

# **Extremális struktúrák**

## OTKA zárójelentés, T-032810

Pályázat-vezető: Simonovits Miklós

2007. február 28.

A pályázatban három kutató vett részt: T. Sós Vera, akadémikus, Győri Ervin, a tudományok doktora, és pályázatvezetőként én, Simonovits Miklós (akad. lev tag). Célunk elsősorban a korábbi kutatásaink folytatása, illetve az azokból adódó újabb kérdések vizsgálata volt.

Az általunk vizsgált, szerteágazó, de mégis szorosan összefüggő területről kiemelnénk az alábbiakat.

1. Klasszikus extremális gráfelméleti és Ramsey elméleti kérdések, közösséges gráfokra, ill. hipergráfelméleti extremális gráfelméleti problémák vizsgálata, hipergráfelméleti Ramsey problémák.
2. Hipergráfelméleti Ramsey és extrém problémák kapcsolata.
3. Ramsey-Turán típusú hipergráf problémák.
4. Erdős-Kleitman-Rothschild típusú kérdések vizsgálata.
5. Gráfsorozatok konvergenciájának, gráfok metrikus terének értelmezése, a különböző konvergenciafogalmak ekvivalenciái.
6. Előbbi alkalmazásai, gráfok lokális és globális tulajdonságai kapcsolatainak vizsgálata, parameter testing.
7. Algebrai módszerek alkalmazása illeszkedési struktúrák vizsgálatában

### **1. Klasszikus gráfelméleti témák: extremális gráfelméleti kérdések. Hipergráfelméleti problémák vizsgálata**

Az adott periódusban eredményes kutatást végeztünk a hipergráfokban található hosszú köröket biztosító feltételekkel kapcsolatban, idevonatkozó hi-

pergráf Ramsey kérdésekről, ezekben a hipergráf regularitási lemma felhasználásáról.

Ezek között megemlítjük az Erdős-T. Sós Fa-sejtésre vonatkozó Ajtai-Komlós-Simonovits-Szemerédi eredményeket, de nem részletezzük őket, mert leírásuk kissé elhúzódik, elsősorban a bizonyítás bonyolultsága miatt. Próbáljuk a részleteket leegyszerűsíteni.

Ugyancsak megemlítjük Kohayakawa, Skokan és Simonovits eredményeit páratlan körök Ramsey problémáira vonatkozóan. Kiemeljük az alábbi: ha  $n > n_0$ , akkor a 3-színű Ramsey függvény,  $R(C_n, C_n, C_n) = 4n - 3$ . Az utóbbi időben ezt kiterjesztettük bizonyos, a diagonálison kívüli esetekre is, azaz, amikor a különböző körök hossza nem azonos. A bizonyítás stabilitási tételekre, továbbá a Regularitási Lemmára támaszkodik. Legvégül megemlítjük a 7-szerzős, 3-uniform hipergráfok  $n$  pontú laza köreire vonatkozó eredményünket is.

További érdekes eredményeket bizonyított Győri, P. Balister-rel, Lehel Jenővel és R. Schelp-pel közösen, adott hosszúságú utat nem tartalmazó, összefüggő gráfokról (megjavítva Kopylov eredményeit, melyek a híres Erdős-Gallai eredményeket javították).

Végül megemlítjük Győri gráfok bizonyos speciális (környezet-megkülönböztető) színezési eredményeit is.

### 1.1. Extremális eredmények alkalmazása számelméletben

Erdős, Sárközy és T. Sós bizonyos korábbi eredményeiben extremális gráfelméleti kérdésekre vezették vissza bizonyos számelméleti feladatok megoldását. Ezzel kapcsolatban Győri Ervin – javítva Sárközy Gábor korábbi becslésén, – szép, meglepetésünkre pontos eredményeket bizonyított a  $C_6$ -mentes páros gráfok maximális élszámára vonatkozólag, az aszimmetrikus esetben (amikor tehát a páros gráf egyik osztálya jóval nagyobb, mint a másik).

