CSOPORTOKRÓL, AMELYEKNEK ÖSSZES NEM-TRIVIÁLIS HATVÁNYAI CIKLIKUS ALCSOPORTOK

SZÁSZ FERENC

Szele Tibor professzor, korán elhunyt szeretett Mesterem emlékének

A korábbi dolgozatok egyikében sikerült leírni az összes olyan csoportot, amelynek bármely ciklikus alcsoportja a tekintett csoportnak bizonyos hatványa, éspedig ez a csoportosztály éppen a ciklikus csoportok osztálya [2]. Most ennek az itt említett csoportelméleti problémának megfelelő duális problémát fogjuk tárgyalni, amelyet egy korábbi dolgozat kéziratának átolvasása után FUCHS LÁSZLÓ professzor vetett fel.

Egy tetszőleges (tehát nem szükségképpen kommutatív) és multiplikatív módon írt *G csoport k-adik hatványa* olyan G^k alcsoport, amelyet a G csoport összes eleme k-adik hatványaiból álló halmaz generál. Ha a k hatványkitevő 1, 0 vagy -1, akkor a G^k hatványt *triviális*nak nevezzük.

Egy tetszőleges G csoportot akkor fogunk *T-tulajdonságú csoport*nak nevezni, ha a G csoportnak bármely nem-triviális hatványa ciklikus. Például bármely ciklikus csoport T-tulajdonságú.

Jelen dolgozatunknak a célja annak megmutatása, hogy *a T-tulajdonság az összes* (vagyis nemcsak a kommutatív) *csoportok közt a ciklikus csoportokat jellemzi.* Tehát az összes nem triviális hatványok csak úgy lehetnek ciklikusak, ha a triviális hatványok is ciklikusak.[1]

Most mindenekelőtt néhány terminológiai megjegyzést teszünk. Minthogy a tekintett csoportok kommutativitását nem tételezzük fel, *multiplikatív* írásmódot használunk. A csoport K részhalmazával generált alcsoportot a $\{K\}$ szimbólummal, a g csoportelem rendjét az $O(g)$ szimbólummal fogjuk jelölni. Egy G csoportot *végesen generált*nak nevezünk, ha van a G csoportnak olyan véges F részhalmaza, amellyel $G=\{F\}$. Végesen generált Abel-féle csoport mindig ciklikus csoportok direkt szorzata. Egy csoportot *torziómentes*nek nevezünk, ha a csoportban az 1 egységelem az egyetlen végesrendű elem. *Torziócsoport*nak az olyan csoportot nevezzük, amelynek minden eleme végesrendű.[2]

Ezek után kimondhatjuk a tételt:

[1] Az természetesen triviális, hogy egy tetszőleges csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha a csoportnak minden (vagyis egyáltalán nem szükségképpen csak a nem-triviális) hatványa ciklikus.

[2] Megjegyezzük, hogy a tárgyalásainkhoz szükséges és más csoportelméleti fogalmakkal és kérdésekkel bővebben foglalkozik például az [1] szakkönyv is.

TÉTEL. *Egy tetszőleges G csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha a G csoport T-tulajdonságú.*

BIZONYÍTÁS. Legyen G tetszőleges T-tulajdonságú csoport. Legyen előbb G torziócsoport, továbbá g ennek tetszőleges eleme és $O(g)=n$. Ha $k>1$ olyan természetes szám, amelyre $(n, k)=1$ teljesül, akkor létezik olyan r természetes szám, amely kielégíti a $kr \equiv 1 \pmod n$ kongruenciát. Van olyan h elem a G csoportban, hogy $G^k=\{h\}$. Ezért valamilyen m kitevővel fennáll a $g^k=h^m$ egyenlet, amiből $g=h^{mr}$ következik. Tehát $g \in \{h\}$ ennélfogva $G=\{h\}$.

Ha pedig a G csoport tartalmaz végtelenrendű elemeket is, akkor a $G^2=\{a\}$ és $G^3=\{b\}$ egyenletekben szereplő a és b elem nyilván végtelenrendű. A k-adik csoporthatvány definíciója szerint a G^k alcsoport a G csoportban normálosztó, ezért $\{a\}$ és $\{b\}$ is normálosztó. Ekkor van olyan r és s kitevő, hogy $b^2=a^r$ és $b^{-1}ab=a^s$, ennélfogva írhatjuk, hogy $b^2=b^{-1}a^rb=$ $=(b^{-1}ab)^r=a^{rs}=b^{2s}$, ami csak úgy lehetséges, ha $2s=2$ és $s=1$, vagyis $ab=ba$. Legyen most x tetszőleges elem a G csoportban, akkor $x=x^{-2}\cdot x^3$ és $x^2 \in \{a\}=G^2$ illetve $x^3 \in \{b\}=G^3$ miatt nyilván $G=\{a, b\}$, vagyis G T-tulajdonságú végesen generált torziómentes Abel-féle csoport. Ezért a G csoport a végesen generált Abel-féle csoportok alaptétele szerint csak úgy lehet T-tulajdonságú, ha ciklikus.

Fordítva, természetesen minden ciklikus csoport T-tulajdonságú, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

Végül hálás köszönetet mondok FUCHS LÁSZLÓ professzornak, hogy ezt a csoportelméleti problémát számomra szives volt felvetni, továbbá ezen dolgozat kéziratának elolvasása után dolgozatommal kapcsolatos értékes javaslatait és észrevételeit is szives volt megtenni.

Debrecen.

IRODALOM

[1] A. G. KUROS, Теория групп, Москва (1953).

[2] F. SZÁSZ, On groups every cyclic subgroup of which is a power of the group, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (Sajtó alatt.)