Magyar Tudomány 187/11 (2026), 1594–1603
DOI: 10.1556/2065.187.2026.11.11

200 éve született Bernhard Riemann

200th Anniversary of Bernhard Riemann's Birth

Tóth Árpád
az MTA doktora, egyetemi tanár, Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Kar Matematikai Intézet Analízis Tanszék, Budapest; kutatóprofesszor, HUN-REN Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Budapest
arpad.toth@ttk.elte.hu

Absztrakt

A 200 éve született Bernhard Riemann munkássága a matematika több területén is modernista fordulópontot hozott. E rövid életrajzban bemutatjuk a kor német tudományos kultúrájának sokszínű, interdiszciplináris és idealista szellemi közegét, ami lehetővé tette e korszakalkotó zseni kibontakozását, és előkészítette a terepet a matematikán belüli egyik legmélyebb versengésnek, a göttingeni és berlini iskolák eltérő szemlélete közti rivalizálásnak.

Abstract

This year marks the 200th anniversary of Bernhard Riemann's birth. His work marked a modernist turning point in several areas of mathematics. This brief biography presents the diverse, interdisciplinary, and idealistic intellectual milieu of 19th-century German scientific culture that fostered the emergence of this groundbreaking genius. It also explores how this environment laid the foundations for one of the most profound rivalries in the history of mathematics: the competing intellectual traditions of the Göttingen and Berlin schools.

Kulcsszavak: Bernhard Riemann, Göttingeni Egyetem, Riemann-geometria, a matematika filozófiai és fizikai vonatkozásai

Keywords: Bernhard Riemann, Göttingen University, Riemann geometry, philosophical and physical implications of mathematics

Bevezetés

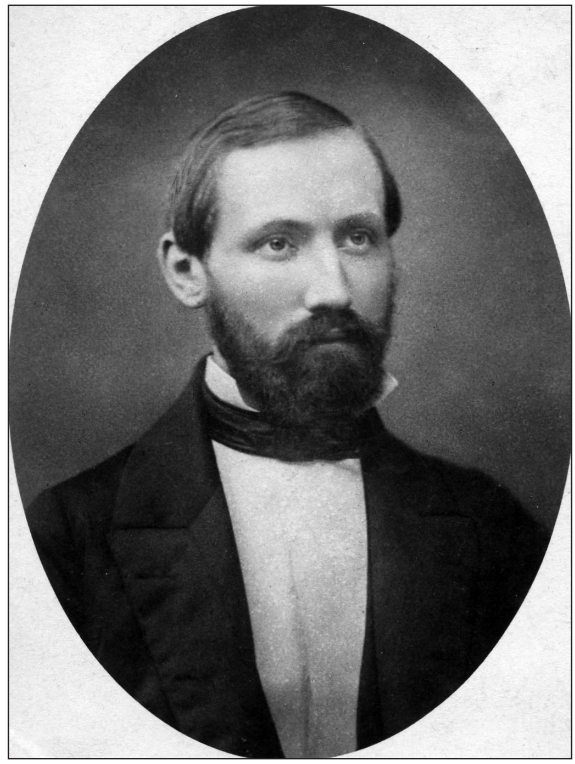
1854 elején egy betegesen szégyenlős fiatalember habilitációs előadásához készülődött. Az alig 26 éves jelölt hét évvel korábban még teológia és filozófia szakos diákként iratkozott be a nagy hírű Göttingeni Egyetemre. Most viszont Carl Friedrich Gauss, a matematika élő fejedelme, volt témavezetője nehéz feladat elé állította: a kötelező előadás tárgyaként megadott három javaslat közül a Bernhard Riemann által legkevésbé kívántat jelölte ki az előadás tárgyának: a geometria alapjául szolgáló feltevéseket. Riemann június 10-én megtartott előadása pedig örökre átalakította a térről alkotott elképzeléseinket. Az önmagában is jelentős matematikai (és filozófiai) áttörést minden művelt háztartásban közismertté tette, amikor 1915 őszén Albert

© 2026 Akadémiai Kiadó

Brought to you by MTA Könyvtár és Információs Központ olvasók | Unauthenticated | Downloaded 11/17/26 03:24 PM UTC

Einstein az általános relativitáselmélet megfogalmazásában Riemann geometriájára támaszkodott,[1] ami azóta is a fizika alapvető matematikai nyelvezete.

