = P_{cs}$$

$$P_0 - P_{cs} = -P_{cs} \frac{M}{M+m} \left(1 - \frac{1}{z}\right) = -\frac{A_M + A_m}{c} \cdot 1$$

A behelyettesítéseket elvégezve, az első kerécsúszás megszűnése utáni ω' szögsebességű lengési szakasz amplitúdóit kapjuk:

$$\begin{aligned} A'_M + A'_m &= \\ &= \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 (A_M + A_m)^2 \sin^2 \omega t_0 + [(A_M + A_m) \cos \omega t_0 + (P_0 - P_{cs})c]^2} \\ A'_M + A'_m &= (A_M + A_m) \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 \sin^2 \omega t_0 + (\cos \omega t_0 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Mivel ebben a lengési szakaszban $P'_0 = P$ és óvatos indítás-nál $P = P_{cs}$, az újbóli megcsúszás akkor fog bekövetkezni, amikor

$$\frac{y'_M - y'_m}{c} = P_{cs} = P'_0 \cdot 2$$

és

$$\cos(\omega' t' + \varphi') = 0,$$

tehát

$$\Delta v'' = v'_M - v'_m = \omega' (A'_M + A'_m).$$

A második csúszás amplitúdói a (8) képlet szerint lesznek

$$\begin{aligned} A''_M + A''_m &= \sqrt{(P_{cs} - P_0)^2 c^2 + \left(\frac{\Delta v''}{\omega}\right)^2} = \\ &= (A_M + A_m) \sqrt{1 + \sin^2 \omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 (\cos \omega t_0 - 1)^2}. \end{aligned}$$

¹ Lásd (13) képletet.

² A mozdony tömegét M_1 -et a kerék tömegéhez, m -hez képest ∞ -nek vesszük fel. Ez akkor, ha $P = P_{cs}$ alig befolyásolja az eredményt.

A kerek sebessége ebben a lengési szakaszban a (4) képlet szerint lesz

$$v_m'' = v_0'' + \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m} t'' + \frac{M\omega}{M+m} (A_M' + A_m'') \sin(\omega t'' + \varphi''),$$

ha a másodszori megcsúszás pillanatában $t'' = 0$.

$$v_0'' = \frac{M}{M+m} \Delta v''$$

és

$$\frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m} = \frac{A_m + A_M}{Mc}$$

értékeket v_m'' egyenletbe behelyettesítve lesz

$$v_m'' = (A_M + A_m) \left[\frac{Mv}{M+m} \sqrt{\sin^2 \omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 (\cos \omega t_0 - 1)^2} + \frac{t''}{Mc} + \right. \\ \left. + \frac{M\omega}{M+m} \sin(\omega t'' + \varphi'') \sqrt{1 + \sin^2 \omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 (\cos \omega t_0 - 1)^2} \right].$$

Annak a feltétele, hogy a második csúszás is megszűnjék és így egy harmadik megcsúszás is bekövetkezhessek, az, hogy $v_m'' = 0$ lehessen.

Ha $v_m'' = 0$ egyenletet ωMc -vel megszorozzuk és $(A_M + A_m) \sin(\omega t'' + \varphi'')$ -vel elosztjuk, $\omega^2 = \frac{M+m}{Mmc}$ behelyettesítjük és az egyenletet rendezzük, lesz:

$$0 = \frac{\omega t''}{\sin(\omega t'' + \varphi'')} + \frac{M}{m} \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 (\cos \omega t_0 - 1)^2}}{\sin(\omega t'' + \varphi'')} + \right. \\ \left. + \sqrt{1 + \sin^2 \omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 (\cos \omega t_0 - 1)^2} \right).$$

$\frac{M}{m}$ legkisebb értékének megfelel jó megközelítéssel

$$\frac{\omega t''}{\sin(\omega t'' + \varphi'')} \cong -4.6 - 0.98\varphi'',$$

ahol

$$\varphi'' = \arctg \left(- \sqrt{\sin^2 \omega t_0 + \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 (\cos \omega t_0 - 1)^2} \right)$$

és

$$\sin(\omega t'' + \varphi'') \cong -0.98.$$

Ha $\frac{M_1}{m} \cong 20$ -nak vesszük. (A kerekék tömege az egész mozdony tömegének 5%-a; mindkettő a forgattyú sugárja vonatkoztatva):

$$\left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 + \frac{\frac{M+M_1+m}{(M_1+m)Mc}}{\frac{M+m}{Mmc}} = \frac{21 + \frac{M}{m}}{21 + 21 \frac{M}{m}}.$$

Ha fenti egyenletbe ezeket és (10) képlet szerint $\frac{M}{m} = \frac{\omega t_0}{\sin \omega t_0}$ értéket behelyettesítjük, az már csak ωt_0 ismeretlent tartalmazza, tehát ωt_0 -nak egy értéke elégíti csak ki. Ez $\omega t_0 = 5.63 = 322^\circ 40'$, amiből $\frac{M}{m}$ legkisebb értéke, ami mellett óvatos indításnál ($P = P_{cs}$) még egy harmadik megcsúszás is bekövetkezhetik: $\frac{M}{m} = 9.3$.

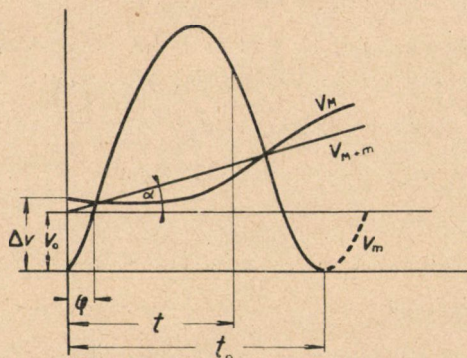
Ha $\frac{M}{m} < 9.3$, a kerekék másodszori megcsúszása már végleges. Látható tehát, hogy $\frac{M}{m}$ -nek növekvő értékei és a sorozatos megcsúszások lehetséges száma között összefüggés van. A sorozatos megcsúszások folyamán viszont az egymást követő lengési szakaszok kezdetén fellépő sebességkülönbség és vele együtt a lengések amplitudója, valamint a hajtóműben fellépő maximális erő növekszik. Az ilyen sorozatos megcsúszás, az ún. rezgő csúszás (chattering slip) ismert jelenség. Egyike azoknak a jelenségeknek, amelyek a villamos mozdony szerkesztőknek már sok gondot okoztak. A chattering slip azonban eddig csak Amerikában volt behatóbb tanulmány tárgya, ott is csak a fellépő rúderők és a lengési frekvenciák megmérésére szorítkoztak, a jelenség lényegét elméleti kutatás tárgyává nem tették. Tekintettel arra, hogy a villamos hajtóművekben a legnagyobb erők legtöbbször rezgő csúszással kapcsolatban lépnek fel, érdemes ezt a jelenséget behatóbban megvizsgálni.

Rezgő csúszás (Chattering slip).

Lássuk a sorozatos kerékmegcsúszás bekövetkezésének a feltételeit az utolsóelőtti megcsúszást követő lengések viszonyait vizsgálva, és pedig általánosságban, amikor a motor ereje P kisebb, mint amennyi a kerekek megcsúsztatásához szükséges (P_{cs}).

A kerékcúszás t. i. megindulhat $P < P_{cs}$ esetében is lökések következtében, de az is lehetséges, hogy a csúszást egy $P = P_{cs}$ erő indította meg és közben a motor ereje csökkent.

