

40

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sciences math., astr.
et phys. — Vol. XV, No. 2, 1967

MATHEMATIK
(ALGEBRA)

Eine Charakterisierung des Jacobson'schen Radikales eines Ringes

von

F. SZÁSZ

Vorgelegt von J. LOS am 4 Juni 1966

Unter einem Ring wird in dieser Note stets ein assoziativer Ring verstanden. Bezüglich der nötigen Grundbegriffe wird auf Jacobson [2] und Rédei [5] verwiesen. Für ein Rechtsideal R und eine Teilmenge T eines Ringes A bedeutet der Rechtsidealquotient $R : T$ bekanntlich die Menge $R : T = \{x; x \in A, Tx \subseteq R\}$, der offenbar ein Rechtsideal von A ist. Ist insbesondere auch T ein Rechtsideal von A , so ist auch $R : T$ ein Ideal von A . Für eine beliebige Menge von Rechtsidealen R_α von A gilt offenbar $\bigcap_a (R_\alpha : T) = (\bigcap_a R_\alpha) : T$.

Ein Rechtsideal R von A wird *quasimodular* in A genannt, wenn es $R : A \subseteq R$ gilt. Damit ist äquivalent, dass es für jedes $x \notin R$, $x \in A$ wenigstens ein $y \in A$ mit $yx \notin R$ gibt (vgl. [9]). Offenbar ist jedes modulare Rechtsideal auch quasimodular. In der Arbeit [9] wurde aber die Existenz eines Ringes A mit einem solchen quasimodularen maximalen Rechtsideal R gezeigt, dass R in A nicht modular ist. Ein Ideal Q eines Ringes A wird *quasiprimitiv* genannt, wenn in A ein quasimodulares maximales Rechtsideal R mit der Bedingung $Q = R : A$ existiert. Ein Ring heisst *quasiprimitiv*, wenn das Nullideal (0) in A quasiprimitiv ist.

Folgende Behauptungen können leicht bewiesen werden:

- (1) jeder kommutative quasiprimitive Ring ist ein Körper;
- (2) jeder Artinsche quasiprimitive Ring ist einfach, und somit ein voller Matrixring über einem Schiefkörper;
- (3) jedes quasiprimitive Ideal Q eines Ringes A ist ein Primideal von A , d.h. aus $BC \subseteq Q$ folgt für die Ideale B und C von A gewiss $B \subseteq Q$ oder $C \subseteq Q$.

Der Beweis dieser Feststellungen braucht hier nicht vorgenommen werden.

Bekanntlich spielt das Jacobson'sche Radikal \bar{J} eines Ringes, das die Singularität des Ringes in gewissem Sinne misst, von dem Gesichtspunkt der Ringstruktur aus, eine sehr wichtige Rolle.*)

*) Bezüglich der Definitionen und Charakterisierungen des Jacobson'schen Radikales wird auf Jacobson [2], Fuchs [1] und Kertész [3] verwiesen. Weiterhin wurde von Kertész [4] gezeigt, dass das Jacobson'sche Radikal mit dem Durchschnitt aller quasimodularen maximalen Rechtsideale übereinstimmt. In meiner Arbeit [9] wurde die Existenz eines quasimodularen maximalen Rechtsideales eines Ringes, das nicht modular im Ring ist, gezeigt.

Das Ziel dieser ist nun eine formal neue Charakterisierung für das Jacobson'sche Radikal \mathcal{F} eines Ringes A anzugeben.*) Wir werden nämlich zeigen, dass \mathcal{F} auch mit dem Durchschnitt \mathcal{D}_2 aller quasiprimitiven Ideale Q_α von A übereinstimmt. Diese Tatsache wird so bewiesen, dass ganz elementar und ohne die Feststellung von quasiregularen Elementen und von einfachen Operatormodulen das Übereinstimmen von vier Durchschnitten, deren jeder mit dem Jacobson'schen Radikal \mathcal{F} gleich ist, gezeigt wird. Diese Charakterisierung für \mathcal{F} liefert insbesondere auch eine Lösung eines Problems von Herrn Dr. O. Steinfeld, der in einem persönlichem Gespräch die Frage aufgeworfen hat, ob in Ringen $\mathcal{D}_2 = \mathcal{F}$ oder $\mathcal{D}_2 \neq \mathcal{F}$ bestehen soll, wobei die Bezeichnungen die Folgenden sind:**)

- \mathcal{D}_1 ist der Durchschnitt aller primitiven Ideale von A ;
 - \mathcal{D}_2 ist der Durchschnitt aller quasiprimitiven Ideale von A ;
 - \mathcal{D}_3 ist der Durchschnitt aller modularen maximalen Rechtsideale von A ;
 - \mathcal{D}_4 ist der Durchschnitt aller quasimodularen maximalen Rechtsideale von A .
- Jetzt brauchen wir einige Behauptungen.

