

A Maxwell-Cattaneo-Vernotte hővezetési modell kezdeti feltételeinek numerikus vizsgálata

Numerical investigation of initial conditions for the Maxwell-Cattaneo-Vernotte heat conduction model

SÁNDOR Zalán, MSc hallgató^{1,3}, Dr. KOVÁCS Róbert, egyetemi docens^{1,2,4}

¹Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Gépészmérnöki Kar, Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

²HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont, Részecske- és Magfizikai Intézet, Elméleti Fizika Osztály, 1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.

³sandorzalan@edu.bme.hu

⁴kovacsrobert@energia.bme.hu

Abstract

Heat conduction, the transport of thermal energy within a material, is one of the fundamental mechanisms of heat transfer. While the homogeneous case can be described adequately by the classical Fourier law, heat conduction of heterogeneous materials requires more advanced, non-Fourier models. Such descriptions are mathematically more demanding, and the presence of an inhomogeneous initial condition – such as the temperature field created by a heat-pulse experiment – adds further complexity. In this work, I investigated the Maxwell–Cattaneo–Vernotte (MCV) model for the case of an inhomogeneous initial temperature distribution. My objective was to develop numerical schemes that solve the governing partial differential equations in their original coupled system form, rather than reducing them to a single equation, as is commonly done in the literature. Although the latter approach can simplify the analysis, it may lead to a loss of information depending on the prescribed initial and boundary conditions. To assess the accuracy of the numerical solutions, I also derived an analytical reference solution using the Galerkin method, which served as a benchmark for validation. The proposed approach is readily extendable to more comprehensive models (e.g., the Guyer–Krumhansl model) and may support the future development of simulation frameworks for heat conduction in heterogeneous materials.

Keywords: non-Fourier heat conduction, numerical implementation, inhomogeneous initial condition

Kivonat

A hőközlés egyik alapvető módja a hő anyagokon belüli terjedése, azaz a hővezetés. Homogén anyagok esetén a folyamat jól leírható a Fourier-féle hővezetési modellel, heterogén anyagok vizsgálatánál azonban gyakran egy Fourier-n túli, összetettebb leírásra van szükség. Ezek a modellek matematikailag nehezebben kezelhetők, és az inhomogén kezdeti feltétel - ami például hőimpulzus-kísérletet követően kialakuló hőmérséklet-eloszlásból is adódhat - tovább növeli a feladat bonyolultságát. A munkában a Maxwell–Cattaneo–Vernotte (MCV) hővezetési modellt vizsgáltam inhomogén kezdeti hőmérséklet-eloszlás mellett. Célom olyan numerikus sémák felállítása volt, amely a leíró parciális differenciálegyenlet-rendszert eredeti formájában, rendszerként kezeli, szemben a szakirodalomban gyakran alkalmazott, egyetlen egyenletre történő átalakítással, amely ugyan egyszerűbb, de a kezdeti- és peremfeltételektől függően információvesztéssel járhat. A numerikus eredmények ellenőrzésére Galjorkin-módszerrel analitikus referencia-megoldást is előállítottam, amely összehasonlítási alapot biztosított a sémák validálásához. Az eredmények kiterjeszthetők összetettebb modellekre is (például a Guyer–Krumhansl-modell), és így később hozzájárulhatnak a heterogén anyagok hővezetését célzó szimulációs környezetek fejlesztéséhez.

Kulcsszavak: Fourier-en túli hővezetés, numerikus sémák, inhomogén kezdeti feltétel

1. BEVEZETÉS

A hővezetés mérnöki leírásában alapvető szerepet tölt be a Fourier-féle konstitutív összefüggés, amely a hőáramsűrűséget a hőmérséklet gradiensevel arányosítja, és az energiamérleggel kombinálva parabolikus

parciális differenciálegyenlethez vezet [1]. A modell kiválóan alkalmazható a mérnöki feladatokban, ugyanakkor érvényességi határainak kísérleti feltárása indokoltta tette Fourier-en túli modellek bevezetését [2, 3, 4]. Különösen heterogén anyagok esetén kapnak szerepet ezek a modellek, ahol olyan többidőskálás tranziens viselkedés jelenik meg, amelyet a Fourier-modell egyetlen időskálája nem képes megfelelően leírni [5, 6, 7, 8].

