

## Geometria tanítása különböző szinteken

*A geometria oktatása minden szinten nehézségbe ütközik, ennek megoldására kerestem ötleteket a szakdolgozatomban és a tudományos diákköri dolgozatomban is már évekkel ezelőtt. Később Ph.D hallgatóként foglalkoztam e kérdéssel, gyakorló tanárként pedig naponta szembetalálkozom a problémával. Hogyan lehet szemléletesen tanítani az egyes fogalmakat, összefüggéseket – erre vonatkozóan végzek évek óta kísérleteket különböző korcsoportokkal, és saját tanóráimon is sok mindent kipróbáltam. Írásom hosszú folyamat eddig leszűrt tapasztalatait foglalja össze.*

**A** 19. század második felében a magyar matematika-oktatásnak jelentős részét képezte az úgynevezett rajzoló geometria. A tantárgy részletesebb elsajátításához született Landau Alajos és Wohlrab Flóris tankönyve (Landau – Wohlrab, 1884), amely a geometria alapjaitól egészen a térgeometriáig, valamint az ábrázoló geometriáig jut el olyan módon, hogy egy-egy új ismeretet rajzolással vezet be. A szerzők arra törekedtek, hogy a matematika szépségét a rajzolandó ábrákon keresztül mutassák be. Erről a tankönyvről, és annak hasznosságáról így írt 1887-ben Grünwald Miksa, a debreceni Fazekas Reáliskola tanára (Grünwald, 1887–88): „Nem való a gyermeknek a bizonyítás, neki tapasztalat kell. Valamint az emberiség a praxisnak, nem pedig a meditationak közzöni a geometria elemeit, úgy a fejletlen eszű gyermeket se vezessük geometriai ismeretekre speculáció útján, hanem nyújtunk neki tapasztalatot. Erre pedig legalkalmasabb a rajzolás és az ezzel egybekötött szemlélet és mérés.” Leányiskolák számára készült Szuppán Vilmos tankönyve (Szuppán, 1892), amelyben a geometriai ismereteket himzés-minták segítségével vezeti be.

Ezek az elvek összhangban vannak azzal, amit Bruner reprezentációs elméletében olvashatunk. Bruner szerint a megszerzett ismereteket az ember háromféle módon képes visszaadni. A materiális síkon konkrét tárgyi tevékenységek, manipulációk útján történik az ismeretszerzés, az ikonikus síkon szemléletes képek és elképzelt szituációk segítségével, míg a szimbolikus síkon matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével. A három síkot állandó kölcsönhatás jellemzi. A tanítási folyamatban előre- és visszautalhatunk a különböző síkon rögzült ismeretekre.

Fontos az, hogy játékos formában, például rajzzal, hajtogatással kezdjük a fogalmak bevezetését, és így a gyerekek akár észrevétlenül is tanulhatnak. Ezt a szemléletet tükrözi számos, a geometria tanításával foglalkozó módszertani dolgozat, könyv, tankönyv. Így például Horváth Jenő és szerzőtársai ezt írják dolgozatukban: „A térszemlélet fejlesztésére nagyon jó a papírhajtogatás. ... lényeges haszon a későbbiekben, hogy a különböző fogalmak nem a táblához és a füzethez kötődnek majd, hanem a térhez.” (Horváth – Kiss – Horváthné, 1991) Kántor Sándorné cikkében azt mutatja be, hogyan lehet geometriai fogalmakat papírhajtogatással bevezetni, tételeket szemléletesen igazolni. (Kántorné, 1995)

Külföldön sem ismeretlen ez a törekvés. Hasonló elképzelést valósított meg Hans-Günter Senfleben regensburgi professzor is 1998-ban (Meeder – Verhage, 1990), aki ta-

nulóival szintén rajzos úton közelítette meg a geometriát, majd a kész munkákat kiállításon mutatta be Münchenben. Az USA-ban és Németországban is kedvelt a papírhajtogatásnak a tanórán történő felhasználása, a japán gyerekeknek pedig az origami térhódítása következtében kiemelkedő a geometriai szemlélete.

