

EGY KÖZELÍTŐ MÓDSZER ÉPÜLETEK LEGKISEBB SAJÁTFREKVENCIÁJÁNAK MEGHATÁROZÁSÁRA

ZALKA KÁROLY*

A kontinuum módszer alkalmazásával a dolgozat egyszerű eljárást mutat be és zárt képleteket ad meg többszintes épületek sajátfrekvenciáinak meghatározására. A síkbeli rezgésalakot három jellegzetes deformációval jellemzi: a merevítőrendszer függőleges elemeinek (keretoszlopok, falak és magok) lokális hajlítási alakváltozásával, a keretek és nyílásokkal áttört falak globális hajlítási alakváltozásával és a keretek és nyílásokkal áttört falak nyírási alakváltozásával. A tiszta csavarási rezgések vizsgálatát a hajlítási és csavarási jelenség között fennálló analógia segítségével visszavezeti a síkbeli rezgések vizsgálatára. A síkbeli és csavarási rezgések kapcsolódását egy egyszerű algebrai egyenlet segítségével veszi figyelembe. A módszer pontosságának illusztrálására összefoglalja egy 144 merevítőrendszerre kiterjedő pontossági vizsgálat eredményeit, amikor a javasolt módszerrel meghatározott legkisebb sajátfrekvencia értékét összehasonlítja a végeleemes számítással meghatározott „pontos” értékekkel. A pontossági vizsgálat tanúsága szerint a közelítő és „pontos” értékek közötti átlagos eltérés 2%, a közelítő módszer maximális hibája pedig 7% volt. A módszer alkalmazását a gyakorlatban egy igen részletesen kidolgozott számpélda segítségével mutatja be.

Kulcsszavak: földrengés, frekvencia, rezgés, merevítőrendszer, térbeli viselkedés

1. BEVEZETÉS

Magyarország területének nagy része földrengésveszélyes övezetben van, ahol kötelező minden építményt földrengés ellen méretezni. A tervező két lehetőség közül választhat: vagy részletes dinamikai vizsgálatot hajt végre és „pontos” számítást végez, vagy pedig kiválaszt egyet a rendelkezésre álló közelítő módszerek közül és egyszerűsített számítással igazolja, hogy a vizsgált épület esetében a földrengésből származó erő mértékadó horizontális értéke nem haladja meg a megfelelő határerő értékét. A Magyar Mérnöki Kamara Tartószerkezeti Tagozata Tervezési Segédletének ajánlása szerint (Dulácska és Kollár, 2003) – bizonyos feltételek

* Szent István Egyetem, Ybl Miklós Műszaki Főiskolai Kar, Mechanika és Tartószerkezetek Tanszék. Tel.: 252 1270; e-mail: Zalka.karoly@ymmfk.hu

teljesülése esetében – alkalmazható a Helyettesítő Statikai Módszer (HSM). A módszer alkalmazása során a helyettesítő horizontális földrengési erőt az

$$S_{M,s} = \beta Q k_g k_s k_t / q$$

összefüggés segítségével lehet meghatározni, ahol

- β a dinamikus szorzó,
- Q az épületezter (a saját súly és a hasznos teher tartós részének összege),
- k_g a relatív tervezési gyorsulás értéke,
- k_s az épületfontossági tényező,
- k_t a talajminőség szorzója,
- q viselkedési tényező.

A tervezőnek a képlet alkalmazása során viszonylag kevés „játéktere” van. A k_g , k_s , k_t és q tényezők értékét táblázatokból veheti ki, ahol három–öt megadott érték közül választhat, de mivel az épület helye (a földrengési zóna), fontossága, a talaj minősége és gyakran az épület szerkezete is adott, ezeknek a tényezőknek az értékét nem tudja befolyásolni. Hasonló a helyzet az épületezterrel is. Egészen más a helyzet a képlet „lelkével”, a dinamikus szorzóval, ami tulajdonképpen az épület legkisebb sajátfrekvenciája. Az ajánlás empirikus összefüggéseket ad meg (az emeletszám függvényében), amelyek segítségével a képlet biztonságosan használható. Mivel azonban az épület legkisebb sajátfrekvenciájának értéke viszonylag tág határok között változhat és ezt a tervező jelentősen befolyásolhatja (pl. hatékony vagy kevésbé hatékony merevítőrendszer kialakításával), egyes esetekben célszerűnek látszik a legkisebb sajátfrekvenciának az empirikus összefüggéseknél pontosabb meghatározása.

A dolgozat célja egy olyan – a gyakorlati statikai számítások gondolatmenetéhez közel álló – közelítő módszer bemutatása épületek sajátfrekvenciáinak meghatározására, amely figyelembe veszi a merevítőrendszert alkotó elemek (keretek, nyílásokkal áttört falak és magok) összes lényeges merevségét és az egyes merevségek, valamint a merevítő elemek közötti egymásra hatást is.

Feltételezzük, hogy

- (a) az épület szabályos abban az értelemben, hogy a merevítőrendszer alaprajzi elrendezése nem változik a magasság mentén,
- (b) az épület földémei síkjukban merevek és síkjukra merőlegesen hajlékonyak,
- (c) a szerkezetek anyaga rugalmas,
- (d) a nyírasközéppont helye csak geometriai jellemzőktől függ.

A vizsgálathoz a kontinuum módszert fogjuk alkalmazni. Először a merevítőrendszer egy eleme alakváltozásának vizsgálatával azonosítjuk a meghatározó

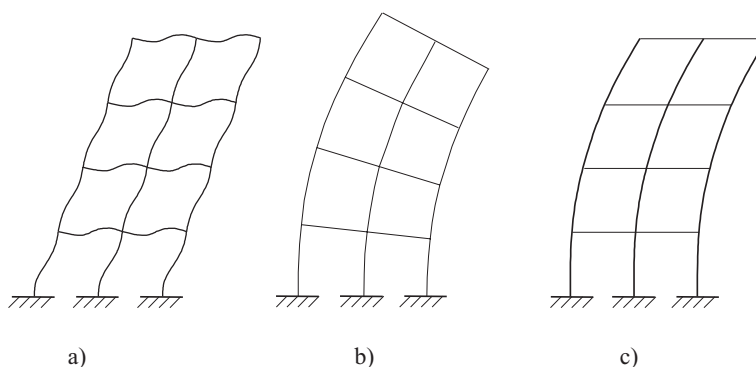
merevségeket úgy, hogy figyelembe vesszük a hajlítási és nyírási alakváltozásokat, valamint a függőleges teherviselő elemek összenyomódását, illetve megnyúlását. Ezután zárt alakú megoldást adunk a síkbeli és tiszta csavarási rezgések sajátfrekvenciájára. Végül megadjuk az általános (térbeli) eset kapcsolt rezgéseinek sajátfrekvenciáját.

2. A MEREVÍTŐRENDSZER EGY ELEMÉNEK SAJÁTFREKVENCIÁI; JELLEMZŐ MEREVSÉGEK ÉS ALAKVÁLTOZÁSOK

Mivel egy keretből, nyílásokkal áttört falakból, tömör falakból és magokból álló és síkbeli rezgéseket végző épület vizsgálata visszavezethető egyetlen keret vizsgálatára, először meghatározzuk egy keret legkisebb sajátfrekvenciáját. A keret síkbeli rezgése három jellegzetes merevséggel, illetve a hozzájuk tartozó rezgésalakokkal és frekvenciával jellemezhető. Ezek a következők: nyírási rezgés, globális hajlítási rezgés és lokális hajlítási rezgés (1. ábra). A keret rezgésalakja a három rezgésalak kombinációjából állítható elő. Hasonló módon, a keret sajátfrekvenciája meghatározható a három rezgésalakhoz tartozó részfrekvenciák segítségével, amelyekhez viszont rendre jellegzetes merevségek tartoznak.

A keret nyírási rezgését (1. ábra: a) a nyírási merevség határozza meg. A nyírási merevség két részből áll. A keretgerendákhoz tartozó részt globális nyírási merevségnek is nevezik, mert az alakváltozás a magasság mentén a keret egészére kiterjed. Értékét a

$$K_{b,j} = \sum_1^{n-1} K_{b,i} = \sum_1^{n-1} \frac{12E_b I_{b,i}}{l_i h} \quad (1)$$



1. ábra. Jellegzetes alakváltozások. a) nyírási, b) globális hajlítási, c) lokális hajlítási

összefüggés szolgáltatja, ahol

- j a merevítőrendszer j -ik keretét jelöli meg ($j = 1 \dots f$),
- f a keretek és nyílásokkal áttört falak száma,
- i a keret i -ik gerendájára vonatkozik ($i = 1 \dots n-1$),
- n a j -ik keret oszlopainak száma,
- E_b a keretgerendák rugalmassági modulusa,
- $I_{b,i}$ az i -ik keretgerenda tehetetlenségi nyomatéka,
- l_i az i -ik keretállás oszloptávolsága,
- h az emeletmagasság.

Nyílásokkal áttört falak esetén a gerendák falszakaszoknál lévő végtelen merevnek tekinthető része és a gyakran zömök gerendák nem elhanyagolható nyírási alakváltozása miatt a fenti képlet némi módosításra szorul:

$$K_{b,j}^* = \sum_1^{n-1} \frac{6E_b I_{b,i} \left((l_i + s_i)^2 + (l_i + s_{i+1})^2 \right)}{l_i^3 h \left(1 + 12 \frac{\rho E_b I_{b,i}}{l_i^2 G_b A_{b,i}} \right)} \quad (1a)$$

ahol

- G_b a gerendák nyírási rugalmassági modulusa,
- $A_{b,i}$ az i -ik gerenda keresztmetszeti területe,
- l_i az i -ik és az $(i+1)$ -ik fal közötti távolság,
- s_i az i -ik fal szélessége,
- ρ a gerenda keresztmetszetének alakjától függő tényező (négyzetkeresztmetszetek esetében $\rho = 1,2$).

A nyírási merevség másik részét a keretoszlopok merevsége határozza meg. Ezt a részmerevséget lokális nyírási merevségnek is hívják, mert a hozzá tartozó alakváltozás koncentráltan, két gerenda között jön létre. Értéke a

$$K_{c,j} = \sum_1^n K_{c,i} = \sum_1^n \frac{12E_c I_{c,i}}{h^2} \quad (2)$$

összefüggésből határozható meg, ahol

- E_c az oszlopok rugalmassági modulusa,
- $I_{c,i}$ az i -edik oszlop tehetetlenségi nyomatéka.

