

JÁRMŰVEK ÉS SZERKEZETEK DINAMIKAI KÖLCSÖNHATÁSÁNAK SZÁMÍTÁSI MODELLJEI

GYÖRGYI JÓZSEF*

A rezgés tan egyik klasszikus feladata a gerendatartón egyenletes sebességgel haladó erő okozta dinamikus hatások számítása. Ennek során meghatározhatók a különböző dinamikus hatásábrák és számíthatók a maximális elmozdulások és igénybevételek. Ezek akkor keletkeznek, amikor az erő a tartón tartózkodik. Amint az erő a tartót elhagyja, a rezgések a mindig meglévő szerkezeti csillapítás miatt csökkenni fognak. Ez az oka annak, hogy a rezgés ezen második szakaszával (a szabadrezgéssel) az irodalom kevésbé foglalkozik. Más a helyzet azonban akkor, ha a tartón a már áthaladt erők okozta szabadrezgések és a tartón még tartózkodó erők okozta gerjesztő hatások együttesen megjelennek. A rezgésösszetevők között a szabadrezgésnek megfelelő harmonikus rezgés hullámhossza a rezgés sebességétől függ, és különösen fontos annak az esetnek a vizsgálata, amikor az erők állandó távolságra vannak egymástól, mivel ebben az esetben az egyes erők hatása egymást erősítheti. A geometriai elrendezéstől függően meghatározható egy kritikus járműsebesség, amelyhez a legnagyobb dinamikai hatások tartoznak. A valóságban egy tartón nem erők, hanem tömeggel rendelkező szerkezetek (járművek) mozognak. A mozgó tömeg hatással van a dinamikai rendszer jellemzőire is, különösen akkor, ha a mozgó tömeg a szerkezet tömegéhez képest jelentős. Ez a helyzet a vasúti hidak esetén fennáll. Végül a dinamikai hatást befolyásolhatják a járműrendszer dinamikai paraméterei (merevségi és csillapítási jellemzői) is. A cikk célja a számítási algoritmusok megadásán túl a különböző mechanika modellekkel kapott számítási eredmények elemzése is.

Kulcsszavak: szerkezet-jármű dinamikai rendszer, időfüggő mátrixok, kritikus járműsebesség

1. RÚD ÁLLANDÓ SEBESÉGGEL MOZGÓ ERŐ OKOZTA HAJLÍTÓ REZGÉSE

1.1 REZGÉSEK A MOZGÓ ERŐ RÚDON VALÓ HALADÁSAKOR

Legyen a rúd állandó keresztmetszetének területe A [m²], míg a hajlítás tengelyére számított inercianyomatéka I [m⁴], a rúd anyagának rugalmassági modulusa

* Egyetemi docens. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Építőmérnöki Kar, Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék. 1111 Budapest, Műegyetem rakpart 3. Km. 52. Tel.: 463-1432; e-mail: gyorgyi@ep-mech.me.bme.hu

E [kN/m²] és anyagának sűrűsége ρ [t/m³]. A rúd hajlító csillapítatlan rezgéséhez tartozó differenciálegyenlet (elhanyagolva a nyírási alakváltozásnak, a rúdban lévő statikus normálerőnek és az elfordulási tehetetlenségnek a hatását) a rúdon v állandó sebességgel mozgó, rúdra merőleges F erő esetéhez tartozó megoldását Timoshenko (1955) alapján ismertetjük. A rezgés differenciálegyenlete:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = F \delta(x - vt). \quad (1)$$

Itt $v(x, t)$ a rúd tengelyének eltolódása, míg $\delta(x - vt)$ Dirac delta függvény a definíció szerint:

$$\delta(x - vt) = 0 \quad \text{ha } x \neq vt, \quad \text{és} \quad \int_0^l \delta(x - vt) dx = 1. \quad (2)$$

A megoldást $v(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) \eta_r(t)$ alakban keresve, ahol $v_r(x)$ rúd r -edik – a rúd tömegére redukált – r -edik sajátrezgésalakja, míg az egyes $\eta_r(t)$ függvények az

$$\ddot{\eta}_r(t) + \omega_{0r}^2 \eta_r(t) = N_r(t) \quad (3)$$

differenciálegyenlet megoldásából számíthatók, ahol

$$N_r(t) = \int_0^l v_r(x) F \delta(x - vt) dx = v_r(vt) F, \quad (4)$$

és ω_{0r} a gerenda r -edik sajátkörfrekvenciája. Kéttámaszú tartó esetén $v_r(x) = \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \sin \frac{r\pi x}{l}$ és a hozzátartozó sajátkörfrekvencia $\omega_{0r} = \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$, így

$$N_r(t) = F \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \sin \frac{r\pi v}{l} t. \quad (5)$$

Azt az esetet vizsgálva, amikor a kezdeti elmozdulás és a kezdeti sebesség zérus, a (3) alatti differenciálegyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} \eta_r(t) &= \frac{1}{\omega_{0r}} \int_0^t N_r(\tau) \sin \omega_{0r}(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{F}{\omega_{0r}} \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \frac{1}{\left(\frac{r\pi v}{l} \right)^2 - \omega_{0r}^2} \left(\frac{r\pi v}{l} \sin \omega_{0r} t - \omega_{0r} \sin \frac{r\pi v}{l} t \right). \end{aligned} \quad (6)$$

A rúd elmozdulása pedig:

$$v(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) \eta_r(t) = \frac{2F}{\mu l} \sum_{r=1}^{\infty} \sin \frac{r\pi x}{l} \frac{1}{\omega_{0r}^2 - \frac{(r\pi v)^2}{l^2}} \left(\sin \frac{r\pi v}{l} t - \frac{r\pi v}{l\omega_{0r}} \sin \omega_{0r} t \right) \quad (7)$$

A (7)-es kifejezésben szerepel az $\frac{1}{\omega_{0r}^2 - \frac{(r\pi v)^2}{l^2}}$ tényező, amelyben a nevező a

sebesség meghatározott értékeinél zérus lesz. Az ún. kritikus sebességek:

$$\hat{v}_r = \frac{r\pi}{l} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \omega_{0r} \frac{l}{r\pi}. \quad (8)$$

Látható, hogy a legkisebb kritikus sebesség az első rezgésalakhoz tartozik, míg azonos sajátkörfrekvenciákkal rendelkező különböző fesztávolságú hidaknál a kritikus sebesség a fesztávolsággal arányosan növekszik.

A kritikus sebességek esetén a zérussal való osztás miatt a (7) alatti megoldás nem érvényes, a megoldás ekkor:

$$v_r(x, t) = \frac{F}{\mu \hat{v}_r \pi} \sin \frac{r\pi x}{l} \left(\frac{1}{\omega_{0r}} \sin \omega_{0r} t - t \cos \frac{r\pi \hat{v}}{l} t \right). \quad (9)$$

Vagyis a megoldásban – a zárójelben – megjelenik egy időben növekvő tag. Mivel az erő az adott sebesség esetén legfeljebb $t_{\max, r} = \frac{l}{\hat{v}_r}$ ideig tartózkodik a tartón, az amplitúdónövekedés korlátozott lesz. Behelyettesítések után:

$$v_r(x, t)_{\max} = (-1)^{r-1} \frac{Fl^3}{\pi^3 r^3 EI} \sin \frac{r\pi x}{l}. \quad (10)$$

Ha a számítás során csak az első rezgésalakkal számolunk és az elmozdulást a tartó közepén számítjuk $\left(x = \frac{l}{2}\right)$, a sinus függvény abszolút értéke 1 lesz és a megoldás:

$$v\left(\frac{l}{2}, t\right)_{\max} = \frac{Fl^3}{\pi^3 EI}. \quad (11)$$

Az ábrából látható, hogy a különböző rezgésebbességekhez különböző alakú hatásábrák tartoznak. Különösen nagy az eltérés az ábráknak a tartóvéghez tartozó ordinátaiban, ami azt jelzi, hogy a tartó közepének elmozdulása lényegesen eltér a különböző sebességek esetén akkor, amikor az erő elhagyja a tartót. Ennek oka, hogy a (7)-es kifejezésben szereplő két tag közül a második tag amplitúdója a sebességgel arányosan növekszik.

1.2 A RÚD MOZGÓ ERŐ OKOZTA SZABADREZGÉSE

A statikus terheléssel ellentétben a mozgó erőből akkor is lesz elmozdulás, amikor az erő már elhagyta a tartót. A szerkezet ekkor szabad rezgést végez, mégpedig a tartót elhagyó erő okozta kezdeti feltételeknek megfelelően. A szabadrezgés differenciálegyenlete:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (13)$$

A megoldás a tömegre normált rezgésalak segítségével most is

$$v(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) \eta_r(t) \quad (14)$$

alakban kereshető, ahol az $\eta_r(t)$ az

$$\ddot{\eta}_r(t) + \omega_{0r}^2 \eta_r(t) = 0 \quad (15)$$

egyszabadságfokú rendszer megoldásából adódik:

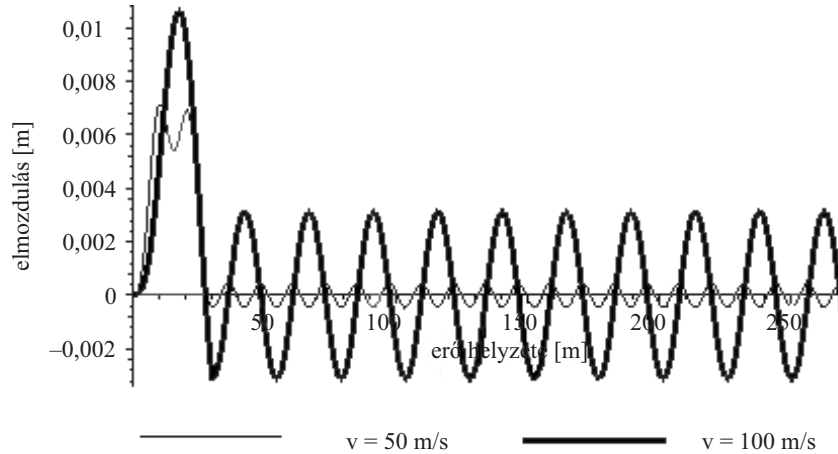
$$\eta_r(t) = \eta_r(0) \cos \omega_{0r} t + \frac{\dot{\eta}_r(0)}{\omega_{0r}} \sin \omega_{0r} t. \quad (16)$$

Itt $\eta_r(0)$ és $\dot{\eta}_r(0)$ a (6)-os összefüggésből, illetve annak deriváltjából az erőnek a tartó elhagyásának időpontjában számítható kezdeti értékek. A dinamikus elmozdulási hatásábrának a tartón túli szakasza ezek után a (14)-es összefüggésből számítható.

A 3. ábrán egy olyan hatásábrát látunk, amely mindkét fentebb említett szakaszt tartalmazza. Megfigyelhető, hogy a szabadrezgés szakaszon a sebességnek jelentősebb a szerepe. Ezt a (7)-es összefüggés elemzésével indokolhatjuk. A kife-

jezésben szereplő $\frac{1}{\omega_{0r}^2 - \frac{(r\pi v)^2}{l^2}}$ tényezőben a nevezőben a nagyobb sebességnél a

két tag különbsége és így a tényező növekszik. Ugyanakkor a zárójelben a másodikként szereplő (és a második szakasz kezdeti feltételét adó) tag – amint korábban már említettük – a sebességgel arányosan növekszik.



3. ábra. Szabadrezgést is tartalmazó dinamikus hatására

1.3 A SZERKEZETI CSILLAPÍTÁS HATÁSA A RÚD MOZGÓ ERŐ OKOZTA SZABADREZGÉSÉRE

A frekvenciafüggetlen belső csillapítást Györgyi (1985) által alkalmazott ekvivalens Kelvin-Voigt modellel figyelembe véve a szabadrezgés differenciálegyenlete:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{\omega_{0r}} EI \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (17)$$

Itt $\gamma = \frac{\vartheta}{\pi}$, ahol ϑ a csillapítás logaritmikus dekrementuma. Kifejezhető a γ csillapítási jellemző az ún. %-os csillapítással is, ekkor $\gamma = \frac{\alpha[\%]}{\pi}$.

A megoldást $v(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) \eta_r(t)$ alakban keresve, most az

$$\ddot{\eta}_r(t) + \gamma \omega_{0r} \dot{\eta}_r(t) + \omega_{0r}^2 \eta_r(t) = 0$$

egyszabadságfokú rendszernek a kezdeti feltételeket kielégítő megoldását kell meghatározni, amely Györgyi (2003) szerint:

$$\eta_r(t) = e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{0r}^* t} \left(\eta_r(0) \cos \omega_{0r}^* t + \left(\frac{\dot{\eta}_r(0)}{\omega_{0r}^*} + \frac{\gamma}{2} \eta_r(0) \right) \sin \omega_{0r}^* t \right)$$

Itt $\omega_{0r}^* = \omega_{0r} \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}$. Ezek után:

$$v(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \sum_{r=1}^{\infty} \sin \frac{r\pi x}{l} e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{0r}^* t} \left(\eta_r(0) \cos \omega_{0r}^* t + \left(\frac{\dot{\eta}_r(0)}{\omega_{0r}^*} + \frac{\gamma}{2} \eta_r(0) \right) \sin \omega_{0r}^* t \right). \quad (18)$$

Az állandó sebességgel mozgó erővel való gerjesztésnek megfelelő inhomogén differenciálegyenlet:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\gamma}{\omega_{0r}} EI \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = F \delta(x - vt). \quad (19)$$

A megoldást $v(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) \eta_r(t)$ alakban keresve most az

$$\ddot{\eta}_r(t) + \frac{\gamma}{\omega_{0r}} \omega_{0r}^2 \dot{\eta}_r(t) + \omega_{0r}^2 \eta_r(t) = N_r(t) \quad (20)$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk, ahol $N_r(t)$ a (4) kifejezés szerinti. Ennek az egyszabadságfokú rendszernek a kezdeti feltételeket kielégítő megoldása (Györgyi 2003):

$$\begin{aligned} \eta_r(t) = e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{0r}^* t} \left(\eta_r(0) \cos \omega_{0r}^* t + \left(\frac{\dot{\eta}_r(0)}{\omega_{0r}^*} + \frac{\gamma}{2} \eta_r(0) \right) \sin \omega_{0r}^* t \right) + \\ + \frac{1}{\omega_{0r}^*} \int_0^t N_r(\tau) \sin \omega_{0r}^* (t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

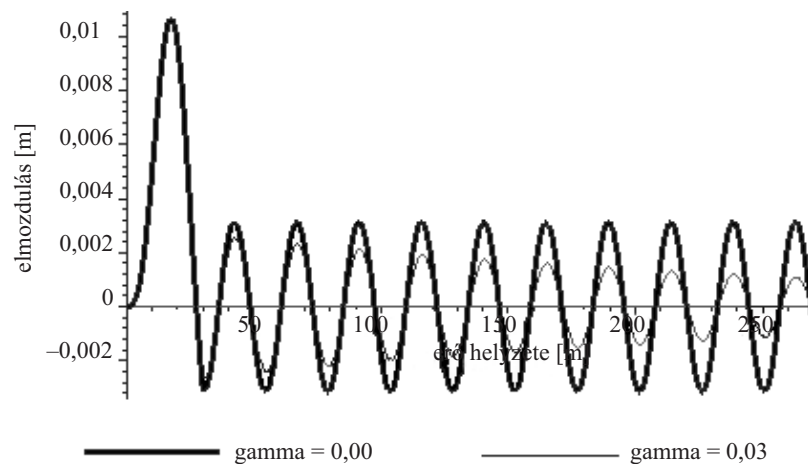
Az $N_r(t)$ -re vonatkozó (5) alatti harmonikus függvényt behelyettesítve a $\varphi = \arctg \frac{\gamma \sqrt{km\omega}}{k - m\omega^2}$ jelölést alkalmazva, és a felhasználva a csillapított rezgésekre levezetett (Györgyi 2003) összefüggéseket a zérus kezdeti feltételek esetéhez tartozó megoldás:

$$\eta_r(t) = \frac{1}{\omega_{0r}^2} F \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}}} \times \\ \times \left\{ e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{0r}^* t} \left[\sin \varphi \cos \omega_{0r}^* t + \left(\frac{\gamma}{2} \sin \varphi - \frac{\omega}{\omega_{0r}^*} \cos \varphi \sin \omega_{0r}^* t \right) \right] + \sin(\omega t - \varphi) \right\}. \quad (22)$$

A sebességre vonatkozó összefüggés pedig

$$\dot{\eta}_r(t) = \frac{1}{\omega_{0r}^2} F \sqrt{\frac{2}{\mu l}} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}}} \times \\ \times \left\{ -\frac{\gamma}{2} \omega_{0r}^* e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{0r}^* t} \left[\sin \varphi \cos \omega_{0r}^* t + \left(\frac{\gamma}{2} \sin \varphi - \frac{\omega}{\omega_{0r}^*} \cos \varphi \sin \omega_{0r}^* t \right) \right] + \right. \\ \left. + e^{-\frac{\gamma}{2} \omega_{0r}^* t} [-\omega_{0r}^* \sin \varphi \sin \omega_{0r}^* t + (-\omega \cos \varphi \cos \omega_{0r}^* t) + \omega \cos^* \omega t - \varphi] \right\}. \quad (23)$$

A (22)-es és (23)-as kifejezésekből lesznek számíthatók ($t = \frac{l}{v}$ behelyettesítéssel) a szabadrezgésre vonatkozó (18)-as kifejezésben szereplő $\eta_r(0)$ és $\dot{\eta}_r(0)$ kezdeti feltételek, a (22)-es kifejezés felhasználásával pedig a $v(x, t) = \sum_{r=1}^{\infty} v_r(x) \eta_r(t)$ egyenlőségből felírható az inhomogén differenciálegyenlet megoldása. A 4. ábrán láthatjuk a csillapításnak a dinamikus hatásábrára gyakorolt hatását.



4. ábra. Dinamikus hatására csillapítatlan és csillapított rezgés esetén

Az alkalmazott (a vonatkozó előírásokban megadott) 1,5%-os csillapítás nem jelentős, és a gerjesztett rezgésnek megfelelő tartófeletti szakaszon a hatása az ábrában az adott vonalvastagságok esetén nem is látszik. Ugyanakkor a szabadrezgésnek megfelelő szakaszon jól látható a szabadrezgés amplitúdójának csökkenése.

2. RÚD HAJLÍTÓ REZGÉSE ÁLLANDÓ SEBESSÉGGEL MOZGÓ ERŐK HATÁSÁRA

2.1 REZGÉSEK AZONOS TÁVOLSÁGRA LÉVŐ ERŐKBŐL

A dinamikus hatásábrában a szabadrezgéshez tartozó szakaszon meghatározó szerepe van az első rezgésalaknak. A hatásábrában látható csúcspontok közötti távolság a rezgésidő és a sebesség segítségével számítható:

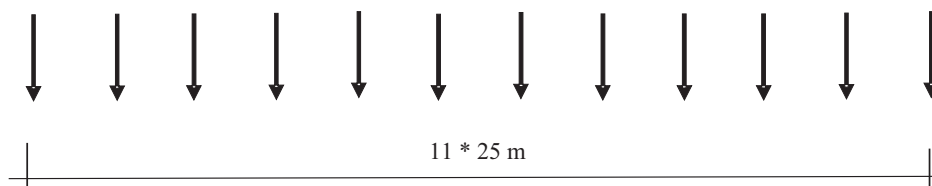
$$d = v \cdot T_{01}. \quad (24)$$

A gyakorlatban az erők közötti távolság adott, így számítható az a sebesség, amelynél az erőknek a hatására csúcspontjaira való egyidejű esése miatt jelentős hatásra számíthatunk. Ezt a sebességet a továbbiakban kritikus erőcsoport-sebességnek nevezzük.

$$v_{\text{kr,erő}} = \frac{d}{T_{01}} = d \cdot n_{01}. \quad (25)$$

Elvileg az erők akkor is eshetnek egyidejűleg a hatására-csúcspontokra, ha a sebesség a kritikus sebesség egész számmal osztott értékével azonos. Ezen másodlagos kritikus sebességeknél azonban a dinamikus hatás lényegesen kisebb lesz, mint $v_{kr,erő}$ esetén.

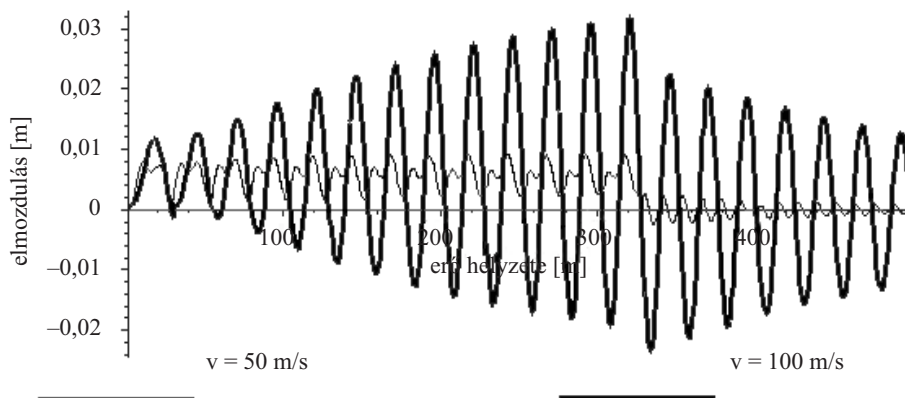
Az 5. ábrán lévő erőcsoportnál az erők közötti távolság 25 m, míg az 1. ábrán látható hídnál az első rezgésalakhoz tartozó frekvencia $n_{01} = \frac{25,38}{2\pi} = 4,04$ Hz. A kritikus erőcsoport-sebesség: $v_{kr,erő} = 25 \cdot 4,04 = 101$ m/s. Az erők nagysága 544 kN.