Riemann munkássága, annak ellenére, hogy életében csak 11 publikációja jelent meg (ebből kettő kibővített absztrakt, négy fizikai témájú, egy a PhD-értekezése, tehát a doktori disszertációja után megjelent matematikai publikációinak száma csupán négy), a geometrián kívül a matematika több más ágában is fordulópontnak tekinthető mind elméleti, mind gyakorlati oldalról. Még a prímszámok statisztikájáról írt értekezése is, amely eredetileg pusztán elméleti jelentőségű volt, mindennapi felhasználást talált a modern kriptográfiai eljárásokban. Nem meglepő, hogy a 200 éve született Bernhard Riemannt *(1. ábra)* oly sokan a 19. századi matematika legizgalmasabb, legkreatívabb és legnagyobb hatású alakjának tartják.



1. ábra. Bernhard Riemann
Forrás: közkincs

[1] Grosmann Marcell (1878–1936) magyar származású zürichi (ETH) professzor hívta fel Einstein figyelmét a Riemann-geometriában időközben lezajlott technikai fejlődésre. Einsteinnel közösen írt, 1913-as cikkükben jelent meg a Riemann-geometria mint az általános relativitáselmélet matematikai alapja.

Brought to you by MTA Könyvtár és Információs Központ olvasók | Unauthenticated | Downloaded 11/17/26 03:24 PM UTC

Gyermekkora

Georg Friedrich Bernhard Riemann 1826. szeptember 17-én született Breselenzben (ma: Jameln), a Hannoveri Királyságban.[2] Édesapja evangélikus lelkész volt, a Göttingeni Egyetemen végzett teológiát, édesanyja felmenői között pedig a hannoveri egyház tekintélyes tagjai is megtalálhatók voltak. A család tehát a kor művelt középrétegéhez tartozott, biztos, de szerény jövedelemmel. Az otthoni neveltetés mindenesetre elég volt ahhoz, hogy 13 évesen, konfirmálás után a hannoveri Lyceumban kezdje meg tanulmányait. Érdekes, hogy matematikából csak kettes érdemjegyet szerzett (mint ma is, Németországban a legjobb jegy az egyes). Hannoverben anyai nagyanyjánál élt, akinek halála után a lüneburgi[3] Johanneum diákjaként folytatta tanulmányait. A gimnázium igazgatója, egyben matematikatanára, Heinrich Schmalfuss azonnal felfigyelt Riemann matematikai tehetségére, és minden órán igyekezett a képességeinek megfelelő feladatot adni neki. Későbbi visszaemlékezései szerint Riemann minden alkalommal jóval túllépett Schmalfuss elvárásain és valószínűleg a tudásán is. Egy anekdota a koordinátageometria oktatásával kapcsolatos: Schmalfuss egy levélben megjegyzi, hogy a geometriai problémák kezelése a „gépies módszerrel”[4] nem nyerte el az ifjú diák tetszését, egy szál, amihez Riemann később is visszatért.

Göttingen és Berlin

1846 húsvétján Riemann atyja nyomdokaiba lépve beiratkozott a Göttingeni Egyetem teológia fakultására. Ugyanakkor a matematikai és fizikai előadások sokkal inkább megragadták, és apja engedélyét kérte, hogy inkább filozófiai (idetartozott ekkor a „természetfilozófia” is) tanulmányokat folytathasson. Az általa felvett kurzusok közé tartozott a görög-római kultúrtörténet, a teológia, az újkori egyháztörténet, az általános élettan, az integrálszámítás.

Göttingen ekkor már megkopott, nem kis részben a 10 évvel korábban lezajlott politikai felfordulás hatására. Hannover a bécsi kongresszusig csak választófejedelemség volt, és 1714 óta perszonálunióban állt az Egyesült Királysággal, majd 1831-ben a párizsi események hatására alkotmányos monarchiává alakult. IV. Vilmost halála után 1837-ben a brit trónon Viktória királynő követte, azonban Hannover még a Lex Salica alatt állt, így férfi utód, I. Ernest August lett Hannover királya. Az új uralkodó eltörölte az alkotmányt, a göttingeni fakultásnak pedig az új rendszer iránti hűségesküt kellett volna tennie. Mivel már az 1831-es alkotmányra is esküt tettek, heten

[2] Riemann életének felvázolásában Richard Dedekind életrajzára (Dedekind 2004), valamint Detlef Laugwitz és David E. Rowe monográfiáira (Laugwitz 1999; Rowe 2021) támaszkodtam.

