

# Spline függvények története és faipari alkalmazásuk

## II. rész

POLGÁR Rudolf<sup>1</sup>, PÁSZTORY Zoltán<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Nyugat-magyarországi Egyetem Simonyi Károly Kar, Innovációs Központ

### Kivonat

Ez a tanulmány a spline függvények feltalálásával, történetével, fajtáival és alkalmazásukkal kapcsolatos sorozat második része. A spline-okat elsődlegesen mérnöki feladatok és problémák megoldására fejlesztették ki. A spline módszerek könnyű kezelhetősége viszont megnyitotta az utat specifikus spline módszerek kifejlesztésére. Az első részben áttekinttük a spline függvények történetét és fajtáit, e cikkben pedig a spline alkalmazásokra fókuszálunk. Több példán keresztül igyekszünk bemutatni a spline-ok ipari, különös tekintetben a fa- és bútorigipari alkalmazásokat.

**Kulcsszavak:** spline, Bézier-görbék, approximáció, interpolációs spline

## History of Spline Functions and Application in Wood Industry

### Part 2

#### Abstract

This is the second paper related to the invention history types and application of spline functions. Splines were developed mainly for solving engineering problems. Their easy way of handling opened new possibilities for the development of specific spline methods. The first paper discussed the history and types of splines while the present paper focuses on the applications of spline. Several industrial examples are shown, especially ones related to the wood and furniture industry.

**Keywords:** spline, Bézier spline, approximation, interpolation spline

#### Jelentősebb spline módszerek és alkalmazási területeik

A spline függvények alkalmazhatóságát a számítástechnikai fejlődés nagyban elősegítette, a nagy művelési kapacitással és a kiváló megjelenítési technikákkal. Ennek köszönhetően a spline függvények alkalmazása egyre szélesebb körben terjed el és az alkalmazásuk is egyre „felhasználóbarátabb” formát ölt (Schumaker 2007). Az egyre szélesebb körű alkalmazás magában foglalja az esztétikai szempontokat kiemelten kezelő formatervezést, a szemnek kellemes látványt nyújtó ívek kialakítását, de kiterjed mérnöki és tudományos célokra is, mint pl. az L-spline használata az elektrosztatikai és -dinamikai rendszerek töltésselosztás vizsgálatában, a Poisson-egyenletek Green-függvényekkel történő megoldásánál (Schumaker 2007) (w1).

A mérnöki gyakorlatban sokszor a kiegyenlítő spline-okat alkalmazzák a mérési eredmények simítására. Azt keressük, hogy az egyik változó különböző értékeinek hatására a folyamat más változói milyen értékeket vesznek fel. A mérnöki gyakorlatban a vizsgált folyamat determinisztikus jellege miatt a változók közötti kapcsolat léte és a kapcsolat függvényyszerű volta elfogadott.

Ebben az esetben a kapcsolatot méréssel igyekeznek feltárni. A méréseket gyakran hiba terheli, így (két változót tekintve) nem a mérési pontok összekötése-interpolációja, hanem a pontok között haladó „kiegyenlítő” grafikon ad helyes tájékoztatást a két változó kapcsolatáról. Ekkor a „kiegyenlítő” görbe megrajzolása vagy egyenletének meghatározása a mérésikiértékelés célja. Ilyen típusú kérdésekre kezelésére alkalmas a kiegyenlítő spline módszer (Halász és Huba 2003).

A kiegyenlítő spline módszer geodéziai alkalmazásának jelentős magyar vonatkozásai is vannak. A módszert Závoti József vezette be, aki korát megelőzve elsőként már 1979-ben a Föld felszínének modellezésére használta, és nagyon jó eredményeket ért el (Závoti, 1979, 1980, 1982, Somogyi és Závoti, 1981).

A simító spline a statisztikában a regresszió számítás vagy regresszió analízis során két vagy több sztohasztikus változó között fennálló kapcsolatot modellez. A regressziós modell tulajdonságai alapján megkülönböztetünk lineáris, illetve arra visszavezethető, és nemlineáris regressziót. A legjobban illeszkedő regressziós görbe meghatározását leggyakrabban a legkisebb négyzetek módszerével határozzák meg.

A spline-ok jó tulajdonságaival ötvözve a legkisebb négyzetek módszerét egy olyan regresszió-számítási módszerhez jutunk, ahol a görbétől megkövetelhetjük a „legkisebb görbületek felvétele” tulajdonságot is. Ehhez meg kell adnunk a

$$\sum_{i=0}^n (y_i - g(x_i))^2 + \lambda \int_{x_0}^{x_n} (g''(x))^2 dx \rightarrow \min \quad [1]$$

szélsőérték feladat megoldását, ahol a  $\lambda$ -t simítási paraméternek nevezzük. Az elvet de Boor általánosította, figyelembe véve a regresszió görbe és adatok szórással való korrekcióját, illetve az illeszkedés rendjének választási lehetőségét:

$$p \sum_{i=0}^n \left( \frac{y_i - g(x_i)}{\sigma_i} \right)^2 + (1-p) \int_{x_0}^{x_n} (g''(x))^2 dx \rightarrow \min \quad [2]$$

ahol a  $p$  paraméter a simítási faktor.

A fenti szélsőérték feladatok megoldását nevezzük *simító spline*-nak.

A k-spline módszert 2008-ban Cudby publikálta (Cudby 2008). A módszert fából épített csónakok és jachtok tervezésére fejlesztették ki, mellyel a későbbiekben még foglalkozunk. A k-spline tipikusan hajótervezésre kifejlesztett spline módszer. A hajótestnek mind a vízbe merülő, mind a víz feletti részét széles körben lehet variálni (1. ábra).

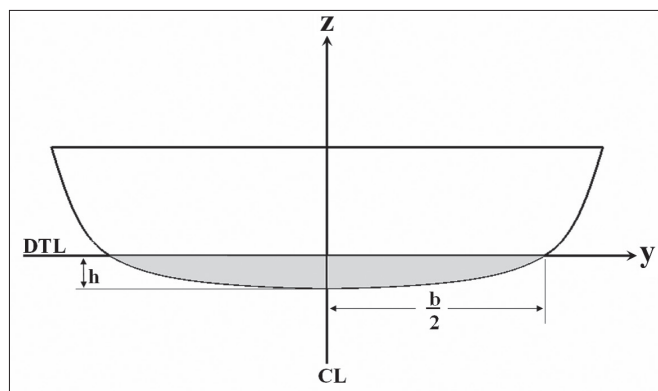
### Fontosabb alkalmazási területek

Talán már nincs is olyan ág a matematika tudományán belül, ahol ne kapna szerepet a spline (geometria, analízis, funkcionál analízis stb.) A számítógépes grafikának jelentős, már-már kihagyhatatlan szereplője. A dizájn/tervező (CAD) és a mérnöki számításokat végző (CAE) rendszerek szereplője. Kevésbé ismert, de a „truetype” fontkészlet is a spline-oknak köszönheti létét, egész pontosan a Bézier- és a racionális Bézier-görbéknek.

A bankszektor a hozamgörbe-számítás, a különböző lejáratú, de azonos kibocsátótól származó hitelpapírok hozamát mutató és összekötő görbék területén használja a spline-okat. A hozamgörbe szinte minden esetben az állampapírok hozamgörbéjét jelenti. A normál hozamgörbe egy növekvő függvény, mivel az egyre hosszabb lejáratú kötvények egyre nagyobb kockázati prémiumot tartalmaznak (hosszabb lejáratú kötvények magasabb hozamot fizetnek). A hozamgörbe változását sokan figyelik, mint a gazdaság várható változásainak előjelét. Egy normálból kiegyenesedő vagy inverzzé váló görbe rossz előjel. A hozamgörbe kisimulását flattening-nek, meredekebbé válását steepening-nek nevezik a kötvénypiacon.

A kockázati prémium meghatározásának napjára az alapkezelő harmadfokú spline módszerrel hozamgörbét illeszt, a magyar állam által kibocsátott fix kamatozású állampapírok legjobb vételi és eladási árfolyamának számtani átlagát felhasználva (Koppányi 2009).

Tőzsdei előrejelzések vizsgálata: az előrejelzés lehet kvantitatív és kvalitatív, azaz a számokon alapuló, illetve minőségi. Ezek közül a kvantitatív előrejelzések az objektívebbek. Attól függően, hogy az adott jelenség okát vagy a múltbeli értékeit tekintjük a vizsgálat alapjának, beszélünk kauzális vagy projektív módszerről. A kauzális módszerek az



**1. ábra** Hajó merülési keresztmetszet és szükséges paraméterek a k-spline-hoz

**Figure 1** Parameters for k-spline in the immersed cross section of the boat

idősorokat használják fel, a múltból (mint egyetlen vizsgált változóból) indulnak ki, azt vizsgálják, majd pedig annak felhasználásával próbálnak a jövőre vonatkozó prognózisokat adni. Míg a projektív módszerek egyik csoportja szerint elfogadható minden előre elrendelt determinisztikus idősor elemzés, addig más módszerek szerint nem elegendő a tendenciák automatikus jövőre való kivetítése, mint például a kiegyenlítő eljárás, sztochasztikus idősor elemzés AR, MA, ARMA modellek (Bajcsay 2012).

A spline-ok felhasználása a determinisztikus trendszámításban a hagyományos függvényformák illesztését helyettesíti, a polinomiális trendekkel szembeni ismert előnye miatt (2. ábra) (Polgárné 2011).

Az időjárás, vízállás-előrejelzés területén a tőzsdei vizsgálatokhoz hasonló köbös spline illesztéssel történnek a becslések, elsődlegesen simító spline-okkal.

Vasútépítés, hibalokalizálás során a vasúti pályatervezésben három klasszikusnak nevezhető fő tervezési görbét alkalmaznak az átmeneti ívekhez (egyenes és köríves szakaszok összekötése): klotoid ív, koszinusz ív és szinusz hiperolikusz ív. A mozgásgeometriai jellemzők vizsgálata a negyedrendű momentumok folytonosságáig és simaságáig lényeges. A mozgásgeometriai jellemzőket a klasszikus deriválási szabályokkal nem lehetséges számolni (a harmadfokú klotoid ív a leggyakrabban alkalmazott megoldás) vagy csak numerikusan lehet közelíteni. A klotoid ív esetén nem lehet a harmad- és negyedrendű jellemzőket klasszikus differenciálgeometriai módszerekkel leírni, mivel a másodrendű jellemző lineáris görbe, azaz a magasabb rendű jellemzők szakadásosak lennének, illetve szingularitással rendelkeznek, miközben ismeretes és feltételezhető a mozgás folyamatosága. Ezért a vizsgálat a kitézési pontokra illeszkedő ötödfokú simító spline-ok segítségével történik, ezáltal a negyedrendű momentumokra is becslést lehet adni.

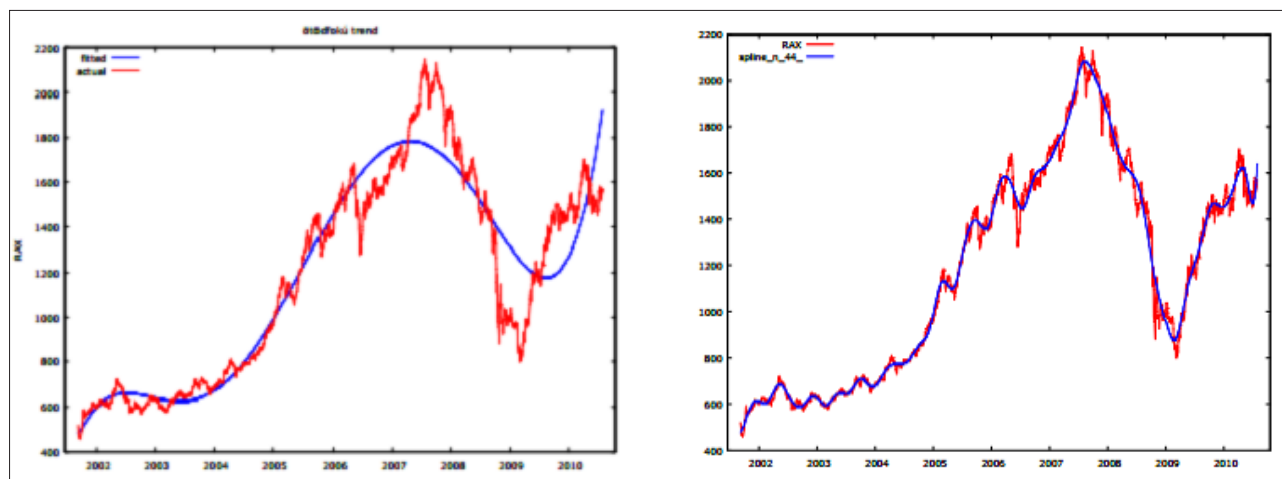
A spline-ok segítségével megoldható másik fontos vizsgálat a hibalokalizálás. A vasúti sínek a használat során elmozdulhatnak. A nagysebességű pályákon a kis kitérés is súlyos problémát okozhat a szerelvények mozgásában (kisiklás). A vizsgált és elmozdult helyeket a simító spline-okkal történő elemzéssel lokalizálni lehet, illetve egyúttal meg lehet adni a hiba mértékét.

### Faipari alkalmazások

A gyors és eredményes tervezés érdekében – kihasználva az informatika robbanásszerű fejlődését – rengeteg cél- és segédprogramot, tervezőszoftverek seregét fejlesztették ki. A következőkben a spline-technika faipari alkalmazásának néhány példája kerül bemutatásra, egy-egy, az adott témát érintő program említésével.

### Terméktervezés

Ha megszületett az ötlet és a dizájnt szeretnénk bemutatni, akkor tökéletes választás a CAD rendszerek használata. Történetileg az első CAD szoftverek 2D rajzolóprogramok voltak. Tulajdonképpen egy intelligens rajztábla funkcióját töltik be. Legismertebb és világszerte leggyakrabban használt képviselőjük az asztali számítógépekre készült AutoCAD. A Bézier-spline-októl kezdve a NURBS-ig, az interpoláció és approximáció választása általában be van építve a programokba (3. és 4. ábra). A spline alkalmazások a legtöbb esetben a



**2. ábra** Ötödfokú trend (bal oldalon) és a harmadfokú spline (jobb oldalon) összehasonlítása (Polgárné 2011)

**Figure 2** Comparison of a fifth degree trendline (left) and third degree spline (right) graphs

díjazn terén jelennek meg az ülőbútorok esetében, így a 3. és 4. ábrán látható ívek tervezésénél használták a spline függvényeket.

Külön kiemelendő egy soproni formatervező művész- és mérnökhallgató sikere a spline-okkal történő tervezésben. Tari Attila, a NymE SKK volt hallgatója hypo-Spline fantáziánévvel egy ergonomikus kialakítású számítógépes terminált fejlesztett ki (5. ábra). Terméke a kényelem és funkció párosítása, mellyel 2008 óta számos díjat elnyert. A termék célközönsége az irodai munkát végzők csoportja, azok a felhasználók, akik naponta 8–10 órát használják a számítógépet (Tari 2008).