Vegyük fel P nagyságát P_{cs} -hez viszonyítva $P = \frac{P_{cs}}{K}$ -nak, ahol $1 \leq K < z$. A motor és a kerekek sebességeit v_M és v_m ebben az utolsó megcsúszást követő állapotban a 4. ábra mu-



4. ábra.

tatja. A jelzések ugyanazok, mint a 3. ábrán voltak, azzal a különbséggel, hogy $v_0 > 0$. Ha az időszámítást a megcsúszás pillanatával kezdjük, akkor *ebben a pillanatban* $t=0$ és az (5) és (6) egyenletekből, mint előbb

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left(- \frac{\Delta v}{\omega c (P_{cs} - P_0)} \right) \quad (7)$$

és

$$A_M + A_m = \sqrt{(P_{cs} - P_0)^2 c^2 + \left(\frac{\Delta v}{\omega} \right)^2} \quad (8)$$

$P = \frac{P_{cs}}{K}$ értékét a

$$P_0 = \frac{P_{cs}}{z} + \frac{m}{M+m} \left(P - \frac{P_{cs}}{z} \right)$$

egyenletbe helyettesítve lesz:

$$P_0 = P_{cs} \left(\frac{1}{z} \frac{M}{M+m} + \frac{1}{K} \frac{m}{M+m} \right),$$

a (7) egyenlet szerint

$$\Delta v = -\omega c P_{cs} \left(1 - \frac{1}{z} \frac{M}{M+m} - \frac{1}{K} \frac{m}{M+m} \right) \operatorname{tg} \varphi$$

és a (8) egyenlet szerint a lengések amplitudóit az

$$A_M + A_m = P_{cs} c \left(1 - \frac{1}{z} \frac{M}{M+m} - \frac{1}{K} \frac{m}{M+m} \right) \frac{1}{\cos \varphi}$$

egyenlet adja. Mivel

$$v_0 = \frac{M}{M+m} \Delta v$$

és

$$A_m = \frac{M}{M+m} (A_M + A_m),$$

a (4) egyenlet szerint

$$v_m = P_{cs} c \left[\frac{M\omega}{M+m} \left(1 - \frac{1}{z} \frac{M}{M+m} - \frac{1}{K} \frac{m}{M+m} \right) \operatorname{tg} \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{c(M+m)} \frac{1}{K} - \frac{1}{z} t + \frac{M\omega}{M+m} \left(1 - \frac{1}{z} \frac{M}{M+m} - \frac{1}{K} \frac{m}{M+m} \right) \frac{\sin(\omega t + \varphi)}{\cos \varphi} \right].$$

Annak a feltétele, hogy ez a lengési szakasz legyen a sorozatos megcsúszások között az utolsó, az, hogy ne lehessen $v_m = 0$. A határesetet tehát $\frac{M}{m}$ -nek az a legkisebb értéke adja, amely mellett $v_m = 0$ még lehetséges. Ebben az esetben még egy utolsó megcsúszás következik.

Ha v_m -et $\frac{M+m}{\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{z} \right) P_{cs}}$ ω -val szorozzuk, $\omega^2 = \frac{M+m}{Mmc}$ be-

helyettesítése után

$$v_m \frac{(M+m)\omega}{\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{z}\right) P_{cs}} = - \left(\frac{M}{m} + 1\right) \frac{1 - \frac{1}{z} \frac{\frac{M}{m}}{\frac{M}{m} + 1} - \frac{1}{K} \frac{1}{\frac{M}{m} + 1}}{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}} \operatorname{tg} \varphi +$$

$$+ \omega t_0 + \left(\frac{M}{m} + 1\right) \frac{1 - \frac{1}{z} \frac{\frac{M}{m}}{\frac{M}{m} + 1} - \frac{1}{K} \frac{1}{\frac{M}{m} + 1}}{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}} \frac{\sin(\omega t_0 + \varphi)}{\cos \varphi} = 0.$$

Amint később látni fogjuk

$$\left(\frac{M}{m} + 1\right) \frac{1 - \frac{1}{z} \frac{\frac{M}{m}}{\frac{M}{m} + 1} - \frac{1}{K} \frac{1}{\frac{M}{m} + 1}}{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}} = \frac{1 + \frac{M}{m} - \frac{1}{z} \frac{M}{m} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}}$$

-nek, mint K , z és $\frac{M}{m}$ függvényének külön jelentősége van, azért az írás egyszerűsítése végett jelöljük Φ -vel.

$$\Phi = \frac{1 + \frac{M}{m} - \frac{1}{z} \frac{M}{m} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}}. \quad (14)$$

Tehát lesz

$$v_m \frac{(M+m)\omega}{\left(\frac{1}{K} - \frac{1}{z}\right) P_{cs}} = - \Phi \operatorname{tg} \varphi + \omega t_0 + \Phi \frac{\sin(\omega t_0 + \varphi)}{\cos \varphi} = 0$$

és

$$\Phi = \frac{\omega t_0}{\sin(\omega t_0 + \varphi)} \frac{\cos \varphi}{\frac{\sin \varphi}{\sin(\omega t_0 + \varphi)} - 1}. \quad (15)$$

Φ -nek és vele együtt $\frac{M}{m}$ -nek az a legkisebb értéke, amely adott φ és K értékek mellett $v_m=0$ egyenletet még kielégíti, $\frac{d\Phi}{d(\omega t_0)}=0$ -nak felelnek meg, amiből

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sin \omega t_0 - \omega t_0 \cos \omega' t_0}{1 - \omega t_0 \sin \omega t_0 - \cos \omega t_0}. \quad (16)$$

A (14) egyenlet megadja Φ -t $\frac{M}{m}$, K és z függvényében, a (15) egyenlet a Φ -t φ és ωt_0 függvényében, a (16) egyenlet pedig φ -t ωt_0 függvényében adja meg.

Ezek azok a határértékek, amelyek mellett $v_m=0$ még lehetséges, tehát még egy utolsó megcsúszás következhetik.

Lássuk mik lesznek a lengések amplitúdói és milyen dinamikus túlerőket okoznak azok a hajtóműben az utolsó megcsúszás után.

Az utolsóelőtti megcsúszás megszűnésének a pillanatában tehát a következő, ω' szögsebességű csúszásmentes lengési szakasz kezdetén lesz

$$\begin{aligned} (y_M - y_m)_{t=t_0} &= (y'_M - y'_m)_{t'=0} = P_0 c + (A_M + A_m) \cos(\omega t_0 + \varphi) = \\ &= P'_0 c + (A'_M + A'_m) \cos \varphi' \\ (v_M - v_m)_{t=t_0} &= (v'_M - v'_m)_{t'=0} = -\omega (A_M + A_m) \sin(\omega t_0 + \varphi) = \Delta v' = \\ &= -\omega' (A'_M + A'_m) \sin \varphi'. \end{aligned}$$

Ezen egyenletekből az utolsóelőtti csúszás megszűntét követő lengések amplitúdói:

$$A'_M + A'_m = \sqrt{[(P_0 - P'_0)c + (A_M + A_m) \cos(\omega t_0 + \varphi)]^2 + \left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 (A_M + A_m)^2 \sin^2(\omega t_0 + \varphi)},$$

ahol

$$\begin{aligned} P_0 - P'_0 &= P_0 - P = \\ &= P_{cs} \left[\frac{1}{z} + \frac{m}{M+m} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{z} \right) - \frac{1}{K} \right] = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{K} \right) \frac{M}{M+m} P_{cs} \end{aligned}$$