A jelen munka középpontjában a Maxwell–Cattaneo–Vernotte (MCV) modell áll, amely a Fourier-féle konstitutív egyenletet a τ relaxációs időn keresztül a hőáramsűrűség idő szerinti deriváltjával egészíti ki:

$$\tau \partial_t q(t, x) + q(t, x) = -\lambda \partial_x T(t, x), \quad (1)$$

így az energiamérleggel együtt kezelve hiperbolikus parciális differenciálegyenlethez vezet, és megfelelő paramétertartományban hullámszerű hőmérséklet-eloszlást is eredményezhet [9, 10]. Az egyenletben t az időt, x a helykoordinátát, λ a hővezetési tényezőt, q a felületre fajlagosított hőáramsűrűséget, T pedig a hőmérsékletet jelöli, a ∂_Y jelölést pedig az Y változó szerinti parciális deriváltra vezetem be.

Ugyan az MCV-modell önmagában még nem alkalmas heterogén anyagok többidőskálás viselkedésének teljes leírására, de a Fourier-modell legegyszerűbb olyan kiterjesztése, amelynél már megmutatkozik a konstitutív egyenlet és az energiamérleg rendszerszintű kezelésének jelentősége. Amennyiben a rendszert egyetlen, hőmérsékletre vagy hőáramra rendezett egyenletre redukáljuk, és ennek megfelelően a kezdeti feltételt csak az egyik változóra írjuk elő, akkor a kezdeti feltételeken keresztül biztosított információ egy része elvesz, ami fizikai anomáliákhoz vezethet [11]. Éppen ezért a cikk célja az MCV-modell rendszerformájú, explicit véges differenciás numerikus megoldásának kidolgozása és vizsgálata inhomogén kezdeti hőmérséklet-eloszlás esetén, különös tekintettel a hőáram kezdeti időderiváltjának konzisztens megadására. A hangsúly azon a módszertani kérdésen van, hogy milyen kezdeti feltételekkel érhető el fizikailag helyes megoldás, és miként kerülhetők el a szakirodalomban említett, a kísérleti tapasztalattal nem egyező eredmények.

2. A HŐVEZETÉSI MODELL NUMERIKUS VIZSGÁLATA

Az alábbi fejezetben az MCV-modell numerikus vizsgálatának felépítését mutatom be. A hővezetési modell dimenziótlan alakja az alábbi formában írható:

$$\hat{\tau} \partial_{Fo} \hat{q}(Fo, \xi) + \hat{q}(Fo, \xi) = -\partial_{\xi} \vartheta(Fo, \xi), \quad (2)$$

$$\partial_{Fo} \vartheta(Fo, \xi) + \partial_{\xi} \hat{q}(Fo, \xi) = 0, \quad (3)$$

ahol a (2) egyenlet a konstitutív összefüggés, (3) pedig az energiamérleg dimenziótlan alakja. A dimenziótlan helykoordinátát ξ -vel, a dimenziótlan időt az Fo Fourier-számmal, valamint a dimenziótlan relaxációs idő $\hat{\tau}$ -vel jelölöm, míg a dimenziótlan mezőváltozók a $\hat{q}$ és ϑ jelölést kapták, amelyek rendre a hőáramsűrűségnek és a hőmérsékletnek megfelelő mennyiségek. A parciális differenciálegyenlet-rendszerhez kezdeti- és peremfeltételek is társulnak, melyek közül az alábbi kettő minden további megfontolás nélkül előírható:

$$\vartheta(0, \xi) = \exp\left(-\frac{L}{z}\xi\right), \quad \xi \in [0, 1], \quad (4)$$

$$\hat{q}(Fo, 0) = \hat{q}(Fo, 1) = 0, \quad Fo \in (0, Fo_{\text{end}}]. \quad (5)$$