A keret nyírási merevségét a két részmerevség felhasználásával a Föppl–Papkovics összegzési tétel (Tarnai, 1991) szolgáltatja:

$$K_j = \left(\frac{1}{K_{b,j}} + \frac{1}{K_{c,j}} \right)^{-1} = r_j K_{b,j}, \quad (3)$$

ahol

$$r_j = \frac{K_{c,j}}{K_{c,j} + K_{b,j}} \quad (4)$$

a nyírási merevség két összetevője közötti kapcsolatot határozza meg.

Az egyenletesen megoszló tömegű és merevséggel rendelkező konzoltartó klasszikus megoldását (Vértes, 1976) felhasználva felírható a csak nyírási alakváltozást végző keretszerkezet legkisebb sajátfrekvenciája:

$$f_{s,j}^2 = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_j^2 K_j}{m}, \quad (5)$$

ahol m az egység hosszra jutó tömeg (súly/nehézségi gyorsulás) és r_j egy csökkentő tényező, amely azt veszi figyelembe, hogy a szerkezet tömege nem egyenletesen oszlik meg a magasság mentén (mint ahogyan azt az (5) képlet levezetése feltételezi), hanem a földémszinteken koncentráltan jelentkeznek (Zalka, 2000). Az r_j tényező értékeit az 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat. Az r_j csökkentő tényező értékei az n emeletszám függvényében

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
r_f	0,493	0,653	0,770	0,812	0,842	0,863	0,879	0,892	0,902	0,911	0,918
n	12	13	14	15	16	18	20	25	30	50	>50
r_f	0,924	0,929	0,934	0,938	0,941	0,947	0,952	0,961	0,967	0,980	$\sqrt{n/(n+2,06)}$

A globális hajlítási rezgés a keret egészének hajlítási alakváltozásával jellemezhető (1. ábra: b), amikor a keretoszlopok egy képzeletbeli keresztmetszet hosszanti szálait képviselik, amelyek alakváltozás során összenyomódnak, illetve megnyúlnak, és a keretgerendák szerepe az, hogy ezeket a hosszanti szálakat „együtt dolgoztassa”. Az ezzel a hajlítási alakváltozással kapcsolatos hajlítási merevséget az

$$E_c I_{g,j} = E_c \sum_1^n A_{c,i} t_i^2 \quad (6)$$

összefüggés határozza meg, ahol I_g az oszlopkeresztmetszetek globális tehetlenségi nyomatéka az oszlopkeresztmetszetek súlypontjára:

$$I_{g,j} = \sum_1^n A_{c,i} t_i^2. \quad (6a)$$

Ebben a képletben

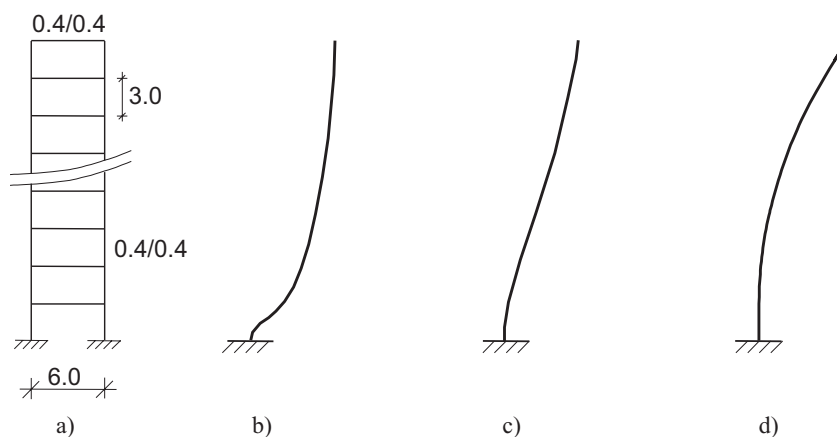
$A_{c,i}$ az i -ik oszlop keresztmetszeti területe,

t_i az i -ik oszlop távolsága az oszlopkeresztmetszetek súlypontjától.

A globális hajlítási rezgés legkisebb sajátfrekvenciáját Timoshenko klasszikus képlete (Timoshenko, 1928) segítségével határozhatjuk meg. Ezt a képletet – a nyírási rezgés képletéhez hasonló módon – szintén ki kell egészíteni az r_f csökkentő tényezővel:

$$f_{g,j}^2 = \frac{0,313 r_f^2 E_c I_{g,j}}{H^4 m} \quad (7)$$

Bár a keretszerkezetek alakváltozását gyakran automatikusan nyírási alakváltozásként könyvelik el, a valóságban nem ilyen egyszerű a helyzet. Amint azt a 2. ábra mutatja, és egy számítógépes program alkalmazása – a szintszám növelésével párhuzamosan – szemléletesen demonstrálja, különböző magasságú, de azonos merevségekkel rendelkező keretek különböző típusú alakváltozást végezhetnek: az alakváltozás lehet alapvetően nyírási jellegű (2. ábra: b), hajlítási és nyírási alakváltozás kombinációja (2. ábra: c) vagy pedig alapvetően hajlítási jellegű (2. ábra: d). Az eltérő magasságokhoz tartozó különböző típusú alakváltozás a hajlítási és nyírási alakváltozások közötti egymáshatással magyarázható. Alacsony és/vagy széles (többállású) keretek általában dominálón nyírási alakváltozást végeznek. Ahogy nő a keret magassága, úgy nő az oszlopok hosszváltozásának szerepe. A nyírási merevség szempontjából az oszlopok hosszváltozása „fella-zító” hatásként értelmezhető. Ahogy a keret alakváltozása közben megnyúlnak (és



2. ábra. Rezgésalak a magasság függvényében. a) Keretadatok (méterben), b) 4-eleletes keret: domináló nyírási alakváltozás, c) 30–40 emeletes keret: ‚vegyes’ hajlítási és nyírási alakváltozás, d) 50-eleletes keret: domináló hajlítási alakváltozás

megrövidülnek) az oszlopok, úgy lesz egyre kisebb „lehetősége” a szerkezetnek a nyírási alakváltozás létrejöttére. A keskeny és magas keretek alakváltozása során az oszlopok hosszváltozása olyan mértéket ölthet, hogy a nyírási alakváltozás létrejöttére „már nincs lehetőség”.

Ez a jelenség igen egyszerűen figyelembe vehető a *hatékony* nyírási merevség bevezetésével. Ha a Föppl–Papkovics összegzési tételt (Tarnai, 1991) a globális hajlítási és nyírási alakváltozást végző keretekre alkalmazzuk

$$\frac{1}{f_{s,j}^2} = \frac{1}{f_{s',j}^2} + \frac{1}{f_{g,j}^2}, \quad (8)$$

akkor az eredő sajátfrekvenciára az

$$f_{s,j}^2 = f_{s',j}^2 \frac{f_{g,j}^2}{f_{s',j}^2 + f_{g,j}^2} = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K_{e,j}}{m} \quad (9)$$

összefüggés írható fel. Itt K_e a hatékony nyírási merevség, amely a j -edik keret vonatkozásában a

$$K_{e,j} = s_j^2 K_j \quad (10)$$

képlettel adható meg, ahol

$$s_j^2 = \frac{f_{g,j}^2}{f_{g,j}^2 + f_{s',j}^2} \quad (11)$$

a hatékonysági tényező, amely a globális hajlítási alakváltozás következtében bekövetkező nyírási merevségsökkenést veszi figyelembe.

A globális hajlítási alakváltozás mellett a keret még más módon is végezhet hajlítási alakváltozást. A keret rezgése során a keret oszlopai önmagukban is meggörbülhetnek (1. ábra: c). Ekkor a hajlítási merevséget az

$$E_c I_{c,j} = E_c \sum_1^n I_{c,i} \quad (12)$$

összefüggés adja meg, ahol

$$I_{c,j} = \sum_1^n I_{c,i} \quad (12a)$$

a j -ik keret egyes oszlopai tehetetlenségi nyomatékainak összege. Mivel itt a keret-oszlopok saját súlyponti tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékai szerepelnek, a (12) összefüggés által meghatározott merevséget az oszlopok lokális merevségének, a jelenséget pedig lokális hajlítási rezgésnek nevezzük.

A lokális hajlítási merevséghez tartozó sajátfrekvenciát ismét a Timoshenko-féle klasszikus képlet segítségével határozzuk meg. Alul befogott keretoszlopokat és egyenlesen megoszló tömeget feltételezve a legkisebb sajátfrekvencia értékét az

$$f_{b,j}^2 = \frac{0,313r_f^2 E_c I_{c,j}}{H^4 m} \quad (13)$$

képletből határozhatjuk meg, ahol az r_f csökkentő tényező értékeit ismét az 1. táblázatban találjuk meg.

Fentiek értelmében most már minden keret (illetve nyílásokkal áttört fal) a lokális hajlítási és hatékony nyírási merevségével (és a hozzá tartozó sajátfrekvenciával) jellemezhető.

Ami a másik két merevítőelem-típust illeti, a tömör falak és magok viselkedése jóval egyszerűbb, legalábbis a síkbeli rezgések szempontjából, mivel ezen elemek viselkedését a (lokális) hajlítás határozza meg. Ezeknek a merevítőelemeknek így csak a vizsgált irányban számított lokális hajlítási merevségét kell figyelembe venni:

$$E_w I_{w,k}, \quad (14)$$

ahol

k a k -ik falat, illetve magot jelöli ($k = 1 \dots m$),

m a falak és magok száma,

E_w a falak és magok rugalmassági modulusa,

$I_{w,k}$ a k -ik fal, illetve mag tehetetlenségi nyomatéka.

A fenti merevség felhasználásával a k -ik elem síkbeli sajátfrekvenciáját az

$$f_{w,k}^2 = \frac{0,313r_f^2 E_w I_{w,k}}{H^4 m} \quad (15)$$

összefüggésből számíthatjuk ki, ahol az r_f csökkentő tényező értékei az 1. táblázatban találhatóak.

Fenti merevségi jellemzők és a hozzájuk tartozó frekvenciák ismeretében egy keretből, (nyílásokkal áttört) falakból és magokból álló rendszer síkbeli rezgéseinek vizsgálatát visszavezethetjük egy helyettesítő konzol rezgéseinek vizsgálatára. A helyettesítő konzol előállítását a következő pontban mutatjuk be.

A csavarási rezgések vizsgálatával kapcsolatban most csak annyit jegyzünk meg, hogy a későbbiekben be fogjuk bizonyítani, hogy a csavarási probléma viszonylag egyszerűen visszavezethető a síkbeli problémára. Ezt az épületet helyettesítő konzol síkbeli és tiszta csavarási viselkedése között fennálló analógia teszi lehetővé.

Tiszta síkbeli, illetve tiszta csavarási rezgések komplex épületek vizsgálata során igen ritkán (csak kétszeres szimmetria esetén) fordulnak elő. Általános esetben a síkbeli rezgések kombinálódnak a csavarási rezgésekkel, és az épület kapcsolt síkbeli-csavarási rezgéseket végez. Mivel ezeknek a kapcsolt rezgéseknek a sajátfrekvenciája a tiszta síkbeli és tiszta csavarási rezgések sajátfrekvenciája segítségével határozható meg, először ezeket a speciális eseteket, az *alaplódokat* fogjuk vizsgálni, és a hozzájuk tartozó *alaplódok* határozzuk meg.

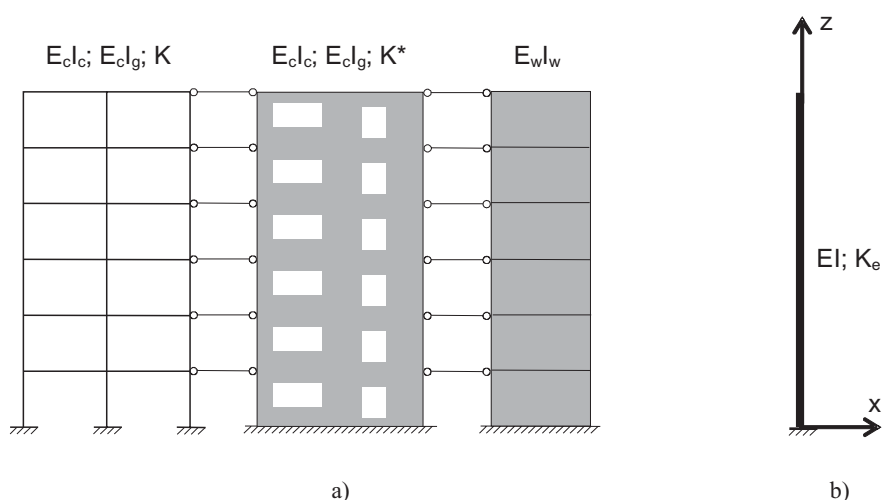
3. KERETEKBŐL, (NYÍLÁSOKKAL ÁTTÖRT) FALAKBÓL ÉS MAGOKBÓL ÁLLÓ RENDSZEREK SÍKBELI REZGÉSE

Tekintsük a 3. ábrán vázolt, keretkből és nyílásokkal áttört falakból ($j = 1 \dots f$), tömör falakból és magokból ($k = 1 \dots m$) álló síkbeli merevítőrendszert. Az egész rendszer helyettesíthető a keretoszlopok, falsávok, falak és magok hajlítási merevségével és a keretek és nyílásokkal áttört falak hatékony nyírási merevségével. A merevítő rendszer fődémekkel összekapcsolt elemei ily módon összetelhetők egyetlen helyettesítő konzollá. A helyettesítő konzol a fenti EI -vel és K_e -vel jelölt – hajlítási és hatékony nyírási merevséggel rendelkezik. A rendszer hajlítási merevsége – egyszerű összegzéssel – az

$$EI = E_c I_c + E_w I_w = E_c \sum_1^f I_{c,j} r_j + E_w \sum_1^m I_{w,k} \quad (16)$$

összefüggésből határozható meg. Érdekes részletesebben is megvizsgálni a (16) képlet elemeit, mert a gyakorlati számítás során a fáradságos numerikus munka jelentősen csökkenthető. Abban az esetben, amikor a merevítőelemek között keretek és merevítőfalak/magok is találhatóak, a keretoszlopokhoz tartozó hajlítási merevség értéke nagyságrendekkel kisebb szokott lenni a merevítőfalakhoz/magokhoz tartozó értékénél. Ez azt jelenti, hogy a képlet (E_c -vel szorzott) első tagját ilyen esetekben kiszámítani sem érdemes.

A hajlítási merevség ismeretében – a (13) és (15) összefüggések alapján – a rendszer hajlítási alakváltozással kapcsolatos legkisebb sajátfrekvenciáját az



3. ábra. A síkbeli rezgésvizsgálat modellje. a) Keretből, nyílásokkal áttört falakból, falakból és magokból álló merevítőrendszer, b) a helyettesítő konzol

$$f_b^2 = f_f^2 + f_w^2 = \sum_1^f f_{f,j}^2 r_j + \sum_1^m f_{w,k}^2 = \frac{0,313 r_f^2 EI}{H^4 m} \quad (17)$$

összefüggés szolgáltatja. Ha a magasabb frekvenciákra is szükség van, akkor a fenti képletben a 0,313 konstans a 12,3, illetve a 96,4 értékkel kell helyettesíteni a második, illetve a harmadik sajátfrekvencia meghatározásához.

A rendszer hatékony nyírási merevségét a (10) összefüggés segítségével adhatjuk meg:

$$K_e = \sum_1^f s_j^2 K_j. \quad (18)$$

A (16) és (17) képletekben a keretoszlopok hajlítási merevsége r_j egyidejűségi tényezővel van szorozva. Elméleti vizsgálatok szerint (Hegedűs and Kollár, 1991) erre a korrekcióra azért van szükség, hogy megakadályozzuk az oszlopok hajlítási merevségének „túlértékelését” a helyettesítő konzol-modellben; a nyírási merevség képlete ugyanis szintén tartalmazza az oszlopok hajlítási merevségét (vö. a (3), (2) és a (18) összefüggést).

A hatékony nyírási merevség ismeretében a rendszer nyírási alakváltozással kapcsolatos legkisebb sajátfrekvenciája az

$$f_s^2 = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K_e}{m} \quad (19)$$

összefüggésből számítható ki. Ha a magasabb frekvenciákra is szükség van, akkor a (19) képletben szereplő 4-es konstanst a 4/3 és 4/5 értékekre kell lecserélni a második és harmadik sajátfrekvencia meghatározásához.

A nyírási merevség hatékonyságát az

$$s = \sqrt{\frac{K_e}{K}} \quad (20)$$

hatékonysági tényezővel mérhetjük, ahol K a rendszer „eredeti” nyírási merevsége:

$$K = \sum_1^f K_j. \quad (21)$$

A helyettesítő tartó differenciálegyenletét egy elemi szakasza egyensúlyának vizsgálata után az alábbi formában kapjuk:

$$r_f^2 E I u'''' - r_f^2 K_e u'' + m \ddot{u} = 0. \quad (22)$$

A megoldást szorzatformában keressük és a változók szétválasztása után az

$$r_f^2 E I u_1'''' - r_f^2 K_e u_1'' - \omega^2 m u_1 = 0 \quad (23)$$

kerületérték feladatra jutunk, amelyhez az

$$u_1(0) = 0, \quad (24a)$$

$$u_1'(0) = 0, \quad (24b)$$

$$u_1''(H) = 0 \quad (24c)$$

$$E I u_1'''(H) - K_e u_1'(H) = 0 \quad (24d)$$

peremfeltételek tartoznak, ahol ω a körfrekvencia. Bevezetve az

$$\omega = \frac{2\pi\eta}{H^2} \sqrt{\frac{EI r_f^2}{m}} \quad (25)$$

jelölést és a

$$k = H \sqrt{\frac{K_e}{EI}} \quad (26)$$

dimenziótlan paramétert, trigonometrikus és hiperbolikus függvények felhasználása, valamint átrendezések után a legkisebb sajátfrekvenciát szolgáltató megoldás az

$$f^2 = \left(\frac{\eta^2}{0,313} - \frac{k^2}{5} \right) f_b^2 + f_s^2 \quad (27)$$

alakban állítható elő. A képletben szereplő η frekvencia paramétert (a probléma sajátértékét) a k paraméter függvényében a 2. táblázat tartalmazza. A második és harmadik sajátfrekvencia kiszámításához szükséges η frekvencia paraméterek értékei kézikönyvben megtalálhatók (Zalka, 2000).

Mielőtt azonban a (27) képletet felhasználnánk a teljes merevítőrendszer síkbeli sajátfrekvenciájának meghatározásához, egy kisebb módosítást kell végrehajta-

2. táblázat. Az η és η_φ frekvencia paraméterek értékei a k és k_φ paraméterek függvényében

k vagy k_φ	η vagy η_φ	k vagy k_φ	η vagy η_φ	k vagy k_φ	η vagy η_φ
0,00	0,5596	8,0	2,313	16,5	4,408
0,10	0,5606	8,5	2,435	17,0	4,532
0,50	0,5851	9,0	2,558	17,5	4,656
1,00	0,6542	9,5	2,680	18,0	4,781
1,50	0,7511	10,0	2,803	18,5	4,905
2,00	0,8628	10,5	2,926	19,0	5,029
2,50	0,9809	11,0	3,049	20	5,278
3,00	1,1014	11,5	3,172	30	7,769
3,50	1,2226	12,0	3,295	40	10,26
4,00	1,3437	12,5	3,418	50	12,76
4,5	1,465	13,0	3,542	60	15,26
5,0	1,586	13,5	3,665	70	17,76
5,5	1,706	14,0	3,789	80	20,26
6,0	1,827	14,5	3,913	90	22,76
6,5	1,949	15,0	4,036	100	25,26
7,0	2,070	15,5	4,160	>100	$k/4$
7,5	2,192	16,0	4,284		vagy $k_\varphi/4$

nunk. A (27) képlet levezetésének tanúsága szerint a képlet első tagja két dolgot fejez ki: tartalmazza a keretoszlopok/falsávok, falak és magok hajlítási merevségéhez tartozó sajátfrekvencia-részt és tartalmazza a rendszer sajátfrekvenciájának a hajlítási és nyírási merevség egymásra hatása miatti növekedését is. Mivel azonban a nyírási merevség hatékonysága rendszerint 100 százaléknál kisebb (vö. a (20) képlettel, ahol $s \leq 1$ érvényes), a két hatást el kell különíteni hogy a hatékonysági tényezőt érvényesíthessük, de úgy, hogy csak csak arra a tagra vonatkoztassuk, amelyik az egymásra hatással kapcsolatos. A megfelelő átalakítások elvégzése után a merevítőrendszer síkbeli sajátfrekvenciájának meghatározására szolgáló összefüggés a következő formában írható fel:

$$f^2 = f_b^2 + f_s^2 + \left(\frac{\eta^2}{0,313} - \frac{k^2}{5} - 1 \right) s f_b^2. \quad (28)$$

A (28) egyenlet jobb oldalán az első tag a hajlítási, a második tag pedig a nyírási merevséghez tartozó sajátfrekvencia-részt tartalmazza. A harmadik tag fejezi ki a hajlítási és nyírási merevség egymásra hatása következtében bekövetkező sajátfrekvencia-növekedést. Hasonlóan a vízszintes erőkkel terhelt rendszerek szilárdsági viselkedéséhez és az épületek stabilitási viselkedéséhez, a nyírási és hajlítási merevség egymásra hatása előnyösen befolyásolja a merevítőrendszer viselkedését. A harmadik tag kiértékelésének tanúsága szerint – figyelembe véve az $(\eta^2/0,313 - k^2/5) \geq 1$ összefüggést is – az egymásra hatás növeli a sajátfrekvencia értékét. A 2. táblázat értékeinek felhasználásával kimutatható, hogy a sajátfrekvencia értékének növekedése maximum 62 százalék. Ez a növekedés a $k = 3,2$ értékhez tartozik.