5. ábra. Azonos távolságra lévő erők

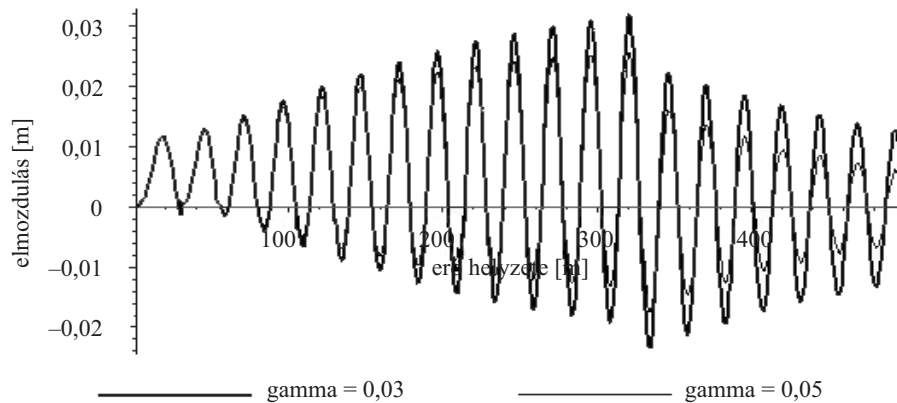
A 6. ábra mutatja a tartó középső pontjának lehajlását az első erő helyzetének függvényében $v = 100$ m/s és $v = 50$ m/s nagyságú sebességek esetén.

Jól látható, hogy a lehajlás addig növekszik, amíg az utolsó erő el nem hagyja a tartót. Ezt követően a csillapítás hatására az elmozdulás csökkenni fog. Az amplitúdók folyamatos növekedése a tartóról lekerült erők okozta utórezgések összegződéséből keletkezett.



6. ábra. A tartó középpontjának elmozdulása azonos távolságra lévő erőkől álló erőcsoport hatására

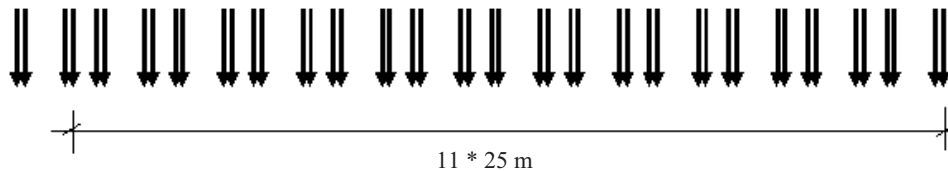
A szabadrezgés csillapodó, és nagyságát jelentősen befolyásolja a szerkezeti csillapítás felvett értéke. A 7. ábrán láthatjuk a csillapítás hatását, ha a szerkezeti csillapításnál az eredetileg felvett 1,5%-os csillapítás mellett 2,5%-os csillapítással is elvégezzük a számításokat.



7. ábra. A szerkezeti csillapítás értékének hatása a tartó középpontjának elmozdulására

2.2 REZGÉSEK AZONOS TÁVOLSÁGRA LÉVŐ ERŐCSOPORTOKBÓL

A 8. ábrán egy tizenkét – azonos geometriájú (25 m hosszúságú), négy tengellyel rendelkező – motorkocsiból álló vonatról – a kerekeken keresztül – átadódó erőket látjuk.

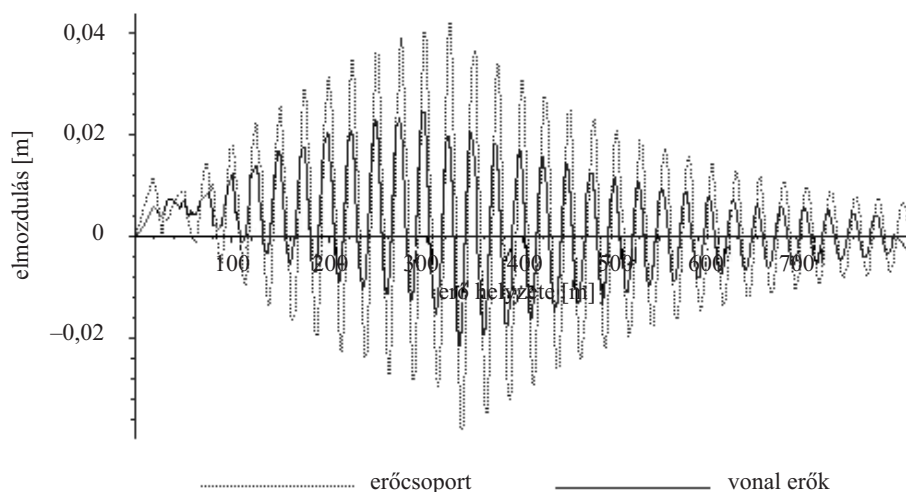


8. ábra. Azonos távolságra lévő erőcsoportok

Az egy járműhöz tartozó erőket a továbbiakban erőcsoportnak fogjuk nevezni. Az egyes erőcsoportokban lévő erők azonos – 136 kN – nagyságúak, és összegük megegyezik a motorkocsi hosszának megfelelő – az 5. ábrán látható – egyes erők nagyságával. Vagyis a hídon ugyanakkora teher halad át.

Belátható, hogy a különböző erőcsoportokban lévő azonos pozíciójú erők most is ugyanaz a kritikus sebesség adódik, mint az erőcsoport hosszának megfelelő erőből álló – az 5. ábrán látható – rendszer esetében. Ugyanakkor a dinamikus hatás kisebb lesz, hiszen az egyes erőcsoportokban lévő négy erő egyidejűleg nem lehet a dinamikai hatására adott maximális ordinátája felett.

