

András Némethi *Normal Surface Singularities*

A szingularitások a matematika és más tudományágak különböző területeinek fontos szereplői. A szingularitáselmélet olyan tereket vizsgál, amelyek szinte mindenhol lokálisan euklideszi tereként viselkednek (úgynevezett sokaságok), kivéve bizonyos strukturálisan rossz pontokban, amelyeket szingularitásoknak nevezünk. A szingularitás lényege, hogy eltér a generikustól, az általánostól, katasztrófhelyzetet teremtve maga körül.

Történelmileg a szingularitások a 17. században jelentek meg az algebrai görbék tanulmányozásánál. Már Isaac Newton észrevette, hogy két görbe metszéspontjainak megszámlálásához bizonyos speciális pontokat többszörösen kell számolni. Ezután rövid időn belül megfogalmazódott a szinguláris pontok értelmezése magasabb dimenziós algebrai sokaságokra is.

A komplex algebrai felületek elmélete és osztályozása már jóval bonyolultabbnak bizonyult az algebrai görbékénél. A sima algebrai felületeknek a Federico Enriques vezette olasz iskola által készített klasszikus osztályozása az 1880-as években kezdődött. Majd az 1960-as években Kunihiko Kodaira japán matematikusnak sikerült egy modern osztályozást teremtenie, amely már az algebrai geometria és topológia új eszközeit használja. Kodaira elmélete kiemelt figyelmet szentel a felület komplex geometriai struktúrájának és a valós értelemben tekintett sima négydimenziós sokaság struktúrájának kapcsolatára. Később Simon Donaldson munkája és a négydimenziós Seiberg–Witten-elmélet adott erős hátszelet ennek az összehasonlítási folyamatnak.

Ugyanebben az időben elkezdődik a komplex szinguláris felületek vizsgálata, amely maga után vonja egy lokális szingularitásra vonatkozó elmélet, a felületszingularitások elméletének megszületését. Ez az elmélet rengeteg érdekes és nehéz kérdésre keresi a választ a geometriai és a topológiai struktúrák szoros kapcsolatának árnyékában. Az egyik legfontosabb módszere a szingularitásokhoz rendelt geometriai és topológiai invariánsokban rejlik, amelyek a megfelelő struktúra különböző tulajdonságait kódolják. A felületszingularitások elmélete rendkívüli fejlődésen ment keresztül az 1970-es évektől. Létrejött egy kölcsönös kapcsolat az alacsony dimenziós topológiával, amely számos kulcsfontosságú eredményt és kutatási programot eredményezett. Különböző monográfiák születtek a témával kapcsolatban, de hiányzott egy olyan kötet, amely az előbb említett kapcsolatra fókuszál.

Ezt a hiányt pótolja Némethi András *Normal Surface Singularities* című monográfiája. Ki lenne képes gondosan és precízen összefoglalni az utóbbi évtizedek felületszingularitásokra vonatkozó geometriai és topológiai elméletének kutatásait? – tették fel valószínűleg a kérdést a Springer Kiadó *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge* sorozatának szerkesztői, akik hamar Némethi felkérése mellett döntöttek, hiszen a kutatásokban ő maga is oroszlánrészt vállalt.

A könyv nagy része olyan eredményeket mutat be, amelyek egy jól meghatározott program keretébe tartoznak. Olyan eredményeket tekintünk a program részének, amelyek különböző geometriai struktúrákat, invariánsokat jellemeznek topológiai invariánsokkal. A program alapját Michael Artin amerikai matematikus fektette le az 1960-as években, jellemezve az úgynevezett racionális felületszingularitásokat (olyan felületszingularitások, amelyek az egyik legfontosabb geometriai invariáns, a geometriai génusz szempontjából a legegyszerűbbek). Ezt a jellemzést Henry Laufer az 1970-es évek derekán átdolgozta, majd kiterjesztette az úgynevezett minimális elliptikus (a legegyszerűbb, nem racionális) szingularitások szintjére. Itt Laufer azt az észrevételt fogalmazta meg, hogy bonyolultabb típusok esetén a program folytatása nem lehetséges.

Húsz évvel később Némethi egy új ötletet fogalmazott meg, amelynek alapján egy extra topológiai feltétel lehetővé teszi a program folytatását, és ezen feltétel mellett befejezte az elliptikus szingularitások geometriai génuszának topológiai leírását. Ez az eredmény új kutatási irányok felé vezető kapukat nyitott meg, majd – ahogy maga a szerző is fogalmaz – „a program lépésről lépésre különböző módszerek és konstrukciók széles gyűjteményévé nötte ki magát, amelyek még általánosabb és átfogóbb projektek létrehozásának alapját képezik a geometriai-topológiai összehasonlítások tekintetében”. A fentiek alapján joggal nevezhetjük ezt a (a könyvben egyébként Artin–Laufer névvel ellátott) programot az Artin–Laufer–Némethi-programnak.

Napjaink kutatási irányzatainak szempontjából az Artin–Laufer–Némethi-program legfontosabb projektje a rácspont kohomológia elmélet. Az elmélet alapjait maga a könyv szerzője fektette le 2005 és 2010 között, majd kollégáival és diákjaival rengeteg eredményt publikáltak, kiemelve az elmélet központi szerepét a felületszingularitások geometriájának és topológiájának kapcsolatában. A rácspont kohomológia a szingularitáselméleti analógja az alacsony dimenziós topológiában közismert és népszerű Heegaard–Floer-homológia elméletének, amelyet szintén magyar matematikusok vezettek be, Szabó Zoltán és Ozsváth Péter személyében. A két elmélet ekvivalenciájának problémáját Némethi-sejtésnek nevezzük. Az utóbbi két évtizedben rengeteg sajátos esetben igazolódott az ekvivalencia, viszont teljes általánosságban csak 2021-ben bizonyította be a sejtést Ian Zemke.

Mindenképpen érdemes megemlítenünk a bevezető részt, amely vitathatatlan érvekkel támasztja alá a monográfia ötletének és születésének értelmét, majd a fejezetekhez írt rövid és tartalmas összefoglalók segítenek eligazodni az olvasónak a terjedelmes mű különböző részeiben.

Ahogy azt a kötet is bizonyítja, a felületszingularitások elmélete, valamint az Artin–Laufer–Némethi-program megérett egy ilyen szintű összefoglalásra, amely a megjelenése óta eltelt két év alatt célközönségének, a szingularitáselméletet vagy annak szerteágazó módszereit érintő témák kutatóinak és az ezen a területen dolgozó doktorandusz hallgatóknak egyaránt nagyon hasznos forrásává, alpművévé vált. Ennek okán a különböző országok fiatal kutatói, doktoranduszai körében a felületszingularitások bibliája nevet érdemelte ki. Mindent összevetve kijelenthetjük, hogy

a kötet, Némethi András közel tízéves tudományőrző munkásságának eredménye, rövid időn belül nemcsak a nemzetközi és a magyar matematika, hanem az egész magyar tudomány egyik ékköve lett.

✱

Némethi, András (2022). *Normal Surface Singularities*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer, 722 o.

László Tamás

egyetemi docens
Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár