Matematikai Közlemények
IV. kötet, 2017

doi:10.20312/dim.2017.05

A hiperbolikus Kepler-egyenlet geometriai szemléletű tárgyalása

Péntek Kálmán
ELTE SEK TTMK Savaria Matematikai Tanszék
pentek.kalman@sek.elte.hu

ÖSSZEFOGLALÓ. A dolgozatban a hiperbolikus Kepler-egyenlet egy egyszerű bizonyítását mutatjuk be geometriai módszerek alkalmazásával.

ABSTRACT. In the paper, we present a simple proof of the hyperbolical Kepler's Equation with the using of the geometrical methods.

1. Bevezetés

1609-ben jelent meg Johannes Kepler (1571-1630) német matematikus és csillagász „Astronomia nova" c. műve. Ebben találhatjuk a később róla elnevezett bolygómozgási törvények közül az első kettő tárgyalását. E korszakalkotó mű 60. fejezetében olvashatjuk a ma már Kepler-egyenletként elhíresült összefüggés levezetését. Kepler a bizonyítás során Szürakuszai Arkhimédesz (Kr.e. 287 – Kr.e. 212) „A konoidokról és szferoidokról", valamint Alexandriai Euklidesz (Kr.e 365(?) – Kr.e. 300(?)) „Elemek" c. munkájára támaszkodott.

A Kepler-egyenlet matematikai összefüggésként az

$$E - e \cdot sinE = \frac{2\pi}{T}(t - \tau) \tag{1}$$

alakban írható fel, ahol E = excentrikus anomália, e = pálya excentricitása, $n = \frac{2\pi}{T}$ = közepes szögsebesség, τ = perihélium átmenet időpontja és végül t = idő. Ezen egyenlet segítségével képesek vagyunk megmondani, hogy a vizsgált, Nap körül keringő égitest pályájának mely pontján tartózkodik egy adott t időpontban.

Kepler nyomán vált világossá, hogy a nagybolygók a Nap körül ellipszis formájú pályákon haladnak, viszont az ő idejében elfogadott nézet volt az, hogy az üstökösök viszont egyenes mentén haladó égitestek. A mozgások lehetséges pályájaként ekkor még nem vetődött fel a Pergai Apollóniosz (Kr.e. 265(?) – Kr.e. 190(?)) által részletesen vizsgált kúpszeletek ellipszisen kívüli két további típusa, a parabola és a hiperbola alakú pályagörbe.

A XVII. sz. második felében már azt vizsgálták a tudósok, hogy milyen erőhatások tartják egyben a Naprendszert, s mi szabja meg a bolygók pályagörbéjének alakját. Edmond Halley (1656-1742) angol csillagász vetette fel az akkor már vitathatatlan szakmai tekintélyű Sir Isaac Newton (1643-1727) angol fizikus, matematikus és csillagász számára, hogy milyen alakú pályákon kell mozognia a bolygóknak a Nap körül, ha a Nap és a vizsgált bolygó közti vonzóerő az égitestek tömegével egyenes, a köztük levő pillanatnyi távolság négyzetével fordítottan arányos.

Newton válasza lényegében az 1687-ben megjelent „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" c. művében olvasható. Newton e könyvében kifejtette, hogy a kezdeti feltételektől függően a bolygópályák alakja az Apollóniosz-féle kúpszeletek bármelyike lehet, tehát az ellipszis alakú pályák mellett szóba jöhetnek a parabola, illetve hiperbola pályák is. Kiderült például a Naprendszer belső térségeibe érkező számos üstökösről, hogy pályája a pontos megfigyelések szerint elnyúlt parabola, s nem pedig a korábban hitt egyenes.

Ezért indokolt, hogy levezessük minél elemibb, alapvetően geometriai módszerekkel az ellipszisre vonatkozó Kepler-egyenlet hiperbola pályákra vonatkozó megfelelőjét is.

2. A Gauss formula

A későbbi részekben felhasználjuk Carl Friedrich Gauss (1777-1855) egy szép összefüggését, amelyet az alábbiakban mutatunk be.

Határozzuk meg egy m_1 tömegű P_1 tömegpont (Nap) körül mozgó m_2 tömegű P_2 tömegpont (bolygó) által a τ_0 és τ időpontok között súrolt pályacikk területét, ha a két égitest között csak a kölcsönös gravitációs vonzóerő hat!