Egy épület – kétszeres szimmetria fennállása esetén – a két tehetetlenségi fősíkban végezhet síkbeli rezgéseket, ezért mindkét irányt meg kell vizsgálni. Az x irányú rezgés sajátfrekvenciáját a (28) összefüggésből úgy határozhatjuk meg, hogy f_b, f_s, k és s értékeit az x irányban elhelyezkedő merevítőelemek figyelembevételével számítjuk ki. Ha az f_b, f_s, k és s értékeit az y irányban elhelyezkedő merevítőelemek figyelembevételével számítjuk ki, akkor a (28) képletből az y irányú rezgés sajátfrekvenciáját kapjuk meg.

4. TISZTA CSAVARÁSI REZGÉS

Bár a csavarási rezgés problémája jóval összetettebb, mint a síkbeli rezgése, egy – a háromdimenziós csavarási és az előző pontban tárgyalt kétdimenziós síkbeli probléma között fennálló – analógia alkalmazásával viszonylag egyszerű megoldáshoz juthatunk. Az analógia jól ismert a vékonyfalú szelvények szilárdsági vizs-

gálata területén (Vlasov, 1961; Kollbrunner and Basler, 1969). Az analógia szerint a hajlított tartók eltolódásai, nyomatékai és nyíróerői megfeleltethetők a csavarási igénybevétel során keletkező elfordulásoknak, öblösödési és csavarási nyomatékoknak. A következőkben bebizonyítjuk, hogy az analógia kiterjeszthető a rugalmasan megtámasztott konzoltartó (előző pontban tárgyalt) síkbeli rezgésére és a vékonyfalú keresztmetszetű konzoltartó (ebben a pontban tárgyalandó) tiszta csavarási rezgésére.

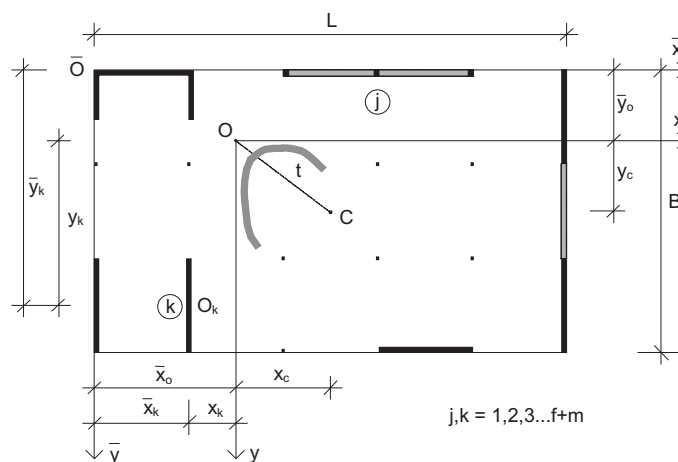
Az épület tiszta csavarási rezgésének vizsgálatához egy vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű konzoltartót alkalmazunk, amely helyettesíti az épület merevítő-rendszerét (4. ábra). A helyettesítő konzoltartó a nyírési középpontban helyezkedik el és $(GJ)_e$ hatékony nyírási, valamint EI_ω öblösödési csavarási merevséggel rendelkezik. A konzoltartó differenciálegyenletét egy elemi szakasza egyensúlyának vizsgálata után az alábbi formában kapjuk:

$$r_f^2 EI_\omega \varphi'''' - r_f^2 (GJ)_e \varphi'' + i_p^2 m \ddot{\varphi} = 0. \quad (29)$$

A megoldást szorzatformában keressük, és a változók szétválasztása után az

$$r_f^2 EI_\omega \varphi_1'''' - r_f^2 (GJ)_e \varphi_1'' - \omega^2 i_p^2 m \varphi_1 = 0 \quad (30)$$

kerületérték-feladatra jutunk, amelyhez a



4. ábra. Tipikus alaprajz három fallal, egy merevítőmaggal, egy kerettel és egy nyílásokkal áttört fallal, illetve középen a (nyírasközéppontban elhelyezkedő) vékonyfalú, nyitott keresztmetszetű helyettesítő konzollal

$$\varphi_1(0) = 0, \quad (31a)$$

$$\varphi_1'(0) = 0, \quad (31b)$$

$$\varphi_1''(H) = 0, \quad (31c)$$

$$EI_\omega \varphi_1'''(H) - (GJ)_e \varphi_1'(H) = 0 \quad (31d)$$

peremfeltételek tartoznak, ahol ω a körfrekvencia és i_p az inerciasugár. Ez a sajátértékprobléma analóg a (23) differenciálegyenlettel és a (24a)–(24d) peremfeltételekkel. A (23) differenciálegyenletben szereplő EI hajlítási merevség és a K_e hatékony nyírési merevséggel definiált rugalmas megtámasztás megfelel a (30) differenciálegyenletben szereplő EI_ω öblösödési merevségnek és a $(GJ)_e$ hatékony Saint-Venant csavarási merevségnek (osztva az i_p inerciasugár négyzetével). A (30) differenciálegyenlet levezetésének tanúsága szerint az i_p inerciasugár az épület tömegének eloszlásával kapcsolatos (vízszintes értelemben). Téglalap alaprajzú és a födémszinteken egyenletesen megoszló tömeggel rendelkező épületek esetében az inerciasugár az

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} \quad (32)$$

összefüggésből számítható ki, ahol L és B az alaprajz méretei és t a merevítőrendszer excentricitása (az épület alaprajzának geometriai középpontja és a merevítőrendszer nyírasközéppontja közötti távolság):

$$t = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}, \quad (33)$$

ahol

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o \quad \text{és} \quad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_o \quad (33a)$$

az épület geometriai középpontjának koordinátái a nyírasközépponti koordináta-rendszerben (4. ábra). A nyírasközéppont fenti képletben szereplő koordinátáit a későbbiekben (a (42) képlettel) adjuk meg.

Összefüggések az i_p értékére szabálytalan alakú alaprajzok és/vagy nem egyenletes tömegeloszlások esetére találhatók pl. (Kollár, 1991)-ben, ill. (Zalka, 2000)-

ben. Az inerciasugár fontos jellegzetessége az, hogy értéke az épületalaprajz geometriai méreteitől függ, nem pedig a merevítőrendszer merevségi jellemzőitől.

A megfelelő merevségek azonosítása után a (23) differenciálegyenlet megoldása már közvetlenül felhasználható a (30) egyenlet megoldásának felírásához. A merevítőrendszer hatékony Saint-Venant csavarási merevsége két forrásból származhat: Saint-Venant csavarási merevséggel rendelkezhetnek az egyes falak és magok, és Saint-Venant csavarási merevség származhat a keretek hatékony nyírási merevségéből:

$$(GJ)_e = \sum_1^m GJ_k + \sum_1^f [(K_{e,j})_x y_j^2 + (K_{e,j})_y x_j^2]. \quad (34)$$

A (34) képletben

J_k a k -ik fal/mag Saint-Venant csavarási inercianyomatéka,

G a falak/magok nyírási rugalmassági modulusa,

$(K_{e,j})_x, (K_{e,j})_y$ a j -ik keret/nyílásokkal áttört fal hatékony nyírási merevsége az x és y irányban,

x_j, y_j a j -ik keret/nyílásokkal áttört fal merőleges távolsága a nyírásközépponttól az x és y irányban.

A merevítőrendszer öblösödési merevsége három forrásból származhat: saját öblösödési merevséggel rendelkezhetnek a magok, és öblösödési merevség származhat a falak, valamint a keretek oszlopainak/nyílásokkal áttört falak falsávjainak hajlítási merevségéből:

$$EI_\omega = E_w \sum_1^m [I_{\omega,k} + (I_{w,k})_x y_k^2 + (I_{w,k})_y x_k^2] + E_c \sum_1^f [(I_{c,j}r_j)_x y_j^2 + (I_{c,j}r_j)_y x_j^2]. \quad (35)$$

A (35) képletben

$I_{\omega,k}$ a k -ik mag öblösödési inercianyomatéka,

$E_w(I_{w,k})_x, E_w(I_{w,k})_y$ a k -ik fal/mag hajlítási merevsége az x és y irányban,

$E_c(I_{c,j}r_j)_x, E_c(I_{c,j}r_j)_y$ a j -ik keret/nyílásokkal áttört fal oszlopainak/falsávjainak hajlítási merevsége az x és y irányban,

x_k, y_k a k -ik fal/mag merőleges távolsága a nyírásközépponttól az x és y irányban.

A fenti összefüggésekben található geometriai és merevségi jellemzők közül egyedül a csavarási jellemzők meghatározása jelenthet némi nehézséget. Viszonylag kevés forrás foglalkozik ezekkel, amelyekben vagy az elméleti kérdések dominálnak, vagy pedig csak egyes speciális esetekre kapunk zárt megoldást. Sajnálatos módon az irodalomban rendelkezésre álló képletek nem mentesek a sajtóhibáktól. Hogy a csavarási jellemzők kiszámításának hálátlan feladatát megkönnyítsük,

összegyűjtöttük a gyakorlati esetekben leggyakrabban előforduló merevítőmagok csavarási inercianyomatékainak, illetve nyírasközéppontjának meghatározására szolgáló zárt képleteket (Zalka, 2000). Néhány ilyen képlet a Mérnöki Kézikönyvben (Palotás, 1981/84) is található.

