

## ZÁRÓJELENTÉS

**Gazdasági döntések modellezése, 2003-2007, OTKA T043241**

Témavezető: Temesi József

A kutatás eredetileg 4 évre szólt, azonban engedélyt kértünk és kaptunk egy éves hosszabbításra.

A résztvevők köre nem változott, a BCE Operációkutatás tanszék és az MTA SZTAKI Gazdasági Döntések kihelyezett tanszék eredetileg pályázott munkatársaiból állt.

A munkatervhez képest tematikai eltérés nem történt, az ütemezésben természetesen az 5 év alatt előfordultak változások, de minden lényegi munkatervi pontot teljesítettünk. Ezt jól tükrözik a jelentésnek az eredményeket leíró további részei. Ebben a tudományos eredmények szokásos értékelésének megfelelően a referált folyóiratokban megjelent magyar és idegen nyelvű cikkek alkotják a többséget. Megemlíthető azonban, hogy általában az eredményeknek working paper, vagy konferencia előadásbeli előzményei vannak (ezeket az előző részbeszámolók részletezték), mivel a kutatás résztvevői átlagban egy hazai és egy külföldi konferencián adtak elő a kutatási időszakban. Ezen kívül a kutatás témaköreiben szakkönyvek, tananyagok is születtek [9], [25], [39], [54] (illetve a felsorolt könyvekben egyes fejezetek a kutatás eredményeinek alapján íródtak).

A közlemények jegyzéke a kutatás időtartamán belül 54 publikációt tartalmaz. Az ezekben megtestesülő legfontosabb eredmények rövid összefoglalását témakörönként tekintjük át. Mivel az egyes cikkek mellett a nevek (és azok ismétlődése) növelte volna a terjedelmet, ezért a hivatkozásoknál a szerzőket nem szerepeltettük: azok az adott hivatkozásnál találhatóak meg.

### 1. TÖBBSZEMPONTÚ DÖNTÉSI PROBLÉMÁK

A többszemponú döntési problémák megoldásának - mind elméleti, mind gyakorlati vonatkozásait tekintve - nemzetközileg egyik legismertebb módszere az Analytic Hierarchy Process (AHP). A módszer alapja a Saaty-féle sajátvektor módszer, ami a döntéshozatal során létrejövő  $n \times n$ -es méretű ( $n$  pozitív egész szám) pozitív elemű, reciprok mátrixok döntési vektorokkal való közelítését adja meg. A szinguláris érték felbontás (SVD) a mátrix algebra egyik fontos eszköze, amit pl. a főkomponens analízis, kanonikus korrelációs számítás, a Moore-Penrose általánosított inverzek vagy alacsony rangú mátrix approximációk meghatározása során alkalmaznak. A [10] dolgozatban, Gass, S.I. professzorral (University of Maryland) közösen megmutatjuk, hogy az AHP módszertanban a sajátvektor módszer helyettesíthető elméletileg jól megalapozott, SVD-re épülő módszerrel. Az [1], [17] [36] és [45] cikkekben a páros összehasonlítás mátrixok alapján történő súlyozási módszerek közül a legkisebb négyzetes feladatok (LSM) új megoldási módszere található a  $3 \times 3$ -astól a  $8 \times 8$ -as mátrixméretig. A minimalizálandó nemlineáris célfüggvény nemkonvexitása miatt az optimumhely általában nem egyértelmű. A feladat megoldására korábban használatos Newton-iterációs technikáktól eltérően a tárgyalt módszerek alkalmasak a páros összehasonlítás mátrixok legkisebb négyzetes becslésének mint optimalizálási feladatnak az összes lokális és globális minimumhelyének meghatározására. A tapasztalatok alapján a  $3 \times 3$ -as mátrixok esetére használható a rezultáns-módszer és a Gröbner-bázisok,  $3 \times 3$ -as és  $4 \times 4$ -es esetben az általánosított rezultánsokat alkalmazó Fermat szoftver,  $8 \times 8$ -as méretig pedig a homotópiás módszer.

A [46] cikkben néhány inkonzisztencia mérőszámot vizsgálunk meg és hasonlítunk össze. Megmutatjuk, hogy a Saaty által definiált, maximális sajátértéken alapuló mérőszám a legtöbb esetben nem detektálja az inkonzisztencia lehetséges forrását. Feltárjuk továbbá a véletlen módon generált páros összehasonlítás mátrixok maximális sajátértékének korábban nem vizsgált tulajdonságait, például a maximális mátrixelemtől való erős függését. Ugyancsak az inkonzisztencia és a páros összehasonlítások témakörben jelent meg a [40] cikk, amely javaslatokat is megfogalmaz a konzisztens döntés meghozatalához.

## **2. DÖNTÉSTÁMOGATÁS, ALKALMAZÁSOK**

A természeti erőforrásokkal kapcsolatos döntéshozatalnál szükség van az ökológiai és a környezeti információk integrálására, és ezen a területen még vannak megoldandó információtechnológiai feladatok. Szakmai fórumokon természeti erőforrásokkal, illetve információtechnológiával foglalkozó kutatók és menedzserek többek között a döntéstámogatás eszközeivel, az adatok bemutatásával, megfelelő indikátorok kidolgozásával kapcsolatos információtechnológiai feladatok megoldását tartották a legfontosabbnak az ökológiai és a környezeti kérdésekkel foglalkozó döntéshozók számára. Javaslatok születtek a modellezés és szimuláció, az adatminőség-biztosítás, az információk integrálása, valamint az emberi és társadalmi szempontokat is figyelembe vevő további informatikai kutatásokra. [21], [23].

A SIADCERO EU projekt keretében játékelméleti modelleket alkalmaztunk klímaváltozási tárgyalásokkal kapcsolatosan. Különböző megoldási koncepciót, úgy, mint a Nash egyensúlyt, a reakciófüggvényes egyensúlyt, a korrelált egyensúlyt és az alkumegoldást alkalmaztuk a modellezés és a számítások során. Speciális méretcsökkentő eljárást dolgoztunk ki arra az esetre, amikor a játék fája túl nagyvá válik. Bevezettük és alkalmaztuk a fakorrelált egyensúly fogalmát is. Ismertetésre kerül a különféle számítások elvégzésére kifejlesztett Excel add-in, amely a megfelelő nemlineáris programozási feladatok megoldó algoritmusainak implementációját is magába foglalja. Mintaként bemutatjuk az egyik speciális tárgyalási forgatókönyvvel kapcsolatos számításokat. [22]

A [15] és [28] cikkek a környezetvédelem területén a levegőszennyezés modellezését elemzik. Egy másik alkalmazási projektet leíró cikkben a szerzők a gazdaságfejlesztési tenderek hatékonyságának mérését mutatják be a WINGDSS döntéstámogató modell segítségével végezték el, az eredményeik a Central European Journal of Operations Research különszámában jelentek meg [32].

Stratégiai döntések támogatásáról szól a multinacionális cégekre vonatkozó kutatások eredményeit bemutató tajvani konferencián elhangzott és a konferenciakötetben megjelent [41] előadás, amely a vállalati gyakorlatban előforduló komplex döntési helyzetekben alkalmazható soft modelling eszközöket tárgyalja és bemutatja a szakirodalomban és a konzultációs gyakorlatban elérhető döntéstámogató szoftvereket is.

## **3. NEMLINEÁRIS OPTIMALIZÁLÁS**

A [34] és a [35] dolgozatokban Fenchel 1953-ból származó nívóhalmaz problémájának a megoldása található sima esetben. Az alapprobléma a következő: mi a szükséges és elegendő feltétele annak, hogy egymásba ágyazott, konvex halmazsereg konvex függvény alsó nívóhalmazait adja? A főtétele bizonyítása differenciálgeometriai eszközök használatára épül, nevezetesen, a sima sokaságokon értelmezett görbe geometriára (geometry of paths). Ez a megközelítés új eredményekre vezetett a kép-analízisben a konvexszerű és általánosított konvexszerű leképzésekkel kapcsolatosan (angol megfelelői: convexlike and generalized

convexlike mappings), és lehetővé tette a pszeudokonvex függvények - az analitikus mechanikából származtatott - egy új osztályának a szükséges és elegendő feltételekkel történő geometriai jellemzését. A [33] dolgozatban a Fenchel nívóhalmaz problémájával kapcsolatos eredmények összefoglalása található. Az [51] és [53] cikkekben kvadratikus törtfüggvények pszeudolinearitását jellemezzük

A [18] dolgozatban, Crouzeix professzorral (Université Blaise Pascal) közösen, a mikroökonómia fogyasztás elméletének feltételes volumenmaximum-feladatát és az abban szereplő közvetlen és közvetett hasznossági függvényeket vizsgáljuk Marshall-féle keresleti függvény létezése esetén. A lineáris parciális differenciál egyenletek megoldhatóságát jellemző Frobenius tétel továbbfejlesztésével differenciálható pszeudomonoton leképezések integrabilitására adunk feltételt és az eredmény közgazdasági következményét vizsgáljuk a nyilvánított preferenciák témakörében.