A fenti feladatok megoldásához Győrinek új módszereket kellett kidolgoznia. Ezekkel az Erdős-Sárközy-T. Sós kérdéseket is megválaszolta. Későbbi cikkében az extremális gráfokat is megtalálja. Külön érdekesség, hogy a módszerből pontos felső becslést sikerült kapni a (nem feltétlenül uniform) háromszögmentes hipergráfok elméletösszegére.

Számelméleti alkalmazásaink között megemlítjük – egyebek között – a Dietmann-Elsholz-Gyarmati-Simonovits eredményeket, ahol szintén a kombinatorikus (extrém gráfelméleti) eszköz megjavítása adja a számelméleti javítást.

## 1.2. Gráf és hipergráfelméleti Ramsey és extrém problémák kapcsolata

Az utóbbi időben több olyan eredmény született, melyben aktívan vettünk részt, és ahol extrém gráfelméleti eredmények alkalmazásaként kapunk Ramsey típusú eredményeket, illetve, ahogyan azt fent is említettük, stabilitási módszerekkel közelítve, pontos extrémális eredményeket kaptunk.

Ilyen eredmények pl. Füredi és Simonovits tétele a Fano sík extrém problémájára vonatkozóan, ahol az éles eredményt de Caen, Füredi (ill. Füredi és Kündgen) korábbi eredményeire támaszkodva kaptuk meg. Ugyancsak ilyen eredmény Füredi, Pikhurko és Simonovits két extrém hipergráfelméleti eredménye is. Ezen három cikk azért érdekes, mert igen kevés hipergráfelméleti, pontos eredmény ismert.

## 1.3. Ramsey-Turán típusú hipergráf problémák

Turán Pál és Erdős Pál kezdeményezte bizonyos Turán típusú extrémális tételek alkalmazását geometriában, távolságeloszlásokra. Ehhez kapcsolódtak Katona Gyula és Szidorenko eredményei a valószínűségszámításbeli alkalmazásokkal. Ennek kapcsán, hogy jobb eszközökhöz jussunk, kezdeményezte T. Sós Vera olyan extrémális feladatok kutatását, ahol bizonyos részgráfok kizárása mellett még a nagyon nagy független csúcshalmazokat is kizártuk. Ezek a Ramsey-Turán típusú problémák.

Ezen vizsgálatok nyomán meglepő, újszerű jelenségeket fedeztünk fel. Hipergráfokra ezen kérdések vizsgálatát ugyancsak Erdős és T. Sós Vera kezdeményezte.

Beszámolóinkban két idevonatkozó területen említjük meg eredményeinket. T. Sós és Simonovits a véletlen gráfok problémáinak hierarchiájára vonatkozó kutatásaiban 4 problémakört definiáltak és vizsgáltak meg. Egyik ezek közül teljesen visszavezethető a (függetlenségi feltétel nélküli, többszínű) Ramsey-Turán problémákra. Egy másik osztály leírását lényegében a túltelelt gráfokra vonatkozó tételek segítségével lehetett megadni. Bizonyos itt kutatott kérdések mindmáig megoldatlanok és kapcsolódnak a fontos és szép Rödl-Rucinski tételekhez. Idevonatkozó kutatásainkat még folytatni szándékozunk a jövőben.

A hipergráf extrémális problémák teljesen másként viselkednek mint a közönséges extrémális problémák. Ezt a különbséget vizsgálta T. Sós Vera, Erdőssel korábban, majd nyomukban számos elismert kutató. Az egyik ilyen mélyebb Erdős-T. Sós kérdés az volt, hogy vannak-e olyan három-uniform hipergráfok, amelyre a  $o(n)$ -es stabilitásszám esetén is pozitív a Ramsey-Turán

”extrém sűrűség”, de a Turán extrém szám és a Ramsey-Turán extrém szám –  $r$ -uniform esetben –  $cn^r$ -rel tér el egymástól: az aszimptotikus sűrűségek pozitívak, de nem azonosak. Most Dhruv Mubayi-val közösen Sós Vera visszatért ehhez a kérdéshez, és újabb érdekes explicit konstrukciókat adott meg az adott jelenségre vonatkozóan.