A hajlítási merevségnél elmondottakhoz hasonlóan most is érdemes megvizsgálni a (35) képlet elemeit, mert a gyakorlati számítás során a fáradságos numerikus munka jelentősen csökkenthető. Abban az esetben, amikor a merevítőelemek között keretek és merevítőfalak/magok is találhatóak, a keretoszlopokhoz tartozó öblösödési merevség értéke nagyságrendekkel kisebb lehet a merevítőfalakhoz/magokhoz tartozó értéknél. Ez azt jelenti, hogy a képlet (E_c -vel szorzott) második tagját ilyen esetekben kiszámítani sem érdemes:

$$EI_{\omega} = E_w \sum_1^m \left[I_{\omega,k} + (I_{w,k})_x y_k^2 + (I_{w,k})_y x_k^2 \right]. \quad (35a)$$

A hajlítási és csavarási jellemzők ismeretében az analógia felhasználásával a (28) képlet alapján most már felírhatjuk a tiszta csavarási rezgés sajátfrekvenciájának meghatározására szolgáló összefüggést:

$$f_{\varphi}^2 = f_{\omega}^2 + f_t^2 + \left(\frac{\eta_{\varphi}^2}{0,313} - \frac{k_{\varphi}^2}{5} - 1 \right) s_{\varphi} f_{\omega}^2, \quad (36)$$

ahol f_{ω} és f_t az öblösödési és a Saint-Venant-féle csavarási merevséghez tartozó sajátfrekvenciák. Értéküket az

$$f_{\omega}^2 = \frac{0,313 r_f^2 EI_{\omega}}{i_p^2 H^4 m} \quad (37)$$

és az

$$f_t^2 = \frac{1}{(4i_p H)^2} \frac{r_f^2 (GJ)_e}{m} \quad (38)$$

képletekből határozhatjuk meg. A (36) képletben szintén szereplő s_{φ} tényező a Saint-Venant csavarási merevség hatékonyságát fejezi ki:

$$s_{\varphi} = \sqrt{\frac{(GJ)_e}{(GJ)}}. \quad (39)$$

A (39) képletben (GJ) az „eredeti” Saint-Venant csavarási merevség:

$$(GJ) = \sum_1^m GJ_k + \sum_1^f [(K_j)_x y_j^2 + (K_j)_y x_j^2]. \quad (40)$$

Az η_φ rezgés paraméter értékeit a 2. táblázat tartalmazza a

$$k_\varphi = H \sqrt{\frac{(GJ)_e}{EI_\omega}} \quad (41)$$

csavarási paraméter függvényében.

5. A TÉRBELI FELADAT: KAPCSOLT SÍKBELI-CSAVARÁSI REZGÉSEK

Amikor a merevítőrendszer nyírasközéppontja és az épület tömegközéppontja egybeesik (például a kétszeresen szimmetrikus esetben), az f_x, f_y és f_φ „alap” frekvenciák függetlenek egymástól és a legkisebb az épület legkisebb sajátfrekvenciája.

A gyakorlati esetek többségében azonban az épület nem rendelkezik két szimmetriatengellyel, és a nyírasközéppont nem esik egybe a tömegközépponttal. Ilyenkor két dolgot kell tenni.

Első lépésben meg kell határozni a nyírasközéppont helyét – csak így lehet ugyanis kiszámítani a tiszta csavarási rezgés sajátfrekvenciáját. (A síkbeli rezgések sajátfrekvenciáinak értékét nem befolyásolja a nyírasközéppont helye.) Második lépésben figyelembe kell venni az f_x, f_y és f_φ „alap” frekvenciák egymásra hatását.

A tömör falakkal és magokkal rendelkező (és dominálónan hajlítási alakváltozást végző) merevítőrendszerek nyírasközéppontját – a szokásos módon (Zalka, 1991) – az elemek hajlítási merevsége segítségével határozhatjuk meg (a nyírási alakváltozások elhanyagolásával). Ha a rendszer kereteket és/vagy nyílásokkal át-tört falakat is tartalmaz, a nyírási alakváltozás szerepe jelentős lehet, és elhanyagolása komoly pontatlansághoz vezethet. Az ilyen rendszerek vizsgálata meglehetősen bonyolult (Kollár, 2000; Potzta and Kollár, 2003; Tarján and Kollár, 2004) és a nyírasközéppont helye a magasság mentén is változhat, ezért most egy igen egyszerű (bár közelítő) megoldást mutatunk be a nyírasközéppont helyének meghatározására.

Mivel egy merevítő elem síkbeli sajátfrekvenciája mind a hajlítási, mind a nyírási alakváltozás hatását figyelembe veszi, a merevítőrendszer nyírasközéppontjára

nak helye meghatározható az egyes elemek síkbeli sajátfrekvenciáinak figyelembevételével. A nyírasközéppont koordinátáit így az $\bar{x} - \bar{y}$ koordináta-rendszerben (4. ábra) az

$$\bar{x}_o = \frac{\sum_1^{f+m} f_y^2 \bar{x}_j}{\sum_1^{f+m} f_y^2} \quad \bar{y}_o = \frac{\sum_1^{f+m} f_x^2 \bar{y}_j}{\sum_1^{f+m} f_x^2} \quad (42)$$

képletekből számíthatjuk ki, ahol \bar{x}_j és \bar{y}_j a keretek, (nyílásokkal áttört) falak és magok saját nyírasközéppontjának merőleges távolsága az \bar{x} és \bar{y} tengelyektől. Az egyes merevítő elemek (42) összefüggésben szereplő síkbeli sajátfrekvenciáit meghatározhatjuk pl. a (28) összefüggés segítségével. Alternatív megoldásként gyors eredményre juthatunk a Southwell-tétel és a Föppl–Papkovics-tétel ismételt alkalmazásával (Kollár, 1979; Tarnai, 1991). Ily módon eljárva a legkisebb síkbeli sajátfrekvencia alsó korlátjára az

$$f^2 = f_b^2 + \frac{f_g^2 f_{s'}^2}{f_{s'}^2 + f_g^2} = f_b^2 + f_s^2 \quad (43)$$

összefüggést kapjuk, ahol az f_b és f_s értékeit a (13) és (9) képletekből számíthatjuk ki.

A gyakorlati számítás során a (43) összefüggés rendszerint tovább egyszerűsödik. Merevítőfalaknál és magoknál a jobb oldal második tagja eltűnik, és így

$$f^2 = f_b^2. \quad (43a)$$

Kereteknél pedig az első tag általában elhanyagolható a második tag mellett, és így

$$f^2 \approx f_s^2. \quad (43b)$$

Ha már ismerjük a nyírasközéppont helyét, a (34) és (35) képletek segítségével meghatározhatjuk a Saint-Venant merevség és az öblösödési merevség értékét abban a koordináta-rendszerben, amelynek kezdőpontja a nyírasközéppontban van. A tiszta csavarási rezgés sajátfrekvenciájának értékét ezek után a (36) összefüggés szolgáltatja.

Minden olyan esetben, amikor a merevítőrendszer nyírasközéppontja és az épület tömegközéppontja nem esik egybe, számolni kell az f_x, f_y és f_φ „alap” frekvenciák kombinálódásával. A kombinálódást igen egyszerűen, az

$$f^6 + a_2 f^4 + a_1 f^2 - a_0 = 0 \quad (44)$$

egyenlet segítségével vehetjük figyelembe. Az egyenlet legkisebb gyöke az épület legkisebb kapcsolt sajátfrekvenciáját szolgáltatja.

Az egyenletben szereplő együtthatókat az

$$a_0 = \frac{f_x^2 f_y^2 f_\phi^2}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2}, \quad a_1 = \frac{f_x^2 f_y^2 + f_\phi^2 f_x^2 + f_y^2 f_\phi^2}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2},$$

$$a_2 = \frac{f_x^2 \tau_x^2 + f_y^2 \tau_y^2 - f_x^2 - f_y^2 - f_\phi^2}{1 - \tau_x^2 - \tau_y^2} \quad (45)$$

képletekből számíthatjuk ki, ahol a τ_x és τ_y excentricitási paraméterek értékét a

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p}, \quad \tau_y = \frac{y_c}{i_p} \quad (46)$$

összefüggések szolgáltatják, ahol i_p az inerciasugár és x_c és y_c az épület geometriai középpontjának koordinátái a nyírasközépponti koordináta-rendszerben. Értékeket a (32) és (33) képletekből számíthatjuk ki.

Az épület sajátfrekvenciáit más tényezők is befolyásolhatják, mint például a csillapítás, a berepedt vasbeton-keresztmetszetek repedés miatt bekövetkező merevségcsökkenése vagy a merevítő elemek rugalmas befogása (az alapozásnál). Az ilyen „másodrendű” fontosságú hatások tárgyalása túlmutat e dolgozat keretein, és itt csak utalunk néhány ide vonatkozó irodalomra, ahol részletesebb információ található (Barkan, 1962; Dulácska, 1982 és 1992; Rosman, 1973; Fintel, 1974; Ellis, 1986).

6. A SZÁMÍTÁS GYAKORLATI VÉGREHAJTÁSA; SZÁMPÉLDA

A bemutatott módszer általános érvényű abban az értelemben, hogy feltételezi, hogy a merevítőrendszer *teljes*, vagyis kereteket, nyílásokkal áttört falakat, tömör falakat és magokat *is* tartalmaz, és a képletek tartalmazzák az összes érintett merevség hatását. A gyakorlatban azonban a képletek minden esetben egyszerűsödnek. Ha a merevítőrendszer tényleg minden típust tartalmaz, akkor azért, mert a falak/magok hajlítási merevsége mellett a nagyságrendekkel kisebb keretoszlop-merevségek elhanyagolhatók, ha pedig valamely típus hiányzik, akkor azért, mert a képletekből kiesik a hiányzó merevítőelem-típushoz tartozó tag. A számítás így minden esetben jelentősen egyszerűsödhet.

A bemutatott eljárás az elméleti megfontolások sorrendjében adja meg a képleteket. A gyakorlati számítás során azonban ettől a sorrendtől célszerű némileg eltérni, hogy a számítást logikus rendszerbe foglaljuk. A számítást tehát a következő lépések szerint javasoljuk elvégezni:

1. Az egyes merevítőelemek alapadatainak meghatározása
Keretek/nyílásokkal áttört falak: $K_{b,i}, K_{c,i}, K_i, f_{s',i}^2, I_{g,i}, f_{g,i}^2, s_i^2, K_{e,i}, f_{s,i}^2, f_{b,i}^2, f_i^2$
Falak és magok: $EI_{y,k}, EI_{x,k}, f_{x,k}^2, f_{y,k}^2$
2. Az excentricitási jellemzők meghatározása: $\bar{x}_o, \bar{y}_o, x_c, y_c, i_p, \tau_x, \tau_y$
3. Az x irányú síkbeli rezgés sajátfrekvenciája: $EI_y, f_{b,x}^2, K_{e,x}, K_x, s_x, f_{s,x}^2, k, \eta, f_x^2$
4. Az y irányú síkbeli rezgés sajátfrekvenciája: $EI_x, f_{b,y}^2, K_{e,y}, K_y, s_y, f_{s,y}^2, k, \eta, f_y^2$
5. A tiszta csavaró rezgés sajátfrekvenciája: $EI_\omega, (GJ), (GJ)_e, s_\varphi, f_\omega^2, k_\varphi, \eta_\varphi, f_\varphi^2$
6. A rezgések kapcsolódása; az épület legkisebb sajátfrekvenciája: a_o, a_1, a_2, f

A módszer alkalmazását és a számítás gyakorlati végrehajtását a földszint plusz 22 emeletes Sheffield Arts Tower legkisebb sajátfrekvenciájának meghatározásával mutatjuk be. A példa minden merevítőelem-típust tartalmaz és a rendszer legkisebb sajátfrekvenciája a síkbeli és tiszta csavarási rezgések kapcsolódása eredményeképpen adódik.