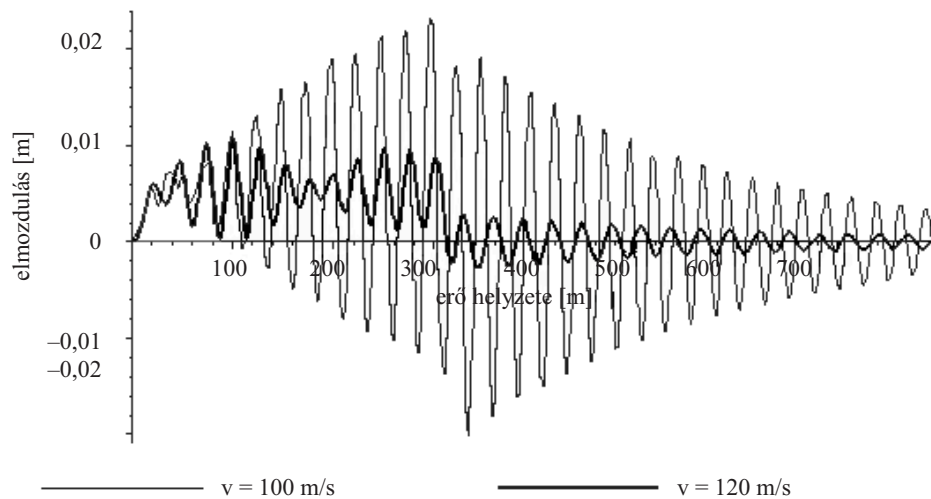
A tartó középpontjának a koncentrált erőből, illetve az erőcsoportokból keletkező elmozdulásait az első erő helyzetének függvényében a 9. ábra mutatja.



9. ábra. A tartó középpontjának elmozdulása szabályos elrendezésű erők és erőcsoportok hatására

A kritikus járműsebesség egy adott érték, amely esetén az ismétlődő terhelés hatására rezonanciaszerű jelenség alakul ki, és ez vezet a jelentős dinamikus terheléshez. Bár általában elmondható – a (7)-es összefüggés alapján –, hogy a dinamikus hatás a sebesség növekedésével nő, most a szabályos elrendezésű terhelés esetén mégis azt tapasztaljuk, hogy nagyobb sebességhez kisebb dinamikus hatás tartozhat. A 10. ábrán együtt láthatók a 100 m/s kritikus sebességhez, valamint a 120 m/s sebességhez tartozó elmozdulások.

Az ábra szerint a kezdeti erőhelyzetben a nagyobb sebességhez nagyobb dinamikus hatás tartozik, de a későbbiekben a szabályos ismétlődések miatt a kritikus sebességhez tartozó elmozdulás lesz a nagyobb. A két ábra hasonló azokhoz az ábrákhoz, amelyeket az egy szabadságfokú rendszerek rezgésszámításánál a rezonancia, illetve a lebegés esetén megismertünk.



10. ábra. A tartó középpontjának elmozdulása két különböző sebességnél

3. SZERKEZETEK REZGÉSE ÁLLANDÓ SEBESSÉGGEL MOZGÓ ERŐK HATÁSÁRA

A fentiekben állandó keresztmetszetű rúdon mozgó erők dinamikai hatását vizsgáltuk, és a rúd differenciálegyenletét oldottuk meg különböző kezdeti feltételek esetén. Tetszőleges geometriájú szerkezetek vizsgálatára a végelemek módszerét alkalmazhatjuk, és ebben az esetben feladatunk az

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{r}(t) \quad (26)$$

mátrix-differenciálegyenlet megoldása. Az egyenletben \mathbf{M} a szerkezet tömegmátrixa, \mathbf{K} a szerkezet merevségi mátrixa, $\mathbf{r}(t)$ az időben változó tehervektor, \mathbf{u} a szerkezet csomópontjainak elmozdulásvektora, míg \mathbf{C} a szerkezeti csillapítással ekvivalens, sebességgel arányos csillapítási mátrix. Az ekvivalens csillapítási mátrix Györgyi (1985) szerint:

$$\mathbf{C} = \gamma \mathbf{M} \mathbf{V} \left\langle \frac{1}{\omega_{0r}} \right\rangle \mathbf{V}^T \mathbf{K}. \quad (27)$$

Itt a \mathbf{V} mátrixban a csillapítatlan rendszer tömegmátrixra normált ($\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{E}$) sajátvektorai vannak.

A mátrix-differenciálegyenlet megoldására használhatjuk pl. a Wilson- Θ numerikus integrálási módszert (Bathe és Wilson 1976). Ekkor minden $t + \theta\Delta t$ időlépésben meg kell oldanunk egy

$$\left(\mathbf{K} + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\theta\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}_{t+\theta\Delta t} = \mathbf{r}_{t+\theta\Delta t} +$$

$$+ \mathbf{M} \left(\frac{6}{(\theta\Delta t)^2} \mathbf{u}_t + \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t + 2\ddot{\mathbf{u}}_t \right) + \mathbf{C} \left(\frac{3}{\theta\Delta t} \mathbf{u}_t + 2\dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}_t \right) \quad (28)$$

alakú lineáris egyenletrendszer (θ az eljárás stabilitását biztosító paraméter). Jól látható, hogy az eljárás alkalmazása során az egyenletrendszer együtthatómátrixa nem változik, így azt a számításban csak egyszer kell felbontani. A (27) szerint szükség van a csillapítatlan eset sajátvektoraira. Ha ezek úgyis megvannak, akkor az adott felépítésű csillapítási mátrix esetén – az elmozdulásvektort $\mathbf{u} = \mathbf{V}\mathbf{x}$ alakban keresve – a (26) alatti mátrixegyenlet

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{x}} + \nu \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \left\langle \frac{1}{\omega_{0r}} \right\rangle \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{x} = \mathbf{V}^T \mathbf{r} = \mathbf{q} \quad (29)$$

alakba írható.

Figyelembe véve a sajátvektorok tömegmátrixra, illetve a merevségi mátrixra való ortogonalitását, a többszabadságfokú rendszert egyszabadságfokú rendszerekre lehet bontani, és így független egyszabadságfokú rendszereket lehet számítani. A módálanálízis alkalmazáskor az r -edik egyszabadságfokú egyenlet:

$$\ddot{x}_r + \gamma \omega_{0r} \dot{x}_r + \omega_{0r}^2 x_r = q_r, \quad (30)$$

ahol $q_r = \mathbf{v}_r^T \mathbf{r}$.

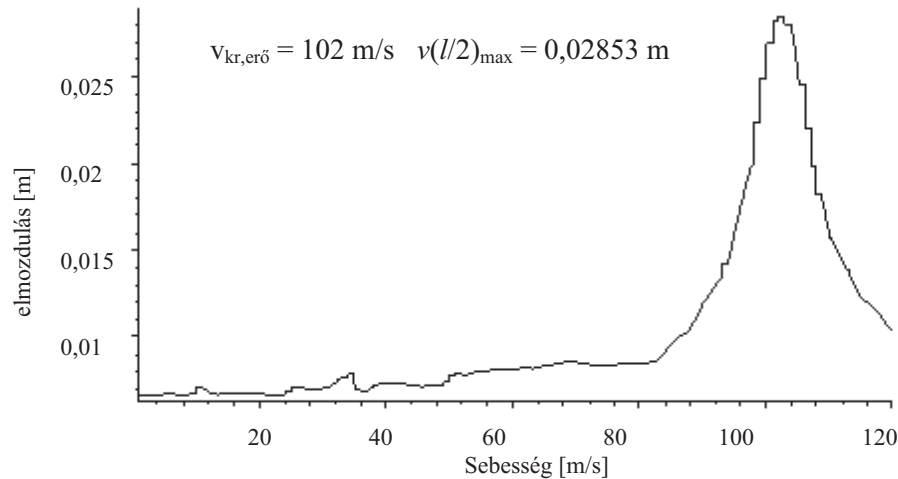
A megoldást tovább egyszerűsíti, hogy a kellő pontosságú megoldáshoz nincs szükség az összes sajátvektorra, vagyis a sajátvektorok számításánál is elegendő a részleges sajátérték-feladat megoldás.