[3] Riemann előtt a város leghíresebb diákja Johann Sebastian Bach volt.

[4] A Descartes-féle koordinátageometriával.

Brought to you by MTA Könyvtár és Információs Központ olvasók | Unauthenticated | Downloaded 11/17/26 03:24 PM UTC

– köztük a Grimm testvérek[5] – ezt megtagadták, így őket, a „göttingeni heteket"[6] a király száműzte. Mivel Gauss sosem szeretett tanítani, és időskorára alig tartott órákat, Göttingen ekkorra a matematikában is elvesztette vezető jellegét.

Ezt Riemann is jól látta, és 1847-ben Berlinbe utazott, hogy ott folytassa tanulmányait. Berlinben inkább matematika- és fizikaórái voltak csak, bár történelem-előadásokra ott is beült.[7] A berlini egyetem a napóleoni vereségek hatására elindított általános porosz oktatási reformok szülötte, Wilhelm von Humboldt ideáljait követve alakult meg. Érdemes felidézni, mit is jelentett akkor a „poroszos" oktatás. Humboldt megfogalmazásában: „Nyilvánvaló, hogy mindenki csak akkor lehet jó kézműves, kereskedő, katona és üzletember, ha saját hivatásától függetlenül jó, tisztességes, társadalmi helyzetének megfelelően művelt ember és polgár. Ha az iskolai oktatás megadja ezt az alapot, akkor később könnyen elsajátítja a szakmájához szükséges tudást, és megőrzi azt a szabadságot, hogy ahogyan az életben oly gyakran megesik, egyik hivatásból a másikba válthasson" (Humboldt 1993 [1809], 218).[8]

További fontos elem volt a tanítási és tanulási szabadság *(Lehrfreiheit und Lernfreiheit),* e szavak lehető legszélesebb értelmezésében. Mindez Berlint a német (és részben a nemzetközi) tudományos élet központjává tette, ahol kiváló professzorok oktattak. Az 1848. tavaszi események mindezt persze felforgatták; Riemann maga is részt vett a diákmilícia őrségi szolgálatában. 1849 húsvétján a király elutasította a polgári forradalom célját, a német egységesítést, ezután Riemann visszatért Göttingenbe.

Dr. Riemann

Göttingenben Wilhelm Weber (aki közben újra taníthatott) kísérleti fizikai előadásai és Johann Herbart[9] filozófiája kötötte le. Weber hatására a fizikai kutatásokra koncentrált, így doktori dolgozatának elkészítése (1851) és habilitációja (1854) elhúzódott (ezekről részletesebben lesz szó a munkásságát bemutató cikkünkben).

---

5 A liberális nézetekkel nem vádolható Jacob Grimm vitriolos röpiratban védte álláspontját, a Nibelung-énekből idézve: „War sint die eide komen" (Szász Károly fordításában: „Felejted eskedet?") (Sammons 1976).

6 A többiek: Wilhelm Eduard Albrecht, Georg Gottfried Gervinus, Friedrich Christoph Dahlmann, Wilhelm Eduard Weber (Gauss munkatársa) és Heinrich Georg August Ewald (Gauss veje). Utóbbi kettő később Riemann életében is fontos szerepet játszott.

7 Riemann fennmaradt leveleiből kiderült, hogy amikor Berlinben csillagászatot tanult (Franz Encke volt az oktatója), az elméleti előadásokat nagyon unta, csak a heti egyszeri bemutatókat szerette a csillagvizsgálóban, azokból sokat tanult.

8 Ha másképp nem jelzem, a szövegben szereplő idézetek saját fordításaim.

9 Johann Friedrich Herbart (1776–1841) német filozófus, Emmanuel Kant utódja Königsbergben. A tudományos igényű pedagógia megalapítója; elmélete a 19. század második felében jelentős hatást gyakorolt a módszertanra, különösen az Egyesült Államokban. Pszichológiai kutatásai Sigmund Freudra is hatással voltak.