### A geometria tanításáról általában

Mivel a geometria oktatásában egy-egy ismeretet több életkorban is tanulnak a gyerekek, így *H. Freudenthal* tanítványának, *P. H. van Hiele*-nek az elméletét követtem (*Hiele*, 1959), aki a geometria területén öt egymásra épülő gondolkodási szintet különböztet meg. (A Van Hiele-modellről részletesen lásd előző írásunkat – *a szerk.*) Hiele elméleti elképzeléseit felesége, *Dieke Hiele* kísérletekkel támasztotta alá. Ezt az utat követtem én is, feladataim egy részét gyerekekkel is kipróbálva.

Minden életkorra, iskolatípusra jellemzőek azok az alapismeretek, amelyekre az ott folyó oktatás épül, ugyanakkor figyelembe kell venni a sorozatban szomszédos gondolkodási szintek elemeit is. Az egyik szintről a másikra történő átmenet fokozatos, az új szint elemei már az áttérés előtt megjelennek. A korábban tanultak átisméltése és alaposabb el-sajátítása érdekében állandóan visszatérünk az alacsonyabb szintekre is. Az egyes szintek csak egymásra épülhetnek és csak tudatos tanítással érhetőek el.

A szinteken belül is fokozatokra bonthatjuk a tanítás menetét. Az érdeklődés felkeltése után következik az elemzés. Az elemeket megvizsgáljuk, keressük a köztük fellelhető közös vonásokat. Ezek alapján csoportosítást végzünk, így fogalmakat nyerünk. A következő lépésben már a fogalmakat hasonlítjuk össze, így a fogalmak osztályozását kapjuk meg. A gyermek így megfigyel, ítél, összehasonlít, megkülönböztet, osztályoz és rendszert alkot.

Grafikus eszközökkel, modellezéssel, játékkal a legkönnyebb felkelteni az érdeklődést a téma iránt. Ha a gyermeknek valami tetszett, akkor később is szívesen foglalkozik vele. Ha egy rajz szép volt, jól sikerült, akkor az sikerélményt okoz, a vele kapcsolatos ismeretek mélyebben rögzülnek és nagyobb lesz az alkotó öröme. Ez az az érdeklődés, amit a tanár gyümölcsöztetni tud a későbbiekben.

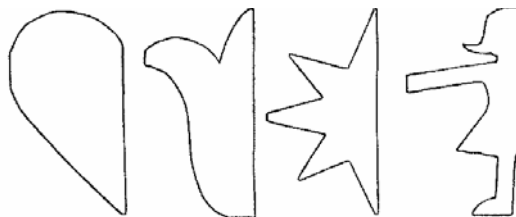
### A feladatsomag kialakítása

Egy témakört, a geometriai transzformációk körét választottam ki. Feladatokat gyűjtöttem, melyekkel az volt a célom, hogy a tanulók a fogalmakat alaposabban megismerjék, a tanult ismereteket gyakorolják, alaposabban megértsék, rendszerezessék. A feladatok egy részét kipróbáltam öt különböző életkorú (6, 9, 12, 16, illetve 19–24 éves) tanulócsoporthoz. Az életkori eltérésre azért volt szükség, mert az egyes csoportokkal az adott témában különböző alapokra építve különböző szintekre szerettem volna eljutni.