Az épület vízszintes merevségét négy mag és az alaprajz kerületén elhelyezkedő négy keret biztosítja. A kereteket a földszinten 16 igen zömök oszlop váltja ki, ily módon a földszinti rész jóval merevebb, mint a felszerkezet. Az egyszerűsített számításhoz az 5. ábrán alaprajzával vázolt felszerkezet merevítőrendszerét tekintjük. A számításhoz felhasználandó alapadatok a következők.

Az alaprajz méretei: $L = 36,0$ m, $B = 21,0$ m.

Az emeletmagasság: $h = 3,0$ m. Az épület magassága: $H = 66,0$ m.

A rugalmassági modulus: $E = 23000$ MN/m².

A nyírási rugalmassági modulus: $G = 9583$ MN/m².

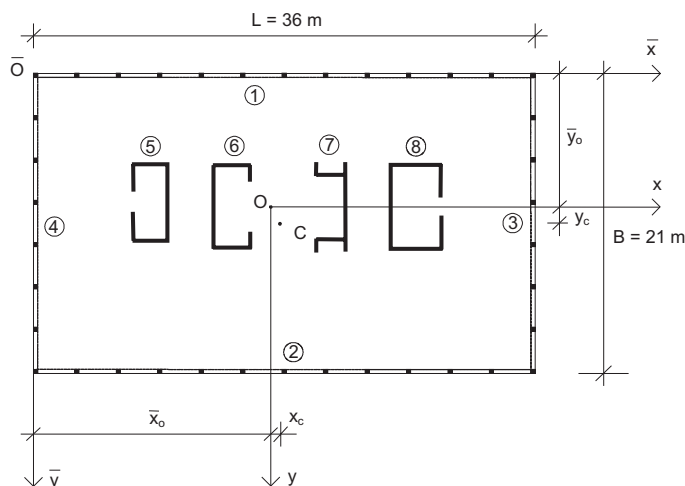
Az épület becsült térfogategységre jutó súlya: $\gamma = 2,5$ kN/m³.

Az egység hosszra jutó tömeg $m = 192,7$ kg/m.

A csökkentő tényező értéke (az 1. táblázatból) $r_f = 0,956$.

A keretoszlopok és keretgerendák keresztmetszeti mérete 0,40/0,40 (méter).

A magokra vonatkozó adatokat a 3. táblázat tartalmazza (falvastagság: 0,30 m).



5. ábra. A számpélda épülete: Sheffield Arts Tower

3. táblázat. Az 5., 6., 7. és 8. jelű merevítőmagra vonatkozó adatok

Merevítő elem	\bar{x}_i	\bar{y}_i	$I_{x,i}$	$I_{y,i}$	$I_{t,i}$	$I_{\omega,1}$	x_i	y_i
5	12,79	8,90	22,87	9,07	0,145	140,86	-5,05	-0,82
6	12,02	9,05	23,81	6,31	0,130	66,31	-5,82	-0,67
7	23,37	8,95	17,66	3,05	0,113	9,85	5,53	-0,77
8	22,76	9,15	31,17	15,49	0,165	265,12	4,92	0,57
Σ			95,51	33,92	0,553	482,14		

6.1 A MEREVÍTŐELEMENK ALAPADATAINAK MEGHATÁROZÁSA

Az azonos geometriai és merevségi adatokkal rendelkező 1. és 2. jelű keret globális és lokális nyírási merevségét az (1) és (2) képletből számítjuk ki:

$$K_{b,1} = \sum_1^{12} \frac{12E_b I_{b,i}}{l_i h} = \frac{12 \times 12 \times 23000 \times 0,002133}{3 \times 3} = 785,0 \text{ MN}$$

$$K_{c,1} = \sum_1^{13} \frac{12E_c I_{c,i}}{h^2} = \frac{13 \times 12 \times 23000 \times 0,002133}{3^2} = 850,4 \text{ MN.}$$

A keret nyírási merevségét – a (4) összefüggés segítségével – a (3) képlet szolgáltatja:

$$r_1 = \frac{K_{c,1}}{K_{c,1} + K_{b,1}} = \frac{850,4}{850,4 + 785,0} = 0,52 \quad K_1 = r_1 K_{b,1} = 0,52 \times 785,0 = 408,2 \text{ MN}$$

A nyírási merevséghez tartozó sajátfrekvencia értékét az (5) képletből határozzuk meg:

$$f_{s,1}^2 = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K_1}{m} = \frac{0,956^2 \times 408200}{(4 \times 66)^2 \times 192,7} = 0,0278 \text{ Hz}^2.$$

Az oszlopkeresztmetszetek globális tehetetlenségi nyomatéka a (6a) összefüggés szerint

$$I_{g,1} = \sum_1^{13} A_{c,i} t_i^2 = 2 \times 0,16 \times (18^2 + 15^2 + 12^2 + 9^2 + 6^2 + 3^2) = 262,08 \text{ m}^4$$

A globális hajlítási merevséghez tartozó frekvenciát a (7) képletből határozzuk meg:

$$f_{g,1}^2 = \frac{0,313 r_f^2 E_c I_{g,1}}{H^4 m} = \frac{0,313 \times 0,956^2 \times 23000000 \times 262,08}{66^4 \times 192,7} = 0,472 \text{ Hz}^2.$$

A (11) összefüggéssel meghatározott hatékonysági tényező

$$s_1^2 = \frac{f_{g,1}^2}{f_{s,1}^2 + f_{g,1}^2} = \frac{0,472}{0,0278 + 0,472} = 0,944$$

és a (10) összefüggéssel definiált hatékony nyírási merevség

$$K_{e,1} = s_1^2 K_1 = 0,944 \times 408,2 = 385,3 \text{ MN}$$

segítségével a (9) képletből most már kiszámíthatjuk a hatékony nyírási merevséghez tartozó sajátfrekvenciát

$$f_{s,1}^2 = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K_{e,1}}{m} = \frac{1}{(4 \times 66)^2} \frac{0,956^2 \times 385300}{192,7} = 0,0262 \text{ Hz}^2.$$

Az oszlopok lokális hajlítási merevségéhez tartozó sajátfrekvenciát ((13) képlet) most nem számítjuk ki, mivel a merevítőrendszerben magok is vannak, és a

magok nagyságrendekkel nagyobb hajlítási merevsége mellett a keretoszlopok merevsége elhanyagolható,

A későbbiekben (a nyírasközéppont helyének meghatározásához) szükség lesz még a keret sajátfrekvenciájára. A sajátfrekvenciát – az oszlopok lokális hajlításához tartozó (és nagyságrendekkel kisebb) rész elhanyagolásával – a (43b) összefüggésből kapjuk meg:

$$f_1^2 = f_s^2 = 0,0262 \text{ Hz}^2.$$

Az azonos geometriai és merevségi adatokkal rendelkező 3. és 4. jelű keret vizsgálata a fentiekkel azonos módon, ugyanazoknak a képleteknek a felhasználásával történik. A globális és lokális nyírési merevségét az (1) és (2) képletből számítjuk ki:

$$K_{b,3} = \sum_1^7 \frac{12E_b I_{b,i}}{l_i h} = \frac{7 \times 12 \times 23000 \times 0,002133}{3 \times 3} = 457,9 \text{ MN}$$

$$K_{c,3} = \sum_1^8 \frac{12E_c I_{c,i}}{h^2} = \frac{8 \times 12 \times 23000 \times 0,002133}{3^2} = 523,3 \text{ MN}.$$

A keret nyírési merevségét – a (4) összefüggés segítségével – a (3) képlet szolgáltatja:

$$r_3 = \frac{K_{c,3}}{K_{c,3} + K_{b,3}} = \frac{523,3}{523,3 + 457,9} = 0,533$$

$$K_3 = r_3 K_{b,3} = 0,533 \times 457,9 = 244,1 \text{ MN}.$$

A nyírési merevséghez tartozó sajátfrekvencia értékét az (5) képletből határozzuk meg:

$$f_{s,3}^2 = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K_3}{m} = \frac{0,956^2 \times 244100}{(4 \times 66)^2 \times 192,7} = 0,0166 \text{ Hz}^2.$$

Az oszlopkeresztmetszetek globális tehetetlenségi nyomatéka a (6a) összefüggés szerint

$$I_{g,3} = \sum_1^8 A_{c,i} t_i^2 = 2 \times 0,16 \times (10,5^2 + 7,5^2 + 4,5^2 + 1,5^2) = 60,48 \text{ m}^4.$$

A globális hajlítási merevséghez tartozó frekvenciát a (7) képletből határozzuk meg:

$$f_{g,3}^2 = \frac{0,313r_f^2 E_e I_{g,3}}{H^4 m} = \frac{0,313 \times 0,956^2 \times 23000000 \times 60,48}{66^4 \times 192,7} = 0,109 \text{ Hz}^2.$$

A (11) összefüggéssel meghatározott hatékonysági tényező

$$s_3^2 = \frac{f_{g,3}^2}{f_{s,3}^2 + f_{g,3}^2} = \frac{0,109}{0,0166 + 0,109} = 0,868$$

és a (10) összefüggéssel definiált hatékony nyírási merevség

$$K_{e,3} = s_3^2 K_3 = 0,868 \times 244,1 = 211,9 \text{ MN}$$

segítségével a (9) képletből most már kiszámíthatjuk a hatékony nyírási merevséghez tartozó sajátfrekvenciát

$$f_{s,3}^2 = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K_{e,3}}{m} = \frac{1}{(4 \times 66)^2} \frac{0,956^2 \times 211900}{192,7} = 0,0144 \text{ Hz}^2.$$

Mivel a merevítőrendszerben magok is vannak, és a magok hajlítási merevsége nagyságrendekkel nagyobb, mint a keretoszlopok merevsége, az oszlopok lokális hajlítási merevségéhez tartozó sajátfrekvenciát ((13) képlet) most sem számítjuk ki.

