

# ERŐTÉNYEZŐK INERCIA- ÉS GYORSULÓ RENDSZEREKBE

## FORCE COEFFICIENTS IN INERTIAL AND NON-INERTIAL SYSTEMS

Dr. Baranyi László\*

### ABSTRACT

In this paper relationships have been derived for lift and drag coefficients for cylindrical bodies for two cases. General formulae are derived for a cylindrical body of arbitrary cross-section and give the relationships between the two systems for each set of coefficients, i.e., the relationship between the lift coefficients for each case, and the same for the drag coefficient. The relative motion between the body and the fluid is assumed to be two-dimensional and to take place in a plane perpendicular to the axis of the body. Three-dimensional effects are ignored, thus limiting the validity of the formulae to low-Reynolds number flows. The fluid is assumed to be incompressible constant-property Newtonian fluid. In the first case, an inertial system is fixed to a stationary cylindrical body. The motion of the fluid in which the body is placed is an arbitrary function of time not identically zero, e.g., the fluid can have linear and angular acceleration, such as translation, oscillation or rotation. The velocity of the fluid at a single instant is either uniform in space, or in the case of rotation, a linear function of distance from the origin of the system. In the second case, a non-inertial system is fixed to an accelerating cylindrical body. The relative flow between fluid and body is kinematically the same as in the first case, but the forces acting upon the bodies differ in the two systems due to the inertial forces that occur in a non-inertial system. As an example, the relationships are applied to two common cases, a circular and a rectangular cross-section cylinder.

### 1. BEVEZETÉS

Fontossága miatt sok kutató foglalkozik a mozgó körhenger körüli különböző áramlások elméleti, kísérleti és numerikus vizsgálatával. Így például a homogén párhuzamos áramlásba helyezett, forgómozgást végző körhenger körüli áramlás numerikus szimulációját többek között [1]–[3] végezte, míg [4] valamint [5] a henger oszcilláló forgó mozgásának hatását vizsgálták az áramlásra. [6]–[8] a párhuzamos áramlásra merőleges irányban, [9] pedig a

főáramlás irányában rezgő henger körüli áramlás numerikus szimulációját végezték. A hossz- és keresztirányú harmonikus rezgések kombinációjával vizsgálható az ellipszis pályán mozgó henger körüli áramlás, amely a hullámokban mozgó test áramlástanai modelljének tekinthető. A nyugalomban lévő folyadékban ellipszis pályán mozgó henger körüli áramlás kísérleti úton [10] vizsgálta, a párhuzamos áramlásba helyezett ellipszis pályán mozgó henger körüli áramlás numerikus szimulációjával pedig [11]–[15] foglalkozott. Ezek mellett egyes kutatók, például [16] és [17] foglalkoztak oszcilláló áramlásba helyezett álló testek körüli áramlás vizsgálatával, de található olyan vizsgálat is, ahol a henger egyszerre forog és keresztirányú rezgést is végez, pl. [18] dolgozatban.

E sok variáció közül kívánjuk kiemelni Meneghini és Bearman [16] munkáját, akik a  $C_L$  felhajtóerő-tényezőt két különböző áramlási feltétel mellett vizsgálták. Az első esetben ( $C_L^*$  felhajtóerő-tényező) álló hengert helyeztek abba az áramlásba, amely egy homogén párhuzamos áramlás és egy keresztirányban időben szinuszosan oszcilláló áramlás összegeként adódott. A második esetben ( $C_L$  felhajtóerő-tényező) egy keresztirányban harmonikus rezgőmozgást végző hengert helyeztek a homogén párhuzamos folyadékáramlásba. Bár a két eset kinematikailag azonos, dinamikai szempontból különbözik egymástól. [16] az első esetre végezte számításait, jöhet fizikailag a második eset érdekelte őket. Így ugyanis el tudták kerülni a számítási háló hengerelmozdulás miatti torzulását. A számításaikból nyert felhajtóerő-tényezőhöz ezután hozzáadták a henger keresztirányú gyorsulásából származó tehetetlenségi erő dimenziótlan alakját

$$C_L = C_L^* + \frac{\ddot{m}\tilde{y}}{\frac{\rho}{2}U^2d_1} = C_L^* + \frac{\tilde{\rho}}{2} \frac{d^2\pi}{4} \frac{1}{U^2d_1} \frac{d^2\tilde{y}}{d\tilde{t}^2} = C_L^* + \frac{\pi}{2} \frac{d}{U^2} \frac{d^2\tilde{y}}{d\tilde{t}^2}. \quad (1.1)$$

Az (1.1) egyenletben  $\tilde{m}$  a  $d$  átmérőjű, egységnyi hosszúságú henger által felgyorsított  $\tilde{\rho}$  sűrűségű folyadék tömegét jelenti ([19]), az  $\tilde{y} = d^2\tilde{y}/d\tilde{t}^2$  a henger  $\tilde{y}$  elmozdulásának a  $\tilde{t}$  idő szerinti második deriváltja, azaz a henger  $\tilde{y}$  irányú gyorsulása; az első egyenlőségjel utáni kifejezés nevezője pedig az egységnyi hosszúságú szelvényre ható erő dimenziólanítására szolgál. Az (1.1) egyenletben szereplő mennyiségek – a  $C_L$  és  $C_L^*$  tényezők kivételével

\*egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Áramlás és Hőtechnikai Gépek Tanszéke. E-mail: arambli@uni-miskolc.hu

– dimenziálisak. Mivel az  $U$  sebességű főáramlás irányában nem végez gyorsuló mozgást a henger így az ebben az irányban ható dimenziótlan erők – az ellenállás-tényezők – a két rendszerben azonosak voltak:

$$C_D = C_D^* \quad (1.2)$$

A [16] dolgozat tanulmányozásakor felmerült bennünk az ötlet, hogy érdemes lenne feltárni egy általános kapcsolatot az ellenállás- és felhajtóerő-tényezők inerciarendszerből, ill. a rezgőmozgást végző hengerhez kötött gyorsuló (nem inercia-) rendszerből vizsgált összefüggései között. Egy ilyen függvénykapcsolat ismeretében a korábbiakban említett áramlási esetek egységesebben kezelhetők lennének.