és az előbbieket szerint

$$A_M + A_m = \frac{P_{cs} c}{\frac{M}{m} + 1} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{z} \right) \frac{\Phi}{\cos \varphi}.$$

Ezeket behelyettesítve $A_M + A'_m$ egyenletébe, lesz

$$A_M + A'_m = \\ = P_{cs} c \frac{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}}{\frac{M}{m} + 1} \sqrt{\left(\frac{\Phi \cos(\omega t_0 + \varphi)}{\cos \varphi} - \frac{M}{m} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^2 \frac{\Phi^2 \sin^2(\omega t_0 + \varphi)}{\cos^2 \varphi}}.$$

A kerekek újbóli, mármost utolsó megcsúszása bekövetkezik, amikor

$$y'_M - y'_m = P'_0 c + (A'_M + A'_m) \cos(\omega' t'_0 + \varphi') = 1.03 P_{cs} c.$$

$$\text{Mivel } P'_0 = \frac{P_{cs}}{K}$$

$$\cos(\omega' t'_0 + \varphi') = \frac{P_{cs} c \left(1.03 - \frac{1}{K} \right)}{A'_M + A'_m}$$

és

$$\sin(\omega' t'_0 + \varphi') = \sqrt{1 - \left(\frac{P_{cs} c \left(1.03 - \frac{1}{K} \right)}{A'_M + A'_m} \right)^2}.$$

Ebben a pillanatban

$$\Delta v'' = (v'_M - v'_m)_{t'=t'_0} = -\omega' (A'_M + A'_m) \sin(\omega' t'_0 + \varphi') = \\ = -\omega' \sqrt{(A'_M + A'_m)^2 - \left[P_{cs} c \left(1.03 - \frac{1}{K} \right) \right]^2}.$$

Az utolsó megcsúszást követő lengések amplitúdói a 8. egyenlet szerint lesznek.

$$A''_M + A''_m = \sqrt{(P_{cs} - P_0)^2 c^2 + \left(\frac{\Delta v''}{\omega} \right)^2}$$

Az írás egyszerűsítése végett legyen

$$B = \left(\frac{A'_M + A'_m}{P_{cs} c} \right)^2 = \\ = \left(\frac{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}}{\frac{M}{m} + 1} \right)^2 \left[\left(\frac{\Phi \cos(\omega t_0 + \varphi)}{\cos \varphi} - \frac{M}{m} \right)^2 + \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \frac{\Phi^2 \sin^2(\omega t_0 + \varphi)}{\cos^2 \varphi} \right]$$

és

$$A''_M + A''_m = P_{cs}c \sqrt{\left(1 - \frac{P_0}{P_{cs}}\right)^2 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[B - \left(1,03 - \frac{1}{K}\right)^2\right]}.$$

A hajtóműben az utolsó megcsúszás után fellépő legnagyobb erő lesz

$$P_{\max} = P_0 + \frac{A''_M + A''_m}{c}$$

és

$$\frac{P_{\max}}{c} = \frac{P_0}{P_{cs}} + \sqrt{\left(1 - \frac{P_0}{P_{cs}}\right)^2 + \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 \left[B - \left(1,03 - \frac{1}{K}\right)^2\right]}, \quad (17)$$

ahol

$$\frac{P_0}{P_{cs}} = \frac{1}{z} + \frac{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}}{\frac{M}{m} + 1} \quad \text{és} \quad \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 = \frac{21 + \frac{M}{m}}{21 + 21 \frac{M}{m}}.$$

A 17. képlet használatát megkönnyíti az 5-ik számú

ábra, mely a $\Phi = \frac{1 + \frac{M}{m} - \frac{1}{z} \frac{M}{m} - \frac{1}{K}}{\frac{1}{K} - \frac{1}{z}}$ -nek a (15) és (16)

egyenletek segítségével kiszámított

$$f(\Phi) = \frac{\Phi \cos(\omega t_0 + \varphi)}{\cos \varphi} \quad \text{és} \quad f_1(\Phi) = \frac{\Phi^2 \sin^2(\omega t_0 + \varphi)}{\cos^2 \varphi}$$

értékeit adja.

Hozzávetőleges számítás alapjául felvehető $z = 3$ -nak, ami száraz sineken homokozás nélkül az álló és a csúszó súrlódási tényező viszonzyszámának jó átlagos értéke. A 6. ábrában feltüntetett diagramm $z = 3$ értékeinek megfelelő, a $\frac{P_{\max}}{P_{cs}}$ -nek (17) képlet szerint számított értékeit $\frac{1}{K}$ és $\frac{M}{m}$ függvényében adja.^{1, 2}

¹ A $\frac{P_{\max}}{P_{cs}}$ görbéknek 1 felé konvergáló részeit már nagy mértékben befolyásolja az önkényesen felvett $\frac{M}{m} = 20$ érték, azért azokat a diagramm-ban már nem tüntettük fel.

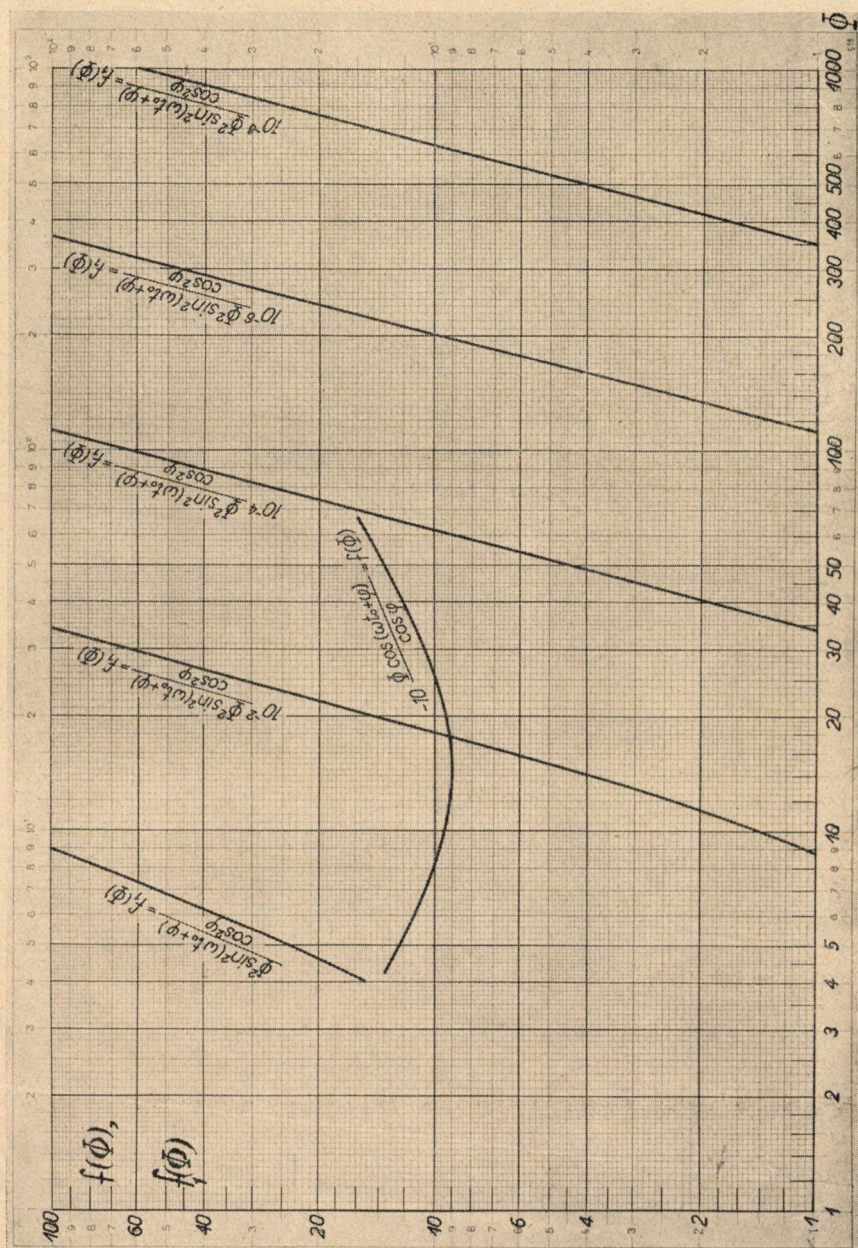
² Az 5. és 6. ábrán feltüntetett függvényértékeket br. KORÁNYI LÁSZLÓ főmérnök számította és ő készítette az ábrák eredeti vázlatait is. Szívessé-gét hálásan köszönöm.