A későbbiekben (a nyírásközéppont helyének meghatározásához) szükség lesz még a keret sajátfrekvenciájára. A sajátfrekvenciát – az oszlopok lokális hajlításához tartozó rész elhanyagolásával – a (43b) összefüggésből számítjuk ki:

$$f_3^2 = f_{s,3}^2 = 0,0144 \text{ Hz}^2.$$

Az 5., 6., 7. és 8. jelű merevítőmag sajátfrekvenciáját a (15) összefüggés alapján határozzuk meg:

$$f_{s,x}^2 = \frac{0,313r_f^2 E_w I_{s,y}}{H^4 m} = \frac{0,313 \times 0,956^2 \times 23 \times 10^6 \times 9,07}{66^4 \times 192,7} = 0,0163 \text{ Hz}^2$$

és

$$f_{5,y}^2 = \frac{0,313r_f^2 E_w I_{5x}}{H^4 m} = \frac{0,313 \times 0,956^2 \times 23 \times 10^6 \times 22,87}{66^4 \times 192,7} = 0,0412 \text{ Hz}^2,$$

illetve:

$$f_{6,x}^2 = \frac{0,313r_f^2 E_w I_{6,y}}{H^4 m} = 0,0114 \text{ Hz}^2, \quad f_{6,y}^2 = \frac{0,313r_f^2 E_w I_{6x}}{H^4 m} = 0,0428 \text{ Hz}^2,$$

$$f_{7,x}^2 = \frac{0,313r_f^2 E_w I_{7,y}}{H^4 m} = 0,0055 \text{ Hz}^2, \quad f_{7,y}^2 = \frac{0,313r_f^2 E_w I_{7x}}{H^4 m} = 0,0318 \text{ Hz}^2,$$

$$f_{8,x}^2 = \frac{0,313r_f^2 E_w I_{8,y}}{H^4 m} = 0,0279 \text{ Hz}^2, \quad f_{8,y}^2 = \frac{0,313r_f^2 E_w I_{8x}}{H^4 m} = 0,0561 \text{ Hz}^2.$$

Az 5., 6., 7. és 8. jelű merevítőmagra vonatkozó adatok a 3. táblázatban találhatóak.

6.2 A NYÍRÁSKÖZÉPPONT HELYÉNEK ÉS A MEREVÍTŐRENDSZER EXCENTRICITÁSÁNAK MEGHATÁROZÁSA

A merevítőelemek sajátfrekvenciáinak ismeretében a nyírasközéppont két koordinátája a (42) összefüggések segítségével határozható meg:

$$\bar{x}_o = \frac{0,0144 \times 36 + 0,0412 \times 12,79 + 0,0428 \times 12,02 + 0,0318 \times 23,37 + 0,0561 \times 22,76}{2 \times 0,0144 + 0,0412 + 0,0428 + 0,0318 + 0,0561} = 17,84 \text{ m},$$

$$\bar{y}_o = \frac{0,0262 \times 21 + 0,0163 \times 8,9 + 0,0114 \times 9,05 + 0,0055 \times 8,95 + 0,0279 \times 9,15}{2 \times 0,0262 + 0,0163 + 0,0114 + 0,0055 + 0,0279} = 9,72 \text{ m}.$$

A koordináta-rendszer középpontját a nyírasközéppontba helyezzük át. A új x - y koordináta-rendszerben (5. ábra) az alaprajz geometriai középpontjának koordinátáit a (33a) összefüggés szolgáltatja:

$$x_c = \frac{L}{2} - \bar{x}_o = 0,16 \text{ m} \quad \text{és} \quad y_c = \frac{B}{2} - \bar{y}_o = 0,78 \text{ m}.$$

A merevítőrendszer excentricitását így a (33) képletből kapjuk:

$$t = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = \sqrt{0,16^2 + 0,78^2} = 0,80 \text{ m.}$$

Az inerciasugár értékét a (32) képletből számítjuk ki:

$$i_p = \sqrt{\frac{L^2 + B^2}{12} + t^2} = \sqrt{\frac{36^2 + 21^2}{12} + 0,80^2} = \sqrt{145,4} = 12,06 \text{ m,}$$

végül az excentricitás két komponensét az x és y irányban a (46) képletek adják:

$$\tau_x = \frac{x_c}{i_p} = \frac{0,16}{12,06} = 0,013 \text{ és } \tau_y = \frac{y_c}{i_p} = \frac{0,78}{12,06} = 0,065$$

6.3 AZ x IRÁNYÚ SÍKBELI REZGÉS SAJÁTFREKVENCIÁJA

A merevítőrendszer hajlítási merevségét a (16) összefüggés segítségével határozzuk meg, ahol a nagyságrendekkel kisebb első tagot (a keretoszlopok merevségét) a második tag (merevítőmagok merevsége) mellett elhanyagoljuk:

$$EI_y = E_w \sum_1^4 I_{y,k} = 23000(9,07 + 6,31 + 3,05 + 15,49) = 780160 \text{ MNm}^2.$$

Az ehhez a hajlítási merevséghez tartozó frekvencia a (17) képletből számítható ki:

$$f_{b,x}^2 = \frac{0,313 r_f^2 EI_y}{H^4 m} = \frac{0,313 \times 0,956^2 \times 7,8016 \times 10^8}{66^4 \times 192,7} = 0,0610 \text{ Hz}^2.$$

A rendszer hatékony nyírési merevségét a (18) képletből kapjuk meg:

$$K_{e,x} = \sum_1^2 s_j^2 K_j = 2 \times 385,3 = 770,6 \text{ MN.}$$

A rendszer eredeti nyírási merevsége a (3) és (21) összefüggések alapján:

$$K_x = \sum_1^2 K_j = 2 \times 408,2 = 816,4 \text{ MN.}$$

A hatékonysági tényező így a (20) összefüggésből

$$s_x = \sqrt{\frac{K_{e,x}}{K_x}} = \sqrt{\frac{770,6}{816,4}} = \sqrt{0,944} = 0,9715.$$

A hatékony nyírási merevséghez tartozó frekvenciát a (19) képlet szolgáltatja:

$$f_{s,x}^2 = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K_{e,x}}{m} = \frac{0,956^2 \times 770600}{(4 \times 66)^2 \times 192,7} = 0,0524 \text{ Hz}^2.$$

A (26) összefüggéssel megadott k dimenziótlan paraméter

$$k = H \sqrt{\frac{K_{e,x}}{EI_y}} = 66 \sqrt{\frac{770,6}{780160}} = 2,07$$

függvényében az η frekvencia paraméter értékét a 2. táblázatból kapjuk meg:

$$\eta = 0,879.$$

A fenti tényezők ismeretében az épület x irányú rezgésének frekvenciáját a (28) képlet szolgáltatja:

$$f_x^2 = 0,0610 + 0,0524 + \left(\frac{0,879^2}{0,313} - \frac{2,07^2}{5} - 1 \right) 0,9715 \times 0,0610 = 0,1496 \text{ Hz}^2.$$

6.4 AZ y IRÁNYÚ SÍKBELI REZGÉS SAJÁTFREKVENCIÁJA

A merevítőrendszer hajlítási merevségét a (16) összefüggés segítségével határozzuk meg, ahol a nagyságrendekkel kisebb első tagot (a keretoszlopok merevségét) a második tag (a merevítőmagok merevsége) mellett elhanyagoljuk:

$$EI_x = E_w \sum_1^4 I_{x,k} = 23000(22,87 + 23,81 + 17,66 + 31,17) = 2196730 \text{ MNm}^2.$$

Az ehhez a hajlítási merevséghez tartozó frekvencia a (17) képletből számítható ki:

$$f_{b,y}^2 = \frac{0,313r_f^2 EI_x}{H^4 m} = \frac{0,313 \times 0,956^2 \times 2,19673 \times 10^9}{66^4 \times 192,7} = 0,1719 \text{ Hz}^2.$$

A rendszer hatékony nyírási merevségét a (18) képletből kapjuk meg:

$$K_{e,y} = \sum_1^2 s_j^2 K_j = 2 \times 211,9 = 423,8 \text{ MN}.$$

A rendszer eredeti nyírási merevsége a (3) és (21) összefüggések alapján:

$$K_y = \sum_1^2 K_j = 2 \times 244,1 = 488,2 \text{ MN}.$$

A hatékonysági tényező így a (20) összefüggésből

$$s_y = \sqrt{\frac{K_{e,y}}{K_y}} = \sqrt{\frac{423,8}{488,2}} = \sqrt{0,868} = 0,932.$$

A hatékony nyírási merevséghez tartozó frekvenciát a (19) képlet szolgáltatja:

$$f_{s,y}^2 = \frac{1}{(4H)^2} \frac{r_f^2 K_{e,y}}{m} = \frac{0,956^2 \times 423800}{(4 \times 66)^2 \times 192,7} = 0,0288 \text{ Hz}^2.$$

A (26) összefüggéssel megadott k dimenziótlan paraméter

$$k = H \sqrt{\frac{K_{e,y}}{EI_x}} = 66 \sqrt{\frac{423,8}{2196730}} = 0,917,$$

függvényében az η frekvencia paramétert a 2. táblázatból kapjuk meg:

$$\eta = 0,643.$$

A fenti tényezők ismeretében az épület y irányú rezgésének frekvenciáját a (28) képlet szolgáltatja:

$$f_y^2 = 0,1719 + 0,0288 + \left(\frac{0,643^2}{0,313} - \frac{0,917^2}{5} - 1 \right) 0,932 \times 0,1719 = 0,2252 \text{ Hz}^2.$$

6.5 A TISZTA CSAVARÓ REZGÉS SAJÁTFREKVENCIÁJA

Az öblösödési inercianyomaték értékét a (35) képlet segítségével határozzuk meg a képlet alatti megjegyzés figyelembevételével, miszerint a keretoszlopokhoz tartozó öblösödési inercianyomaték értéke elhanyagolható. Így

$$\begin{aligned} EI_\omega &= 23000(482,14 + 22,87 \times 5,05^2 + 23,81 \times 5,82^2 + 17,66 \times 5,53^2 + 31,17 \times 4,92^2 + \\ &\quad + 9,07 \times 0,82^2 + 6,31 \times 0,67^2 + 3,05 \times 0,77^2 + 15,49 \times 0,57^2) = \\ &= 23000 \times 3182 = 7319 \times 10^4 \text{ MNm}^4. \end{aligned}$$