A (4) kezdeti hőmérséklet-eloszlás exponenciális, amelyre a kísérleti háttér miatt esett a választásom. Feltételezhető ugyanis, hogy az egydimenziósnak egyszerűsített testet egy hőimpulzus-kísérletnek vetjük alá, amelyben a minta egyik oldala egy rövid gerjesztést kap, a másik oldalán pedig a hőmérsékletet rögzítjük. Szemitranszparens anyagokban a hőimpulzus elnyelődése jellemzően exponenciális jellegű, bár természetesen valós mérésnél a nem tökéletesen pillanatszerű impulzus, illetve például a felületi optikai tulajdonságok ezt módosíthatják, ugyanakkor ennek részletes vizsgálata nem képezte a munkám részét. A (5) egyenlet a hőáramra előírt adiabatikus peremfeltétel, amely azt fejezi ki, hogy a hőimpulzus után a minta peremeit hőszigeteltnek tekintjük, így azokon keresztül nem történik hőcsere a környezettel.

Az MCV-modell matematikai nehézsége abban jelenik meg, hogy az (2)–(3) rendszerben a hőáramsűrűség idő szerinti deriváltja is szerepel, ennek következtében pedig egy további, erre az időderiváltra vonatkozó kezdeti feltétel megadása válik szükségessé. Ugyanakkor ez az időderivált az (2) egyenletben csatolva van mind a hőáramsűrűséghez, mind pedig a hőmérséklet gradienséhez (egy dimenzióban a ξ szerinti deriválthoz), ezért nem írható elő további megfontolás nélkül, mert azzal elveszítenénk a feltétel fizikai tartalmát. Az egyik változó eliminálásával történő redukálás során az információvesztés is éppen ebből fakad. Annak érdekében, hogy a hőáram időderiváltjának kezdeti feltételét a fizikai tartalom megtartása mellett határozhassam meg, a Galjorkin-féle közelítő módszert alkalmaztam. A módszer alapfeltevése a mezőváltozók reprezentációja az

alábbi formában:

$$\hat{q}(\text{Fo}, \xi) \cong \sum_{n=0}^N a_n(\text{Fo}) \sin(n\pi\xi), \quad (6)$$

$$\vartheta(\text{Fo}, \xi) \cong \sum_{n=0}^N b_n(\text{Fo}) \cos(n\pi\xi), \quad (7)$$

ami szemléletesen azt jelenti, hogy a mezőváltozókat egy adott időpillanatban véges számú trigonometrikus függvényből álló bázisra vetítem le, az $a_n(\text{Fo})$ és $b_n(\text{Fo})$ együtthatókon keresztül. Ha élünk azzal a feltevessel is, hogy a közelítésből származó hiba merőleges a bázisfüggvényekre, akkor az alábbi, időfüggő együtthatókra vonatkozó közönséges differenciálegyenlet-rendszerhez jutunk:

$$\hat{\tau} a'_k(\text{Fo}) + a_k(\text{Fo}) - k\pi b_k(\text{Fo}) = 0, \quad (8)$$

$$b'_k(\text{Fo}) + k\pi a_k(\text{Fo}) = 0. \quad (9)$$

Ehhez az egyik kezdeti feltétel az adott exponenciális kezdeti hőmérséklet-eloszlásból származtatható, mégpedig úgy, hogy a $b_k(0)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) értékek a kezdeti hőmérséklet-eloszlás páros kiterjesztése mellett előálló függvény Fourier-sorának első N együtthatói lesznek. A másik kezdeti feltétel megadásához további feltevésre van szükség, amellyel a későbbiekben foglalkozok.