Brought to you by MTA Könyvtár és Információs Központ olvasók | Unauthenticated | Downloaded 11/17/26 03:24 PM UTC

Megjegyzendő, hogy a PhD megszerzése előtt Riemann-nak egyetlen publikációja sem volt, a doktori védés után pedig előbb két fizikai témájú dolgozata született. Ezek jelentős cikkek, amelyekben Riemann meggyőzően bizonyítja a potenciálelmélet fizikai alkalmazhatóságát. Az elektromosság térelméleti kezelése fontos előrelépés, az elektromos áram által generált színes Nobili-gyűrűk magyarázata tökéletesen illeszkedett Friedrich Kohlrausch elektrokémiai méréseihez. (Egyébként Weber és Kohlrausch mérték ki először, hogy az elektromágneses áramlás sebessége megegyezik a fénysebességgel, ennek értelmezését végül James Clerk Maxwell adta meg.) Riemann saját szavaival ekkor fő érdeklődése „a természet ismert jelenségeinek új értelmezésére irányul, amelynek köszönhetően lehetővé válik a hő, a fény, a mágnesség és az elektromosság közötti kölcsönhatásokra vonatkozó kísérleti adatok felhasználása az egymás közötti összefüggések feltárására. Ehhez elsősorban Newton, Euler, valamint – egy másik szempontból – Herbart műveinek tanulmányozása vezetett el" (Riemann 1876, 507).

Ugyanakkor a doktori műben kitűzött geometriai program megvalósítása is haladt előre. 1855-ös cikkében a gaussi hipergeometrikus függvények elméletének adta új, geometriai megalapozását. Ez a terület fontossága ellenére zsákutcába jutott, a Riemann előtti utolsó jelentős eredmény Ernst Eduard Kummer nevéhez fűződik. Ebben a 200 oldalas cikkben pusztán algebrai eszközökkel a terjedelem ellenére sem sikerült teljes elméleti leírást adni. Riemann saját szavaival: „ezeket a transzcendens függvényeket olyan módszerrel vizsgálja, amelynek elveit disszertációjában (20. szakasz) ismertette, és amely szinte *számítás nélkül adja meg* az összes korábbi eredményt [kiemelés T. Á.]". Ugyanebben az évben jelent meg az Abel-függvények (több komplex változójú periodikus függvények) elméletét gyökeresen átalakító munkája, szintén a geometriai gondolatok elsőbbségét mutatva. Ekkor nyújtotta be Karl Weierstrass is saját eredményeit a témában, de Riemann cikkét megismerve dolgozatát visszavonta, és nem publikált többet a témában, viszont Riemann egyik legnagyobb támogatójává vált (mindeközben Riemann módszereinek legélesebb kritikusa is maradt, lásd lejjebb). Rajta keresztül a berlini tudós körök is megismerték Riemannt, akit 1859-ben az akadémia levelező tagjává választottak. Ez alkalomból írta az analitikus számelméletet megalapozó művét, amelyben először jelenik meg a híres-hírhedt Riemann-hipotézis.

Ugyanebben az évben Peter Gustav Lejeune Dirichlet, aki Gausst követte a Göttingeni Egyetem tanszékvezetői székében, szívinfarktus következtében elhunyt. Utódjának Riemannt választották, akinek ekkor tehát négy matematikai publikációja volt, mégis mindenki számára nyilvánvalóan[10] Gauss és Dirichlet egyetlen méltó utódjának számított.

[10] Riemann radikálisan megújította a hipergeometrikus függvények és a differenciálgeometria (Gauss), valamint a Fourier-sorok és prímszámok (Dirichlet) elméletét. Lásd kísérő cikkünket a riemanni életmű egyes részleteiről.

Brought to you by MTA Könyvtár és Információs Központ olvasók | Unauthenticated | Downloaded 11/17/26 03:24 PM UTC

A betegség évei

Tanszékvezetői kinevezése után nem sokkal Riemann megházasodott, és megszületett a gyermeke. Az elkövetkező évek azonban örömök helyett folyamatosan romló egészséget hoztak. Mindezzel együtt Riemann 1860-as cikkében egy idealizált esetben matematikailag levezette a lökéshullámok létezését, lényegében felfedezve a jelenséget.[11] Ugyanebben az évben jelent meg a bolygók, csillagok (folyékony ellipszoidok) alakjáról szóló publikációja Dirichlet egy posztumusz munkájának továbbfejlesztéseként. Különösen érdekes az egyensúlyi állapot stabilitásának kérdése, amely a csillagok, bolygók kialakulásának magyarázatában megkerülhetetlen probléma, és itt jelenik meg először.