Az előzőekben megfogalmazott problémák ismeretében célul tűztük ki:

- egy olyan általános összefüggés származtatását, amely kapcsolatot teremt egy tetszőleges keresztmetszetű, általános mozgást végző prizmatikus test körüli két olyan kinematikailag egymással azonos, kis Reynolds-számú síkbeli áramlásra vonatkozó felhajtóerő-tényezői és ellenállás-tényezői (továbbiakban erőtényezők) között, ahol az egyik esetben az áramlást a nyugalomban lévő hengerhez kötött vonatkoztatási rendszerből, (inerciarendszerből), a másik esetben pedig a tetszőleges mozgást végző hengerhez kötött gyorsuló vonatkoztatási rendszerből szemlélve tanulmányozzuk;
- az így nyert általános összefüggés felhasználásával meghatározni a gyakorlati szempontból két legfontosabb keresztmetszet – a kör és a téglalap – esetére az egymással kinematikailag azonos áramlásokhoz tartozó felhajtóerő- és ellenállás-tényezők közötti kapcsolatot, mind a gyorsuló hengerhez, mind a nyugalomban lévő hengerhez kötött vonatkoztatási rendszerekből.

A vizsgálat eredményeinek jelentős részét a [20] dolgozat tartalmazza.

## 2. AZ ERŐTÉNYEZŐK SZÁRMAZTATÁSA INERCIARENDSZERBEN

Ebben a fejezetben az áramlásba helyezett prizmatikus (hengeres) testekre vonatkozó erőtényező két esetre vonatkozó értékei közötti kapcsolatokat származtatjuk. Feltételezzük, hogy a hengeres test hossztengegyének iránya a henger elmozdulása során változatlan marad. A test és a folyadék közötti ún. relatív mozgásról feltételezzük, hogy a henger hossztengegyére merőleges síkokban az áramképek egymással egybevágóak, azaz az áramlás kétdimenziós (2D). A háromdimenziós (3D) hatásokat elhanyagoljuk, így a származtatandó összefüggések csak viszonylag kis Reynolds-számú áramlásokra érvényesek. Mint ahogy azt az első fejezetben kifejtettem, álló körhenger esetén  $Re \cong 190$  fölött 3D instabilitások jelennek meg az áramlásban [21].

Ugyanakkor azt is tudjuk, hogy a rezgő henger esetén, amikor az áramlás a henger rezgésével szinkronizálódik (*lock-in*) akkor az áramlás akár  $Re = 500$ -ig is 2D maradhat, ezt mutatja [22]. Az említett kis Reynolds-számot ebben az értelemben kell érteni. A folyadékról feltételezzük, hogy összenyomhatatlan és állandó anyagjellemzőjű newtoni folyadék. Az említett két eset közül az *első esetben* az inerciarendszert az álló (nyugalomban lévő) hengerhez kötjük. Az áramlás, amelybe a testet helyeztük, az idő tetszőleges függvényeként változhat; lehet tetszőleges gyorsulása és szöggyorsulása, tehát jellemezhet translációt, forgást és rezgőmozgást is. Egy adott időpillanatban a folyadék sebességéről feltételezzük, hogy a térben vagy állandó, vagy forgómozgás esetén a forgástengelytől mért távolsággal lineárisan nő. A *második esetben* a vonatkoztatási rendszerünk nem inerciarendszer, mert azt a tetszőleges gyorsuló mozgást végző hengerhez kötjük. Vizsgálatunk során azokat az eseteket tekintjük, amikor a két esetre vonatkozó relatív áramlás kinematikailag azonos. Könnyen belátható azonban, hogy a nem inerciarendszerben fellépő tehetetlenségi erők miatt a testre ható erők a két esetben különbözők lesznek.

Mielőtt az egyenletek származtatására rátérnénk, definiáljunk előbb két egységvektort. Az  $e_s$  és  $e_n$  egységvektor érintőleges ill. merőleges az egységnyi hosszúságú hengeres test tetszőleges keresztmetszetét határoló  $\tilde{C}$  görbéhez ill. görbére (1. ábra):

$$\begin{aligned} e_s &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{s}} \mathbf{i} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{s}} \mathbf{j} = \cos \chi \mathbf{i} + \sin \chi \mathbf{j}, \\ e_n &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{r}}}{\partial \tilde{n}} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{n}} \mathbf{i} + \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{n}} \mathbf{j} = -\sin \chi \mathbf{i} + \cos \chi \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

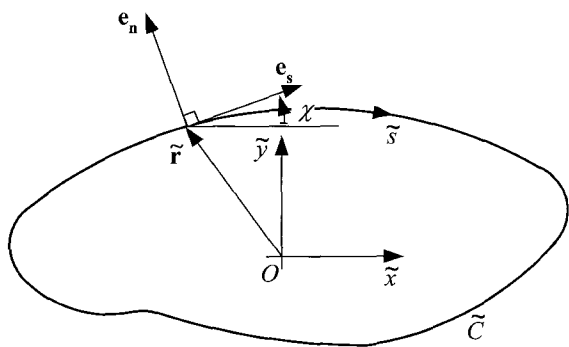
ahol  $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{x} \mathbf{i} + \tilde{y} \mathbf{j}$  az origóból a  $\tilde{C}$  kontúrgörbe tetszőleges pontjához mutató helyvektor,  $\tilde{x}$  és  $\tilde{y}$  koordináták,  $\mathbf{i}$  és  $\mathbf{j}$  az  $\tilde{x}$  ill.  $\tilde{y}$  irányokba mutató egységvektor,  $\tilde{s}$  a  $\tilde{C}$  menti ívhossz,  $\tilde{n}$  a  $\tilde{C}$  görbére merőleges koordináta,  $\chi$  pedig az  $e_s$  és  $\mathbf{i}$  egységvektorok által bezárt szög (1. ábra). A nyomásból és a nyírófeszültségből származó, a folyadékról a henger felületére ható erő a következő alakban írható fel:

$$\tilde{\mathbf{F}} = - \int_{\tilde{C}} \tilde{p}(\tilde{s}) e_n d\tilde{s} + \int_{\tilde{C}} \tilde{\tau}(\tilde{s}) e_s d\tilde{s} = \tilde{F}_D \mathbf{i} + \tilde{F}_L \mathbf{j}, \quad (2.2)$$

ahol  $\tilde{p}$  a nyomás,  $\tilde{\tau}$  a  $\tilde{C}$  görbe érintője irányába mutató nyírófeszültség vektor,  $\tilde{F}_D$  és  $\tilde{F}_L$  pedig az egységnyi hosszúságú hengerfelületre ható ellenállás és felhajtóerő. Itt feltételeztük, hogy a főáramlás a pozitív  $x$  tengely irányába mutat. Figyelembe véve az  $e_s$  és  $e_n$  egységvektorok (2.1) definícióját, alkalmazva a (2.2) egyenletben a nyomást tartalmazó integrálokra a szorzat integrálási szabályát, az  $\tilde{F}_D$  ellenállásra és az  $\tilde{F}_L$  felhajtóerőre a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\tilde{F}_D = - \int_{\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{s}} \tilde{y}(\tilde{s}) d\tilde{s} + \int_{\tilde{C}} \tilde{\tau}(\tilde{s}) \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{s}} d\tilde{s}, \quad (2.3)$$

$$\tilde{F}_L = \int_{\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{s}} \tilde{x}(\tilde{s}) d\tilde{s} + \int_{\tilde{C}} \tilde{\tau}(\tilde{s}) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{s}} d\tilde{s}. \quad (2.4)$$



