

RADIÁLISAN GRADIENS GÖRBÜLT RUDAK HŐRUGALMASSÁGTANI MEGOLDÁSAI FESZÜLTSEGFÜGGVÉNYEK SEGÍTSÉGÉVEL

THERMOELASTIC PROBLEMS OF RADIALY GRADED CIRCULAR ARCHES USING STRESS FUNCTIONS

Dr. Gönczi Dávid *

ABSTRACT

This paper deals with the determination of thermal stresses distribution and deformations in radially graded circular arches. The study focuses on the analysis of curved beams made of functionally graded materials, where the material composition varying in the radial direction according to an arbitrary function. The arch is assumed to be under generalized plane stress state and subjected to combined thermal and mechanical loads. An arbitrary radial temperature field is prescribed, while we investigate the application possibilities of special radial surface forces applied to the upper and lower curved boundary surfaces and moments at the end cross section of the beam. The solution is derived by generalizing the semi-analytical solutions of multilayered components.

1. BEVEZETÉS

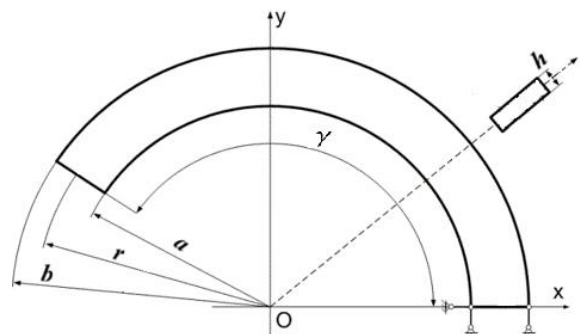
A görbült rudak a tartószerkezetek gyakran alkalmazott szerkezeti elemei. Az elmúlt években számos kutatás foglalkozott a többrétegű, valamint a funkcionálisan gradiens anyagú gerendák mechanikai viselkedésének különböző szempontjaival. A rudak és egyszerű geometriájú testek mechanikai analízisével számos szakkönyv foglalkozik, többek között az [1–4] szakirodalmak. Az egyszerű, funkcionálisan gradiens szerkezeti elemek megoldásaival foglalkoznak az [5–7] tanulmányok. A bimetál szerkezeti elemek a rétegzett rúdszerkezetek egyik gyakorlati alkalmazási területét jelentik. Számos tanulmány vizsgálta a két különböző anyagból felépülő bimetál szalagok mechanikai viselkedését, azonban ezeknek a vizsgálatoknak a nagy részében az ívelt geometriát nem vették figyelembe, mint például a [8, 9].

A [10] tanulmány többrétegű, ívelt gerendákban kialakuló feszültségek és elmozdulások analitikus meghatározásával foglalkozik két rétegből álló bimetál szerkezetekre. A különböző, izotrop anyagokból készült rétegeket kizárólag csak hőterhelés éri, amely egy a teljes szerkezetre előírt konstans hőterhelésből adódik. A feladatot két eltérő elméleti modellel vizsgálják, egy szilárdságtani elméleteket tartalmazó (Euler-Bernoulli-féle rúdmodellhez köthető) és egy síkfeszültségi

állapotot feltételező megközelítéssel. Másik népszerű téma a radiálisan gradiens rudak témakörében a stabilitási feladatok megoldása. Ide hozhatjuk példaként a [11] szakirodalmat, amely perturbációs technikát használt rugalmasan ágyazott rudak feladatainak megoldására, vagy a [12] cikk, amelyben a gerendát terhelő koncentrált erő és nyomaték hatását vizsgálják. Pydah és Sabale [13] kétirányban funkcionálisan gradiens köríves gerendák hajlítási problémáját vizsgálták különböző végterhelések mellett. Eslami és munkatársai [14] kétlépcsős perturbációs módszert alkalmaztak egy oldalirányú nyomásnak és hőmérsékletmezőnek kitett, funkcionálisan gradiens cső megoldására. A vizsgált íves szerkezet anyagtulajdonságai a radiális irány mentén változtak, egy speciális hatványfüggvény szerinti eloszlásnak megfelelően.

A [15] munkában egy radiálisan gradiens görbe középvonalú rúd megoldását mutatják be, amelyben a rugalmassági modulus a radiális irány mentén hatványfüggvény szerint változik. Ecsedi és Baksa [16] olyan módszert dolgoztak ki, amely radiális terhelésnek kitett, köríves, speciálisan ortotrop gerendák feszültségállapotának meghatározására alkalmazható.