A Nash-program olyan játékelméleti kutatási irány, amelynek az a célja, hogy egy játék minden axiomatikusan meghatározott kooperatív megoldását egy észszerű nemkooperatív alkujáték Nash-megoldásaként állítsa elő. A Forgó (1983) által definiált L-Nash megoldást a Nash-alkumegoldások határértékeként kapjuk, ha az egyet nem értés büntetésének mértéke egy adott rögzített irányban a végtelenhez tart. Az eredményeket Forgó és Szidarovszky (2003) az axiomatizálással és a többkritérium döntésekkel való kapcsolat kimutatásával egészítette ki. Ebben a cikkben nemlineáris programozási megfontolások alkalmazásával speciális kétszemélyes alkujátékok esetén véges korlátokat adunk az egyet nem értés (disagreement) büntetésére. Ezzel lehetővé válik, hogy a véges egyet nem értési ponttal rendelkező Nash-alkuproblémákra tervezett implementációs modelleket alkalmazni lehessen az L-Nash megoldás előállítására is. A problémák olyan osztályára, ahol ez a módszer nem működik Rubinstein váltakozó ajánlatteles alkumodelljének megfelelő adaptációjával megmutatjuk, hogy az az L-Nash megoldást is aszimptotikusan implementálja. Ha a büntetést az egyik játékos döntési változójaként tekintjük, akkor a Howard-féle játék módosítása szintén implementálja az L-Nash megoldást. [47]

Az optimalizálás gyakorlati alkalmazásainak túlnyomó részében a megoldandó optimalizálási feladatokat modellezési nyelvek vagy más automatikus modell generátorok szolgáltatják. Ezek az eszközök nem képesek a feladatok strukturális vizsgálatára, ezért az optimalizáló szoftverek számára generált feladatokban gyakran jelentős redundancia van jelen mind a primál, mind a duál oldalon. Ezen redundanciák előzetes kiszűrése fontos lépés az optimalizáló szoftverek számára. A [4] cikkben olyan, részben új módszereket ismertetünk, melyek hatékonyak a feladatok strukturáinak felismerésében és a redundancia kiszűrésében. Módszereinket lineáris, kevert egész értékű és kvadratikus feladatokra fejlesztettük ki és ilyen típusú feladatokon teszteltük. A [27] dolgozatban azt vizsgáljuk, hogyan viselkedik strukturálisan a nemszeparábilis kvadratikus feladatok ritkássága belső pontos algoritmusokban. Megmutatjuk, hogy a lineáris programozásra kifejlesztett ritkásságot kezelő heurisztikák [49] hogyan vihetőek át a kvadratikus programozás esetére belső pontos algoritmusokban. A belső pontos módszerek iterációi közben nagyméretű, szimmetrikus indefinit rendszerek megoldását kell meghatároznunk, amit a gyakorlatban Cholesky-szerű szimmetrikus dekompozícióval oldunk meg. A [30] dolgozatban ennek a műveletnek a modern számítástechnikai környezet tulajdonságait messzemenőig kihasználó implementációs módszertanát írjuk le, numerikus kísérteken keresztül igazolva módszereink hatékonyságát.

A belső pontos módszerek implementációjának alapvető lépése a kereső irány meghatározása, melyhez ortogonális projekciókat kell számítani, amely számítások a gyakorlatban Cholesky dekompozícióval történnek. Lényeges tehát, hogy a Cholesky dekompozíció számítása során megfelelő numerikus pontosságot érjünk el. A [29] dolgozatban azt vizsgáljuk, hogy a feladat algebrai tulajdonságai milyen hatással vannak ezen dekompozíció

pontosságára. Megmutatjuk, hogy míg az optimalizálási feladatok degeneráltsága kezelhető a Cholesky faktorizáció egy módosított változatával, addig a rosszul skálázottság a jelenlegi módszerekkel nem megoldható problémákhoz vezethet. A [25] dolgozatban egy regularizációs eljárást írtunk le, mely az ilyen esetekben sikeresen alkalmazható. Megadtuk az eljárás konvergenciájának kritériumait, és megmutattuk, hogy a konvergencia relaxációs módszerekkel tovább javítható.