## 2. Erdős-Kleitman-Rothschild típusú kérdések vizsgálata

Ezek a kérdések néhány egymással szorosan összefüggő alterületre bonthatók. Szó van olyan kérdésekről, hogy adott kizárt alakzatok esetén adott méretű objektumok tipikus struktúrája milyen lehet. A kiinduló tételek arról szólnak, hogy majdnem minden ilyen gráf valamilyen nagyon gyenge aszimptotikus értelemben egy megfelelő osztályszámú Turán gráf részgráfjaiként viselkedik. Ezeket az Erdős-Kleitman-Rothschild/ Erdős-Frankl-Rödl típusú tételeket általánosítottuk, bebizonyítva, hogy a kizárt gráfok pontosabb struktúrája ismeretében a tipikus Kizárt-Gráf-Mentes  $n$  pontú gráfok struktúrája is sokkal pontosabban írható le, mint ahogyan azt a korábbi eredmények lehetővé tették.

A Balogh-Bollobás-Simonovits eredmények már kezdetben is igen megjavították az Erdős-Frankl-Rödl becsléseket. Újabb publikálásra leadott, illetve publikálás alatt álló eredményeink megadják majdnem mindegyik Kizárt-Gráf-Mentes  $n$  pontú gráf struktúráját a kizárt gráfosztály dekompozíciós osztálya segítségével. A döntő áttörés tehát az, hogy nem csak logaritmikusan éles becsléseket adunk az adott gráfok számára, hanem majdnem mindegyik gráfra jó struktúrális leírást.

Idevonatkozó eredményeinket még több vonalon folytatjuk.

## Öröklődő gráftulajdonságok

Számelméletben kezdődött és sokat vizsgált annak vizsgálata, hogy nagy struktúrákban (pl. 0-1 sorozatokban) adott  $k$  méretű különböző kis részstruktúrák (pl.  $n$ -hosszú blokkok) számából hogyan lehet következtetni a nagy strukturára (globális tulajdonságokra).

Ezzel analog kérdést vizsgálunk gráfokra (Balogh-Bollobás-Saks-Sós). Itteni fogalmazásban: örökletes gráfosztályok esetén az  $n$  szögpontú különböző nem izomorf gráfok száma:  $f(n, P)$  lehetséges viselkedése nagyon kötött, pl. vagy polinomiális nagyságrendű vagy sokkal nagyobb (legalább  $S(n) \approx e^{\sqrt{n}}$ ,

(ugrás van) és a polinomiális esetben a struktúra erősen kötött és pontosan leírható.

Nevezzünk egy  $H$   $n$ -pontú gráfot  $k$ -strukturáltnak, ha csúcsai  $k$  osztályba sorolhatók úgy, hogy az osztályok között vagy teljes vagy üres páros gráf van, továbbá minden osztály vagy üres vagy teljes gráf. Ha  $f(n, P)$  polinomiális, akkor van olyan  $k$  és  $\ell$ , hogy minden  $P$ -beli  $n$  szögpontú gráf egy alkalmas  $k$ -strukturált gráf és egy olyan  $F$  gráf szimmetrikus differenciája, ahol  $F$ -nek minden komponense legfeljebb  $\ell$  pontú.

A kérdést számozott szögpontú gráfokra más motivációból kiindulva már korábban vizsgálták, (Scheinerman-Zito, az utóbbi időben kiterjedten Balogh-Bollobás-Weinreich).