### Faszerkezetek mechanikai és statikai vizsgálata VEM segítségével (ANSYS)

Az utóbbi évtizedek egyik leglátványosabban terjedő, nagy hatékonyságú számítástechnikai módszere a véges-elem-módszer (VEM). A mérnöki tervező munkában hatékonyságára való tekintettel kitüntetett szerepet vívott ki (Páczelt és tsai. 2007). Az informatikában beálló gyors fejlődés, a számítógépek kapacitásának, sebességének



**3. ábra** Ülőbútorok tervezése NURBS, illetve spline segítségével (w4)

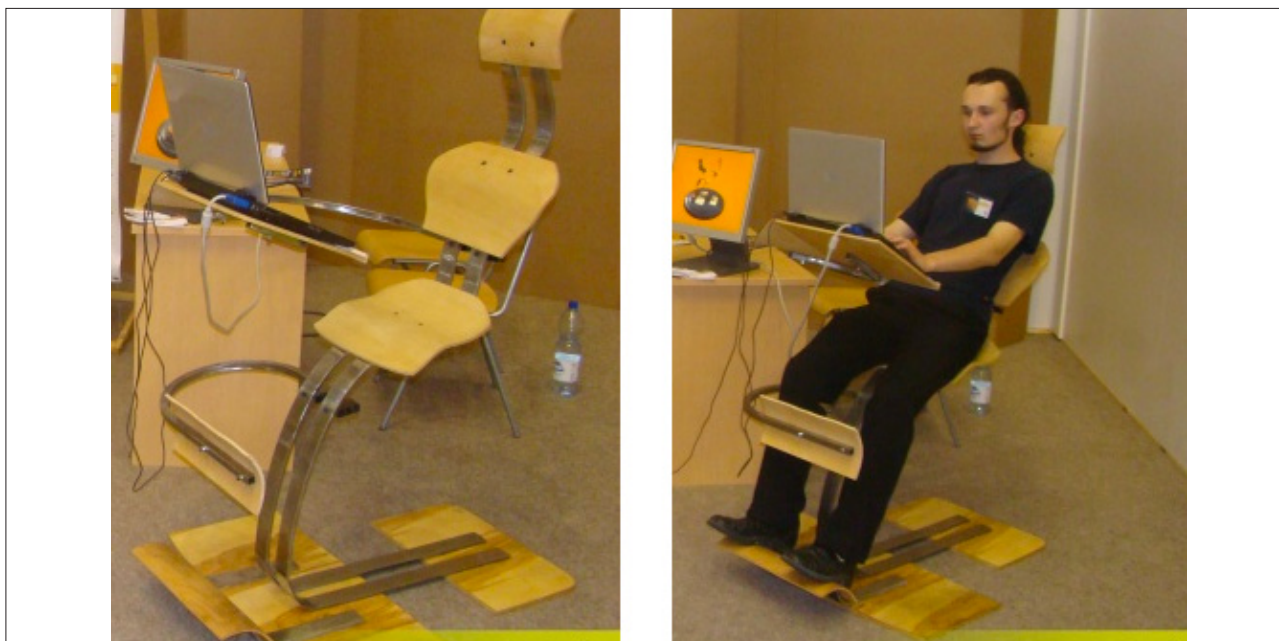
**Figure 3** Design of chairs



**4. ábra** Lépcsők tervezése és egy megvalósított modell

**Figure 4** Design of stairs and an implemented model





**5. ábra** A hypo-Spline szék terve és a tervező a megvalósított termék használata közben

**Figure 5** The design of the hypo-Spline chair and the designer using the product

nagymértékű növekedése és a grafikai műveletek megszervezhetősége a fizikai jelenségek korábbi években még nem látott bonyolultságú modellezésére, gyors számításokra, az eredmények sokoldalú analizálására adnak módot.