Jusson a kicsiny Δt idő alatt a P_2 bolygó a P_2' helyzetbe, jelölje Δv a P_1P_2 és P_1P_2' rádiuszvektorok hajlásszögét, r pedig a P_1P_2 távolságot, ΔT végül a $P_1P_2P_2'$ elemi pályacikk területét! Ha ezt az alakzatot körcikkel közelítjük, akkor érvényes rá

$$\frac{\Delta T}{r^2\pi} = \frac{\Delta v}{2\pi}, \tag{2}$$

amelynek egyszerű átrendezésével

$$\Delta T = \frac{1}{2}r^2 \cdot \Delta v \tag{3}$$

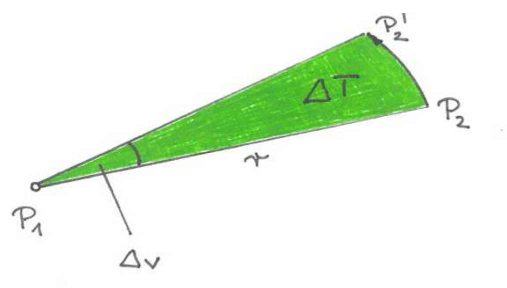
következik. Innen Δt értékkel osztva (3) mindkét oldalát

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{4}$$

adódik, amely $\Delta t \to 0$ határátmenettel eredményezi a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \cdot \frac{dv}{dt} \tag{5}$$

összefüggést (1. ábra).



1. ábra. A Gauss-formula

A feladatunkban vizsgált mozgás az égi mechanika egyik klasszikus alapfeladata, a 2-test probléma, amely mint ismeretes ekvivalens az 1-centrum problémával. E problémát leíró differenciálegyenlet egyik első integrálja az impulzusmomentum tétel, amely alapján a mozgás síkbeli mozgás, s amelyre fennáll az

$$r^2 \frac{dv}{dt} = c \text{ (=konstans)} \tag{6}$$

összefüggés. A pálya egyenlete pedig alkalmas koordináta-rendszerben

$$r = \frac{p}{1+e\cdot\cos v} \tag{7}$$

polárkoordinátás egyenletű kúpszelet, amelynek paraméterére teljesül még a

$$p = \frac{c^2}{\mu} \tag{8}$$

összefüggés, ahol $\mu = k^2(m_1 + m_2)$ és itt k a Gauss-féle gravitációs konstans. A (8) összefüggés egyszerű átrendezésével

$$c = \sqrt{\mu \cdot p} \tag{9}$$

következik, amelynek (6) formulával történő egybevetéséből

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \sqrt{\mu \cdot p} \tag{10}$$

következik. Most az (5) és (10) összefüggésekből

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu p} \tag{11}$$

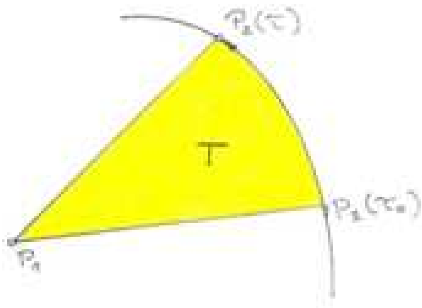
adódik, amelyből

$$dT = \frac{1}{2}\sqrt{\mu p} \cdot dt\ , \tag{12}$$

majd pedig (12) idő szerinti integrálásával a $[\tau_0, \tau]$ időintervallumra kapjuk meg a

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sqrt{\mu p} \cdot (\tau - \tau_0)} \tag{13}$$

összefüggést, amelyet az égi mechanika Gauss-formulájának nevezünk (2. ábra).



2. ábra. A pályaszektor

3. A hiperbolikus Kepler egyenlet

Mozogjon az m_1 tömegű P_1 tömegpont, mint fókuszpont körül hiperbola pályán az m_2 tömegű P_2 tömegpont. A hiperbola pálya paraméteres egyenletrendszere alkalmas koordinátarendszerben

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot cht \\ y &= b \cdot sht \end{aligned}\right\}, \tag{14}$$