1. ábra. Tetszőleges keresztmetszetű hengerre vonatkozó főbb jelölések

A (2.1) - (2.4) egyenletekben szereplő, felső hullámvonallal ellátott kifejezések mind tényleges fizikai mennyiségeket jelölnek. Az  $l$  hossz-,  $U$  sebesség- és  $\tilde{\rho}$  sűrűséglépték bevezetésével az egyenletekben szereplő mennyiségek egyszerűen dimenziótlaníthatók. A felső hullám nélküli dimenziótlan  $t$  idő, az  $x$ ,  $y$  és  $s$  koordináták, a  $p$  nyomás és a  $\tau$  nyírófeszültség a

$$t = \frac{U \tilde{t}}{d}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{d}, \quad y = \frac{\tilde{y}}{d}, \quad \mathbf{v} = \frac{\tilde{\mathbf{v}}}{U}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{\rho U^2}, \quad \tau = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\rho} U^2} \quad (2.5)$$

egyenletek alapján származtatható.

A (2.3) és (2.4) egyenleteket  $\tilde{\rho} U^2 l / 2$  kifejezéssel elosztva és figyelembe véve az (2.5) definíciókat, az álló hengerhez kötött inerciarendszerben a  $C_D^*$  ellenállás-tényezőre és a  $C_L^*$  felhajtóerő-tényezőre a következő összefüggések adódnak:

$$C_D^* = \frac{2\tilde{F}_D}{\tilde{\rho} U^2 l} = -2 \int_{\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{s}} y(\tilde{s}) d\tilde{s} + 2 \int_{\tilde{C}} \tilde{\tau}(\tilde{s}) \frac{\partial x}{\partial \tilde{s}} d\tilde{s}, \quad (2.6)$$

$$C_L^* = \frac{2\tilde{F}_L}{\tilde{\rho} U^2 l} = 2 \int_{\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{s}} x(\tilde{s}) d\tilde{s} + 2 \int_{\tilde{C}} \tilde{\tau}(\tilde{s}) \frac{\partial y}{\partial \tilde{s}} d\tilde{s} \quad (2.7)$$

ahol a  $C$  módosított kontúrgörbét az eredeti  $\tilde{C}$  görbéből úgy nyerjük, hogy az utóbbi minden méretét az  $l$  hosszléptékkel elosztjuk.

Vizsgáljuk most meg kissé részletesebben a (2.6) és (2.7) egyenletekben szereplő dimenziótlan  $p$  nyomás hatását az inerciarendszerben értelmezett  $C_D^*$  és  $C_L^*$  erőtenyezőkre. Írjuk fel a Navier–Stokes mozgásegyenlet dimenziótlan alakját az összenyomhatatlan, állandó anyagjellemzőjű newtoni folyadék esetére

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.8)$$

ahol  $\mathbf{v}$  az  $U$  sebességléptékkel dimenziótlanított sebességvektor,  $t$  az (2.5) egyenlettel definiált dimenziótlan idő,  $\nabla$  a dimenziótlan nabla operátor,  $\nabla^2$  a Laplace operátor,  $\text{Re}$  az  $\text{Re} = U l / \tilde{\nu}$  kifejezéssel definiált Rey-

nolds-szám, ahol  $\tilde{\nu}$  a folyadék kinematikai viszkozitása. A (2.8) egyenletben a tézerőt beleértjük az egyenlet jobb oldalán szereplő nyomástagba. Figyelembe véve, hogy a valóságos folyadék esetében a falon a folyadék sebessége megegyezik a fal sebességével, azaz esetünkben 0, a (2.8) egyenletet az  $\mathbf{e}_s$  érintő irányú egységvektorral (1. ábra) skalárisan megszorozva azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_s \quad (2.9)$$

Mielőtt a  $p$  nyomás erőtenyezőkre gyakorolt hatását megvizsgálánk, nézzük meg a (2.9) egyenlet jobb oldalát kissé részletesebben:

$$\nabla^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_s = \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (2.10)$$

A (2.10) egyenletet kissé átrendezve – a  $v_x$  és  $v_y$  sebességkomponensek vegyes másodrendű deriváltjait hozzáadva a kifejezéshez és ki is vonva azokat – kapjuk:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_s = & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right) \frac{\partial x}{\partial s} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial s} + \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \frac{\partial y}{\partial s}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Figyelembe véve a dimenziótlan  $\zeta$  örvényeloszlás 2D áramlásra vonatkozó

$$\zeta = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (2.12)$$

definícióját, a (2.1) egyenletet, továbbá azt, hogy a (2.11) egyenlet jobb oldalának 2. és 4. tagjában szereplő zárójeles kifejezés a

$$\Theta = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.13)$$

egyenlettel definiált  $\Theta$  sebességdivergencia  $x$  ill.  $y$  szerint deriváltja, amely összenyomhatatlan közeg esetén eltűnik, végül a (2.11) egyenlet jobb oldalán álló kifejezésre a

$$\nabla^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_s = -\frac{\partial \zeta}{\partial n} \quad (2.14)$$

összefüggés adódik. Így a (2.9) és (2.14) egyenletek összehasonlításából a hengermetsetet határoló  $C$  görbén (tehát a henger felületén) a nyomásderiváltra a

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \zeta}{\partial n} \quad (2.15)$$

összefüggést kapjuk. Ezt a (2.6) és (2.7) egyenletekbe behelyettesítve az inerciarendszerben érvényes  $C_D^*$  és  $C_L^*$  erőtényezők a következő formába önthetők:

$$C_D^* = \frac{2}{\text{Re}} \int_c^{\partial \zeta} y(s) ds + 2 \int_c^{\partial x} \tau(s) \frac{\partial x}{\partial s} ds, \quad (2.16)$$

$$C_L^* = -\frac{2}{\text{Re}} \int_c^{\partial \zeta} x(s) ds + 2 \int_c^{\partial y} \tau(s) \frac{\partial y}{\partial s} ds. \quad (2.17)$$

Mint ahogy az a (2.16) és (2.17) egyenletekből látható, a testre ható erő meghatározásához nem kell ismernünk a test felülete menti nyomáseloszlást. Ez különösen akkor előnyös, ha az áramfüggvényörvény (*stream function-vorticity method*) leírásmódot használjuk, ahol a nyomás nem szerepel explicite az egyenletekben. Természetesen a (2.16) és (2.17) egyenletek nem újak, és különösen körhenger esetére több különböző alakjuk is megtalálható a szakirodalomban, például a [23] és [24] dolgozatokban. A (2.6), (2.7), ill. (2.15)–(2.17) egyenletekből kiolvasható, hogy a  $p$  nyomásnak a  $C_D^*$  ellenállás-tényezőre és a  $C_L^*$  felhajtóerő-tényezőre gyakorolt hatása a henger környezetében lévő örvényeloszlás ismeretében meghatározható.