#### **4. GLOBÁLIS OPTIMALIZÁLÁS**

Sima optimalizálási feladatok megoldása a témája Rapcsák T. az *European Journal of Operational Research* (143 (2002) 365-376) folyóiratban megjelent cikkének. Ehhez a témához kapcsolódik az [50] dolgozat, ahol érdekes és fontos statisztikai optimalizálási feladatok, pl. főkomponens analízis, statisztikai vizualizálás, SVD, a lineáris algebra egyik alaptétele, a mátrix spektrál tétel és dinamikus rendszerek strukturális stabilitási kérdései vannak visszavezetve Stiefel sokaságon történő optimalizálásra, ahol a fő kérdés az, hogyan lehet optimális ortogonális mátrixokat optimalizálási módszerrel meghatározni. Ezen a feladatosztályon belül fontos részosztály az, ahol  $n \times n$ -es szimmetrikus mátrixok  $k$ -dimenziós domináns altereit kell meghatározni ( $k$ -dimenziós domináns altérnek nevezzük a  $k$  legnagyobb sajátértékhez tartó sajátvektorok által kifeszített alteret). A dolgozatban erre a feladatosztályra adunk meg globális optimalitási feltételeket. A [7] és a [16] dolgozatokban globális optimalizálási szempontból vizsgáljuk a Stiefel sokaságokon értelmezett optimalizálási feladatokat és néhány globális optimalizálási módszer teszt eredményeit ismertetjük, majd ismert globális optimumponttal és függvényértékkel rendelkező teszt feladatokat adunk meg.

Többszemponútú döntési módszerekben fontos szerepet játszanak a páros összehasonlítási mátrixok döntési alternatívákhoz rendelt fontossági súlyok meghatározásánál. A javasolt eljárások egy része a páros összehasonlítási mátrix konzisztens mátrixszal való közelítésén alapul. A dolgozatban egy ilyen közelítési feladatot tekintünk a legkisebb négyzetek értelmében. Ez a feladat általában nemkonvex, és nehezen megoldható, mivel számos lokális optimummal is rendelkezhet. A klasszikus logaritmikus transzformáció alkalmazásával átírjuk a feladatot egy speciális egyváltozós függvényen alapuló szeparábilis programozási feladat alakjára. Elégséges feltételeket adunk a célfüggvény konvexitására vonatkozóan, ilyen esetben a feladat lokális kereső technikákkal is megoldható. Az általános esetre egy korlátozás-és-szétválasztás módszert javasolunk. Számítási tapasztalatokat is ismertetünk. [48].

#### **5. SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁS**

A nemlineáris programozásban alkalmazott belsőpontos módszerekhez tartozó proximális pont módszerben a Kullback-Leibler relatív entrópiát mint az egymást követő megoldásokhoz tartozó célfüggvény értékek eltérését mérő függvényt használva oldottunk meg valószínűséggel korlátozott lineáris programozási feladatot abban az esetben, amikor a feladatban szereplő valószínűségeloszlás normális és 10-nél nem nagyobb dimenziójú. [2]. A számítógépes program FORTRAN nyelven íródott.

Az entrópiaszerű proximális pont módszerek esetében vizsgáltuk a módszer konvergenciáját különböző eltérés függvények ( Csiszár-féle  $\varphi$ -divergencia illetve Bregman függvények) alkalmazásakor és összefoglaltuk az eredményeket a [24] dolgozatban. A kutatómunka eredményei bekerültek a BCE Biztosítási Szakirány hallgatóinak készült jegyzetnek az eszköz-kötelezettséggel foglalkozó fejezetébe [25].

Előkészületben van egy dolgozat, amelyben entrópiaszerű eltérésfüggvényeket alkalmazunk IBNR kártartalék becslésére. Erről a lehetőségről konzultáció történt 2006-ban, Leuvenben: 10th International Congress on Insurance: Mathematics and Economics.