### 3. Gráfsorozatok konvergenciájának, gráfok metrikus terének értelmezése, a különböző konvergenciafogalmak ekvivalenciái

Az alapkérdés: „nagy” gráfok karakterizálása, mikor hasonlít egymáshoz, mikor van közel egymáshoz két (nagy) gráf (ami az utóbbi években többek között különböző alkalmazások miatt igen intenzíven vizsgált).

Ezzel foglalkozik Borgs-Chayes-Lovász-T. Sós-Vesztergombi több dolgozata.

Alkalmasan értelmezve gráfokon metrikát, többféle módon ( $G_n$ ) gráfsorozatok konvergenciáját, többek között az derül ki, hogy a ”hasonlóságnak” több ekvivalens értelmezése, mérése lehetséges. Mindezek kapcsolatban vannak különböző statisztikus fizikában szereplő fizikai paraméterekkel (különböző energia-fogalmak), multiway-max cut -tal, Szemerédi regularitási lemmával, ”property ill. parameter testing”-gel, stb.

Definiálják a ”bal- ill. jobb konvergenciát” kis gráfoknak a  $G_n$  -be képező ill.  $G_n$  - nek kis gráfba való homomorfizmus sűrűségeivel, valamint konvergenciát a gráfokon alkalmasan értelmezett távolság segítségével.

Kiderül, hogy ezek és néhány további konvergencia értelmezés ekvivalensek, sőt a különböző értelmezések mögött álló összefüggések kvantitatív formában adhatók meg, továbbá globális és lokális tulajdonságok kapcsolatára vezetnek.

Ezek az eredmények, valamint a Szemerédi regularitási lemma, annak különböző formáin keresztül különböző irányú alkalmazásokhoz vezetnek.

Lovász és Szegedy abból kiindulva, hogy minden konvergens gráfsorozat limesze egy alkalmas mérhető kétváltozós függvény, létrehoztak egy elméletet, amely a fent jelzett eredményeket is más megvilágításba helyezi.

Az az eset, amikor egy gráfsorozat limesze alkalmas értelmezéssel egy véges gráf (lépcsőfüggvény), vezetett az általánosított kvázivéletlen gráfhoz vizsgálatához; ahhoz, hogy a kvázivéletlen gráfhoz hasonlóan az általánosított kvázivéletlen gráfot véges sok részgráf sűrűsége meghatározza (Lovász-Sós).

Valójában itt többről van szó, a fent jelzett tételek egy része úgy interpretálható, hogy az ismert (Graham-Chung által megfogalmazott) kvázivéletlen gráftulajdonságok ekvivalenciáinak többsége az itteni általános elmélet eredményeinek speciális esetei, következményei. Egy lényeges kivétel a kvázivéletlen gráfok sajátértékekkel való karakterizálása.

A Szemerédi-regularitási lemma és a kvázivéletlen gráfok kapcsolatát egy régebbi dolgozatunkban vizsgáltuk (Simonovits-Sós).

Megjegyezzük, hogy a kvázivéletlen struktúrák és a Szemerédi regularitási lemma vizsgálata az utóbbi években ugrásszerűen fejlődésnek indult, nem utolsósorban a számos mély és fontos alkalmazás miatt (pl. számelméletben).

Az adott témából 2007 januárjában egy igen sikeres nemzetközi konferenciát is szerveztünk.

#### **4. Algebrai módszerek alkalmazása illeszkedési struktúrák vizsgálatában**

Elekes György, Simonovits Miklós és Szabó Endre, Elekes és Rónyai bizonyos korábbi eredményeihez kapcsolódva, Elekes és Szabó bizonyos mélyebb algebrai jellegű eredményeit használva, geometria problémákat oldott meg: olyan tételeket bizonyított, melyekben görbeseregek (pl. egység-körseregek) háromszoros illeszkedési pontjai számát becslik. A szerzők analitikus függvények szingularitásait vizsgálva, tehát komplex függvénytani módszerekkel érnek el újszerű eredményeket.