Riemann mindig is gyenge fizikumú volt, de ekkorra egészségi állapota olyannyira leromlott, hogy kollégái itáliai kapcsolataikat kihasználva utazást szerveztek neki, amelyhez pénzügyi támogatást is szereztek. Így Riemannék 1862 őszén Olaszországba utaztak, és Szicíliában kezdve bejárták a félszigetet. Riemann több matematikussal is összebarátkozott, Pisában Enrico Betti állást is ajánlott neki. Hazatérésük után nem sokkal Riemann problémái[12] ismét visszatértek, orvosai tanácsára így újabb itáliai útra indult, ahonnan csak 1865 őszén tért vissza Göttingenbe. Ekkor publikálta utolsó nagy cikkét, az ún. théta-függvények zérushelyéről. Ennek hatására 1866 elején a berlini Porosz Tudományos Akadémia külső tagnak választotta (Riemann a Hannoveri Királyságban élt), márciusban pedig a párizsi akadémia is tagjai közé emelte.

Állapota tovább romlott, 1866 tavaszán már alig tudott beszélni. Júniusban az osztrák–porosz háború kapcsán Hannover az osztrák oldalra állt, éppen aznap, amikor Riemann újra Olaszországba indult, ami a körülmények hatására veszélyes, hosszú és fáradalmas utazás volt. Ennek az útnak a célja már csak az lehetett, hogy Riemann az általa annyira szeretett Itáliában búcsúzhasson el a földi léttől. Bár júniusban a Royal Society is tagjává választotta, erről már nem értesült, július 20-án elhunyt.

A riemanni örökség

Riemann szó szerinti értelemben vett hagyatéka rendezetlen kéziratairól állt, első feldolgozásuk tíz évet vett igénybe. Az igazi hatás persze a csekély számú, de rendkívül gondolatgazdag matematikai mű lassú elterjedésében állt.

A hátramaradt jegyzetek feldolgozását Richard Dedekind kezdte meg. Ehhez végül segítségül kellett hívnia Heinrich Webert.[13] Egyes fontos munkák még így is

[11] Az energiamegmaradás helyett entrópiamegmaradást feltételezve. Riemann modelljének fizikailag helytálló korrekcióját Pierre-Henri Hugoniot végezte el. (Angliában William Rankine skót mérnök párhuzamosan, Riemann munkáját sem ismerve szintén megalkotta ezt az elméletet.)

[12] Krónikus mellhártyagyulladásban szenvedett, tüdőbeteg volt, aminek pontos diagnózisát Richard Dedekind életrajza diszkréten elhallgatja.

[13] Heinrich Martin Weber matematikus. Csak névrokona Georg Wilhelm Webernek, Gauss és Riemann munkatársának, illetve Heinrich Friedrich Webernek, Einstein témavezetőjének.

Brought to you by MTA Könyvtár és Információs Központ olvasók | Unauthenticated | Downloaded 11/17/26 03:24 PM UTC

kimaradtak, mert 1876-ban még nem értették a szerkesztők a jelentőségüket. Az 1892-es második kiadás ezeket már pótolta. A harmadik, 1902-es kötetben pedig Riemann komplex függvénytani és parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatos előadásai jelentek meg.[14] Ezek a 20. század első felében még rendszeres használatban voltak a német egyetemeken.

A posztumusz művek közül csak hármat említünk itt meg. A *Commentatio* egy 1860-ban a párizsi akadémia hővezetéssel kapcsolatos pályázatára benyújtott mű. Ez csak a második kiadásban jelent meg, tartalma ugyanis a tenzorszámítás alapjairól szól. A differenciáloperátorok transzformációja görbe vonalú koordinátarendszerekben csak a(z ekkor még ismeretlen) habilitációs előadás tükrében érdekes.

A 21-es számú kéziratban hipergeometrikus függvények hányadosait fejezte ki lánctörtekkel. Ez a módszer inspirálta Charles Hermite francia matematikust az *e* szám (a természetes logaritmus alapja) transzcendenciájának bizonyítására. Néhány évvel később Ferdinand von Lindemann ugyanezt a módszert használva bizonyította be, hogy a π szám (a kör kerületének és átmérőjének hányadosa) transzcendens, ezzel bebizonyítva a kör négyszögesítésének lehetetlenségét.