Amint látható, a lehetséges legnagyobb erő nagyobb, ha a motor és a kerek tömegének viszonyozsáma $\frac{M}{m}$ nagyobb. Ugyancsak nagyobb a lehetséges legnagyobb erő, ha K nagyobb. Tehát arra a lát-szólag lehetetlen eredményre jutunk, hogy a *hajtóműben kerék-csúszás alkalmával fellépő igénybevétel annál nagyobb, minél kisebb a motor által kifejtett erő.*

A görbék mutatják, hogy nagy erők léphetnek fel akkor is, ha a motor és a kerek forgó tömegének viszonyozsáma $\frac{M}{m}$ kicsiny, tehát egyedül a tervezéssel, a tömegek arányának megfelelő megválasztásával a veszedelmes igénybevételek lehető-ségét teljesen nem szüntethetjük meg, csak a mértéküket csök-kenthetjük. Fontosabb az, hogy P_c -nél lényegesen kisebb motor-erőnél kerékcúszás ne következhessek be, vagyis hogy az első megcsúszás előtt a hajtóműben lengések ne legyenek és hogy a megcsúszás után azonnal ne csökkenjék a motor ereje. Ez az utóbbi rendesen csak kis mértékben következik be, mert a motor sebessége a kerékcúszás első pillanatában alig változik. A lengés-mentes indítás azonban bizonyos körülmények között csak nehe-zen kerülhető el. Az a mód, ahogy közvetlen a bekapcsolás után a motor vonóerejét szabályozzuk, lényeges befolyással van a keletkező lengések nagyságára és ezekkel a kerékcúszással kap-scsolatban fellépő dinamikus túlerőkre.

A szokásos lépcsős szabályozás mellett alig kerülhető el a hajtómű lengése a motor bekapcsolása után. Hiába vannak a szabályozónak finom fokozatai, az egyik fokozatról a másikra történő átkapcsolás pillanatában a motornak épp hátrafelé lehet elongatiója, úgy hogy a vonóerőnek óvatos fokozása mellett is minden további kapcsolással növekvő lengések léphetnek fel. Amint könnyen belátható, ezeknek a lengéseknek az amplitudója a legkedvezőtlenebb esetben, t. i. akkor, ha a következő foko-zatra való kapcsolás mindig pontosan akkor történik, amikor a motor elongatiója hátrafelé maximum, elérheti a $\frac{P}{c}$ értéket,¹ ahol

¹ Ehben az esetben is, mint eddig mindig, eltekintettünk a lengést csillapító körülményektől.



5. ábra.

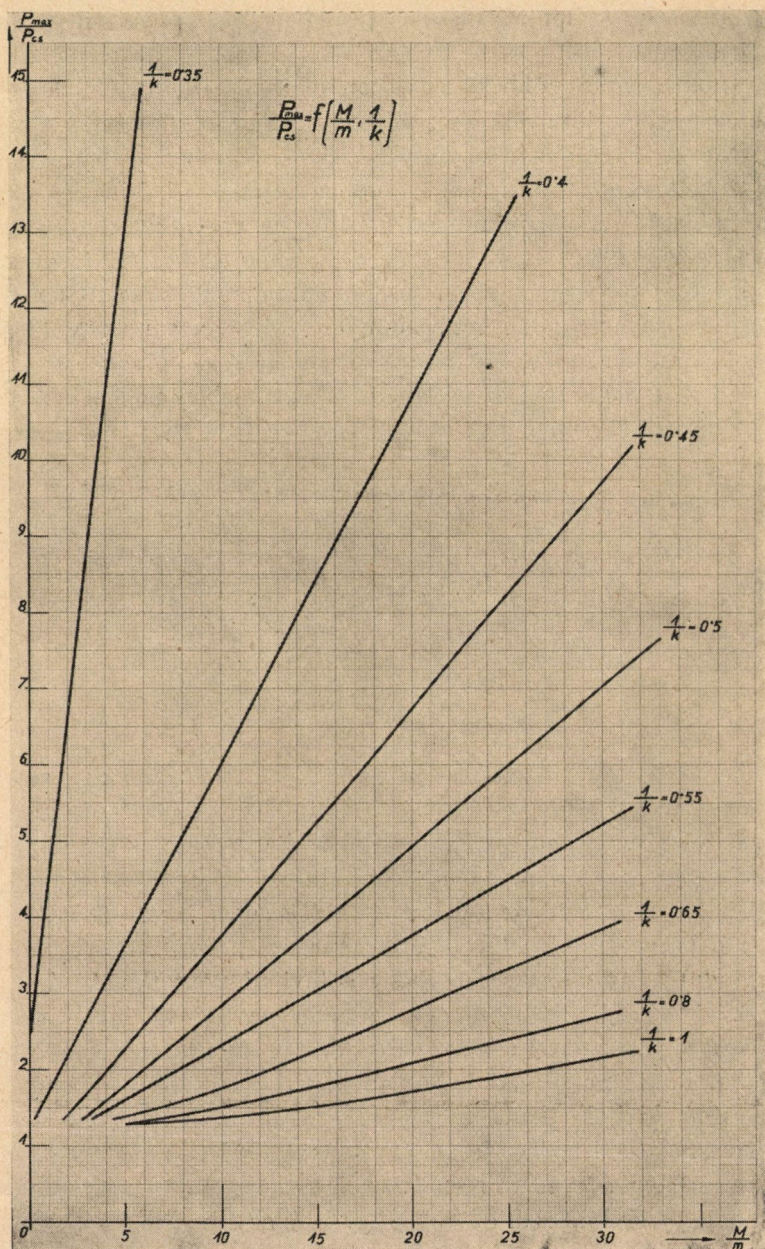
P a motor vonóereje azon a fokon, amelyre utoljára kapcsolattatott és c a hajtómű rugalmassága. Tehát a megcsúszás $P = \frac{1}{2} P_{cs}$ erőnél is bekövetkezhetik. Ennek a valószínűsége annál nagyobb, minél kevesebb szabályozó fokozaton át éri el a motor az $\frac{1}{2} P_{cs}$ erőt. Ha már az első bekapcsolással eléri, akkor elkerülhetetlen, hogy a kerécsúszás $P = \frac{1}{2} P_{cs}$ -nél következék be. Ha több fokozaton át éri el, akkor a valószínűség kisebb, de a sok indítás egyikénél, másikánál mégis csak megközelíti a lengés amplitudója a $\frac{P}{c}$ értékét.