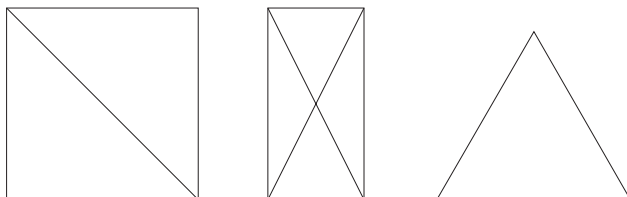
#### *Első kísérlet*

Az első csoport a berettyóújfalui Széchenyi István Általános Iskola 21 fős első osztálya volt. Kezdő feladatuk az volt, hogy harmonikára hajtogatott papírcsíkokból többféle adott sablon segítségével (*1. ábra*) sormintákat vágjanak ki. Mindenki választhatott a neki leginkább tetsző sablonok közül, akár többet is. Ügyelniük kellett a sablonok illesztésére és a pontos munkára ahhoz, hogy az alakzatok tényleg kapcsolódjanak és szépek legyenek. A gyerekek nagy lelkesedéssel dolgoztak, ezt követően pedig a már elkészült munkák alapján közösen keresték meg a sorminták tulajdonságait. Ezután azt a feladatot kapták, hogy önállóan találjanak hasonló tulajdonságú alakzatokat és készítsenek belőle sormintát.

A feladatokkal a tengelyes szimmetria egy fajtáját, a párhuzamos tengelyekre való tükrözést ismerték meg a gyerekek tapasztalatgyűjtéssel, a tulajdonságok játékos észrevete-



1. ábra. Az első kísérlethez felhasznált sablonok

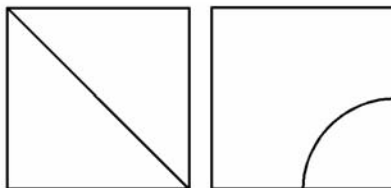


2. ábra. A harmadik kísérlet alapmotívumai

tésével és aktív megfigyeltetéssel. A Hiele-féle rendszerben a gyerekek a nulladik szintre jutottak el a geometriai transzformációk témakörében, hiszen az alakzatok segítségével a transzformációk tulajdonságait gyűjtötték egybe és az önálló munkával rögzítették is azt.

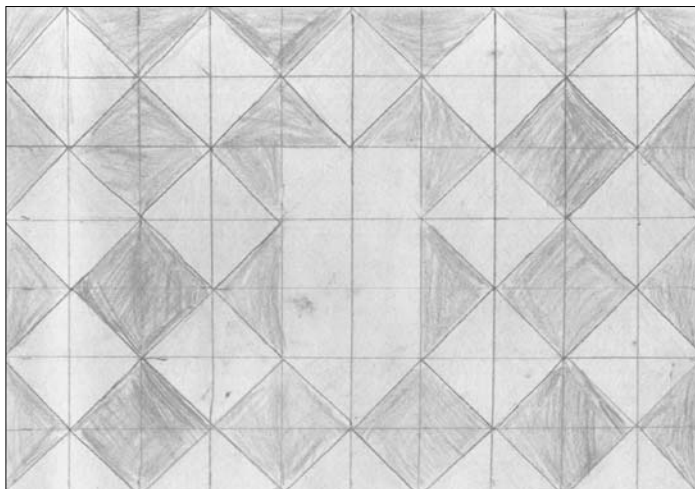
#### Második kísérlet

A második kísérletre is ugyanebben az iskolában került sor, a harmadik osztályban. Az volt a feladatuk, hogy a felrajzolt két fajta csempe (3. ábra) segítségével csempézzék ki a konyhát minél többféle módon.



3. ábra. A második és a negyedik kísérlet alapmotívumai

Átlagosan 2–3 rajzot készítettek a gyerekek, de volt olyan tanuló is, aki egy rajzon többféle szimmetriacsoportot (Bérczi, 1995) is alkalmazott néhány sorban. A gyerekek a lehetséges szimmetriacsoportoknak mintegy harmadát találták meg. Leggyakrabban arra az esetre bukkantak rá, amelyben az egyetlen művelet az eltolás, ami lényegében az elemek egymás mellé helyezését jelenti minden változtatás nélkül, tehát ezt a kisebb kombinációs képességű gyerekek is könnyen észreveszik. Karcsi rajzán (4. ábra) is ez a motívum látható. Ezen a képen egyúttal azt is megfigyelhetjük, milyen érdekességeket szült a feladat megfogalmazása. A gyerekek azt kapták feladatnak, hogy az adott mintával csempézzék ki a konyhát, és mivel Karcsiéknál a konyha közepén elűtő a mintázat, ezért rajzán is ehhez ragaszkodott. Több tanuló munkájára is jellemző, hogy a színezés figyelmen kívül hagyásával elemezhető a rajz. A gyerekek örömmel és irigykedve nézegették egymás rajzait. Úgy gondolom, munka közben egymástól is nagyon sokat tanulhattak, ötleteket gyűjthettek.