Jelen tanulmány egy többrétegű, ívelt gerenda vizsgálatából indul ki. A gerendát radiális irányban speciális hőterhelés éri. Az egyes homogén rétegek egymással tökéletesen kapcsoltak, nincs közöttük relatív elmozdulás. A probléma leírásához (r, φ, z) hengerkoordináta-rendszert alkalmazunk.



1. ábra A feladat vázlatja

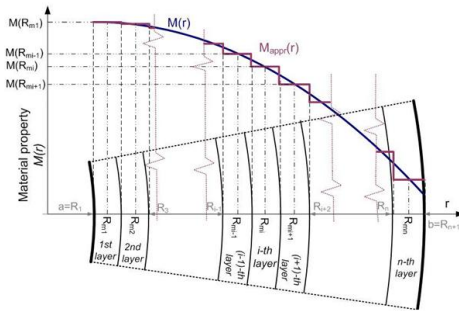
* egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Gépészmérnöki és Informatikai Kar, Műszaki Mechanikai Intézet

A kiindulási probléma általánosításával szeretnénk közelíteni a radiálisan gradiens anyagú rudak megoldásait. Az általánosított síkfeszültségi állapot feltételezéseiből indulunk ki, a szétkapcsolt (állandósult állapotú) hűrugalmasságtan alapegyenleteit használjuk a deformációk és a feszültségi állapot leírására. Szeretnénk vizsgálni a radiális irányban előírt hőmérsékletmező mellett a rúdra ható nyomatók és speciális radiális irányú nyomások hatását is. Az utóbbi felületi terhelést a rúd alsó és felső görbült peremfelületére írjuk elő.

A feladat vázlatát szemlélteti az 1. ábra. A görbe középvonalú rúd külső és belső sugarát jelölje a és b , a rúd vastagsága (z irányban) legyen h , azaz $a \leq r \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \gamma$, $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$ geometriai tartományt vizsgáljuk.

2. A PROBLÉMA MEGOLDÁSA

A probléma megoldásának közelítéséhez használjunk többretegű megközelítést. Bontsuk fel a szerkezetet n darab homogén rétegre, amelyeket tökéletesen összekapcsolunk. Legyen $R_1 = a$ és $R_{n+1} = b$. A feladat kiindulása az előírt hőmérséklet különbség függvény, amely az abszolút hőmérséklet és a szerkezet egyensúlyi hőmérsékletének a különbsége, és jelölje $\vartheta(r)$. Vegyük úgy, mintha a többretegű szerkezetünkben minden rétegnek egy konstans hőmérséklete lenne, amit jelöljön ϑ_i az i . rétegben. Ezt megkaphatjuk például úgy, hogy az eredeti hőmérséklet függvényének kiszámoljuk a diszkrét értékét a réteg közepén (2. ábra), de vehetünk például integrál értelemben vett átlagot is a réteg vastagsága (r irányú) mentén.



2. ábra Az anyagi paraméterek közelítése

Az Euler-Bernoulli-féle rúd elmélet feltételezéseiből indulunk ki. Az elmozdulásmezőt az alábbi alakban keressük az i . réteg esetén ($i = 1, \dots, n$):

$$\begin{aligned} u_{ri}(r, \varphi) &= U_i(r) + c_1 \cos \varphi + c_2 \sin \varphi, \\ u_{\varphi i}(r, \varphi) &= Cr\varphi + c_1 \sin \varphi - c_2 \cos \varphi + c_3 r, \end{aligned} \quad (1)$$

Kis alakváltozást feltételezve, alkalmazva a kinematikai egyenletet hengerkoordináta-rendszerben az alábbi összefüggést kapjuk a tangenciális és radiális fajlagos relatív nyúlásokra:

$$\varepsilon_r(r) = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{du_r(r)}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi(r) = u_r r^{-1}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{\varphi i} = \frac{U_i}{r} + C, \quad \varepsilon_{ri} = \frac{dU_i}{dr}, \quad (3)$$

A kompatibilitási egyenletbe helyettesítve a (3) összefüggéseket kapjuk, hogy az i . rétegre ($i = 1, \dots, n$):

$$r \frac{d\varepsilon_{\varphi i}}{dr} + \varepsilon_{\varphi i} - \varepsilon_{ri} - C = 0. \quad (4)$$