A numerikus szimuláció alapját egy egyszerűen felépíthető véges differenciás diszkretizáció adta. Ennek során a hőáramsűrűség első időlépésben történő térbeli iterációjához az alábbi összefüggést alkalmaztam:

$$\hat{q}_0^{i+1} = -\frac{1}{h_\xi} \left(\vartheta_0^{i+1} - \vartheta_0^i \right) - \hat{\tau} \Delta_{\text{Fo}} \hat{q}_0^i, \quad i \in [0, N_x - 2], \quad (10)$$

ahol h_ξ a térbeli lépésközt, N_x a térbeli elemek számát, míg $\Delta_{\text{Fo}} \hat{q}_0^i$ a kezdeti hőáram időderiváltjának diszkretizált megadását reprezentáló vektort jelöli. Ezt követően a számítást a további időszinteken az alábbi két iterációs egyenlet alapján futtattam:

$$\hat{q}_{j+1}^{i+1} = \left(1 - \frac{h_{\text{Fo}}}{\hat{\tau}} \right) \hat{q}_j^{i+1} - \frac{h_{\text{Fo}}}{\hat{\tau} h_\xi} \left(\vartheta_j^{i+1} - \vartheta_j^i \right), \quad j \in [0, N_t - 1], \quad i \in [0, N_x - 2], \quad (11)$$

$$\vartheta_{j+1}^i = \vartheta_j^i - \frac{h_{\text{Fo}}}{h_\xi} \left(\hat{q}_{j+1}^{i+1} - \hat{q}_{j+1}^i \right), \quad j \in [0, N_t - 1], \quad i \in [0, N_x - 1], \quad (12)$$

ahol N_t az időlépések számát, h_{Fo} pedig az időlépés nagyságát jelöli. A következő alfejezetekben arra adok javaslatokat, hogy a Galjorkin-közelítésre támaszkodva milyen módon érdemes a $\Delta_{\text{Fo}} \hat{q}_0^i$ vektort, mint a kezdeti időderivált numerikus implementációját megadni.

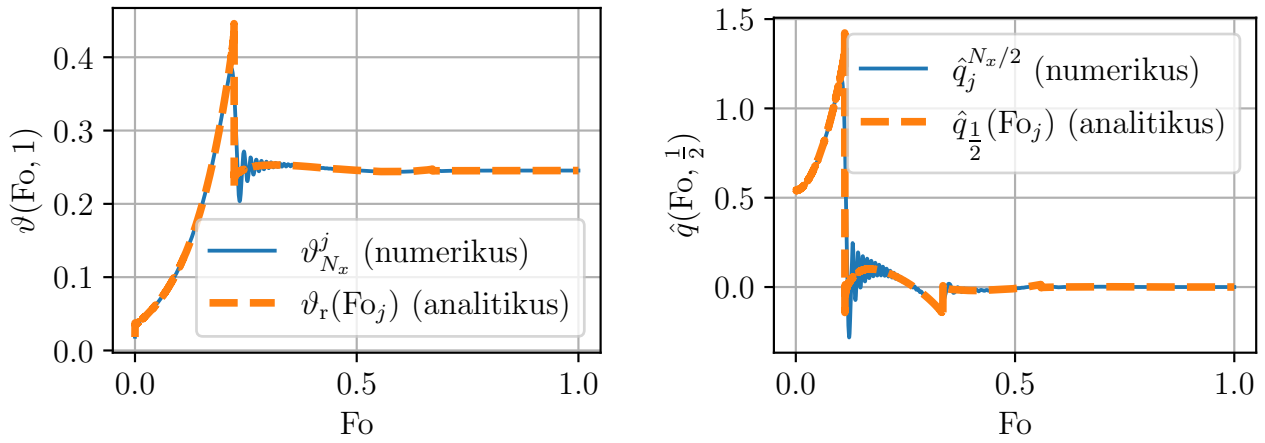
2.1. Nulla kezdeti hőáram időderivált

A legegyszerűbb, ugyanakkor fizikailag értelmezhető választás az, hogy nemcsak adiabatikus peremfeltételt írunk elő, hanem a kezdeti hőáramsűrűség időderiváltjára is zérus értéket feltételezünk. Ez azt jelenti, hogy kezdetben a hőáramsűrűség térbeli eloszlása nem módosul, az időbeli változás csak a későbbi időpillanatokban jelenhet meg. Ebben az esetben a kezdeti iterációs egyenlet az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\hat{q}_0^{i+1} = -\frac{1}{h_\xi} \left(\vartheta_0^{i+1} - \vartheta_0^i \right), \quad i \in [0, N_x - 2], \quad (13)$$

vagyis a számítás a Fourier-modell szerint történik, míg a további időszinteken a számítást változatlanul a (11)–(12) iterációs rendszer adja.