4. ábra. Karcsi rajza

Ezek a gyerekek az első szintet érték el a Hiele-féle rendszerben, mivel az érzékelt alakzatokat elemezték, és ennek következtében megértették azok jellemzőit is. Ezen a szinten már nem az alakjuk, hanem kísérleti úton megállapított tulajdonságaik alapján ismerik fel a gyerekek az elemeket, ugyanakkor ezeket a tulajdonságokat még nem rendszerezik logikailag.

#### *Harmadik kísérlet*

A harmadik csoport a debreceni Fazekas Mihály Gimnázium egyik hetedik osztályából állt, melyben 27 tanulóval végeztem a kísérletet. Az órát azzal kezdtük, hogy felelevenítettük a tengelyes tükrözés, eltolás, elforgatás fogalmát. Ezt követően kaptak olyan feladatot, ami a műveletek rögzítését szolgálta. Három alapmotívum (2. ábra) és az átismételt műveletek közül kellett egyet vagy többet kiválasztani, ezután a kiválasztott motívum(ok)ból kiindulva, a művelet(ek) felhasználásával szép, érdekes alakzatokat létrehozni.

A rendelkezésre álló idő elején készült rajzokon megfigyelhető, hogy a gyerekek egy motívummal kipróbálták a műveleteket külön-külön. Volt, aki egész órán csak ezt gyakorolta más-más motívumokkal, de akadtak, akik a kezdeti próbálkozások után ráéreztek a szabad munka örömére, és egyre szebb, változatosabb alakzatok születtek. Nagyon szívesen használták a színezést is.

A Hiele-féle rendszerben a második szint rögzítése történt meg a geometriai transzformációk témakörében, hiszen a gyerekek az elméletben megtanultakat rögzítették, rendszerezték is ismereteiket.

#### *Negyedik kísérlet*

A negyedik csoport a berettyóújfalui Arany János Gimnázium 10. b. osztályos, reál tagozatos csoportjából állott. Számukra a feladatot matematikusabb módon fogalmaztam meg: töltsék ki a síkot a 2 fajta motívum (3. ábra) valamelyikével úgy, hogy tükrözést, elforgatást, eltolást alkalmazhatnak szabályos rendszer szerint. A különbözőség természetesen az életkori adottságokból következett, hiszen egy 9 éves gyermeknek még sokkal konkrétabb megfogalmazásra van szüksége általában, és még a matematikai ismeretei sem elegendőek a másik szöveg megértéséhez.

A tanulók a feladatot otthoni munkára kapták, így lehetőségük volt arra, hogy alaposan átgondolt munkát végezzenek. Egy-egy tanuló általában 7–10 rajzot készített átlago-

san, de volt olyan is, aki ennél sokkal többet. A gyerekek a lehetséges esetek több, mint kétharmadát megtalálták. Akadt közöttük, aki számítógép segítségével oldotta meg a feladatát, megtalálva a kapcsolatot az informatika felé. Ennél a csoportnál is ugyanazok a szimmetriacsoportok szerepeltek a leggyakrabban, mint a 9 éveseknél, a kísérlet alapján úgy tűnik tehát, hogy ez nem az életkor függvénye. A kész munkákból kitűnik, hogy a tanulók teljes mértékben elérték ekkorra a Hiele-féle 3. szintet, hiszen a geometriai transzformációk rendszerezése, azok tulajdonságainak elemzése megtörtént.