A hajtóműben levő holtjáték a lengés gerjesztését még fokozhatja. A 7. sz. ábrán vázolt elrendezés azt az esetet mutatja, amikor a hajtóműben s játék van. M_1 , m és M mint előbb a mozdony a kerekek és a motor tömegét és c a hajtómű rugalmasságát jelképezik. A P erő által kifejtett munka $P(s + Pc + A_M)$, ahol A_M a motor lengésének az amplitudója. Ez a munka egyenlő a hajtóműben, mint rugóban, felhalmozott munkával, $\frac{(P \cdot c + A_M)^2}{2c}$ -vel. Amiből

$$A_M = P \cdot c \cdot \sqrt{1 + \frac{2s}{P \cdot c}}$$

P nagysági rendje 10^4 kg; c -é pedig 10^{-7} m/kg; tehát $P \cdot c$ nagysági rendje 10^{-3} m = 1 mm lévén, $s = 1.5$ mm összes játék a hajtóműben már megkettőzheti a lengési amplitudót. $1\frac{1}{2}$ mm, sőt annál nagyobb holt játék azonban fogaskerekes hajtóművek-nél már új állapotban is lehetséges, azért az ilyen hajtóművek-nél lépcsős szabályozásnál számítani kell azzal, hogy $P < \frac{P_{cs}}{z}$ motor erőnél is megcsúszhatnak a kerekek és az $\frac{M}{m}$ viszony-szám nagysága szerint mint legnagyobb erő a hajtóműben, esetleg P_{cs} többszöröse léphet fel.

A fogaskerék alkalmazása azonban nemcsak az elkerülhetetlen holtjátékkal, hanem azáltal is fokozza a kerécsúszás folytán fellépő dinamikus túlerőket, hogy a számításba jövő $\frac{M}{m}$

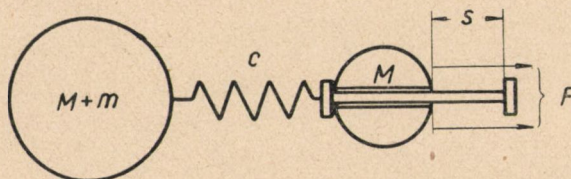


6. ábra.

tömeg-viszonyszámot a fogaskerék-áttétel viszonyának négyzete arányában növeli.

Sokkal kedvezőbbek a viszonyok vízi indítónál, ahol a motor erejének növekedése folytonos, ami egyértelmű azzal, mintha a kapcsolási fokozatok száma végtelen volna. Csak arról kell gondoskodni, hogy a motor erejének a kifejlődése úgy történjék, hogy a hajtómű hosszváltozása aperiodikusan következhesse be. Ez tekintettel arra, hogy a motor lengési frekvenciája, amikor a kerék nem csúszik, másodpercenként 10 lengés körül vagy azon felül van, könnyen elérhető, a nélkül, hogy ezzel a mozdony megindulását érezhetően késleltetnők.

Rezgő csúszás bekövetkezhetik menetközben is, ha a mozdony menetsebessége összeesik valamelyik kritikus sebességgel,



7. ábra.

amikor a hajtómű rugalmasságának a ciklikus változása, vagy valami kiviteli pontatlanságból folyó ciklikus szögsebesség ingadozás lengéseket gerjeszt. Ha ezeknek a lengéseknek az amplitúdói elég nagyok arra, hogy a hajtóműben fellépő erőt egy pillanatra P_{cs} fölé emeljék, a kerécsúszás bekövetkezhetik P_{cs} -nél lényegesen kisebb motorerő mellett is, és a rezgő csúszás megindul. Ezért szükséges, hogy a kiviteli pontatlanság és az elaszticitás ciklikus ingadozása gondos tervezéssel és a kivitel szigorú ellenőrzésével bizonyos határok alá szoríttassék. A tapasztalat t. i. azt mutatja, hogy a lengések gerjesztéséhez bizonyos nagyságú kiviteli pontatlanság kell; azon alul lengések nem keletkeznek. A lengésgerjesztő okok kiküszöbölése azonban egyedül nem elegendő, mert menetközben rezgőcsúszás lengések nélkül is megindulhat azáltal, hogy egy pillanatban a keréknyomás, vagy a kerék és sín közötti súrlódás csökken, p. o. akkor, ami-

kor a kerék nagy sebességgel áthalad egy meglazult sínkötésen.¹ Ha a tengelyek csatlórudakkal vannak összekötve, azok megakadályozzák, hogy egyes tengelyek kerekei külön megcsússzanak. Egyes hajtásnál azonban ez megtörténhetik és így menetközben egyes tengelyek időközönkénti rezgő csúszása elkerülhetetlen.

Hogy fogaskerekes egyes hajtásoknál eddig több baj nem történt, annak az a magyarázata, hogy az ilyen egyes hajtások alkatrészeit gyakorlati tapasztalatok hiányában rendesen túlmeretezik eltérően a forgattyús és csatlórudas hajtásoktól, amelyeknek a méretezésében a gőzmozdonyok hajtóműveivel szerzett tapasztalatokra támaszkodva a tervezők merészebbek szoktak lenni. Ezért épp azokkal az egyes hajtásokkal voltak bajok, ahol a méretezés «gondos számítások» alapján történt. Az ezeknél bekövetkezett ismételt csaptörésekből a számítás alapjául vett erőknél lényegesen nagyobb erők fellépésére következtethetünk. Hogy a törést okozó dinamikus túlerők milyen nagyok, azt mutatja az a körülmény, hogy amikor bizonyos hajtóműben a gyengének bizonyult alkatrészeket erősebbekkel cserélték ki, a kerekek küllői kezdtek törni.

Összefoglalva az eredményeket, megállapítható, hogy:

1. Nagy tévedés azt hinni, hogy a kerekek megcsúszása a hajtóműben fellépő erőt P_{cs} értékre korlátozza. Ellenkezőleg épp a kerékcúszás következtében léphetnek fel P_{cs} többszörösét elérő dinamikus túlerők.

2. A rezgő csúszás nem resonantia jelenség. Bekövetkezhetik a motor forgó tömegének önlengési frequentiájától függetlenül bármilyen sebességnél, még állásból való indításnál is, de kiválthatja resonantia okozta lengés is azáltal, hogy a kerékcúszást megindítja.

3. Rezgő csúszásra annál hajlamosabb a szerkezet, minél nagyobb a motor forgó tömege a kerekekéhez viszonyítva

¹ Amerikában a két sín kötéseit fél sínhosszal eltolva szokták elhelyezni. Nálunk a sínkötések rendesen egymással szemben vannak, tehát ugyanannak a tengelynek mindkét kereke egy időben fut át a sínkötésen.