A VEM numerikus módszer parciális differenciálegyenletek (PDE) közelítő megoldására alkalmas. Alapvetően a lineáris spline adja a számítások alapját, de vannak magasabb (de nem nagy) fokszámú modellek is. Első lépésben a PDE rendszert energetikai egyenletté alakítja, majd egy diszkrét rácson vett funkcionál minimalizálás után, a lineáris algebra eszközeivel nagyméretű lineáris egyenletrendszer megoldását teszi szükségessé. A rácson kapott függvényértékekből ezután egy geometriai modellt állít elő, szintén alapvetően spline technikával (általában köbös vagy lineáris). A VEM számos CAD/CAE típusú program alapját képezi, egyik neves képviselője az ANSYS.

Az ANSYS egy átfogó szimulációs szoftvercsomag, mely a fizika minden területét átöleli, lehetőséget biztosít valamennyi, gyakorlatban előforduló mérnöki szimulációra, melyet a tervezési, fejlesztési folyamat megkövetel. A Szimuláció Alapú Termékfejlesztés új szintre emeli a mérnöki szimulációt – az ANSYS által nyújtott lehetőségek a benne rejlő tudásmélységgel és tudásszélességgel, a páratlan kapcsolt fizikai lehetőségekkel kiemelkedőek (w5). Az előnyök kiterjesztik a műszaki tervezés lehetőségeit, fokozva ezáltal a hatékonyságot és az innovációt, csökkentve a fizikai korlátokat, és biztosítva olyan tesztek, kísérletek elvégzését is, melyek másképp költséghatékonyan nem lennének megvalósíthatóak.

A végeselem-programok nemcsak látványtervet nyújtanak, hanem pl. statikai (és egyéb fizikai) számításokra is alkalmasak. Az eredményt mind számszerűen, mind grafikusán megjelenítik. A teherbírást a színezés alapján könnyen ellenőrizhetjük (5. ábra).

### Hajótervezés

Végül visszaérkeztünk oda, ahonnan a spline módszer fejlesztése elindult: a hajótervezéshez (6. ábra). Napjainkban is legalább ugyanannyira fontos, hogy gyors, fordulékony, könnyűszerkezetű, nagy teherbírású hajók, csónakok készüljenek, mint az elmúlt évszázadokban. A fából épített konstrukciók ma is a legszebbek. Legjobb példa erre Cudby 2008-ban kidolgozott spline elmélete és a segítségével megépített csónakja. Nagyobb hajók tervezésében a T-spline-ok kapnak kiemelt szerepet (7. ábra).

### Összefoglalás

A leírtakból kiderül, hogy immár számos területen alkalmazzák a különféle spline módszereket, és az alkalmazási területek száma folyamatosan bővül. A faipari terméktervezésben, -fejlesztésben és -kivitelezésben is szerepet kap közvetlen vagy közvetett módon a spline-ok alkalmazása. Az elért sikereken felbuzdulva, korunk

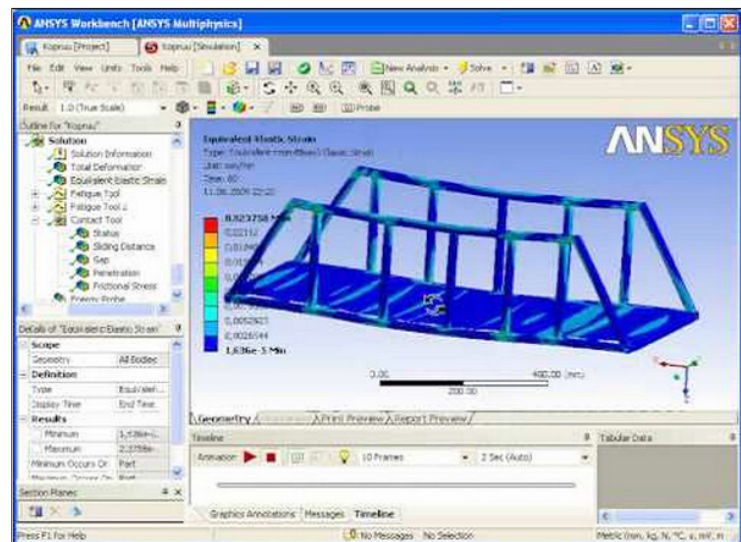
modern tervezési technikáinak és módszereinek megismerési lehetőségét szem előtt tartva fontosnak tartjuk, hogy a felsőoktatásban tanuló mérnök-, művész- és informatikus hallgatók képet kapjanak, kaphassanak a spline-okról és azok alkalmazási lehetőségeiről. Azonban a spline függvények nem csupán mint mérnöki eszközök alkalmazhatók, hanem a tudományos kutatásban is megoldási lehetőségeket kínálnak.