A modern algebrai topológia kezdetei is Riemann-nál lelhetők fel. Az összefüggőségi számok magasabb dimenziós általánosításairól szóló töredékek mutatják, hogy a Betti (Riemann jó barátja) által a témában publikált cikkek a Riemann-nal folytatott beszélgetések eredményei. De Riemann felületekről szóló munkái is az „analysis situs"-nak, ahogy Riemann a területet nevezte, a függvénytanban betöltött szerepéről szóltak. Nem véletlen, hogy Henri Poincaré *Analysis situs* című alapművében, amelyben a modern algebrai topológia teljes fegyverzetben jelenik meg, többször említi Riemann nevét. A mű első mondatai is jól illusztrálják ezt: „Mindenki tudja, mit jelent egy felület összefüggősége, és milyen fontos szerepet játszik ez a fogalom a függvények általános elméletében, annak ellenére, hogy egy teljesen más matematikai ágból, nevezetesen az Analysis situsból származik. Mivel az ilyen jellegű kutatásoknak a geometrián kívül is lehetnek alkalmazásaik, érdemes azokat háromnál több dimenziós terekre is kiterjeszteni. Riemann ezt jól megértette; és szerette volna kiterjeszteni gyönyörű felfedezését, és alkalmazni azt az általános terek topológiájára, de sajnos a témát befejezetlen állapotban hagyta hátra" (Poincaré 1892, 633). Betti, az *Annali di Matematica* 2. sorozatának IV. kötetében, kiteljesítette Riemann eredményeit. A magasabb dimenziós „összefüggőségi" számokat Poincaré tisztázta véglegesen, de mindmáig Betti-számoknak nevezik őket.

[14] Riemann, Bernhard (1892). *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass.* Szerk. Dedekind, Richard. Leipzig: B. G. Teubner; Riemann, Bernhard (1902). *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass. Nachträge*. Szerk. Noether, von Max – Wirtinger, Wilhelm. Leipzig: B. G. Teubner.

Brought to you by MTA Könyvtár és Információs Központ olvasók | Unauthenticated | Downloaded 11/17/26 03:24 PM UTC

A zsenik kultúrája vagy egy kultúra zsenijei?

A Riemann mint magányos zseni mítosza tetszetős, de az utókor által kreált történet. Bár valóban visszahúzódó volt, matematikusokkal könnyen szót értett, amit családi levelezése is jól dokumentál. Dedekind volt ugyan egyetlen göttingeni barátja, de Göttingen ekkor már nem tudott Berlin vonzerejével versengeni, és Dedekind volt az egyetlen matematikus elme, aki vele egy időben tanult ott. Berlini, párizsi és itáliai útjai során számos neves matematikus (Karl Weierstrass, Ernst Kummer, Leopold Kronecker, Charles Hermite, Victor Puiseux, Eugenio Beltrami, Enrico Betti) vendégszeretetét és támogatását élvezte.

Riemann tényleg zseni volt, de ami sikerét lehetővé tette, az a teljesítményre koncentráló, ám azt nem káros módon leegyszerűsítve értelmező német kulturális közeg. Érdemes karrierjét összehasonlítani Charles Sanders Pierce-ével, aki Bertrand Russell angol filozófus, matematikus, irodalmi Nobel-díjas szerint „a 19. század egyik legeredetibb gondolkodója és minden idők legnagyobb amerikai gondolkodója" (Russell 1959, 276) volt. Pierce jelentősége pusztán történettudományi érdekesség, életében tehetsége inkább akadályt jelentett, és végül korára semmilyen hatással sem volt.

A német viszonyok sokkal kedvezőbbek voltak. Riemann már gimnáziumi évei alatt szerencsés volt, hogy az egyébként nem kiemelkedő diákban Schmalfuss meglátta a matematikai tehetséget. Az egyetemi tanulmányok során fontos volt a felsőoktatás szabadsága. Könnyen lehetett az egyik kurzusról egy másikra vagy akár az egyik egyetemről egy másik egyetemre váltani, miközben a kurzusokon osztályzat, számonkérés nem volt. Visszaéltek-e a német diákok ezzel a szabadsággal? Minden bizonnyal, de a haszon látványosan nagyobb volt, mert ha voltak is, ezek a visszaélések nem akadályozták meg a német tartományokat abban, hogy a század folyamán a leggyorsabban fejlődjenek, és nemcsak a költészetben, zenében és filozófiában, hanem a tudományokban, a gazdaságban és katonai erőben is Európa legerősebb hatalmává váljanak.

Végül említsük meg a támogató kutatói közeget. Riemann már Göttingenben is kiemelt figyelmet kapott, amikor még csupán ígéret volt, semmi több. Nyilván a német egyetemi rendszerben sok hasonló ígéretes fiatal kapott lehetőséget. Riemann ugyan tudott ezzel élni, de csak néhány publikáció erejéig. E publikációk a kor legizgalmasabb kérdését, az Abel-függvényeket érintették, és azonnali elismerést hoztak neki. A berlini iskola Weierstrass domináns vezetésével ugyan irtózott Riemann geometriai módszereitől, de teljes mértékben támogatta őt akadémiai taggá választásakor, és a riemanni életmű által felvetett kérdések továbbgondolását tette egyik céljává.