$\left(\frac{M}{m} \text{ viszonyszám}\right)$ és annál nagyobbak a keletkező dinamikus túlerők, minél nagyobb az $\frac{M}{m}$ viszonyszám.

4. A rezgő csúszás nemcsak forgattyús és csatlórudas hajtóművekben léphet fel, hanem az úgynevezett egyes hajtásokban is, sőt ezek még hajlamosabbak a rezgő csúszásra, ha fogaskerek áttételük van, egyrészt a motor tömegének megnövekedett hatása, másrészt a fogaskerekeknél elkerülhetetlen holtjáték miatt.

5. Lépcsős kapcsolásnál elkerülhetetlen, hogy már a megcsúszás előtt lengések keletkezzenek és hogy így indításnál egyszer-másszor rezgő csúszás jöjjön létre. Vizindítónál ellenben helyes szerkezettel a lengésmentes indítás egyszersmindenkora biztosítható.

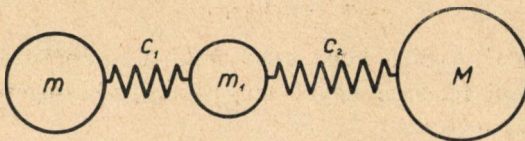
6. A menetközben fellépő rezgő csúszás a resonantiát okozó körülmények (ú. m. ciklikusan változó hajtómű elaszticitás, kiviteli pontatlanságok, stb.) kiküszöbölésével csak akkor szüntethető meg, ha több tengely van rudakkal összekapcsolva, egyes hajtásoknál azonban nem, mert ezeknél a keréknyomásnak zökkenések okozta pillanatnyi csökkenése is megindíthatja a csúszást.

Három tömegű hajtóművekben kerékcsúszás következtében fellépő erők.

Eddig olyan hajtóműveket vizsgáltunk, amelyekben a motor és a kerek tömege mellett a hajtómű tömege elhanyagolható. *Rugózott agyú fogaskerek hajtásnál* azonban — ha a nagy fogaskerek nem a jármű tengelyén, hanem előtéttengelyen van, amely a kerekkel, csatló-rudakkal, vagy elasztikus, vagy csuklós kapcsolással van összekötve — az előtét tengelyen levő fogaskerek (forgattyú ellensúly, stb.) tömege már nem hanyagolható el a kerek és a motor forgó tömege mellett. Ilyen esetben *számításba kell venni ezt a harmadik tömeget is*, amely a másik kettővel rugalmas kapcsolatban van és így azokhoz képest külön lengésbe jöhet. Az ilyen három tömegű rendszernek tehát több szabad lengési frequentája van, a szerint, hogy hol keletke-

hetnek lengési csomópontok, azaz a hajtóműnek olyan pontjai, amelyek lengés közben a helyüket nem változtatják.

A 8. sz. ábrán feltüntetett vázlat három tömegű lengő rendszert jelképez, ahol m a kerek, m_1 az előtét tengely, és M a motor forgótömege, c_1 a csatló rudak vagy a csuklós (eset-



8. ábra.

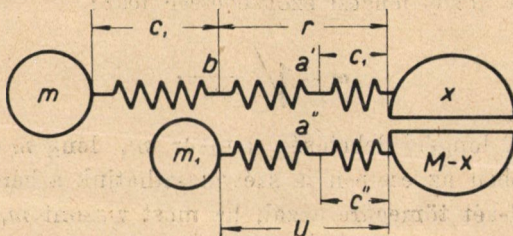
leg rugós) kapcsolás, c_2 pedig a fogaskerék-agy rugóinak az elaszticitását jelképező rugó.

A szerint, hogy mc_1 vagy Mc_2 nagyobb, a lengési csomópont m_1 -től balra vagy jobbra keletkezik és vagy m leng m_1 -el és M -el szemben, vagy M leng m_1 -el és m -el szemben. Tegyük fel az utóbbit. A lengési frequentia, vagy ennek a 2π -szerese a lengési szögsebesség: ω a következő megfontolás alapján számítható ki:

Képzeldük M -et két részre vágva, x -re és $M-x$ -re és c_2 rugót vele egyenértékű két rugóval, r -el és u -val helyettesítve (lásd a 9. sz. ábrát), aminek a feltétele, hogy

$$\frac{1}{c_2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{u} \quad (1)$$

legyen. Az u rugó $M-x$ -et m_1 -el, az r rugó pedig x -et c_1 rugóval köti össze. Így két kettős tömegű lengő rendszer keletkezik, amelyeknek a csomópontjai a' -nál és a'' -nál vannak.



9. ábra.

Annak a feltétele, hogy ennek a két rendszernek a szabad lengési szögsebessége ugyanaz legyen, az, hogy

$$xc' = (M - x)c'' \quad (2)$$

$$xc' = m_1(u - c'') \quad (3)$$

és

$$xc' = m(c_1 + r - c') \quad (4)$$

legyen. Annak pedig, hogy ezen felül a 8. ábrán feltüntetett három tömegű rendszer egyik lengési szögsebességével is meg-egyezzék, az, hogy

$$\frac{c'}{r} = \frac{c''}{u} \quad (5)$$

legyen, mert csak ebben az esetben maradhat lengés közben m_1 a c_1 rugó végével, b -vel, x , $M - x$ -el és a két csomópont a' és a'' egymással együtt. E nélkül a 8. ábrán és a 9. ábrán feltüntetett két rendszer nem volna egyenértékű.

Így öt egyenletünk van öt ismeretlennel, x , r , u , c' és c'' . Ezekből r , u , c' és c'' kiküszöbölésével kapjuk x -re mint egyedüli ismeretlenre az

$$mc_1x^2 + [(m + m_1)Mc_2 - (M + m_1)mc_1]x - mM^2c_2 = 0 \quad (6)$$

egyenletet. Ennek két gyöke közül egyik mindig vagy negatív, vagy nagyobb mint M , ami fizikai lehetetlenség, tehát csak egy lengési szögsebesség lehetséges, úgy, hogy M leng m_1 -el és m -el szemben.

x segítségével kiszámítható

$$c' = \frac{m}{x + m} \left(c_1 + c_2 \frac{M}{x} \right) \quad (7)$$

és a keresett közös lengési szögsebesség lesz:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{xc'}}. \quad (8)$$

A másik lengési lehetőség, amikor m_1 leng m -el és M -el szemben. Ebben az esetben is szétválaszthatjuk a háromtömegű rendszert két-két tömegűre azzal, ha most viszont m_1 -et vágjuk ketté (lásd a 10. sz. ábrát) x_1 -re és $m_1 - x_1$ -re.

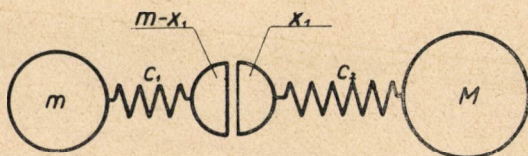
Annak a feltétele, hogy ennek a két rendszernek a lengési szögsebessége egymás között és a 8. ábrán feltüntetett három tömegű rendszer második, most keresett lengési szögsebességével megegyezzek, az, hogy

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{m+m_1-x_1}{m(m_1-x_1)c_1}} = \sqrt{\frac{M+x_1}{Mx_1c_2}} \quad (9)$$

legyen, amiből

$$(mc_1 - Mc_2)x_1^2 + [(m+m_1)Mc_2 + mM c_1 - mm_1 c_1]x_1 = mm_1 Mc_1 = 0.$$

Ennek az egyenletnek is egyik gyöke mindig vagy negatív, vagy nagyobb, mint m_1 , ami fizikai lehetetlenség, tehát ebben



10. ábra.

az esetben is csak egy lengési szögsebesség van, ω_1 , amit a 9. egyenlet ad a $0 < x_1 < m_1$ gyökkel.