Lineárisan rugalmas anyagi viselkedést feltételezve az anyagtörvény az alábbi alakban írható fel az i . réteg esetén:

$$E_i \varepsilon_{ri} = \sigma_{ri} - \nu_i \sigma_{\varphi i} + E_i \alpha_i \vartheta_i, \quad (5)$$

$$E_i \varepsilon_{\varphi i} = \sigma_{\varphi i} - \nu_i \sigma_{ri} + E_i \alpha_i \vartheta_i, \quad (6)$$

ahol E_i a réteg rugalmassági modulusza, ν_i a Poisson szám, α_i a lineáris hőtágulási együttható, $\sigma_{ri}, \sigma_{\varphi i}$ pedig a radiális és tangenciális normálfeszültségek.

Az egyensúlyi egyenlet nemzérus skalár vetületi egyenleteit felírva kapjuk, hogy

$$\frac{d\sigma_{ri}}{dr} + \frac{\sigma_{ri} - \sigma_{\varphi i}}{r} = 0. \quad (7)$$

A (6) egyenlet átrendezése után a normálfeszültségek a V feszültségfüggvény segítségével az alábbi alakban írhatók fel:

$$\sigma_{\varphi i} = \frac{dV_i}{dr}, \quad (8)$$

$$\sigma_{ri} = \frac{V_i}{r} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9)$$

Ezeket az összefüggéseket behelyettesíthetjük az (5-6) összefüggésekbe, amit pedig a (4) kompatibilitási egyenletebe. Így kapjuk, hogy

$$\frac{d^2 V_i}{dr^2} + r^{-1} \frac{dV_i}{dr} - V_i r^{-2} - E_i C r^{-1} = 0. \quad (10)$$

Ennek a differenciál egyenletnek a megoldása

$$V_i(r) = A_{1i} r + \frac{A_{2i}}{r} + \frac{E_i C}{2} r \ln(r), \quad R_i \leq r < R_{i+1}, \quad (11)$$

$$\frac{dV_i}{dr} = A_{1i} - \frac{A_{2i}}{r^2} + \frac{E_i C}{2} \ln(r) + \frac{E_i C}{2} = \sigma_{\varphi i} \quad (12)$$

a feszültség függvényre. A rúd irányú terhelésből származó peremfeltétel:

$$N = \int_{R_1}^{R_{n+1}} \sigma_\varphi(r) dr = \int_{R_1}^{R_{n+1}} \frac{d}{dr} (r \sigma_r) dr =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{R_i}^{R_{i+1}} \frac{dV_i}{dr} dr = 0 =$$

$$= R_2 \sigma_{r1}(R_2) - R_1 \sigma_{r1}(R_1) + \dots + R_{n+1} \sigma_{rn}(R_{n+1}) - R_n \sigma_{rn}(R_n) \quad (13)$$

egyenletre vezet. A nyomatéki egyenlet (peremfeltétel) felírásával adódik, hogy

$$M = \int_{R_1}^{R_{n+1}} r \sigma_\varphi(r, \varphi) dr = D, \quad (14)$$

amely a rúd végének terheletlen esetében $D = 0$, míg egy M nagyságú nyomaték esetén $D = Mh^{-1}$ kifejezéssel adható meg.

Az elmozdulásmező c_i ($i = 1, 2, 3$) ismeretlen komponenseinek meghatározásához a

$$u_{r1}(R_1, 0) = 0, u_{\varphi 1}(R_1, 0) = 0, u_{\varphi 2}(R_{n+1}, 0) = 0 \quad (15)$$

kinematikai peremfeltételeket tudjuk használni.

Alkalmazzunk két, egymástól függő nagyságú (ellentétes irányú) felületen megoszló terhelést, amelyek $p_1(r = a), p_2(r = b)$:

$$ap_1 + bp_2 = 0. \quad (16)$$

Ekkor a radiális normálfeszültségre (megadott alakú elmozdulásmező mellett) a peremen felírható, hogy

$$\sigma_{r1}(R_1) = \sigma_{rn+1}(R_{n+1}) = ap_1. \quad (17)$$

Amennyiben ezek a peremek terheletlenek, az előző (17) egyenlet jobb oldala zérus értéket vesz fel. A rétegek közötti illesztési feltételekhez kihasználjuk, hogy a rétegek tökéletes kapcsolata miatt az elmozdulásmezőnek folytonosnak kell lennie, azaz

$$U_i(R_{i+1}) = U_{i+1}(R_{i+1}), \quad (18)$$

illetve a feszültségmező folytonosságából a radiális normál feszültségekre is fenn kell állnia a

$$\sigma_{ri}(R_{i+1}) = \sigma_{ri+1}(R_{i+1}), \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad (19)$$

összefüggéseknek.