A számítás eredményét a 1. ábra foglalja össze. Jól látható, hogy a $\xi = 1/2$ pont hőáramsűrűségének időbeli lefutása vízszintes érintővel indul, ami a választott kezdeti feltétel következménye. A $\hat{\tau} = 0,05$ relaxációs idő mellett már mind a hőáramsűrűségben, mind pedig a hőmérséklet lefutásában megjelenik az MCV-modell hiperbolikus jellege miatt kialakuló hullámszerű viselkedés. Ez a görbékben hirtelen megtöréseket is okoz, amelyeket a numerikus megoldás jól láthatóan csak oszcillációk megjelenése után tud követni, ugyanakkor a szimuláció összességében stabil marad. Az ilyen oszcillációk mértéke a térbeli és időbeli lépés arányának megfelelő megválasztásával csökkenthető, azonban a görbék hirtelen törései miatt várhatóan nem küszöbölhetők ki teljes mértékben. Ennek az iterációnak az előnye így a fizikai értelmezhetőség mellett az egyszerű megvalósításban és az alacsony számítási igényben rejlik.



(a) A jobb oldal dimenziótlan hőmérséklete $\hat{\tau} = 0,05$ esetén. (b) A $\xi = 1/2$ pont dimenziótlan hőáramsűrűsége $\hat{\tau} = 0,05$ mellett.

1. ábra. Az analitikus és numerikus eredmények összevetése zérus kezdeti hőáram időderivált esetén, 100 térbeli elem mellett, $\Delta Fo = 2,5 \times 10^{-5}$ időlépéssel.

2.2. Nulla kezdeti hőmérséklet időderivált

Az előző eset vizsgálata után felmerül annak a feltételezésnek az ötlete is, hogy a hőmérséklet kezdeti időderiváltját zérusnak választjuk meg. Ennek fizikai jelentése az, hogy a kezdeti időpillanatban a hőmérséklet térbeli eloszlása nem változik, vagyis egy térbeli pont időbeli hőmérsékletének görbéje vízszintes érintővel indul. Ennek a feltevésnek fontos következménye van a hőáramra nézve: ebben az esetben a kérdéses $\Delta_{Fo} \hat{q}_0^i$ mennyiség által leírt kezdeti hőáram-időderivált nem lesz zérus, hanem a kezdeti hőmérséklet-eloszlásból le kell vezetni, különben a kezdeti feltétel fizikai tartalma sérülhet.

A (6)–(7) Galjorkin-féle alak miatt a $\partial \vartheta / \partial Fo|_{Fo=0} = 0$ feltétel ekvivalens azzal, hogy az időfüggő Fourier-együtthatók deriváltja zérus a kezdeti időpillanatban, azaz $b'_k(Fo = 0) = 0$, ($k = 1, 2, \dots, N$). Ha ezt a (9) egyenletbe visszahelyettesítjük, akkor $a_k(Fo = 0) = 0$, ($k = 1, 2, \dots, N$) adódik, majd ezt a (8) egyenletbe írva közvetlen kapcsolatot kapunk a hőáramsűrűség kezdeti időderiváltja és a kezdeti hőmérséklet-eloszlás Fourier-együtthatói között:

$$a'_k(Fo = 0) = \frac{k\pi}{\hat{\tau}} b_k(Fo = 0), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (14)$$

Ez a kapcsolat már elegendő ahhoz, hogy a bázisfüggvények segítségével felírjuk a kezdeti hőáram-időderivált numerikus implementációját, ami tehát a Fourier-együtthatókon keresztül a kezdeti hőmérséklet-eloszlásból származó mennyiség:

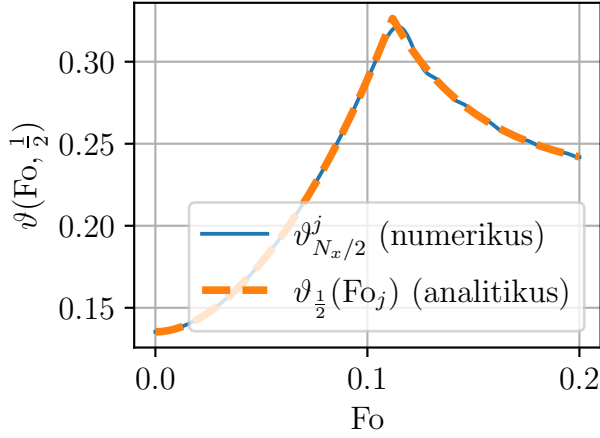
$$\Delta_{Fo} \hat{q}_0^i := \sum_{n=1}^N \frac{n\pi}{\hat{\tau}} \frac{2(L/z) ((-1)^n \exp(-L/z) - 1)}{(L/z)^2 + (n\pi)^2} \sin(n\pi i h_\xi), \quad i \in [0, N_x - 2]. \quad (15)$$

Éppen ez az a fizikai információ, amelyet a helyes eredmény érdekében nem veszíthetünk el azáltal, hogy a kezdeti időderiváltat tetszőlegesen, a kezdeti állapottól függetlenül választjuk meg.

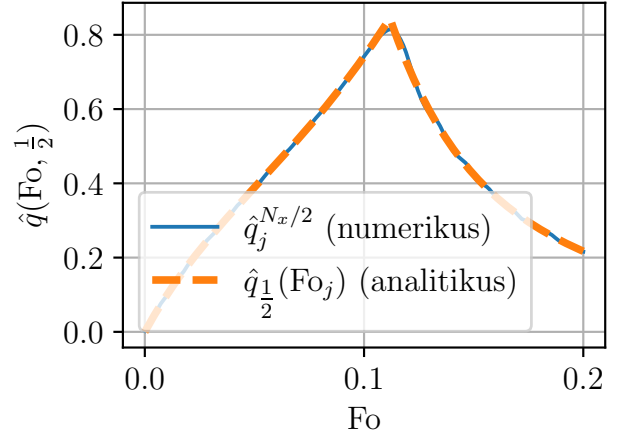
A számítások eredményeit a 2. ábra szemlélteti. Itt ismét ellenőrizhető a kezdeti feltétel teljesülése, mivel a hőmérsékletgörbe valóban vízszintes érintővel indul. A hullámszerű jelterjedés ebben az esetben is jól megfigyelhető, ugyanakkor a görbék kevésbé élesen törnek meg, ezért a numerikus megoldás minimális oszcillációval követi az analitikus görbét. Ennek megfelelően az így felépített iteráció pontos és stabil eredményt ad, bár a számítási igénye már jelentős lehet. A (15) összefüggésből látható, hogy a kezdeti időderivált előállításához $N_x - 1$ pontban kell egy N tagú összeget kiszámítani, így a térbeli felosztás finomítása vagy a figyelembe vett Fourier-együtthatók számának növelése a számítási időt jelentősen megnövelheti.

2.3. Nulla kezdeti hőmérséklet időderivált, gyorsított számítás

Az előző alfejezetben bemutatott eljárás ugyan pontos és stabil eredményt ad, azonban a (15) egyenlet alapján a kezdeti hőáram-időderivált előállítása jelentős többletköltséget jelenthet. Ez ösztönzött arra, hogy adjak egy olyan alternatívát is, amely kevésbé pontos, viszont lényegesen kisebb számítási igényű, és olyan esetekben lehet hasznos, amikor a $\partial \vartheta / \partial Fo|_{Fo=0} = 0$ feltételt továbbra is fenn szeretnénk tartani.



(a) A jobb oldal dimenziótlan hőmérséklete $\hat{\tau} = 0,05$ esetén.



(b) A $\xi = 1/2$ pont dimenziótlan hőáramsűrűsége $\hat{\tau} = 0,05$ mellett.