A (28) alatti egyenlet megoldására szolgáló numerikus integrálás során megoldandó egyszabadságfokú rendszer

$$\left(\omega_{0r}^2 + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} + \frac{3}{\theta\Delta t} \gamma \omega_{0r} \right) x_{r,t+\theta\Delta t} = q_{r,t+\theta\Delta t} + \frac{6}{(\theta\Delta t)^2} x_{r,t} + \frac{6}{\theta\Delta t} \dot{x}_{r,t} +$$

$$+ 2\ddot{x}_{r,t} + \omega_{0r} \left(\frac{3}{\theta\Delta t} x_{r,t} + 2\dot{x}_{r,t} + \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{x}_{r,t} \right). \quad (31)$$

Az 1. ábrán látható szerkezet esetén a 8. ábrán megadott erőcsoportból számítottuk a középső pont lehajlását a járműsebesség függvényében. Az eredmény a 11. ábrán látható.



11. ábra. A tartó középpontjának elmozdulása különböző sebességeknél

4. SZERKEZETEK REZGÉSE ÁLLANDÓ SEBESSÉGGEL MOZGÓ TÖMEGPONTOK HATÁSÁRA

A fentiekben a járművet mozgó erőcsoporttal helyettesítettük. A valóságban egy vasúti hídon a – hídon egyidejűleg tartózkodó – járműrendszer tömege akár 50%-a is lehet a híd tömegének.

A dinamikai rendszerben lévő tömeg jelentős változása megváltoztatja a dinamikai jellemzőket is. A változás ebben az esetben nemcsak mennyiségi, mivel a rendszer tömegmátrixa most időfüggő lesz. A rezgés mátrix-differenciálegyenlete most

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}_1(t))\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{r}(t) \quad (32)$$

alakú lesz.

A Wilson- Θ eljárás most is alkalmas a feladat megoldására, de a (28)-as egyenletben az együtthatómátrix minden időpillanatban más lesz, és így minden időlépésben el kell végezni annak felbontását, ami nagymértékben növeli a számítási

időt. Az elmozdulásvektort most is kereshetjük $\mathbf{u} = \mathbf{V}\mathbf{x}$ alakban, de a (32)-es egyenlet nem lesz diagonalizálható.

A behelyettesítést elvégezve és a mátrixegyenletet balról \mathbf{V}^T mátrixszal szorozva a

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{V}^T \mathbf{M}_1(t) \mathbf{V} \ddot{\mathbf{x}} + \gamma \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \left\langle \frac{1}{\omega_{0r}} \right\rangle \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{x} = \mathbf{V}^T \mathbf{r} = \mathbf{q} \quad (33)$$

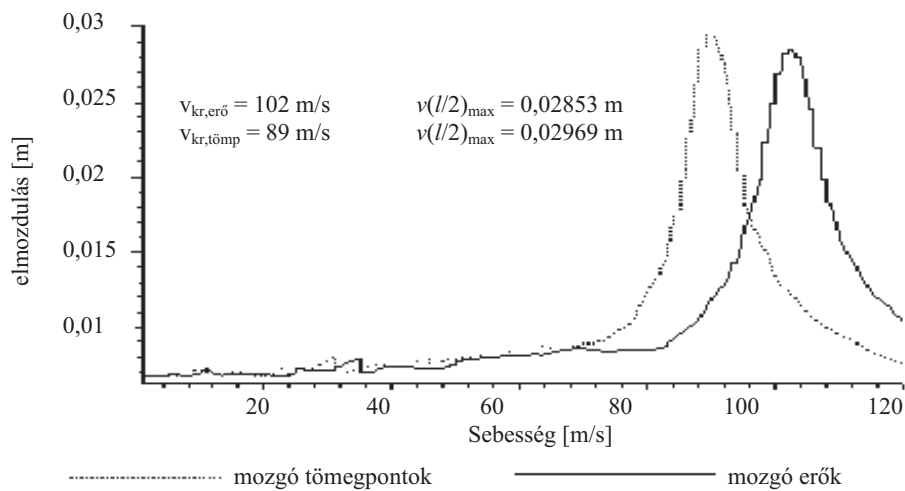
egyenletben megjelenik a $\mathbf{B}(t) = \mathbf{V}^T \mathbf{M}_1(t) \mathbf{V}$ mátrix. A Wilson- Θ numerikusintegrálási módszert alkalmazva a (33)-as egyenlet esetén a megoldandó egyenletrendszer Györgyi (1994) szerint:

$$\left[\mathbf{D} + \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} \mathbf{B}_{t+\theta \Delta t} \right] \mathbf{x}_{t+\theta \Delta t} = \mathbf{q}_{t+\theta \Delta t} + (\mathbf{B}_{t+\theta \Delta t} + \mathbf{E}) \left(\frac{6}{(\theta \Delta t)^2} \mathbf{x}_t + \frac{6}{\theta \Delta t} \ddot{\mathbf{x}}_t + 2\ddot{\mathbf{x}}_t \right) + \mathbf{G} \left(\frac{3}{\theta \Delta t} \mathbf{x}_t + 2\dot{\mathbf{x}}_t + \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{\mathbf{x}}_t \right). \quad (34)$$

Itt \mathbf{D} és \mathbf{G} diagonál mátrixok, amelyeknek r -edik eleme $\omega_r^2 + \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} + \frac{3}{\theta \Delta t} \gamma \omega_{0r}$, illetve $\gamma \omega_{0r}$.

A (34) alatti kifejezés előnye abban van, hogy a kellő pontosságú eredmény eléréséhez nincs szükség az összes sajátvektorra. Ha a számítás során csak a szükséges számú sajátvektort alkalmazzuk, a $\mathbf{B}(t)$ mátrix mérete az alkalmazott sajátvektorok számának megfelelően csökkenni fog. Numerikus kísérletek (Györgyi 1994) azt mutatták, hogy gerendatartónál hét sajátvektor esetén már 0,1% pontossággal kapható meg a középső pont lehajlása.

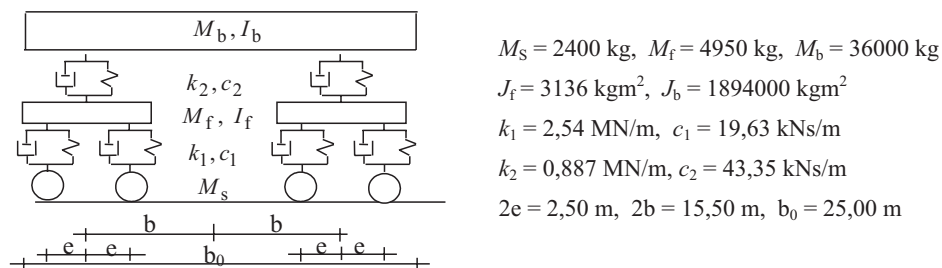
A 12. ábrán látható, hogy mit jelent, ha nemcsak erőkkkel, hanem tömegpontokkal is számolunk. A legjelentősebb eltérés a kritikus sebesség értékében van, amely több mint 10%-kal csökkent. A középső pont lehajlása csak kis mértékben, 4%-kal növekedett.