Összegezve, a $2n + 4$ darab ismeretlenhez felírtunk $2n + 4$ darab egyenletet, amelynek a rétegek illesztésére vonatkozó feltétle tömören az alábbi formában fogalmazható meg

$$Dx = f, \quad (20)$$

ahol az x oszlop mátrix tartalmazza az ismeretlen A_{1i}, A_{2i} konstansokat, f pedig a terhelésből származó tagokat. Az elmozdulásmezőhöz felírható, hogy

$$U_i = \left(E_i - \frac{\nu_i}{E_i}\right) A_{1i} r + \left(E_i + \frac{\nu_i}{E_i}\right) A_{1i} r^{-1} + \frac{C}{2} (-1 + (1 - \nu_i) \ln r) r + \alpha_i \vartheta_i r. \quad (21)$$

A többretegű feladat megoldásának egyik hátránya, hogy a kapott tangenciális irányú normál feszültség, amely a domináns feszültség, sokszor oszcilláló jellegűt mutat. Ezt ellensúlyozhatjuk egy megfelelő approximációs görbe alkalmazásával, amely például legkisebb négyzetek módszerével is meghatározható.

3. NUMERIKUS PÉLDA

A numerikus példa számításaihoz az alábbi adatokat használtuk fel:

$R_1 = a = 0,5 \text{ m}, R_2 = b = 0,7 \text{ m}, \gamma = 270^\circ, h = 5 \text{ mm}$. A hőterhelést adó hőmérsékletkülönbség függvény legyen:

$$\vartheta(r) = 110r + 40 \text{ [K]}.$$

Az anyagállandók ($M = E, \nu, \alpha$) radiális koordinátától való függéséhez az alábbi függvényt használtuk:

$$G(r) = \frac{r-a}{b-a},$$

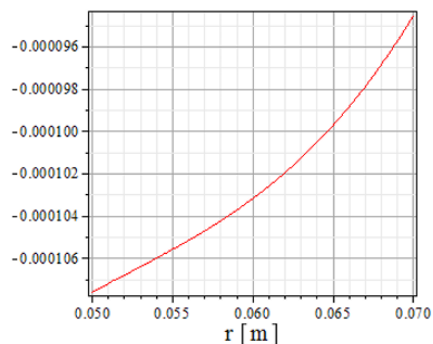
$$M(r) = (M_1 - M_2)G + M_2,$$

amivel

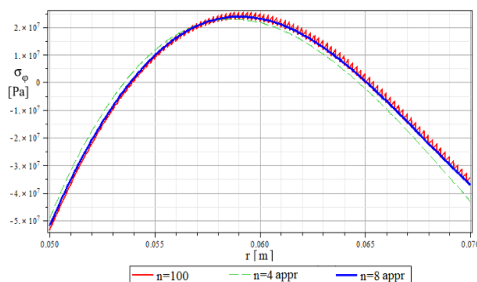
$$E_1 = 210 \text{ GPa}, E_2 = 340 \text{ GPa}, \nu_1 = 0.32, \nu_2 = 0.25,$$

$$\alpha_1 = 1.2 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}, \alpha_2 = 3.9 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{K}}.$$

A feladat megoldásához Maple szoftvert használtunk. Az approximációs függvényünk legyen egy negyedfokú polinom. Az elmozdulásmezőt szemlélteti a 3. ábra, míg a 4. ábrán látható a tangenciális normál feszültség 3 rétegszám esetén. Ezen három esetből az első két vizsgált esetben alkalmaztuk az approximációs függvényünket.