Való igaz, hogy Riemann egyes eredményei a kortársak számára nehezen értelmezhetők voltak. Ennek okai elég prózaiak. Riemann a kor matematikai tudását az analízis és geometria terén már egyetemi diákként (egyes területeken már középiskolásként) teljes mértékben elsajátította. Ezt persze megkönnyítette, hogy e területek ekkor lényegesen kisebbek voltak, egyebek között azért, mert a hosszadalmas alapozást csak részben dolgozták ki, és semmiképpen sem volt a tananyag része. Egy mai

Brought to you by MTA Könyvtár és Információs Központ olvasók | Unauthenticated | Downloaded 11/17/26 03:24 PM UTC

matematikushallgató a BSc-képzés három éve alatt lényegében csak alapozó tudást sajátít el, a matematika jelenlegi kérdéseiről minimális ismereteket szerez (ha szerez egyáltalán). Ha az utókor Riemannt a hagyományokat elvető modernistaként állítja be, az amiatt van, hogy nem olyan tételeket keresett, amelyeket e megszerzett tudással tud bizonyítani, hanem úttörő felfedezéseket lehetővé tevő új módszereket. Erre természetes igény is volt, hiszen mint említettük, Kummer munkája kapcsán a formális számolások korlátai ekkorra már nyilvánvalóvá váltak. Ráadásul Riemann a hagyományos számolásoknak is nagymestere volt. Fentebb említett eredménye a hipergeometrikus sorokról, ami Hermite és Lindemann munkája nyomán a körnégyszögesítés lehetetlenségének bizonyítására vezetett, teljes mértékben klasszikus; e bizonyításokat Newton és Leibniz is megértette volna.

A komplex analízis és az algebrai geometria terén valóban csodálatos volt a geometriai intuíció felélesztése,[15] ami tényleg sok fejtörést okozott a kortársaknak. Weierstrass élesen ellenezte a „geometriai fantáziákat", szembeállítva azokat az „algebrai igazságokkal".

Riemann egy hírhedt mondása[16] szerint: „Bárcsak meglennének a tételek! Akkor már elég könnyen megtalálnám a bizonyításokat" (Lakatos 1998, 26). Weierstrass és diákjai azon dolgoztak, hogy megtalálják ezeket a bizonyításokat a saját módszereikkel. Még legjobb barátja, Dedekind is algebrai alapokra kívánta helyezni a Riemann-felületek elméletét. Az összegyűjtött munkák társszerkesztőjével, Weberrel együtt ezt sikerrel meg is oldották.

Riemann hatása először tehát abban állt, hogy eredményeinek újraértelmezésére törekedtek. Csak jóval később tértek vissza eredeti „elképzeléseihez".[17] Megfelelően illusztrálja ezt a habilitációs előadás. Ezen az előadáson az öreg és nagyon beteg Gausson kívül a fizikus Weber, egy mineralógus és három bölcsész vett részt (O'Brien 2023). Az előadás, mint minden tipikus habilitáció, formalitás volt, aminek egyetlen következménye, hogy a jelölt elnyerte a kívánt előléptetést. Magának a szövegnek a publikálása csak a hagyatékban talált kézirat alapján történt meg 1868-ban. A korszak filozófusai szinte kivétel nélkül elutasították. Eugen Dühring (a kommunista ideológia egyik alapművének számító Engels-mű célpontja), a kor népszerű gondolkodója ugyanúgy, mint Bertrand Russell. Ugyanakkor Hermann Helmholtz (1878)

[15] A klasszikus matematikában szinte kizárólag ez volt elfogadott, Eukleidész is ábrával bizonyította, hogy végtelen sok prímszám létezik. Néhány évszázaddal ezelőtt az elméleti matematikusokat a „kiváló geométer" megszólítás illette; a matematikus kifejezés a felvilágosodás korára vetette csak le az asztrológiához kapcsolódó előítéleteket, de ekkor is mérnöki és egyéb alkalmazásokhoz kapcsolódott. Az algebrai hozzáállás dominanciája 19. századi folyamatok végeredménye.