12. ábra. Tömegpontokkal való modellezés hatása a tartó középpontjának elmozdulására

5. SZERKEZETEK REZGÉSE AZONOS GEOMETRIÁJÚ KOCSIKBÓL ÁLLÓ VONAT HATÁSÁRA

A járműveknek mozgó erőcsoporttal vagy tömegpontokkal való helyettesítése egyszerűsítést jelent. A jármű maga is egy – rugókkal és csillapító elemekkel rendelkező – dinamikai rendszer, amely a szerkezettel dinamikai kölcsönhatásban van. Egy vonat motorkocsijának a szerkezettel való kölcsönhatás vizsgálatára kialakult modellje látható a 13. ábrán. A vizsgálatok céljára a 12 darab 25m hosszúságú kocsiból álló Shinkansen japán expressz vonatot választottuk, amelynek részletes adatait Klasztorny (2002) ismerteti.



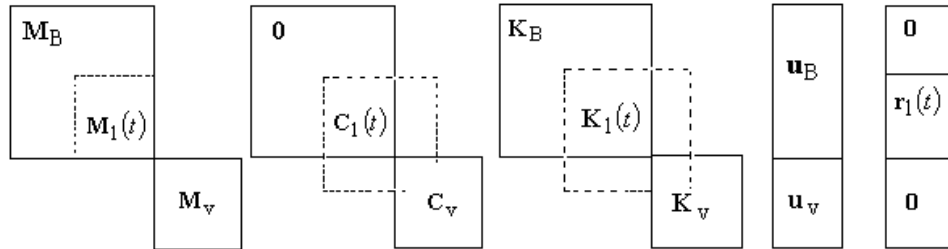
13. ábra. A Shinkansen japán expressz vonat

Az adott modell hat szabadságfokú és rezgésszámai a következők:

$$\begin{aligned} f_{01} &= 1,03 \text{ Hz}, & f_{02} &= 1,24 \text{ Hz}, & f_{03} &= 7,83 \text{ Hz}, \\ f_{04} &= 7,83 \text{ Hz}, & f_{05} &= 8,01 \text{ Hz}, & f_{06} &= 8,01 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Egy adott időpontban különböző számú – és helyzetű – jármű van a hídon. Ennek megfelelően a kapcsolt rendszer tömegmátrixa, csillapítási és merevségi mátrixai időfüggőek lesznek, és időben a mátrixok mérete is változhat. A numerikus integrálás során minden időlépésben újra kell generálni a mátrix-differenciálegyenletben szereplő mátrixokat. Mindez szükségessé teszi az időfüggő mátrixok célszerű összeállítási algoritmusának alkalmazását.

A mátrix-differenciálegyenletben szereplő mátrixok és vektorok felépítését mutatja a 14. ábra.



14. ábra. A kapcsolt dinamikai rendszer egyenletének mátrixai és vektorai

Az ábrából látható, hogy a szerkezet \mathbf{M}_B , \mathbf{K}_B , valamint a mozdulatlan jármű \mathbf{M}_v , \mathbf{C}_v , \mathbf{K}_v számítások során tehát elegendő csupán ezek időpontonkénti változtatása.

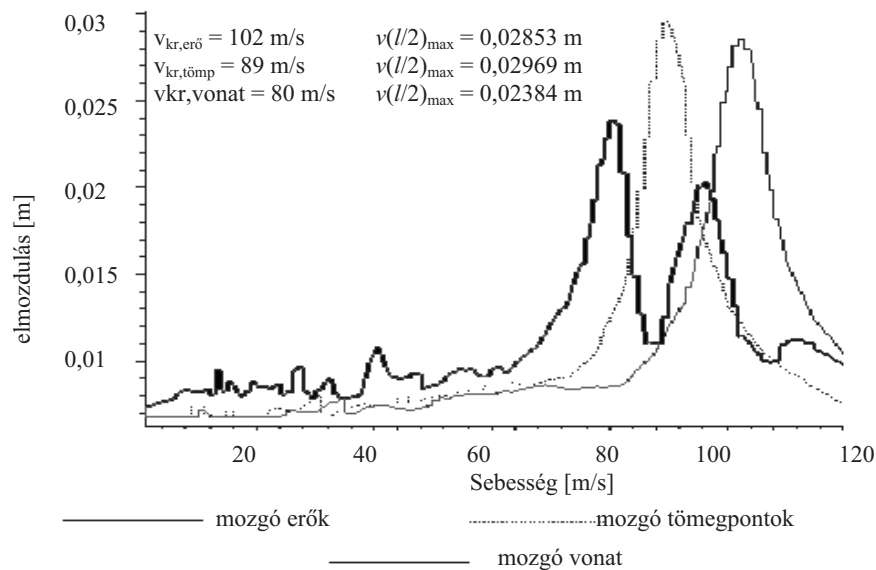
A kontaktmátrixok előállításának algoritmusát Györgyi (1999) dolgozatában megtalálható. A feladat mátrixegyenletében a mátrixokat időfüggő és időfüggetlen tagok összegeként felírva:

$$(\mathbf{M}_C + \mathbf{M}_t(t))\ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{C}_C + \mathbf{C}_t(t))\dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_C + \mathbf{K}_t(t))\mathbf{u} = \mathbf{r}_t(t). \quad (35)$$

Az egyenlet megoldása az előző pontban ismertetett eljárásokkal lehetséges. Itt is alkalmazható a csillapítatlan rendszerek sajátvektoraival való feladatredukálás. Ennek módszerét és algoritmusát egy jármű esetére Györgyi (1999) megadta.

A megoldás elvei több jármű esetén sem változnak, de a számítási algoritmus lényegesen bonyolultabb. Ennek oka, hogy a szerkezeten mozgó járművek száma

is változik, és így változik az \mathbf{M}_V , \mathbf{C}_V , \mathbf{K}_V mátrixok, valamint az $\mathbf{M}_1(t)$, $\mathbf{C}_1(t)$, $\mathbf{K}_1(t)$ mátrixok mérete is. A feladat méretének redukálásához alkalmazott – a (33)-as összefüggésben is szereplő – \mathbf{V} mátrix most hiperdiagonál lesz, amelynek blokkja a szerkezet megfelelő számú sajátvektorát tartalmazó mátrix, valamint megjelenik benne a szerkezeten lévő járművek számának megfelelő számú blokként a jármű sajátvektorainak mátrixa is. A számítási algoritmus részletes ismertetéstől eltekintünk. A 15. ábrán láthatjuk a tartó középső pontjának a mozgó erőcsoport, a mozgó tömegpontok és a mozgó járművek okozta elmozdulását. Megfigyelhető, hogy a kritikus sebesség két ágban jelent meg, és a maximális elmozduláshoz tartozó kritikus sebesség tovább csökkent.