### 3. AZ ERŐTÉNYEZŐK GYORSULÓ VONATKOZTATÁSI RENDSZERBEN

Vizsgáljuk most azt az esetet, amikor a test mozgása tetszőleges síkbeli mozgás (gyorsulás, szöggyorsulás) lehet. Mint korábban említettük, feltételezzük, hogy a henger tengelye a mozgás során nem változtatja irányát. A test forgásának tengelye párhuzamos a test tengelyével (vagy azzal egybeeső), merőleges az  $x$ ,  $y$  (inerciarendszerbeli) ill.  $\xi$ ,  $\eta$  (gyorsuló rendszerbeli) síkokra, és átmegy azok – egybeeső – origóján. Rögzítjük vonatkoztatási rendszerünket a gyorsuló mozgást végző hengeres testhez. Felhasználva egy inerciarendszerben és egy gyorsuló rendszerben lévő folyadékrezecske mozgása közötti ismert összefüggést (pl. [25]), a Navier-Stokes egyenlet gyorsuló rendszerben érvényes dimenziótlan alakja a következő formában írható fel:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + (\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{w} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{w} - \mathbf{a}_0 - 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{w} - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_r) - \frac{d \boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_r, \quad (3.1)$$

ahol  $\mathbf{w}$  az  $\mathbf{a}_0$  gyorsulással mozgó hengerhez kötött rendszerben mért ún. relatív sebesség,  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$  a test dimenziótlan szögsebesség-vektora,  $\mathbf{k}$  a  $\xi$ ,  $\eta$  síkra merőleges egységvektor, és  $\mathbf{r}_r$  a gyorsuló rendszerben érvényes helyvektor. Az egyenletben a vektorok közti skaláris ill. vektoriális szorzás jelölésére a szokásos „ $\cdot$ ” ill. „ $\times$ ” jeleket használjuk. Ebben az egyenletben  $\mathbf{w}$  és  $\mathbf{r}_r$  az  $U$  és  $l$  sebesség- ill. hosszléptékkal van

dimenziótlánítva. A (3.1) egyenletben a tömegertő belevértjük a nyomástagba, és a dimenziótlan  $\omega$  szögsebességet ill. az  $\mathbf{a}_0$  gyorsulást az alábbi módon definiáljuk:

$$\omega = \frac{\tilde{\omega} l}{U}, \quad \mathbf{a}_0 = \frac{\tilde{\mathbf{a}}_0 l}{U^2},$$

ahol  $\tilde{\omega}$  és  $\tilde{\mathbf{a}}_0$  a henger szögsebessége ill. gyorsulása. A (3.1) egyenletben szereplő egyéb dimenziótlan mennyiségek megegyeznek a (2.8) egyenletben szereplő mennyiségekkel.

A henger felületén 0 relatív sebességet feltételezve és a (3.1) egyenletet az  $\mathbf{e}_s$  érintő irányú egységvektorral skalárisan megszorozva azt kapjuk, hogy:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s - \left[ \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_r) + \frac{d \boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_r \right] \cdot \mathbf{e}_s, \quad (3.2)$$

Vezessük most be a mozgó hengerhez kötött, gyorsuló rendszerbeli dimenziótlan  $\zeta_r$  relatív örvényeloszlást:

$$\zeta_r = \frac{\partial w_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial w_\xi}{\partial \eta}$$

ahol  $w_\xi$  és  $w_\eta$  a  $\mathbf{w}$  relatív sebesség  $\xi$  és  $\eta$  komponensei. Megismételve a 2. fejezetben elvégzett levezetéseket (l. a (2.11)–(2.15) egyenleteket) a (3.2) egyenlet jobb oldalán lévő első tag – a (2.14) egyenlethez hasonlóan – a következő alakot ölti:

$$\frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_s = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \zeta_r}{\partial n} \quad (3.3)$$

Figyelembe véve (3.3) egyenletet, valamint az  $\mathbf{e}_s$  és  $\mathbf{e}_n$  egységvektorok (2.1) definícióját, a (3.2) egyenlet a következő alakba írható át:

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \zeta_r}{\partial n} - a_{0s} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial s} (r_r^2) + \frac{1}{2} \frac{d \omega}{dt} \frac{\partial}{\partial n} (r_r^2) \quad (3.4)$$

ahol  $r_r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  a  $C$  kontúron lévő változó pontnak az origótól mért dimenziótlan távolsága. Az  $r_r^2$  tag  $s$  és  $n$  szerinti deriváltját a  $C$  görbén kell venni. Ne feledjük, hogy később, a vonal- (valójában felületi) integrálok kiértékelésénél a nyugalomban lévő, inerciarendszerbeli testre vonatkozóan, az  $x$ ,  $y$  koordináták azonosak a megfelelő gyorsuló rendszerbeli testre vonatkozó  $\xi$ ,  $\eta$  koordinátákkal. A (3.4) egyenletben  $a_{0s}$  a henger  $\mathbf{a}_0$  dimenziótlan gyorsulásának tangenciális komponense a  $C$  görbe mentén, amely a következő alakban írható fel:

$$a_{0s} = \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{e}_s = a_{0x}(t) \frac{\partial \xi}{\partial s} + a_{0y}(t) \frac{\partial \eta}{\partial s} \quad (3.5)$$

ahol  $a_{0x}$  és  $a_{0y}$  a henger gyorsulásának dimenziótlan  $x$  és  $y$  irányú komponensei.

Az ellenállás-tényező és a felhajtóerő-tényező a gyorsuló (vagy relatív) rendszerben a testre ható erők alapján is definiálható:

$$C_D = \frac{2\tilde{F}_{Dr}}{\tilde{\rho}U^2l} = -2 \int_c \frac{\partial p}{\partial s} \eta(s) ds + 2 \int_c \tau_r(s) \frac{\partial \xi}{\partial s} ds, \quad (3.6)$$

$$C_L = \frac{2\tilde{F}_{Lr}}{\tilde{\rho}U^2l} = 2 \int_c \frac{\partial p}{\partial s} \xi(s) ds + 2 \int_c \tau_r(s) \frac{\partial \eta}{\partial s} ds \quad (3.7)$$

ahol  $\tau_r$  a gyorsuló rendszerbeli dimenziótlan nyírófeszültség,  $F_{Dr}$  és  $\tilde{F}_{Lr}$  pedig az ebben a rendszerben mérhető tényleges ellenállás és felhajtóerő. A (2.6), (2.7) ill. (3.6), (3.7) egyenleteket egymással összehasonlítva látható, hogy az inerciarendszerben ill. a gyorsuló rendszerben definiált erőtenyezőket egymáshoz hasonló alakúak.