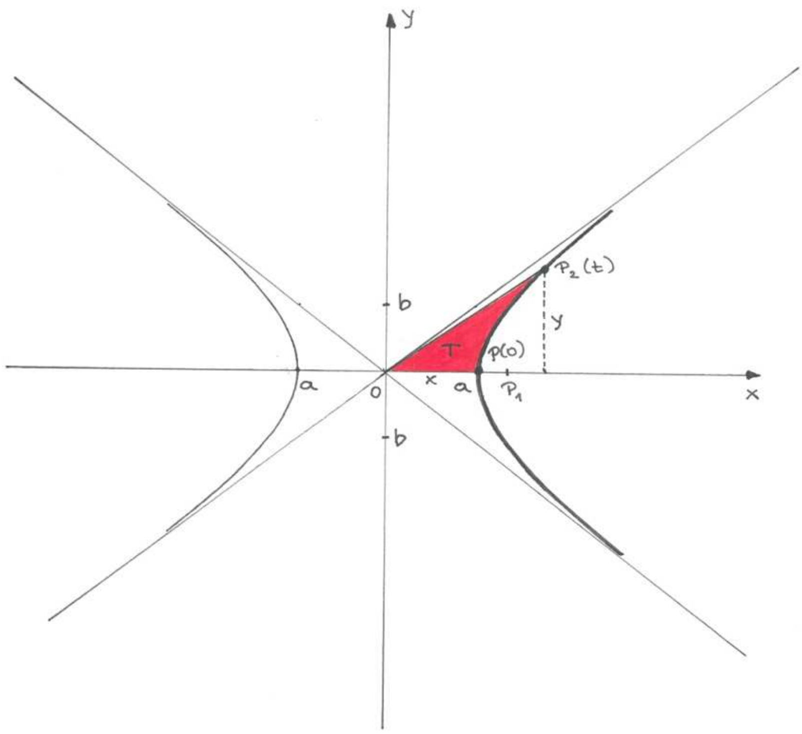
továbbá mivel

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a \cdot sht \\ \frac{dy}{dt} &= b \cdot cht \end{aligned}\right\}, \tag{15}$$

ezért az OPP_2 hiperbolaszektor területe (3. ábra)

$$T = \frac{1}{2}\int_0^t \left(x \cdot \frac{dy}{dt} + y \cdot \frac{dx}{dt}\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^t (a \cdot cht \cdot b \cdot cht - b \cdot sht \cdot a \cdot sht) dt =$$

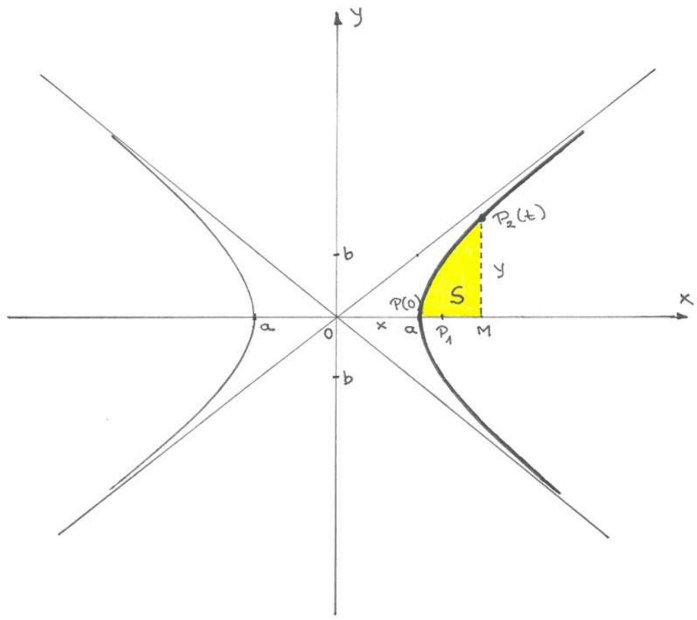
$$= \frac{a \cdot b}{2}\int_0^t \underbrace{(ch^2 t - sh^2 t)}_{1}\, dt = \frac{a \cdot b}{2}[t]_0^t = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot t\,. \tag{16}$$



3. ábra. A hiperbola szektor

A PMP_2 hiperbolaszelet területe (4. ábra):

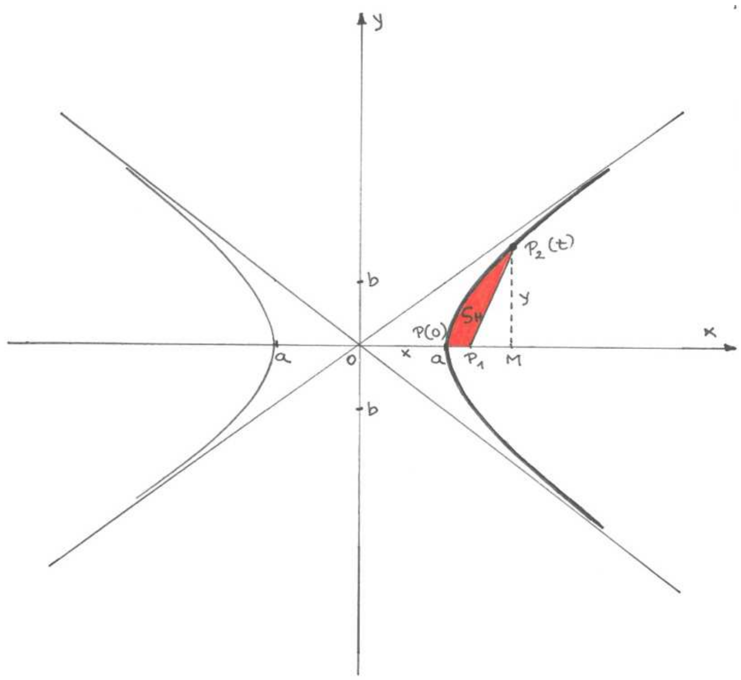
$$S = T_{OMP_2\Delta} - T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot cht \cdot b \cdot sht - \frac{1}{2} a \cdot b \cdot t = \frac{a \cdot b}{2}(cht \cdot sht - t). \tag{17}$$