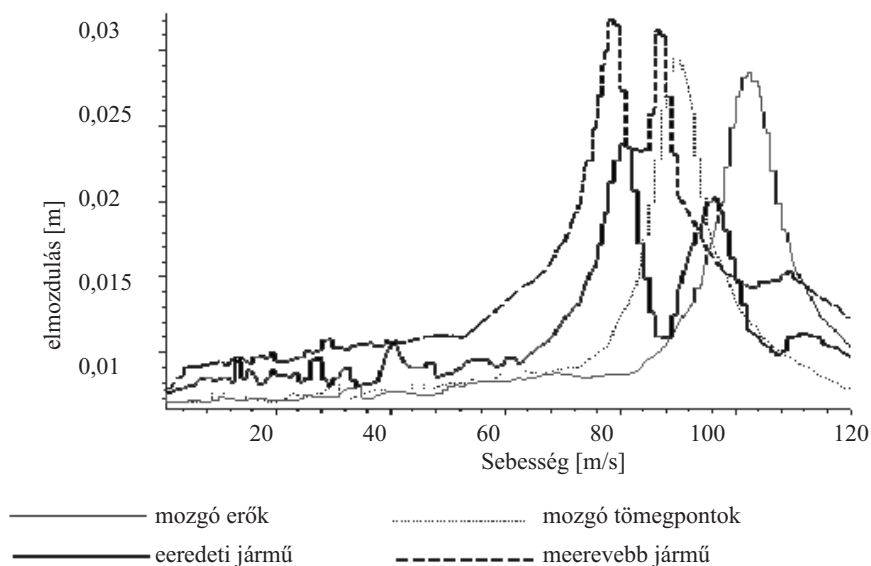


15. ábra. A tartó középpontjának elmozdulása különböző dinamikai modellek esetén

Az ábra alakja hasonló ahhoz, mint amikor egy szerkezet maximális elmozdulását egy ráhelyezett dinamikai rendszerrel csillapítjuk. Ugyanakkor az alacsonyabb sebességtartományban a jármű okozta dinamikai hatás lényegesen nagyobb, mint a mozgó erőcsoporttal, vagy a mozgó tömegpontokkal számított. Az ábrából megállapítható tehát, hogy a kapcsolt rendszer lényegesen megváltoztatja a tartó dinamikai viselkedését.

A szerkezet válasza – amint azt Györgyi és Szőke (2002) híd és autóbusz kölcsönhatásának vizsgálatakor kimutatta – függ a híd és a jármű első frekvenciájá-

nak arányától. A legnagyobb dinamikus hatást akkor kapjuk, ha a két frekvencia összeesik. A 16. ábrán ezt az esetet láthatjuk.



16. ábra. A tartó középpontjának elmozdulására különböző merevségű járművek esetén

6. ÖSSZEFOGLALÁS

A jelen dolgozat egy azonos mechanikai rendszerű kocsikból álló, nagy sebességű vasúti szerelvény és a tartószerkezet dinamikai kölcsönhatását elemzi. A vizsgálatok során három mechanikai modellel számoltunk.

A legegyszerűbb modell esetén az egyes kocsik hatását a kerekek feltámaszkodási pontjain működő erőkkel modelleztük. Az állandó merevségű tartón mozgó erőcsoport okozta elmozdulásokra zárt összefüggéseket lehetett levezetni, és – az eredményeket elemezve – definiálni lehetett a kritikus erőcsoport-sebességet, amelynél kiemelkedő dinamikai hatások keletkeznek.

A másik modell esetén már figyelembe vettük a járművek tömegét. Ebben az esetben a szerkezet mátrix-differenciálegyenletében a mátrixok mérete, valamint a merevségi mátrix a vizsgálat során nem változik, de a tömegmátrix időfüggő lesz.

A harmadik modellnél a jármű szerelvény modelljét merev testekből, valamint csillapító és rugó elemekből építettük fel, és ebben az esetben a mátrix-differen-

ciálegyenletben szereplő mátrixok mérete folyamatosan változik, és minden mátrix időfüggő lesz.

Az utóbbi két esetben a feladat megoldása numerikus integrálással történhet, de a szerkezet és a jármű megfelelő számú sajátvektorának ismeretében az egyenletrendszer mérete redukálható, és így nagy rendszerek vizsgálata is lehetővé válik.

Az elvégzett összehasonlító vizsgálatok indokolták a bonyolultabb modellek alkalmazásának szükségességét. A pontosabb modellnél jelentős különbség mutatkozott a kritikus erőcsoport-sebességben és a dinamikus hatásban is. Az eredmények azt mutatták, hogy akkor lesznek legnagyobbak a dinamikus hatások, ha a jármű és szerkezet első sajátkörfrekvenciái közel vannak egymáshoz.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatást az OTKA támogatta (OTKA No. T 034185).

IRODALOMJEGYZÉK

- Bathe, K. J., Wilson, E. L.: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Prentice-Hall, New Jersey 1976.
- Györgyi, J.: Viscous and hysteretic damping in vibration of structures. *Periodica Polytechnica Civil Engineering* Vol. 29. 1985. Nos. 1–2. 23–31.
- Györgyi, J.: Dynamic analysis of structures supporting a moving mass, exposed to external and internal damping. *Periodica Polytechnica Civil Engineering* Vol. 38. 1994. No. 4. 387–398.
- Györgyi, J.: Calculation of vehicle-bridge system using quasi-modal analysis. In: L. Frýba – J. Náprstek (eds): *Structural Dynamics; Proc. of the fourth European conference on structural dynamics – EUROLYN' 99, Prague*. A. A. Balkena, Rotterdam 1999. Vol. 2. 681–686.
- Györgyi, J., Szőke, D.: Calculation of vehicle-bridge dynamic interaction in shared system In: H. Grundmann – G. I. Schuëller (eds): *Structural Dynamics; Proc. of the 4th European conference on structural dynamics – EUROLYN 2002, Munich*. A. A. Balkena, Lisse 2002. Vol. 2. 1083–1088.
- Györgyi, J.: *Dinamika*. Műegyetem Kiadó, Budapest 2003.
- Klasztorny, M., Myslecki, K., Machelski, C., Podworna, M.: Dynamic analysis of a series-of-types of steel beam bridges loaded by a Shinkansen train moving at high speeds. In: H. Grundmann – G. I. Schuëller (eds) *Structural Dynamics; Proc. of the 4th European conference on structural dynamics – EUROLYN 2002, Munich*. A. A. Balkena, Lisse 2002. Vol. 2. 1179–1184.
- Timoshenko, S.: *Vibration Problems in Engineering*. D. Van Norstand Company, Inc., New York 1955.

CALCULATION MODELS FOR ANALYSING OF VEHICLE-BRIDGE DYNAMIC INTERACTION

Summary

If we want to take into consideration the dynamic effect of the moving vehicle during the test of structure we have some possibility to build up the model. We used three different models. The first one was the calculation with force groups. During the analysis we calculate the group force critical velocity and shown the large dynamic effect in this case. Using the second model we calculated by moving mass points. In this case the mass matrix in the dynamic matrix equation of the bridge was time-dependent. At this model the group force critical velocity was less, and the dynamic effect was higher. The most complicated case if we calculate the train as moving dynamic system, when the mass, damping and stiffness matrices in the dynamic matrix equation of vehicle-bridge system will be time-dependent. The difference between of the values of the group force critical velocity and the dynamic effect was large. The results showed the important role of the dynamic characteristic and the velocity of the vehicle system.

Keywords: train-bridge interaction, the effect of structural damping, quasi-modal analysis