A (3.4) felhasználásával a (3.6) és a (3.7) egyenletek átalakíthatók:

$$C_D = \frac{2}{\text{Re}_c} \int_c \frac{\partial \zeta_r}{\partial n} \eta ds + 2 \int_c \tau_r \frac{\partial \xi}{\partial s} ds - \int_c \left[ -2a_{0s} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial s} (r_r^2) + \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial}{\partial n} (r_r^2) \right] \eta ds, \quad (3.8)$$

$$C_L = -\frac{2}{\text{Re}_c} \int_c \frac{\partial \zeta_r}{\partial n} \xi ds + 2 \int_c \tau_r \frac{\partial \eta}{\partial s} ds + \int_c \left[ -2a_{0s} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial s} (r_r^2) + \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial}{\partial n} (r_r^2) \right] \xi ds \quad (3.9)$$

A (3.8) és (3.9) egyenletek megadják az összehasonlíthatatlan newtoni folyadék tetszőleges áramlásába helyezett, tetszőleges  $\mathbf{a}_0$  gyorsulása és  $\omega$  szögsebességű forgómozgást végző testre vonatkozó  $C_D$  ellenállás-tényezőt és  $C_L$  felhajtóerő-tényezőt. A koordináta-rendszert a mozgó testhez rögzítettük, és a (3.8), (3.9) egyenletekben szereplő összes mennyiség dimenziótlan. A (2.16) és (3.8) valamint (2.17) és (3.9) egyenletek összehasonlításából látható, hogy a gyorsuló rendszerbeli erőtenyezőkből extra tagok jelennek meg az inerciarendszerben definiáltakhoz képest, amelyek természetesen a tehetetlenségi erőkől származnak. Nézzük most meg, hogy milyen kapcsolat van kinematikailag azonos áramlások esetén az inerciarendszerben ill. a gyorsuló mozgást végző testhez kötött vonatkoztatási rendszerben értelmezett erőtenyezőket között.

#### 4. ERŐTENYEZŐK KAPCSOLATA INERCIA- ÉS GYORSULÓ RENDSZERBEN

Tekintsük a következő két esetet.

a) *Álló hengerhez kötött inerciarendszer.* Ebben az esetben a  $C_D^*$  és  $C_L^*$  erőtenyezőket a (2.16) és (2.17) egyenletek alapján a  $\tau$  nyírófeszültség és a  $\zeta$  örvényeloszlás  $C$  peremgömbére merőleges irányú deriváltjának  $C$  menti vonalintegráljaként adódnak. Mindkét tényező meghatározható a test környezetében

lévő sebességtér és a Reynolds szám ismeretében. Természetesen a testet körülvevő folyadék úgy mozog, hogy az áramlás kinematikailag megegyezik azzal az áramlással, amikor a henger mozog (l. a b) esetet).

b) *Gyorsuló mozgást végző vonatkoztatási rendszer.* Ebben az esetben a (3.8) és (3.9) egyenletek adják meg a  $C_D$  és  $C_L$  erőtenyezőket. Ezek az egyenletek is tartalmazzák a  $\tau_r$  nyírófeszültség és a  $\zeta_r$  örvényeloszlás  $C$  peremgömbére merőleges irányú deriváltjának  $C$  menti vonalintegrálját, de a nyírófeszültség és az örvényeloszlás most a gyorsuló rendszerben van definiálva. Az egyenletekben előforduló vonalintegrálok a test környezetében lévő  $\mathbf{w}$  relatív sebességtér és a Reynolds-szám ismeretében kiszámíthatók. A (3.8) és (3.9) egyenletekben viszont a gyorsuló rendszerben fellépő tehetetlenségi erők miatt a (2.16) és (2.17) egyenletekhez képest újabb tagok is megjelennek.

Legyenek az (a) és (b) esethez tartozó áramlások kinematikailag azonosak. Ez az jelenti, hogy az (a) rendszerben értelmezett  $\mathbf{v}$  abszolút sebességvektor azonos a (b) esetben értelmezett, a gyorsuló mozgást végző hengerhez kötött gyorsuló rendszerben mérhető  $\mathbf{w}$  relatív sebességvektorral, tehát

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{w}_B. \quad (4.1)$$

A (4.1) egyenletből az is következik, hogy a  $\zeta_A$  és  $\zeta_B$  örvényeloszlások valamint a  $\tau_A$  és  $\tau_{rB}$  nyírófeszültségek szintén azonosak a hengeres test felületén mindkét esetben, azaz

$$\zeta_A = \zeta_{rB}, \quad \tau_A = \tau_{rB}. \quad (4.2)$$

Tekintetbe véve a (4.1) és (4.2) egyenleteket, valamint összehasonlítva a (2.16), (2.17) és (3.8), (3.9) egyenletpárokat, a következő összefüggéseket nyerjük az inerciarendszerben és a gyorsuló rendszerben definiált erőtenyezőkre:

$$C_D = C_D^* - \int_c \left[ -2a_{0s} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial s} (r_r^2) + \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial}{\partial n} (r_r^2) \right] \eta ds, \quad (4.3)$$

$$C_L = C_L^* + \int_c \left[ -2a_{0s} + \omega^2 \frac{\partial}{\partial s} (r_r^2) + \frac{d\omega}{dt} \frac{\partial}{\partial n} (r_r^2) \right] \xi ds. \quad (4.4)$$

Ismét szeretnénk hangsúlyozni, hogy ez a két egyenlet az álló vagy mozgó hengerhez kötött vonatkoztatási rendszerben definiált erőtenyezőket között csak akkor adja meg helyesen a kapcsolatot, ha a két esetre vonatkozó áramlás egymással kinematikailag azonos. A gyorsuló rendszerben definiált  $C_D$  és  $C_L$  erőtenyezőkre vonatkozó (3.8) és (3.9) összefüggések a tehetetlenségi erőkől származó járulékos tagokat is tartalmazzák az inerciarendszerben definiált  $C_D^*$  és  $C_L^*$  tényezőkre vonatkozó (2.16) és (2.17) egyenletekhez képest. A gyorsulás vonalintegrálját gyakran egy hozzáadott tömegtagként (*added mass term*) tekintik (pl. [19]).

Eddig semmit sem mondtunk a hengeres test  $C$  kontúrörbével jellemzett keresztmetszetének alakjáról. Ez tetszőleges lehet, attól eltekintve, hogy a vonalintegrál kiszámíthatósága megköveteli, hogy a  $C$  görbe véges ívhosszúságú legyen, mint ahogy az a (4.3) és (4.4) egyenletekből látható. Határozzuk meg most a (4.3) és (4.4) egyenletekben vonalintegrálokkal definiált dimenziótlan inerciaerőket a gyakorlati szempontból két legfontosabb keresztmetszet – a kör és a téglalap – esetére.