3. ábra Az elmozdulásmező [m] függvénye



4. ábra A tangenciális normál feszültség

4. ÖSSZEGZÉS

A tanulmány a radiálisan gradiens, körív középvonalú rudak egy hőrugalmasságtani feladatának megoldását prezentálta. A rudat általánosított síkfeszültségi állapot mellett egy speciális hőterhelés éri, amely a hengerkoordináta-rendszer radiális irányának tetszőleges függvénye. A funkcionálisan gradiens anyagú rúd megoldását egy többretegű (kompozit anyagnak tekinthető) modellből vezettük le. Vizsgáltuk azokat az eseteket, amikor koncentrált nyomaték terheli a gerendák végét, avagy speciális radiális irányú megoszló terhelés a gerenda alsó és felső görbült peremreit. Megadtuk a kombinált hő és mechanikai terhelések esetén kialakuló elmozdulásmező és feszültségfüggvények képleteit a kompatibilitási egyenletet és az egyensúlyi egyenletekből levezetett feszültségfüggvényeket felhasználva.

5. FELHASZNÁLT IRODALOM

- [1] Hetnarski R. B., Eslami M. R.: *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*, Springer, New York, USA, 2010, <https://doi.org/10.1007/978-3-030-10436-8>
- [2] Lekhnitskii S. G.: *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Mir Publishers, Moscow, 1981, <https://doi.org/10.12677/ASS.2021.105163>

- [3] Noda N., Hetnarski R. B., Tanigawa Y.: *Thermal Stresses*, Lastran Corporation, Rochester, New York, USA, 2000,
<https://doi.org/10.1115/1.1349549>
- [4] Shen H-S.: *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, CRC Press, London, UK, 2009,
- [5] Gönczi D.: *Determination of stresses and displacement in orthotropic radially graded disks*, GEP, 76(3-4), pp. 51-54., 2025.
<https://doi.org/10.70750/GEP.2025.3-4.12>
- [6] Kiss L. P., Messaoudi A.: *Assessments of the non-linear instability of arches with imperfect geometry*, STRUCTURES, 71:108031, 2025, pp.17,
<https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.108031>.
- [7] Gönczi D.: *Thermoelastic analysis of functionally graded anisotropic rotating disks and radially graded spherical pressure vessels*, Journal of Computational and Applied Mechanics, 19 (2), pp. 85-104.,2024,
<https://doi.org/10.32973/jcam.2024.004>
- [8] Aignatoaie. M.: *FEA study on the elastic deformation process of a simple bimetal beam*. Applied Mechanics and Materials, 371(8), pp. 448–452,2013,
[10.4028/www.scientific.net/AMM.371.448](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.371.448)
- [9] Suhir. E.: *Interfacial stresses in bimetal thermostats*, Journal of Applied Mechanics, 56(3), pp. 595–600, 2013, [10.1115/1.3176133](https://doi.org/10.1115/1.3176133)
- [10] Gönczi D.: *Analysis of a curved bimetallic beam*, Journal of Computational and Applied Mechanics, 14 (1-2), pp. 41-51., 2019, [10.32973/jcam.2019.003](https://doi.org/10.32973/jcam.2019.003)
- [11] Babaei, H., Kiani, Y., Eslami, M.R.: *Thermomechanical non-linear in-plane analysis of fix-ended FGM shallow arches on nonlinear elastic foundation using two-step perturbation technique*, Int. J. Mech. Mater. Des., 15(2), pp. 225–244, 2019, <https://doi.org/10.1007/s10999-018-9420-y>
- [12] Kiss L.P.: *Stability of arches with internal hinge*, Mathematics and Mechanics of Solids 29 (10), pp. 1947-1957, 2025,
<https://doi.org/10.1177/10812865241245>
- [13] Pydah A., Sabale, A.: *Static analysis of bi-directional functionally graded curved beams*, Composite Structures 160: 867–876, 2017, [10.1016/j.compstruct.2016.10.120](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.120)
- [14] Babaei, H, Kiani, Y, Eslami M.R.: *Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shallow curved tubes in thermal environment*, Thin-walled Structured 123, pp. 48-57, 2018, [10.1016/j.tws.2018.08.008](https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.08.008)
- [15] Haskul, M.: *Elastic state of functionally graded curved beam on the plane stress state subject to thermal load*, Mechanics Based Design of Structures and Machines, 47., 2019. [10.1080/15397734.2019.1660890](https://doi.org/10.1080/15397734.2019.1660890)
- [16] Ecsedi I., Baksa A.: *A half circular beam bending by radial loads*, Journal of Computational and Applied Mechanics, 12(1), pp. 3-18., 2017.