4. ábra. A hiperbola szelet

A PP_1P_2 S_H szektor területe (5. ábra):

$$S_H = S - T_{P_1MP_2\Delta} = \frac{a \cdot b}{2}(cht \cdot sht - t) - \frac{1}{2}(a \cdot cht - c) \cdot b \cdot sht$$
$$= \frac{a \cdot b}{2} \cdot (cht \cdot sht - t) - \frac{1}{2}(a \cdot cht - ea) \cdot b \cdot sht$$
$$= \frac{a \cdot b}{2}(cht \cdot sht - t) - \frac{a \cdot b}{2}(cht \cdot sht - e \cdot sht)$$
$$= \frac{a \cdot b}{2}(cht \cdot sht - t - cht \cdot sht + e \cdot sht) = \frac{a \cdot b}{2}(e \cdot sht - t). \tag{18}$$



5. ábra. Az S_H szektor

A fentiekben felhasználtuk a kúpszeletek elméletéből közismert eredményeket, amelyek Coxeter (1987) és Hajós (1979) műveiben részletes kifejtésre kerülnek.

Az S_H szektor területét azonban meghatározhatjuk az előző fejezetben bemutatott Gauss-formula alapján is:

$$S_H = \frac{1}{2}\sqrt{\mu \cdot p} \cdot (\tau - \tau_0) = \frac{1}{2}\sqrt{\mu \cdot \frac{b^2}{a}} \cdot (\tau - \tau_0) = \frac{1}{2} b\sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot (\tau - \tau_0). \qquad (19)$$

A (18) és (19) alapján kiszámított S_H kétféle előállítását összevetve

$$\frac{a \cdot b}{2}(e \cdot sht - t) = \frac{1}{2} b \cdot \sqrt{\frac{\mu}{a}} \cdot (\tau - \tau_0) \qquad (20)$$

adódik, amelynek egyszerű azonos átalakításaival

$$e \cdot sht - t = \mu^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{3}{2}} \cdot (\tau - \tau_0) \qquad (21)$$

adódik. Bevezetve az

$$n := \mu^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{3}{2}} \qquad (22)$$

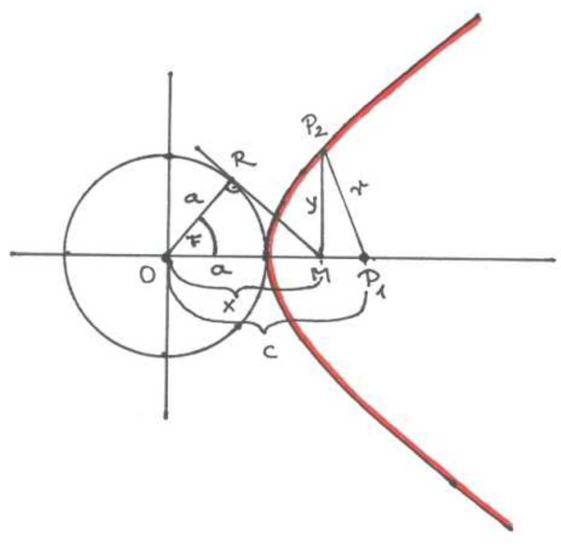
mennyiséget az

$$\boxed{e \cdot sht - t = n(\tau - \tau_0)} \qquad (23)$$

összefüggést nyerjük, amely már lényegében a hiperbolikus Kepler-egyenlet.

Az alábbiakban rámutatunk, hogy a (23) összefüggésben elért eredményünk teljes összhangban áll ugyanezen formula szokásosan alkalmazott, differenciálegyenlet megoldásaként nyert végképlettel. A klasszikus, égi mechanikában követett út részletes számításai megtalálhatók Érdi (1996) és Marik (1989) tankönyvében.