Ismerve a két lehetséges szabad lengés szögsebességét, ω -t és ω_1 -et, felállíthatjuk a háromtömegű lengő rendszer egyenleteit kerékesűzés állapotában.

A három tömeg elmozdulása a t idő-pillanatban

$$y_M = Y + v_0 t + \frac{P - \frac{Pcs}{z}}{M + m_1 + m} \frac{t^2}{2} + P_{01}c_1 + P_{02}c_2 - Y_0 + A_M \cos(\omega t + \varphi) + A_{1M} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (10)$$

$$y_{m_1} = Y + v_0 t + \frac{P - \frac{Pcs}{z}}{M + m_1 + m} \frac{t^2}{2} + P_{01}c_1 - Y_0 - A_{m_1} \cos(\omega t + \varphi) - A_{1m_1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (11)$$

$$y_m = Y + v_0 t + \frac{P - \frac{Pcs}{z}}{M + m_1 + m} \frac{t^2}{2} - Y_0 - A_m \cos(\omega t + \varphi) + A_{1m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1). \quad (12)$$

Ahol P a motor ereje, P_{cs} a kerék megcsúsztatáskor szükséges erő. Y a közös tömegközéppont kezdeti elmozdulása ($t=0$ pillanatban)

$$Y = \frac{MP_{cs}(c_1+c_2)+m_1P_{cs}c_1}{M+m_1+m}$$

v_0 a három tömeg közös tömegközéppontjának kezdeti sebessége és

$$\frac{\rho - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m}$$

ugyanannak a gyorsulása.

$$P_{01} = \frac{P_{cs}}{z} + \frac{\rho - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m} m \quad (13)$$

a c_1 rugóban a lengésmentes feszültség kerékcúszás közben,

$$P_{02} = \frac{P_{cs}}{z} + \frac{\rho - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m} (m_1+m) \quad (14)$$

ugyanaz a c_2 rugóban.

Y_0 a tömegközéppont eltolódása m -hez viszonyítva a P_{01} és P_{02} erők hatása alatt

$$Y_0 = \frac{M(P_{01}c_1+P_{02}c_2)+m_1P_{01}c_1}{M+m_1+m}.$$

A_M , A_{m1} és A_m a három tömeg ω szögsebességű lengésének amplitudói. A_{1M} , A_{1m1} és A_{1m} ugyanazok ω_1 szögsebességnél.

A tömegek sebességei a t idő pillanatban:

$$v_M = \frac{dy_M}{dt} = v_0 + \frac{\rho - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m} t - \omega A_M \sin(\omega t + \varphi) - \omega_1 A_{1M} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (15)$$

$$v_{m1} = \frac{dy_{m1}}{dt} = v_0 + \frac{\rho - \frac{P_{cs}}{z}}{M+m_1+m} t + \omega A_{m1} \sin(\omega t + \varphi) + \omega_1 A_{1m1} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (16)$$

$$v_m = \frac{dy_m}{dt} = v_0 + \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M + m_1 + m} t + \omega A_m \sin(\omega t + \varphi) - \omega_1 A_{1m} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (17)$$

A gyorsulás pedig:

$$\frac{d^2 y_M}{dt^2} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M + m_1 + m} - \omega^2 A_M \cos(\omega t + \varphi) - \omega_1^2 A_{1M} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (18)$$

$$\frac{d^2 y_{m1}}{dt^2} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M + m_1 + m} + \omega^2 A_{m1} \cos(\omega t + \varphi) + \omega_1^2 A_{1m1} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (19)$$

$$\frac{d^2 y_m}{dt^2} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M + m_1 + m} + \omega^2 A_m \cos(\omega t + \varphi) - \omega_1^2 A_{1m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (20)$$

Ha az időt a kerékmegcsúszás első pillanatától számítjuk ($t=0$), a tömegek elmozdulása lesz ebben a pillanatban:

$$y_{M(t=0)} = Y + P_{01}c_1 + P_{02}c_2 - Y_0 + A_M \cos \varphi + A_{1M} \cos \varphi_1 = P_{cs}(c_1 + c_2) \quad (21)$$

$$y_{m1(t=0)} = Y + P_{cs}c_1 - Y_0 - A_{m1} \cos \varphi - A_{1m1} \cos \varphi_1 = P_{cs}c_1 \quad (22)$$

$$y_{m(t=0)} = Y - Y_0 - A_m \cos \varphi + A_{1m} \cos \varphi_1 = 0. \quad (23)$$

Ugyancsak így a gyorsulások a $t=0$ idő pillanatban:

$$\frac{d^2 y_M}{dt^2} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M + m_1 + m} - \omega^2 A_M \cos \varphi - \omega_1^2 A_{1M} \cos \varphi_1 = 0 \quad (24)$$

$$\frac{d^2 y_{m1}}{dt^2} = \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M + m_1 + m} + \omega^2 A_{m1} \cos \varphi + \omega_1^2 A_{1m1} \cos \varphi_1 = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y_m}{dt^2} &= \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M + m_1 + m} + \omega^2 A_m \cos \varphi - \omega_1^2 A_{1m} \cos \varphi_1 = \\ &= \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{m}. \end{aligned} \quad (26)$$

A 21. és 24. egyenletből:

$$A_M \cos \varphi = \frac{\omega_1^2 [P_{cs}(c_1 + c_2) - Y - P_{01}c_1 - P_{02}c_2 + Y_0] - \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M + m_1 + m}}{\omega_1^2 - \omega^2} \quad (27)$$

és

$$A_{1M} \cos \varphi = P_{cs}(c_1 - c_2) - Y - P_{cs}c_1 - P_{cs}c_2 + Y_0 - A_M \cos \varphi. \quad (28)$$

A 22. és 25. egyenletből:

$$A_{m1} \cos \varphi = \frac{\omega_1^2 [P_{cs}c_1 - Y - P_{01}c_1 + Y_0] - \frac{P - \frac{P_{cs}}{z}}{M + m_1 + m}}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad (29)$$

és

$$A_{1m1} \cos \varphi = Y + P_{01}c_1 - Y_0 - P_{cs}c_1 - A_{m1} \cos \varphi. \quad (30)$$

A 23. és 26. egyenletből:

$$A_m \cos \varphi = \frac{\omega^2 (Y_0 - Y) + \left(P - \frac{P_{cs}}{z} \right) \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M + m_1 + m} \right)}{\omega^2 - \omega_1^2} \quad (31)$$

és

$$A_{1m} \cos \varphi_1 = Y_0 - Y + A_M \cos \varphi. \quad (32)$$

A $t=0$ időpillanatban a három tömeg sebessége:

$$v_{M(t=0)} = v_0 - \omega A_M \sin \varphi - \omega_1 A_{1M} \sin \varphi_1 \quad (33)$$

$$v_{m1(t=0)} = v_0 + \omega A_{m1} \sin \varphi + \omega_1 A_{1m1} \sin \varphi_1 \quad (34)$$

$$v_{m(t=0)} = v_0 + \omega A_m \sin \varphi - \omega_1 A_{1m} \sin \varphi_1, \quad (35)$$

ahol

$$v_{m(t=0)} = 0; \quad v_0 = \frac{M v_{M(t=0)} + m_1 v_{m1(t=0)}}{M + m_1 + m}. \quad (36)$$

Ha a 27–32. egyenletekből A_M , A_{1M} , A_{m1} , A_{1m1} , A_m és A_{1m} értékeit 33., 34. és 35. egyenletekbe behelyettesítjük, négy lineáris egyenletet kapunk öt ismeretlennel: v_0 , $v_{M(t=0)}$, $v_{m1(t=0)}$, $\operatorname{tg} \varphi$ és $\operatorname{tg} \varphi_1$ számára. Ha az öt közül egy adva van, a többi négy kiszámítható a négy egyenletből.