BEHAUPTUNG 1. *Ist R ein quasimodulares maximales Rechtsideal und x ein beliebiges Element von A mit $x \notin R$, so ist $R_x = R : x = \{y; y \in A, xy \in R\}$ ein modulares maximales Rechtsideal von A .*

Beweis. Es sei z ein beliebiges Element von A mit $z \notin R_x$. Dann ergibt sich wegen $xz \notin R$, der Maximalität und Quasimodularität von R gewiss $xzA + R = A$. Also gibt es für jedes Element $u \in A$ Elemente $v \in A$ und $r \in R$ mit $xu = xzv + r$, woraus wegen $x(u - zv) \in R$ offenbar $u - zv \in R_x$, $u \in zA + R_x$ und $A = zA + R_x$ folgen, was die Maximalität von R_x in A zeigt. Wegen $xzA + R = A$ gibt es Elemente $w \in A$ und $s \in R$ mit $xzw + s = x$, woraus sich wegen $x(1 - zw)A = sA \subseteq R$ gewiss $(1 - zw)A \subseteq R_x$ und somit $a \equiv zwa \pmod{R_x}$ für jedes $a \in A$ ergibt, was die Modularität von $R_x = R : x$ in A bedeutet, w.z.b.w.

BEHAUPTUNG 2. (vgl. [3], [4] und [9]) \mathcal{D}_4 ist ein zweiseitiges Ideal von A .

Beweis. Offenbar gilt $\mathcal{D}_4 A \subseteq \mathcal{D}_4$. Nehmen wir jetzt $A\mathcal{D}_4 \not\subseteq \mathcal{D}_4$ an. Dann gibt es Elemente $a \in A$, $d \in \mathcal{D}_4$ und ein quasimodulares maximales Rechtsideal R von A mit $ad \notin R$. Ist nun $R_a = R : a$, so ist R_a wegen $a \notin R$ und wegen der Behauptung

*) Diese Note ist eine veränderte Version meines ursprünglichen Manuskriptes von Frühling 1966.

**) Herr Dr. O. Steinfeld hat bemerkt, dass er für gewisse Verbandshalbgruppen (im Sinne [6] bzw. [7]) den quasiprimitiven Absorbenten bzw. quasimodularen Rechtsabsorbenten definiert hat. Dann fragte er ob in Ringen $\mathcal{D}_2 = \mathcal{F}$ oder $\mathcal{D}_2 \neq \mathcal{F}$ gilt. Ich habe dann für Ringe $\mathcal{D}_2 = \mathcal{F}$ mit der Hilfe von quasiregularen Elementen bewiesen, und zwar folgendermassen: Da \mathcal{F} der Durchschnitt aller primitiven Ideale ist, gilt offenbar $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{F}$. Existiert ein $j \in \mathcal{F}$ mit $j \notin \mathcal{D}_2$, so gibt es ein quasimodulares maximales Rechtsideal R des Ringes A mit $j \notin R : A$, folglich mit $Aj \not\subseteq R$. Also existiert ein $a \in A$ mit $aj \notin R$. Wegen der Maximalität und Quasimodularität von R in A ergibt sich $ajA + R = A$, und somit gibt es Elemente $b \in A$ und $r \in R$ mit $ajb + r = a$, für das wegen $aj \notin R$ auch $a \notin R$ gilt. Wegen $j \in \mathcal{F}$ gibt es ein quasiinverses Element k von jb mit $jb + k - jbk = 0$, woher man wegen $a = a(1 - jb)(1 - k) = r(1 - k) \in R$ einen Widerspruch zu $a \notin R$ erhält. Also ist $\mathcal{D}_2 = \mathcal{F}$.

1 ein modulares maximales Rechtsideal von A mit der Bedingung $d \notin R_\alpha$, was der Voraussetzung $d \in \mathcal{D}_4 \subseteq \mathcal{D}_3 \subseteq R_\alpha$ widerspricht. Also gilt auch $A\mathcal{D}_4 \subseteq \mathcal{D}_4$.

Ganz ähnlich lässt sich auch das wohlbekanntes Resultat beweisen:

BEHAUPTUNG 3. (vgl. [2]). \mathcal{D}_3 ist ein zweiseitiges Ideal von A .
Es gilt der folgende

SATZ. Für jeden Ring bestehen $\mathcal{F} = \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_4$, also stimmt insbesondere das Jacobsonsche Radikal \mathcal{F} mit dem Durchschnitt aller quasiprimitiven Ideale von A überein.