#### *Ötödik kísérlet*

A tanulók a negyedik szinten már elvonatkoztatnak a tárgyak konkrét természetétől és a köztük lévő viszonyok konkrét értelmétől. Ez a gondolkodási szint a geometria területén megfelel a korszerű, Hilbert-féle szigorúság-etalonnak, azaz egyetemista, főiskolás hallgatókkal érhető el. Ezt a szintet a Nyugat-Magyarországi Egyetem formatervező és lakberendező szakos hallgatóival próbálhattam ki. A diákok az előadáson részletesen megismerkedtek a frízek és tapétamotívumok szimmetriacsoportjaival, és azok tulajdonságaival. Ezt követően gyakorlaton különböző képzőművészeti alkotások díszítő motívumait másolták le, majd megállapították, melyik az a legkisebb alapotívum és melyek azok a geometriai transzformációk, amelyekből a minta létrehozható. Ennél a csoportnál már a térbeli szimmetriák is bevezetésre kerültek, így otthoni munkaként azt a feladatot kapták a hallgatók, hogy szabályos testek felszínét díszítsék egy szabadon választott alapmintával a kiválasztott térbeli transzformációcsoport segítségével. Nagyon izgalmas és fantáziadús alkotások születtek, amelyekből egyértelműen kiderült, hogy a hallgatók teljes mértékben elérték az adott témában a Hiele-féle negyedik szintet.

### **Összegzés**

A kísérletek a síkbeli geometriai transzformációk témakörére vonatkoznak. Tapasztalom az, hogy sok lehetőség van arra, hogy a tanórákat játékosan színesítsük. A diákok a manuálisan végzett feladatoknak köszönhetően szívesen és szinte észrevétlenül sajátítják el a szükséges ismereteket. Úgy gondolom, ezekkel a feladatokkal elértem az eredeti célomat. A tanulók minden szinten közelebb kerültek a geometriához, megértették annak szerepét a mindennapi életben és örömteli munkát végeztek. Ezek a feladatok megfelelnek annak, amit *Dienes Zoltán* könyvében (*Dienes*, 1973) a perceptív változatosság elvéről olvashatunk. Természetesen az itt leírtak nem csak ennek az egy témakörnek az oktatásában lehetnek segítségünkre.

### **Irodalom**

- Bérczi Szaniszló (1995): *Szimmetria és struktúraépítés*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.
- Dienes Zoltán (1973): *Építsük fel a matematikát*. Gondolat Kiadó, Budapest.
- Escher, M. C. (1992): *Grafikák és rajzok*. Taschen-Kulturtrade, Budapest.
- Grünwald Miksa (1887–88): A geometria oktatás módszere. In: *A debreceni Fazekas Reáliskola Értesítője*. s. n., Debrecen.
- Hiele, P. H. van (1959): La pensée de l'enfant et la géométrie. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public*, s. 1., s. n.
- Horváth Jenő – Kiss Andrea – Horváth Lajosné (1991): Néhány gondolat a térszemlélet fejlesztéséről. In: *Berzsenyi Dániel Tanárképző Főiskola Tudományos Közleményei VIII. Módszertani dolgozatok*. s. n., Szombathely.
- Kántor Sándorné (1995): Papírhajtogatás a geometria tanulásában. In: Halmos Mária – Pálfalvi Józsefné – Török Judit (szerk.): *Matematikatanár-képzés, matematikatanár-továbbképzés*. Calibra Kiadó, Budapest. 7–16.
- Landau Alajos – Wohrab Flóris (1884): *Rajzoló geometria*. Franklin Társulat, Budapest.
- Meeder, M. – Verhage, H. (1990): *Regelmaat en symmetrie. Docentenboek*. Vakgroep OW & OC. Utrecht-Enschede.
- Schattschneider – Walker (1988): *M. C. Escher kaleidociklusok*. Taschen-Kulturtrade, Budapest.
- Szuppán Vilmos (1892): *Rajzoló mértan a polgári és felsőbb leányiskolák I–IV. osztályai számára*. Eggenberger-féle könyvkereskedés, Budapest.