### Köszönetnyilvánítás

Ez a tanulmány a Környezettudatos energia hatékony épület című TÁMOP-4.2.2.A-11/1/KONV-2012-0068 számú projekt keretében, az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

### Irodalomjegyzék

- Bajcsay K. A. (2012) Függvényközelítés szemléltetése AR kóddal, ELTE, diplomamunka, Budapest
- Cudby K. (2008) K-spline: a new curve for advanced hull modelling, Royal Institution of Naval Architects – New Zealand Division, AMSC, Auckland, 3rd High Performance Yacht Design Conference, 74. old.
- Halász G., Huba A. (2003) Műszaki mérések, BME Műegyetemi Kiadó, Budapest
- Páczelt I., Szabó T., Baksa A. (2007) A végeelem-módszer alapjai, a Miskolci Egyetem kiadványa, Miskolc. 7. old.
- Polgárné Hoschek M. (2011) Statisztikai időszorelemzés a tőzsdén, doktori értekezés, NymE KTK Sopron 85.,111. old.
- Kopányi Sz. A. (2009) A hozamgörbe dinamikus becslése, doktori értekezés, BCE, 58. old.
- Schumaker L. (2007) Spline functions: Basic Theory (3. kiadás), Cambridge University Press, Cambridge, UK 373. old.
- Závoti J. (1979) A spline interpoláció alkalmazása a geodéziában, Kozmikus Geodézia, Budapest, 105–126.
- Závoti J. (1980) A spline függvények alkalmazása digitális felületmodellek leírásához, Geodézia és Kartográfia, 32: 409–414.
- Závoti J. (1982) Sopron Surface Modelling by Splines, Proceeding of the Symposium Mathematical Models: Accuracy Aspects and Quality Control Helsinki, 540–551
- Somogyi J., Závoti J. (1981) Anwendung von Spline Funktionen zur Prüfung von Invarband-nivellierlatten. AVN, 88: 213–219
- Tari Attila (2008) Ergonomikus kialakítású számítógépes terminál, Tudományos Diákköri Konferencia, Nyugat-magyarországi Egyetem, Faipari Mérnöki Kar, 2008. december 4.
- (w1) <http://www.phy.bme.hu/~jakovac/Eldin.pdf>
- (w2) <http://kspline.com/>
- (w3) [http://www.cib.hu/system/files/flashCompliant=true&session\\_id=NpxThNZrR6bSuQt4emctb3ol&flashVersion=3&b=121&w=1920&h=1080](http://www.cib.hu/system/files/flashCompliant=true&session_id=NpxThNZrR6bSuQt4emctb3ol&flashVersion=3&b=121&w=1920&h=1080)
- (w4) <http://www.los-list.com/blog/wp-content/uploads/2010/07/UntoThisLastSplineChair.jpg>
- (w5) <http://www.econengineering.com/hu/szoftvereink/ansys.html>
- (w6) <http://orca3d.com/Orca3dJ/>



5. ábra Hídtervezés ANSYS-szel (w5)

Figure 5 Bridge design by ANSYS (w5)