Beweis. Man erhält offenbar $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_4 \subseteq \mathcal{D}_3$. Da nach der Behauptung 2 gilt es gewiss $\mathcal{D}_4 \subseteq \mathcal{D}_4 : A$, ergibt sich wegen $\mathcal{D}_4 \subseteq (\bigcap_\alpha R_\alpha) : A = \bigcap_\alpha (R_\alpha : A) = \mathcal{D}_2 \subseteq \bigcap_\alpha R_\alpha = \mathcal{D}_4$ auch $\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_2$, denn besteht $R_\alpha : A \subseteq R_\alpha$, wobei R_α die quasimodularen maximalen Rechtsideale von A überläuft. Also ergibt sich $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_4 \subseteq \mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_1$, denn $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_1$ lässt sich ganz ähnlich beweisen. Nehmen wir jetzt $\mathcal{D}_4 \neq \mathcal{D}_3$ an. Dann gibt es wegen $\mathcal{D}_4 \subset \mathcal{D}_3$ ein Element $d \in \mathcal{D}_3$ mit $d \notin \mathcal{D}_4$ und somit ein quasimodulares maximales Rechtsideal R von A mit $d \notin R$ und ein Element $x \in A$ mit $xd \notin R$, denn R ist quasimodular in A . Dann ist $R_x = R : x$ nach der Behauptung 1 ein modulares maximales Rechtsideal von A , für das $d \notin R_x$ gilt. Wegen $d \in \mathcal{D}_3 \subseteq R_x$ ist das aber ein Widerspruch, und somit ergibt sich $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{F}$.

PROBLEM.*) Gibt es einen Ring A mit einem quasiprimitiven Ideal \mathcal{Q} , das in \mathcal{Q} kein primitives Ideal ist?

Zum Schluss möchte ich meinem Kollegen, Herrn Dr. O. Steinfeld für seine Fragensstellung bezüglich der Gültigkeit von $\mathcal{D}_2 = \mathcal{F}$ oder $\mathcal{D}_2 \neq \mathcal{F}$ in Ringen, für seine Bemerkungen und für die Mitteilung der Definition des quasiprimitiven Absorbenten eines Elementes in einer Verbandshalbgruppe danken (vgl. [6], [7], bzw. dem ersten Teil der Fussnote 3).

MATHEMATISCHES FORSCHUNGSTITUT, UNGARISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN,
BUDAPEST (UNGARN)

SCHRIFTTUM

- [1] L. Fuchs, *A remark on the Jacobson radical*, Acta Sci. Math. Szeged, 14 (1952), 167–168.
[2] N. Jacobson, *Structure of Rings*, Providence (1956), Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 37.
[3] A. Kertész, *A characterization of the Jacobson radical*, Proc. Amer. Math. Soc. 14 : 4 (1963), 595–597.
[4] , *Über Artinsche Ringe*, Budapest (1966) Akadémiai Kiadó [Im Erscheinen].

*) Nach dem Lesen der ersten Version meines Manuskriptes hat mein Kollege, Dr. O. Steinfeld dieses Problem gelöst. Es gilt nämlich: Jedes quasiprimitive Ideal jedes Ringes ist ein primitives Ideal im Ring.

- [5] L. Rédei, *Algebra I*, Leipzig, 1959.
- [6] O. Steinfield, *Verbandstheoretische Betrachtung gewisser idealtheoretischer Fragen*, Acta Sci. Math. Szeged, **22** (1961), 136—149.
- [7] O. Steinfield, *Über Zerlegungssätze für teilweise geordnete Halbgruppen mit bedingten Distributivitätsregeln*, Magyar Tudományos Akad. Mat. Kut. Int. Kozl. **9A** (1964), 313—330.
- [8] F. Szász, *Verbandstheoretische Bemerkungen zum Fuchsschen Zeroidradikal der nichtassoziativen Ringe*, Archiv der Math., **12** (1961), 282—289.
- [9] — , *Die Lösung eines Problems bezüglich einer Charakterisierung des Jacobsonischen Radikales*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. [Im Erscheinen].
- [10] — , *Radikalbegriffe für Halbgruppen mit Nullelement, die dem Jacobsonischen ringtheoretischen Radikal ähnlich sind*, Math. Nachrichten [Im Erscheinen].
- [11] — , *The sharpening of a result concerning the primitive ideals of an associative ring*, Proc. Amer. Math. Soc. [Im Erscheinen].