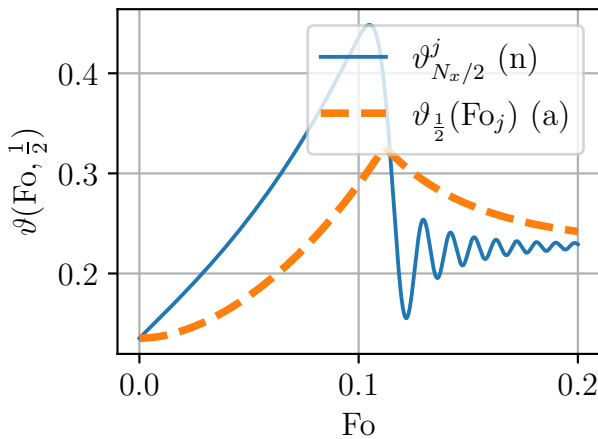
2. ábra. Az analitikus és numerikus eredmények összevetése zérus kezdeti hőmérséklet időderivált esetén, 100 térbeli elem mellett, $\Delta Fo = 2,5 \times 10^{-5}$ időlépéssel.

A gyorsítás alapötlete az, hogy a $\Delta_{Fo} \hat{q}_0^i$ mennyiség térbeli változását nem pontonként veszem figyelembe, hanem egyetlen, a teljes tartományra értelmezett átlagértékkel közelítem. Ezt az analitikus megoldás alakjából származtattam, az alábbi integrál-átlag formájában:

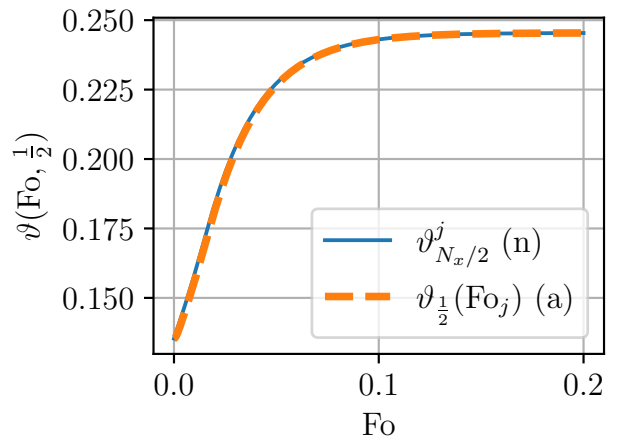
$$\Delta_{Fo} \hat{q}_0 := \int_0^1 \sum_{n=1}^N a'_n(Fo=0) \sin(n\pi\xi) d\xi. \quad (16)$$

Ezzel a közelítéssel $\Delta_{Fo} \hat{q}_0^i \equiv \Delta_{Fo} \hat{q}_0$, vagyis a kezdeti hőáram-időderivált implementációja nem függ sem az adott térbeli rácsponttól, sem a térbeli felosztás finomságától. Ez különösen előnyös lehet akkor, ha a térbeli felosztás finomságával kísérletezni szeretnénk, vagy ha annyira finom felosztást alkalmazunk, ahol a pontonkénti N tagú összeg kiértékelése már túl nagy számítási igénnyel jár.

A 3. ábra alapján látható, hogy a közelítés pontossága erősen függ a $\hat{\tau}$ értékétől. Nagy $\hat{\tau}$ esetén, amikor a hullámszerű jelterjedés kifejezetten domináns, a térben állandó kezdeti időderivált jelentős hibát okoz, és a numerikus görbe csak korlátozottan reprodukálja az analitikus megoldás jellegét. Ezzel szemben kisebb relaxációs idők mellett a módszer jól viselkedik, és a numerikus eredmény kis hibával követi az analitikus megoldást. Ennek megfelelően a gyorsított eljárás elsősorban kisebb $\hat{\tau}$ tartományban adhat praktikus és gyors alternatívát, amikor a térben változó kezdeti időderiválttal való számítás a pontosság szempontjából már kevésbé indokolt, miközben a számítási költsége továbbra is jelentős lenne.