A hajtórudakban fellépő legnagyobb erő

$$P_{\max} = P_{01} + \frac{A_m - A_{m1} + A_{1m} + A_{1m1}}{c_1},$$

a fogaskeréken pedig

$$P_{\max} = P_{02} + \frac{A_M + A_{m1} + A_{1M} + A_{1m1}}{c^2}.$$

Ha a kerékmegcsúszást közvetlenül megelőzőleg a hajtómű lengésmentes, vagyis nemcsak $v_{m(t=0)} = 0$ hanem $v_{M1(t=0)} = 0$ és $v_{m1(t=0)} = 0$, akkor $v_0 = 0$, $\operatorname{tg} \varphi = 0$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = 0$ és $\cos \varphi = \pm 1$ és $\cos \varphi_1 = \pm 1$.

A Norfolk & Western vasút 1B+B1 mozdonyain végzett mérések.

Ezek a mérések azt mutatták, hogy rezgő csúszásnál a hajtóműben fellépő legnagyobb erő a kerék kerületére vonatkoztatva eléri az adhaesiosúly 110%-át. Ha a kerék és sín közötti surlódás tényezőjét 0.3-nak vesszük fel, ez az eredmény

$\frac{P_{\max}}{P_{cs}} = 3.67$ -nek felel meg. A legnagyobb erő tehát a kerekek megcsúsztatásához szükséges erőnek a 3.67-szorosa.

Vizsgáljuk meg milyen üzemviszonyok felelnek meg ennek a maximális erőnek az alábbiakban levezetett képletek szerint.

A vizsgálat tárgyát képező mozdony hajtóműve három tömegű rendszert képez. Rugós fogaskerekekkel a motor előtét tengelyt hajt, amely forgattyúkkal és csatlórudakkal van a kerekekhez kapcsolva.

A motor forgó tömege $M = 7600$ kg
 az előtét tengelyé $m_1 = 684$ „
 a kerekéé¹ $m = 1040$ „

A csatlórudak, forgattyúk, stb
 rugalmassága $c_1 = 1.66 \cdot 10^{-8}$ m/kg
 a rugós fogaskerékagyé $c_2 = 3.7 \cdot 10^{-8}$ „

A kerekek megcsúsztatásához szükséges erő² $P_{cs} = 42000$ kg.

¹ A kerékabroncsok félig kopott állapotban vannak számítva.

² A kerék és sín közötti surl. tényező csúszás nélkül 0.3-nak, csúszásnál 0.1-nek van felvéve, tehát $z = 3$.

A fenti adatok mind a forgattyú-sugárra vannak vonatkoztatva.

A kerékcúszásnál lehetséges két lengési szögsebesség a 7. és 8. képletek szerint:

$$\omega = 128.6 \quad \omega_1 = 415.1.$$

A 27—32. képletekkel kiszámított lengési elongációk ugyancsak kerékcúszás közben

$$A_M \cos \varphi = 2.04 \cdot 10^{-4}; \quad A_{m1} \cos \varphi = 7.30 \cdot 10^{-4}; \quad A_m \cos \varphi = 10.14 \cdot 10^{-4} \\ A_{1M} \cos \varphi_1 = 0.02 \cdot 10^{-4}; \quad A_{1m1} \cos \varphi_1 = 0.87 \cdot 10^{-4}; \quad A_{1m} \cos \varphi_1 = 0.42 \cdot 10^{-4}.$$

Tekintettel a hajtóműben a fogaskerekek miatt már új állapotban is elkerülhetetlen holtjátékra, nem tehető fel, hogy a hajtómű a megcsúszás pillanatában lengésmentes és így a kerékcúszás $P=P_c$ motorerőnél indul meg. A csatlórúd fejekben új állapotban a játék egyenkint 0.036—0.9 mm. Az összes játék a fogaskerekekkel együtt az egész hajtóműben, tehát legalább 3 mm-re tehető már új állapotban.

A számítás egyszerűsítése céljából tekintsünk el az m_1 tömeg befolyásától és számítsuk $v_{M(t=0)}$ -t úgy, mintha az indítási lökés energiáját a motor tömege M venné fel.

A legkisebb motorerő P , amely s holtjáték mellett a kerekek megcsúszását előidézheti, a $P_c = P \sqrt{1 + \frac{2s}{P(c_1 + c_2)}}$ egyenletet¹ elégíti ki. Ebből

$$P = -\frac{s}{c_1 + c_2} - \sqrt{\left(\frac{s}{c_1 + c_2}\right)^2 + P_c^2}.$$

Ha $P_c = 42000$ kg, $s = 3 \cdot 10^{-3}$ m; $c_1 = 1.66 \cdot 10^{-8}$ m/kg,

$c_2 = 3.7 \cdot 10^{-8}$ m/kg, akkor $P = 14000$ kg.

Tehát a kerékcúszás ilyen körülmények között $\frac{P}{P_c} = \frac{1}{K} = \frac{1}{3}$ viszonyszám mellett is lehetséges, ha a P erőt a motor

¹ Lásd a 22. oldalon $A_M = P_c \sqrt{1 + \frac{2s}{P_c}}$ egyenletet.

már az első bekapcsolás pillanatában azonnal kifejti. Ez a körülmény maga megmagyarázza a nagy dynamikus túlerők fellépését. A két tömegű rendszerekre jellegzetes $\frac{M}{m}$ viszonyzáma helyett vehetjük a jelen esetben az ω_1 szögsebességű lengés figyelmen kívül hagyásával $\frac{A_m \cos \varphi}{A_M \cos \varphi} = \frac{10 \cdot 14}{2 \cdot 04} \cong 5$ viszonyszámot.

A 6. ábra szerint az $\frac{M}{m} = 5$ és $\frac{1}{K} = 0,4$ értékeknek $P_{\max} = 3 \cdot 67 P_{cs}$ maximális erő felel meg. Tehát már akkor is ha $P = 0 \cdot 4$. $P_{cs} = 16800$ kg motorerő mellett következik be a kerécsúszás, a megfigyelt legnagyobb erő, mely a hajtóműben felléphet: $3 \cdot 67 \cdot P_{cs} = 154000$ kg. Ez pedig, amint láttuk lehetséges, ha a motor bekapcsolása durván történik.

(A M. T. Akadémia III. osztályának 1937. ápr. 26.-án tartott üléséből.)