A 6. ábra jelöléseit követve először egy önmagában is érdekes összefüggést bizonyítunk:



6. ábra. A hiperbolikus Kepler-egyenlet szokásos levezetését illusztráló rajz

1. Állítás. Ha $H := \ln tg\left(\frac{F}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, akkor $shH = tgF$.

Bizonyítás. A H mennyiség definíciójából kiindulva

$$e^H = tg\left(\frac{F}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{tg\frac{F}{2}+tg\frac{\pi}{4}}{1-tg\frac{F}{2}\cdot tg\frac{\pi}{4}} = \frac{1+tg\frac{F}{2}}{1-tg\frac{F}{2}}, \tag{24}$$

továbbá

$$e^{-H} = \frac{1}{e^H} = \frac{1-tg\frac{F}{2}}{1+tg\frac{F}{2}} \tag{25}$$

adódik. A (24) és (25) felhasználásával

$$shH = \frac{e^H-e^{-H}}{2} = \frac{\frac{1+tg\frac{F}{2}}{1-tg\frac{F}{2}}-\frac{1-tg\frac{F}{2}}{1+tg\frac{F}{2}}}{2} = \frac{\left(1+tg\frac{F}{2}\right)^2-\left(1-tg\frac{F}{2}\right)^2}{2\left(1-tg\frac{F}{2}\right)\cdot\left(1+tg\frac{F}{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(1+2tg\frac{F}{2}+tg^2\frac{F}{2}\right)-\left(1-2tg\frac{F}{2}+tg^2\frac{F}{2}\right)}{2\left(1-tg^2\frac{F}{2}\right)} = \frac{4tg\frac{F}{2}}{2\left(1-tg^2\frac{F}{2}\right)} = \frac{2tg\frac{F}{2}}{1-tg^2\frac{F}{2}} = tg\left(2\cdot\frac{F}{2}\right) = tgF \tag{26}$$

adódik, s pontosan ez az, amit bizonyítani akartunk.

Ezután ismét az 6. ábra jelöléseit felhasználva, s az imént bizonyított állítást felhasználva belátjuk a következőt.

2. Állítás. A (23) összefüggésben szereplő *t* és az előző állításban bevezetett H paraméterek megegyeznek, azaz $t = H$ teljesül.

Bizonyítás. Az $OMR\Delta$ derékszögű háromszögből

$$\frac{a}{a\cdot cht} = \cos F, \tag{27}$$

azaz

$$cht = \frac{1}{\cos F} \tag{28}$$

adódik. Szintén az $OMR\Delta$ derékszögű háromszögből a Pitagorasz tétel felhasználásával

$$a^2 + (RM)^2 = x^2, \tag{29}$$

vagyis

$$a^2 + (RM)^2 = (a\cdot cht)^2 \tag{30}$$

következik, amelynek egyszerű átrendezésével

$$RM = \sqrt{a^2\cdot ch^2t - a^2} = a\sqrt{ch^2t-1} \tag{31}$$

adódik. Ismét csak az $OMR\Delta$ derékszögű háromszögből (31) alapján

$$\sin F = \frac{RM}{x} = \frac{a\cdot\sqrt{ch^2t-1}}{a\cdot cht} = \frac{\sqrt{ch^2t-1}}{cht} \tag{32}$$

adódik, amelyből (28) és (32) felhasználásával

$$tgF = \frac{\sin F}{\cos F} = cht \cdot \frac{\sqrt{ch^2t-1}}{cht} = \sqrt{ch^2t - 1} = sht \quad (t > 0) \tag{33}$$

összefüggést nyerjük, ezért előző és mostani állításunk összevetéséből felhasználva az $x \mapsto shx$ hiperbolikus függvény szigorúan monoton növekedő voltát

$$shH = tgF = sht \tag{34}$$

következik, amelyből azonnal adódik a bizonyítani kívánt $t = H$ egyenlőség.

Ennek eredményeként felírhatjuk a hiperbolikus Kepler-egyenletet a

$$\boxed{e \cdot shH - H = n(\tau - \tau_0)} \tag{35}$$

szakirodalomból ismert jelölésekben. Ebben az összefüggésben a klasszikus Kepler-egyenlethez hasonlóan a (22) összefüggéssel bevezetett n mennyiség megfelel a közepes szögsebességnek, τ_0 perihélium átmenet időpontjának, τ az időnek, H értelmezését pedig az 1. állításban fogalmaztuk meg.

Irodalomjegyzék

[1] **Coxeter, H. S. M.**, A geometriák alapjai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987.
[2] **Érdi B.**, Égi mechanika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.
[3] **Hajós Gy.**, Bevezetés a geometriába, Tankönyvkiadó, Budapest, 1979.
[4] **Marik M.**, Csillagászat, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1989.