## 5. ERŐTÉNYEZŐK KÖR ÉS TÉGLALAP KERESZTMETSZETŰ RÚD ESETÉN

### 5.1. Erőtenyvezők kör keresztmetszet esetén

Az inercia- és a gyorsuló rendszerben értelmezett erőtenyvezők között érvényes (4.3) és (4.4) egyenletekben szereplő integrálokat származtassuk a gyakorlati szempontból fontos körhenger esetére (2. ábra). Ne feledjük, hogy a (4.3) és (4.4) egyenletekben ill. a 2. ábrán szereplő minden mennyiség dimenziótlan. A hosszmenyiségeket a  $d$  hengerátmérővel dimenziótlanítottuk. Az általánosság megszorítása nélkül a  $d$  átmérőt egységnyinek választhatjuk. A 2. ábrán látható körhenger pontjaiban a dimenziótlan  $\xi$  és  $\eta$  koordináták és az elemi  $ds$  ívhossz a következő módon írható fel:

$$\xi = 0,5 \cos \varphi, \quad \eta = -0,5 \sin \varphi, \quad ds = 0,5d\varphi, \quad (5.1)$$

ahol  $\varphi$  az ábrán látható polárszög. Nézzük most meg a (4.3) és (4.4) egyenletekben szereplő  $r_r^2$  tagok  $s$  ívhossz és  $n$  normális irányú koordináta szerinti deriváltját a kör mentén:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial s} (r_r^2) \right]_{r=0,5} = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} (r_r^2) \right]_{n=-0,5} = \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r^2) \right]_{r=0,5} = 1,0. \quad (5.2)$$

A henger gyorsulásának  $s$  ívhossz irányú  $a_{0s}$  összetevője a (3.5) és a (5.1) egyenletek alapján

$$a_{0s} = -a_{0x}(t) \sin \varphi - a_{0y}(t) \cos \varphi \quad (5.3)$$

alakú. Az (5.1) és (5.3) összefüggéseket figyelembe véve a (4.3) és (4.4) egyenletek elemi átalakítások után a következő egyszerű alakba írhatók át:

$$C_D = C_D^* + \frac{\pi}{2} a_{0x}, \quad C_L = C_L^* + \frac{\pi}{2} a_{0y}. \quad (5.4)$$

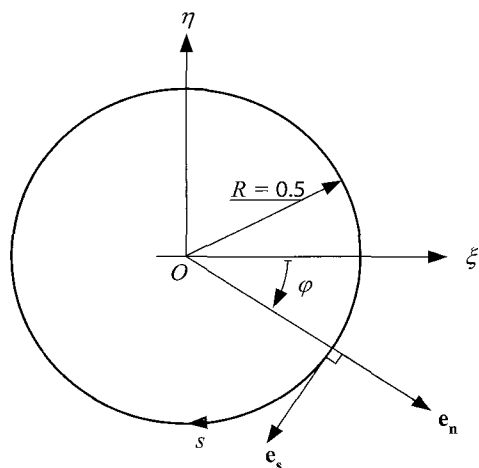
Ezekből az egyenletekből látszik, hogy noha tetszőleges gyorsulást és szöggyorsulást tételeztünk fel, a két rendszerben értelmezett erőtenyvezők közötti összefüggésben a henger szimmetriatulajdonságai miatt sem a szögsebesség, sem a szöggyorsulás nem játszik szerepet, és az (5.4) egyenletekben csak a henger gyorsulásának két komponense szerepel. Az egyenletekből kitűnik, hogy ha a henger gyorsulása kereszt- ( $\nu$ ) irányú,

akkor a két ellenállás-tényező azonos, csak a felhajtóerő-tényezők különböznek egymástól, ill. ha a gyorsulás hossz- ( $x$ ) irányú akkor ez pontosan fordítva igaz.

Figyelembe véve, hogy az (1.1) egyenlet utolsó egyenlőségjele utáni 2. tagban megjelenik az általunk használt  $a_{0y}$  keresztirányú dimenziótlan gyorsulás, azaz

$$\frac{d}{U^2} \frac{d^2 y}{dt^2} = a_{0y}$$

akkor látható, hogy az (1.1) egyenlet az (5.4) egyenlet második összefüggésébe megy át (ne feledjük, hogy a [16] dolgozatban dimenziótlan mennyiségek szerepelnek). Tanulmányunkban a henger csak keresztirányban rezgett, ezért  $a_{0x} = 0$  volt. Ezt behelyettesítve az (5.4) egyenlet első összefüggésébe, [16] eredményével egyezően az (1.2) összefüggésre jutunk.



2. ábra. Körhengerre vonatkozó főbb jelölések

### 5.2. Erőtenyvezők téglalap keresztmetszet esetén

A gyakorlati szempontból a másik legfontosabb keresztmetszet a téglalap. Vezessük le kinematikailag azonos áramlásokra az erőtenyvezők inercia- és gyorsuló rendszerben érvényes kifejezései között fennálló összefüggéseket egy téglalap keresztmetszetű hengerre! Mint ahogy az a 3. ábrán látható, a koordináta-rendszerünk  $O$  origóját, amely körül a henger forgómozgást is végezhet, általános helyzetűre választottuk. A henger  $H$  magasságát válasszuk hosszléptéknek (és egyben egységnyi hosszúságúnak), és minden más méretet ezzel dimenziótlanítsunk. A 3. ábra  $A$  sarokpontjának dimenziótlan koordinátái  $\xi_A, \eta_A$ . A (4.3) és (4.4) egyenletekben lévő vonalintegrálokat az óramutató járásával egyező irányítással számítottuk, mint ahogy az a 3. ábrán is látható. Az  $s$  és  $n$  ívkoordináták, valamint a  $\xi, \eta$  koordináták egyszerűen azonosíthatók a téglalap egyes oldalai mentén. Például a téglalap felső ( $f$ ) oldalán a következő összefüggések érvényesek:

$$ds = d\xi, \quad dn = d\eta, \quad [\eta]_f = 1 + \eta_A,$$

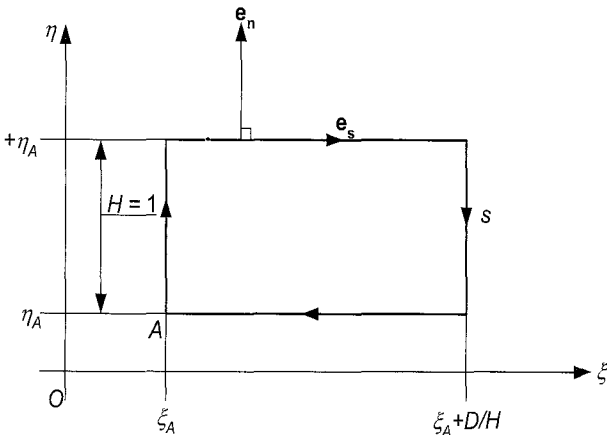
$$\left[ \frac{\partial}{\partial s} (r_r^2) \right]_f = 2\xi, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} (r_r^2) \right]_f = 2(1+\eta_A)$$

ahol az  $f$  index a téglalap felső vízszintes oldalára utal (3. ábra). Ezeket a kifejezéseket a (4.3) és (4.4) egyenletekbe behelyettesítve, az adott szakaszra vonatkozó vonalintegrál zárt alakban kiszámíthatók. A többi oldalra is lokalizálva az  $s$ ,  $n$ ,  $\xi$  és  $\eta$  változókat, kiértékelve a kijelölt integrálokat és összegezve azokat a téglalap négy oldalára, akkor végül a (4.3) és (4.4) egyenletekből a következőket kapjuk:

$$C_D = C_D^* + 2a_{0x} \frac{D}{H} - \omega^2 \left( 2\xi_A + \frac{D}{H} \right) \frac{D}{H} - 3 \frac{d\omega}{dt} (1+2\eta_A) \frac{D}{H} \quad (5.5)$$

$$C_L = C_L^* + 2a_{0y} \frac{D}{H} - \omega^2 (1+2\eta_A) \frac{D}{H} + 3 \frac{d\omega}{dt} \left( 2\xi_A + \frac{D}{H} \right) \frac{D}{H}. \quad (5.6)$$

Ezzel a két egyenlettel a 3. ábrán vázolt téglalap keresztmetszetű hengerre megkaptuk a kinematikailag azonos áramlások inercia- és gyorsuló rendszerbeli erőtenyezői közötti összefüggést. Ezekben az egyenletekben a téglalap és a forgástengely relatív helyzetét a  $\xi_A$  és  $\eta_A$  koordináták jellemzik (3. ábra). Így természetesen a kapott formulák függnek a forgáspont helyzetétől. Az egyenletekből látható, hogy a két rendszerben értelmezett erőtenyezők közötti különbségek a henger gyorsulásán túl a henger szögsebességétől (centripetális erő) és szöggyorsulásától is függenek. A forgáspont más megválasztásával az (5.5) és (5.6) egyenletek egyszerűbb alakjait nyerhetjük.



3. ábra. Téglalap keresztmetszetű hengerre vonatkozó főbb jelölések

Egy fontos speciális eset az, amikor a forgáspontot a téglalap súlypontjába helyezzük, azaz az A sarokpont koordinátáit  $\xi_A = -D/(2H)$ ,  $\eta_A = 0,5$  értékre választjuk. Ezeket a koordinátákat az (5.5) és (5.6) egyenletekbe helyettesítve a következő összefüggésekre jutunk:

$$C_D = C_D^* + 2a_{0x} \frac{D}{H}, \quad (5.7)$$

$$C_L = C_L^* + 2a_{0y} \frac{D}{H}. \quad (5.8)$$

Azt kaptuk tehát, hogy amikor a téglalap keresztmetszetű hengert a téglalap súlypontján átmenő,  $\xi$ ,  $\eta$  síkra merőleges tengely körül forgatjuk meg, akkor a kapott (5.7) és (5.8) egyenletek alakja nagyon hasonlít a szimmetriatengelye körül megforgatott körhenger esetén nyert (5.4) egyenletek alakjához. Valószínűleg a geometria szimmetria tulajdonságai miatt az erőtenyezők inercia- és gyorsuló rendszerben értelmezett alakjai között most is csak a henger gyorsulásából származóan adódnak különbségek, tehát függetlenek a test szöggyorsulásától és szögsebességétől. Ezek az összefüggések a téglalap keresztmetszet tetszőleges  $D/H$  értékére fennállnak. Négyzet keresztmetszet esetén ( $D = H$ ) tovább egyszerűsödnek a (5.7) és (5.8) egyenletek.

Egy másik, gyakorlati szempontból fontos eset lehet az, amikor az O forgáspont egybeesik az A sarokponttal, azaz  $\xi_A = \eta_A = 0$ . Ezeket az értékeket az (5.5) és (5.6) egyenletekbe helyettesítve a következő összefüggéseket nyerjük:

$$C_D = C_D^* + 2a_{0x} \frac{D}{H} - \omega^2 \left( \frac{D}{H} \right)^2 - 3 \frac{d\omega}{dt} \frac{D}{H}, \quad (5.9)$$

$$C_L = C_L^* + 2a_{0y} \frac{D}{H} - \omega^2 \frac{D}{H} + 3 \frac{d\omega}{dt} \left( \frac{D}{H} \right). \quad (5.10)$$

Amennyiben a henger nem végez forgómozgást, akkor az (5.9) és (5.10) egyenletek  $\omega = 0$  helyettesítéssel az (5.7) és (5.8) egyenletekre redukálódnak. Négyzet keresztmetszet esetén az (5.9) és (5.10) egyenletek is tovább egyszerűsödnek.

## 6A. ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a dolgozatban összefüggéseket származtattunk a felhajtóerő- és ellenállás-tényezőkre az alábbi a) és b) esetekre vonatkozóan.

- Álló hengeres testhez rögzített inerciarendszer.* A folyadék mozgása, amelybe a testet helyeztük, az idő tetszőleges függvénye (nem azonosan 0 függvény) lehet, amely vagy térben állandó, vagy az origótól mért távolság lineáris függvénye. Tehát a mozgásnak lehet gyorsulása és szöggyorsulása is (pl. rezgés vagy forgás).
- A gyorsuló hengeres testhez kötött gyorsuló rendszer.* A folyadék és a test közötti relatív áramlás ugyanaz mint (a) esetben.

Bár az a) és b) esetben (amelyekre az összefüggéseinket származtattuk) a test és a folyadék közti relatív áramlás kinematikailag azonos, a két rendszerben a testre ható erők különböznek egymástól. Ennek oka a gyorsuló rendszerekben fellépő tehetetlenségi erők. A származtatott egyenletek megadják a két rendszerben a két tényező közötti kapcsolatot, azaz az a) ill. b) rend-

szerkeiben értelmezett felhajtóerő- és ellenállás-tényezők közötti összefüggéseket.