(a) A $\xi = 1/2$ pont dimenziótlan hőmérséklete $\hat{\tau} = 0,05$ esetén.



(b) A $\xi = 1/2$ pont dimenziótlan hőmérséklete $\hat{\tau} = 0,001$ esetén.

3. ábra. Analitikus és numerikus eredmények összevetése gyorsított számításnál, zérus kezdeti hőmérséklet időderivált esetén. A megoldásokat 100 térbeli elem és $\Delta Fo = 2,5 \times 10^{-5}$ időlépés esetén állítottam elő.

3. KONKLÚZIÓ

A kutatás célja az volt, hogy a Fourier-en túli hővezetési modellekben felmerülő, kezdeti feltételekhez kapcsolódó nehézségek kezelésére gyakorlati ötleteket adjon. Az eredmények alapján jól látható, hogy a kezdeti feltételek numerikus implementációja nem pusztán technikai kérdés, hanem egy mögöttes fizikai feltevés is szükséges, amelynek megválasztása a felhasználó felelőssége. Ez a döntés ugyanakkor közvetlenül meghatározza azt is, hogy a hőáram időderiváltjára milyen összefüggésekből, milyen módon adható konzisztens kezdeti feltétel. Az MCV-modell egyik lényegi sajátossága a hullámszerű jelterjedés, amely miatt a megfelelően pontos implementációs eljárás megválasztása a relaxációs paraméter értékétől is függ. A bemutatott elvek és megoldások nem kizárólag az MCV-modellre alkalmazhatók, hanem kiterjeszthetők összetettebb esetekre, így például a Guyer–Krumhansl hővezetési modellre is, amely heterogén anyagok hővezetésének vizsgálatában releváns, és a későbbiekben a módszer gyakorlati alkalmazhatóságát tovább bővítheti.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást az NKFIH STARTING 149487 számú pályázata, valamint az MTA Fenntartható Fejlődés és Technológiák Nemzeti Program (FFT NP FTA) támogatta.

HIVATKOZÁSOK

- [1] H. S. Carslaw, J. C. Jaeger és H. Feshbach. „Conduction of heat in solids”. *Physics Today* 15.11 (1962), 74–76. old.
- [2] D. Jou, J. Casas-Vazquez és G. Lebon. „Extended irreversible thermodynamics”. *Reports on Progress in Physics* 51.8 (1988), 1105. old.
- [3] I. Muller és T. Ruggeri. *Rational extended thermodynamics*. 37. köt. Springer, 2013.
- [4] P. Ván és T. Fülöp. „Universality in heat conduction theory: weakly nonlocal thermodynamics”. *Annalen der Physik* 524.8 (2012), 470–478. old.
- [5] P. Ván és tsai. „Guyer–Krumhansl–type heat conduction at room temperature”. *Europhysics Letters* 118.5 (2017), 50005. old.
- [6] R. Kovács, A. Fehér és S. Sobolev. „On the two-temperature description of heterogeneous materials”. *International Journal of Heat and Mass Transfer* 194 (2022), 123021. old.
- [7] R. Kovács. „Heat equations beyond Fourier: From heat waves to thermal metamaterials”. *Physics Reports* 1048 (2024), 1–75. old.
- [8] Á. Sudár, G. Futaki és R. Kovács. „Continuum modeling perspectives of non-Fourier heat conduction in biological systems”. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics* 46.4 (2021), 371–381. old.
- [9] C. Cattaneo. „Sur une forme de l’équation de la chaleur éliminant la paradoxe d’une propagation instantanée”. *Comptes Rendus* 247 (1958), 431–433. old.
- [10] P. Vernotte. „Les paradoxes de la théorie continue de l’équation de la chaleur”. *Comptes Rendus* 246 (1958), 3154. old.
- [11] R. Kovács. „Analytical treatment of nonhomogeneous initial states for non-Fourier heat equations”. *International Communications in Heat and Mass Transfer* 134 (2022), 106021. old.