A hatékony Saint-Venant csavarási merevség értékét a (34) képletből számítjuk ki:

$$(GJ)_e = 9583 \times 0,553 + 2(385,3 \times 10,5^2 + 211,9 \times 18^2) = 227569 \text{ MNm}^2.$$

Az eredeti Saint-Venant csavarási merevséget a (40) képlet adja:

$$(GJ) = 9583 \times 0,553 + 2(408,2 \times 10,5^2 + 244,1 \times 18^2) = 253484 \text{ MNm}^2.$$

A (39) képlettel megadott Saint-Venant csavarási merevség hatékonyságát jellemző s_φ tényező értéke:

$$s_\varphi = \sqrt{\frac{(GJ)_e}{(GJ)}} = \sqrt{\frac{227569}{253484}} = 0,947.$$

A (37) és (38) összefüggésekből most már kiszámíthatjuk az öblösödési és Saint-Venant merevségekhez tartozó frekvenciák értékét:

$$f_\omega^2 = \frac{0,313 r_f^2 EI_\omega}{i_p^2 H^4 m} = \frac{0,313 \times 0,956^2 \times 7319 \times 10^7}{12,06^2 \times 66^4 \times 192,7} = 0,0394 \text{ Hz}^2,$$

és

$$f_t^2 = \frac{1}{(4i_p H)^2} \frac{r_f^2 (GJ)_e}{m} = \frac{0,956^2 \times 2276 \times 10^5}{16 \times 12,06^2 \times 66^2 \times 192,7} = 0,1065 \text{ Hz}^2.$$

A (41) összefüggéssel definiált k_φ csavarási paraméter

$$k_\varphi = H \sqrt{\frac{(GJ)_e}{EI_\omega}} = 66 \sqrt{\frac{2276 \times 10^5}{7319 \times 10^7}} = 3,68$$

függvényében az η_φ rezgés paraméter értékét a 2. táblázatból kapjuk:

$$\eta_\varphi = 1,266.$$

Végül a (36) képlet segítségével meghatározhatjuk a tiszta csavaró rezgés frekvenciáját:

$$f_\varphi^2 = 0,0394 + 0,1065 + \left(\frac{1,266^2}{0,313} - \frac{3,68^2}{5} - 1 \right) 0,947 \times 0,0394 = 0,1986 \text{ Hz}^2.$$

6.6 A FREKVENCIÁK KAPCSOLÓDÁSA; AZ ÉPÜLET LEGKISEBB SAJÁTFREKVENCIÁJA

Az épület alaprajzának súlypontja és a merevítőrendszer csavarási középpontja nem esik egybe, és így számolni kell a síkbeli és csavarási rezgések kapcsolódásával. A számításhoz szükséges segédmenyiségeket a (45) összefüggésből határozzuk meg:

$$a_0 = 0,00672, \quad a_1 = 0,1086, \quad a_2 = -0,5749.$$

A fenti paraméterekkel a (44) egyenlet legkisebb gyöke, és így az épület legkisebb sajátfrekvenciája

$$f = 0,364 \text{ Hz.}$$

7. A MÓDSZER PONTOSSÁGÁRÓL

A javasolt módszer pontosságának megállapítására átfogó pontossági vizsgálatot hajtottunk végre. A vizsgált szerkezeteket két csoportba osztottuk. Először hat

darab önálló keret és két nyílásokat áttört fal legkisebb sajátfrekvenciáját határoztuk meg és hasonlítottuk össze a végeleemes megoldással. A keretek és nyílásokkal áttört falak 4-, 10-, 16-, 22-, 28-, 34-, 40-, 60- és 80-szintesek voltak. Az egy-, két- és háromhajós keretek keretállása 6 méter, az emeletmagasság 3 méter volt. A keretgerendák és keretoszlopok keresztmetszetét úgy állapítottuk meg, hogy a merevségek széles skáláját biztosítsák. A végeleemes számítások tanúsága szerint a rezgésalakok a dominálón hajlítási alaktól a vegyes hajlítási/nyírási alakokon keresztül a dominálón nyírási jellegű alakok között változtak. A végeleemes vizsgálathoz az AXIS VM programot (AXIS, 2001) használtuk, amelynek az eredményeit „pontos” eredményeknek tekintettük. Az eredmények összefoglalása a 4. táblázat első sorában található.

Az önálló keretek sajátfrekvenciájának meghatározása után a vizsgálatot kiterjesztettük merevítőrendszerek vizsgálatára. A hat keretet és két nyílással áttört falat kiegészítettük négy merevítőfallal és hat darab két, egy három és egy négy elemből álló merevítőrendszert alakítottunk ki. A merevítőrendszerek magasságát nyolc lépésben 4-től 80 szintig növeltük.

Mivel a javasolt eljárás legfontosabb eleme a keretektől, nyílásokkal áttört falakból és magokból álló merevítőrendszer legkisebb síkbeli sajátfrekvenciájának meghatározása, a vizsgálat a (28) összefüggés pontosságának ellenőrzésére irányult. Meghatároztuk a nyolc merevítőrendszer 72 változatának legkisebb sajátfrekvenciáját, és az eredményeket összehasonlítottuk a véges elemes megoldásokkal. Az eredményeket a 4. táblázat második sora foglalja össze.

A 4. táblázatban összefoglalt eredmények tanúsága szerint a (28) összefüggés megfelelő pontossággal szolgáltatja a legkisebb sajátfrekvencia értékét. A vizsgált 144 esetben a „pontos” és a közelítő érték közötti átlagos eltérés mintegy 2% volt. A (28) összefüggés maximális hibája 7% volt.

4. táblázat. A legkisebb sajátfrekvencia (28) képlettel kiszámított értékének százalékos eltérése a véges elemes megoldástól (AXIS, 2001)

Szerkezet	Hibatartomány*	Az abszolút értékű hibák átlaga	Az abszolút értékű hibák maximális értéke
72 darab keret	-3% – +7%	1,6%	7%
72 darab keretektől és falakból álló rendszer	-6% – +5%	2,1%	6%

* A negatív hiba a biztonság kárára való eltérést jelöli.

IRODALOMJEGYZÉK

- AXIS VM Végeselemes programrendszer. 6. verzió. Felhasználói Kézikönyv, 2001. Inter-CAD Kft.
www.axisvm.com
- Barkan, D. D.: *Dynamics of bases and foundations*. McGraw-Hill, 1962.
- Dulácska Endre és Kollár László: Méretezés földrengésre az európai elvek figyelembevételével. Magyar Mérnöki Kamara, Tartószerkezeti Tagozat, Tervezési Segédlet, TT – TS 4, 2003.
<http://mernok.hu/tt>
- Dulácska Endre: *Az altalaj és az építmény kölcsönhatása*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1982. Bővített és átdolgozott kiadás: *Soil settlement effects on buildings*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1992.
- Ellis, R. B.: The significance of dynamic soil-structure interaction in tall buildings. *Proceedings of ICE* 1986. 81, Part 2, 221–242.
- Fintel, M. (ed.): *Handbook of concrete engineering*. Van Nostrand Reinhold, 1974.
- Hegedűs István és Kollár László P.: Szendvicsrúdmodell alkalmazása mérnöki szerkezetek stabilitásvizsgálatában. Hatodik fejezet „*A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái*” c. könyvben. Szerkesztő: Kollár Lajos. Akadémiai Kiadó, Budapest 1991. 387–463.
- Kollár, L. P.: Flexural-torsional vibration of open section composite beams with shear deformation. *International Journal of Solids and Structures* 38 (2000), 7543–7558.
- Kollár Lajos (szerkesztő): *A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái*. Akadémiai Kiadó, Budapest 1991.
- Kollár Lajos: *A szél dinamikus hatása magas építményekre*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1979.
- Kollbrunner C. F. and Basler K.: *Torsion in structures*. Springer-Verlag, Berlin, New York 1969.
- Palotás László: *Mérnöki Kézikönyv*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1981 és 1984.
- Potzta, G. and Kollár, L. P.: Analysis of building structures by replacement sandwich beams. *International Journal of Solids and Structures* 40 (3) (2003) 535–553.
- Rosman, R.: Dynamics and stability of shear wall building structures. *Proceedings of ICE* 1973, 55, Part 2, 411–423.
- Tarjan, G. and Kollár, L. P.: Approximate analysis of building structures with identical stories subjected to earthquakes. *International Journal of Solids and Structures* 41 (5–6) (2004) 1411–1433.
- Tarnai Tibor: Az elágazási kritikus teherre vonatkozó összegzési tételek. Második fejezet „*A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái*” c. könyvben. Szerkesztő: Kollár Lajos. Akadémiai Kiadó, Budapest 1991. 40–108.
- Timoshenko, S.: *Vibration problems in engineering*. D. Van Nostrand Company, Inc., London 1928.
- Vértés György: *Építmények dinamikája*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1976.
- Vlasov, V. Z.: *Tonkostennye uprugie sterzhni*. Moscow, 1940. 2nd ed.: *Thin-walled elastic beams*. Israeli Program for Scientific Translations, Jerusalem 1961.
- Zalka, K. A. *Global structural analysis of buildings*. E & FN Spon, London 2000.
- Zalka Károly: Elcsavarodó kihajlás több merevítőtag esetén. Hetedik fejezet „*A mérnöki stabilitáselmélet különleges problémái*” c. könyvben. Szerkesztő: Kollár Lajos. Akadémiai Kiadó, Budapest 1991. 489–525.

AN APPROXIMATE METHOD FOR THE CALCULATION OF THE FUNDAMENTAL FREQUENCY OF BUILDING STRUCTURES

Summary

Based on the equivalent column approach, a simple hand method is presented for the 3-dimensional frequency analysis of buildings braced by frameworks, coupled shear walls, shear walls and cores. Lateral vibration is characterised by three types of deformation: the full-height 'local' bending of the individual columns/wall sections/shear walls/cores, the full-height 'global' bending of the frameworks/coupled shear walls, which is associated with the axial deformations of the columns/wall sections, and the shear deformation of the frameworks/coupled shear walls. Based on the stiffnesses associated with these three types of deformation, a closed formula is derived for the calculation of the lateral frequencies. An analogy between bending and torsion is used to carry out the pure torsional frequency analysis. The coupling of the lateral and pure torsional modes is taken into account by a simple algebraic equation. The results of a comprehensive accuracy analysis covering 144 multistorey structures demonstrate good agreement with the Finite Element solution: the average difference being 2% and the maximum difference being 7%. A detailed worked example with step-by-step instructions shows the easy use of the method.

Keywords: vibration, frequency, bracing system, 3D-behaviour, earthquake