[16] Valószínűleg csak anekdota, amely azonban jól tükrözi a riemanni álláspontot. A „tétel" eredeti görög értelmezése mint felfedezésre váró látványosság sokkal közelebb áll Riemannhoz, mint az ekkor kialakuló szigor.

[17] A Riemann által sűrűn használt *Begriff* kifejezést fordítottam „fogalom" helyett „elképzelés"-nek, ami talán jobban reprezentálja korának német filozófiai hagyományát és főleg Riemann álláspontját e fogalmak dinamikus fejlődéséről.

Brought to you by MTA Könyvtár és Információs Központ olvasók | Unauthenticated | Downloaded 11/17/26 03:24 PM UTC

és Angliában William Kingdon Clifford sokat tett a Riemann-geometria népszerűsítéséért, Olaszországban pedig Betti és Beltrami hatására komoly differenciálgeometriai iskola jött létre, amelyet Gregorio Ricci és Tullio Levi-Civita neve fémjelez. A sokaság pontos matematikai definícióját csak 1913-ban alkotta meg Hermann Weyl (Weyl 1913; a fogalom fejlődéstörténetéről lásd Scholz 1999), és végül az Einstein–Hilbert-elméletben találta meg első igazi alkalmazását, mielőtt a 20. századi matematika és fizika legalapvetőbb fogalmai közé emelkedett (Gray 2007; Monastyrsky 1999).

Mint Felix Christian Klein írja, Riemann intuíciója mint különleges erő összes kortársa fölé emelte. Poincaré szerint pedig Riemann módszerének célja a matematikai igazságok felfedezése, míg Weierstrassé a tételek bizonyítása volt; nyilvánvalóan mindkét hozzáállásra nagy szükség van. Hogy a mesterséges intelligencia korában ebből melyiknek lesz, ha lesz, nagyobb szerepe az emberek által kreált matematikában, azt csak a jövő mondja majd meg.

Irodalomjegyzék

Dedekind, Richard (2004). „The Life of Bernhard Riemann". In: Riemann, Berhard. *Collected Papers*. Ford. Baker, Roger – Christenson, Charles – Orde, Henry. Heber City, UT: Kendrick Press, 1–11.

Gray, Jeremy (2007). *Ideas of Space: Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*. 3. kiad. Oxford: Oxford University Press.

Helmholtz, Hermann (1878). „The Origin and Meaning of Geometrical Axioms". *Mind* 3/10, 212–225.

Humboldt, Wilhelm von (1993) [1809]. „Bericht der Sektion des Kultus und Unterrichts an den König". In: Humboldt, Wilhelm von. *Werke in fünf Bänden. IV. Schriften zur Politik und zum Bildungswesen*. Szerk. Flitner, Andreas – Giel, Klaus. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 210–238.

Lakatos Imre (1998). *Bizonyítások és cáfolatok*. Budapest: Typotex Kiadó.

Laugwitz, Detlef (1999). *Bernhard Riemann 1826–1866: Turning Points in the Conception of Mathematics*. Basel: Birkhäuser.

Monastyrsky, Michael I. (1999). *Riemann, Topology and Physics*. Basel: Birkhäuser.

O'Brien, Jenne Praeger (2023). *Making the Manifold: Bernhard Riemann's Habilitation Lecture, Mathematics, and German Universities*. PhD Thesis, Princeton University.

Poincaré, Henri (1892). „Sur l'Analysis Situs". *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* 115, 633–636.

Riemann, Bernhard (1876). „Fragmente philosophischen Inhalts". In: Weber, Heinrich, szerk. *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*. Leipzig: B. G. Teubner, 501–538.

Rowe, David E. (2021). *Bernhard Riemann: His Life and Wondrous Mathematical Legacy*. Basel: Birkhäuser.

Russell, Bertrand (1959). *Wisdom of the West: A Historical Survey of Western Philosophy in Its Social and Political Setting*. London: Macdonald & Co.

Sammons, Jeffrey L. (1976). *The Dismissal of the Brothers Grimm from the University of Göttingen*. *The Yale University Library Gazette* 50/4, 234–236.

Scholz, Erhard (1999). „The Concept of Manifold, 1850–1950". In: James, Ioan Mackenzie, szerk. *History of Topology*. Amsterdam: Elsevier, 25–64.

Weyl, Hermann (1913). *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Leipzig–Berlin: B. G. Teubner.

Brought to you by MTA Könyvtár és Információs Központ olvasók | Unauthenticated | Downloaded 11/17/26 03:24 PM UTC