A két rendszerben értelmezett, tetszőleges keresztmetszetű hengeres testekre vonatkozó ellenállás- és felhajtóerő-tényezőkre két általános összefüggést származtattunk. Példaként az általános összefüggéseket a két leggyakrabban előforduló esetre alkalmaztuk, a körre és téglalapra, és származtattuk az összefüggéseket erre a két speciális esetre. Azt találtuk, hogy amikor a testeket a keresztmetszetük súlypontján átmenő tengely körül forgatjuk meg, akkor a forgás nem okoz különbséget az inercia- ill. a gyorsuló rendszerekben fellépő erők között. Ez valószínűleg bármely, egymásra merőleges tengelyekre vonatkozóan szimmetrikus keresztmetszettel rendelkező hengeres testre fennáll, bár ezt ebben a dolgozatban matematikailag nem igazoltuk. Mivel a háromdimenziós hatásokat nem vettük figyelembe, így a [13] és a jelen dolgozatban származtatott összefüggések csak kis Reynolds-számú esetekre érvényesek.

## 6B. CONCLUSIONS

In this paper, relationships have been derived for lift and drag coefficients in two cases, a) and b).

- a) *An inertial system fixed to a stationary cylindrical body.* The motion of the fluid in which the body is placed is an arbitrary function of time not identically zero with a velocity either uniform in space or a linear function of distance from the origin, e.g., can have linear and angular acceleration, such as oscillation or rotation.
- b) *A noninertial system fixed to an accelerating cylindrical body.* The relative flow between fluid and body is the same as in (a).

Although the relative motion between the body and fluid in a) and b) for which the formulae are derived is identical kinematically, the forces acting on the bodies differ in the two systems. This is due to inertial forces that occur in a noninertial system. The formulae derived give the relationships between the two systems for each set of coefficients, i.e., the relationship between the lift coefficients for a) and b), and the same for the drag coefficients.

Two general formulae were derived for the drag and lift coefficients in the two systems for a cylindrical body of arbitrary cross-section. As an example, the formulae are applied to a circular cylinder and to a rectangular cylinder, as the two most frequently investigated bodies, and the relationships were derived for these two specific cases. Interestingly, we found that when these bodies are rotated about their centroids of area there is no force change between inertial and noninertial systems due to rotation. This is probably true for any body with a symmetrical cross-section

about orthogonal axes, although it has not been proved mathematically here. Since three-dimensional effects are ignored, the validity of the formulae derived [13] is limited to low Reynolds number cases.

## IRODALOM

- [1] CHEW, Y. T., Flow past a rotating cylinder. International Conference on Fluid Mechanics, Beijing (1987), pp. 556–560.
- [2] CHEW, Y. T., CHENG, M., LUO, S. C., A numerical study of flow past a rotating circular cylinder using a hybrid vortex scheme. *Journal of Fluid Mechanics* 299 (1995), 35–71.
- [3] MITTAL, S., KUMAR, B., Flow past a rotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* 476 (2003), 303–334.
- [4] MAHFOUZ, F. M., BADR, H. M., Flow structure in the wake of a rotationally oscillating cylinder. *Journal of Fluids Engineering* 122 (2000), 290–301.
- [5] PONCET, P., Topological aspects of three-dimensional wakes behind rotary oscillating cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* 517 (2004), 27–53.
- [6] LU, X.Y., DALTON, C., Calculation of the timing of vortex formation from an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures* 10 (1996), 527–541.
- [7] BLACKBURN, H. M., HENDERSON, R.D., A study of two-dimensional flow past an oscillating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* 385 (1999), 255–286.
- [8] CARBERRY, J., SHERIDAN, J., Forces and wake modes of an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures* 15 (2001), 523–532.
- [9] MUREITHI, N. W., COTOL, I., RODRIGUEZ, M., Response of the Karman wake to external periodic forcing and implications for vortex shedding control. 8<sup>th</sup> International Conference on Flow-Induced Vibration, Paris (2004), Vol. I, pp. 87–92.
- [10] WILLIAMSON, C. H. K., HESS, P., PETER, M., GOVARDHAN, R., Fluid loading and vortex dynamics for a body in elliptic orbits. Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibration, Washington, DC, USA (1998), Paper # 18, pp. 1–8.
- [11] BARANYI, L., Numerical simulation of flow past a cylinder in orbital motion. *Journal of Computational and Applied Mechanics* 5(2) (2004), 209–222.
- [12] BARANYI, L., Sudden jumps in time-mean values of lift coefficient for a circular cylinder in orbital motion in a uniform flow. 8<sup>th</sup> International Conference on Flow-Induced Vibration, Paris (2004), Vol. II, pp. 93–98.
- [13] BARANYI, L.: Numerical simulation of flow around an orbiting cylinder at different ellipticity values. *Journal of Fluids and Structures* (2008), (in press), doi:10.1016/j.fluidstructs.2007.12.006



- [14] DIDIER, E., BORGES, A. R. J., Numerical predictions of low Reynolds number flow over an oscillating circular cylinder. *Journal of Computational and Applied Mechanics* 8(1) (2007), 39–55.
- [15] LEWIS, R.I., Vortex cloud flow modelling of cylinders in orbital motion at low Reynolds numbers and comparisons with some published grid-based CFD predictions. *Journal of Computational and Applied Mechanics* 8(2) (2007), 149–161.
- [16] MENEGHINI, J. R., BEARMAN, P. W., Numerical simulation of high amplitude oscillatory flow about a circular cylinder. *Journal of Fluids and Structures* 9 (1995), 435–455.
- [17] SARPKEYA, T., Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low Keulegan-Carpenter numbers. *Journal of Fluid Mechanics* 165 (1986), 61–71.
- [18] GUILMINEAU, E., QUEUTEY, P., Numerical simulation of turbulent unsteady separated flow around a square cross-section cylinder in the proximity of a solid wall. IUTAM Symposium on Unsteady Separated Flows, Toulouse, France (2002), on a CD ROM, pp. 1–12.
- [19] BLEVINS, R. D., *Flow-Induced Vibration*. Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.
- [20] BARANYI, L., Lift and drag evaluation in translating and rotating non-inertial systems. *Journal of Fluids and Structures* 20 (2005), 25–34.
- [21] BARKLEY, D., HENDERSON, R. D., Three-dimensional Floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* 322 (1996), 215–241.
- [22] PONCET, P., Vanishing of B mode in the wake behind a rotationally oscillating cylinder. *Physics of Fluids* 14(6) (2002), 2021–2023.
- [23] BADR, H.M., DENNIS, S. C. R., Time-dependent viscous flow past an impulsively started rotating and translating circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics* 158 (1985), 447–488.
- [24] CHENG, M., CHEW, Y. T., LUO, S. C., Numerical investigation of a rotationally oscillating cylinder in mean flow. *Journal of Fluids and Structures* 15 (2001), 981–1007.
- [25] SHAMES, I. H., *Mechanics of Fluids*. Second Edition. McGraw-Hill, Auckland, 1982.