## 6. STATISZTIKAI MÓDSZEREK ELMÉLETI VIZSGÁLATA ÉS ALKALMAZÁSAI

A [13] tanulmány a klasszifikációt három kiválasztott jellemző alapján képzett típusok összehasonlításával végezte el, módszertani szempontból megmutatva, hogy az egyes távolsági és hasonlósági mérőszámok a számítási eltérések ellenére részben azonosan értékelik az összehasonlítandó egyéneket, típusokat egymáshoz viszonyított helyzetét. Ezért a különbözőségek sorrendjét felhasználó összevonó hierarchikus klaszterezés eredménye több esetben megegyezett. A felvázolt osztályozás stabilitását gyengítette az a tény, hogy a kezdeti összevonás önkényes volt.

Ha  $p$  számú tulajdonságot vizsgálunk, akkor a mutatók közötti választáskor először eldöntjük, hogy hasonlóságot vagy távolságot kívánunk mérni, és fontos-e, hogy a mutatónak legyen felső határa. Továbbá választhatunk olyan mutatót, amely nagyobb súlyt ad az egyezéseknek vagy a különbségeknek, esetleg teljesen kizárjuk azokat a jellemzőket, amelyekkel egyik megfigyelés sem rendelkezik. Az SPSS által felkínált 27 mérőszám közül rögzített felső határral is rendelkező távolságmértékek csoportja 5 mutatót tartalmaz, a felülről korlátos 13 hasonlósági mérték egy része pedig a különbözőséget (is) méri, ha nagysága 0 és  $-1$  között van.

A különböző csoportba sorolt mérőszámok között találunk olyanokat is, amelyek egy konkrét adathalmazra azonos távolságrendet adnak, mert egymásból származtathatók, ezért a klaszterezés eredményét nem befolyásolják. A klaszterezési eljárások a csoportok (klaszterek) közötti távolság mérése szerint hétfélék lehetnek. Ez viszont tovább emeli az előállítható eredmények számát. A hierarchikus összevonási folyamat minden esetben végbemegy, akkor is, ha a felvetett probléma rosszul strukturált abban az értelemben, hogy nincsenek domináns kapcsolódások, sűrűsödések a háromdimenziós térben. Ez is rávilágítja a figyelmet arra, hogy nagyon körültekintően kell bánnunk a többváltozós statisztikai módszerekkel. A kapott eredményekből mindig csak annyi következtetést vonjunk le, amennyi megalapozott és szakmai tudással ellenőrizhető.

A [12] cikk a statisztikai elemzések új megközelítését feszegeti, azáltal, hogy a munka során a szokásos hipotézis-tesztelés sorrend elé helyezi annak a lehetőségnek a kihasználását, amit az új, számítógépek által támogatott technikák jelentenek az adatokban rejlő összefüggések feltárására.

Az alkalmazások többsége a biztosítás és a nyugdíjrendszer területeit érinti. A [3] cikk néhány általános biztosítási mutató segítségével megvizsgáljuk a biztosítási üzletág fejlődési tendenciáját 1992 és 2000 között az egyes európai országokban, majd az élet- valamint a nem-élet biztosítás adatait felhasználva a hasonló országokból nagyobb csoportokat képezünk és többváltozós statisztikai módszerekkel feltárjuk a köztük lévő belső különbségeket. A szerző arra is keresi a választ, hogy fedezhető-e a fejlett gazdaságokban a hosszabb élettartam miatt növekvő nyugdíjigény azzal, ha a jobb fejlődési kilátású, de magasabb ország-kockázatú gazdaságokba fektetnek be, azaz a demográfiai összetétel valamint a befektetési kockázat alapján értékelve az országokat valóban két markánsan elkülönülő csoportot kapunk-e.

Egy egészségügyi alkalmazásokat tárgyaló kötetben a [26] tanulmány ad áttekintést a várható kockázatok elemzésében használatos Bayes-i modellről, ahol ismert eloszlások mellett vagy tisztán empirikus adatokból is elvégezhető a Bayes-i becslés. A mintabeli és a mintán

kívüli információk kombinálásával számított megbízhatósági tényezővel becsülhető a következő időszak bekövetkezések száma vagy a kezelés hatékonysága.

A [27]-ben publikált kutatás középpontjában annak a kérdésnek a tanulmányozása állt, hogy az 1990-es években két lépésben végrehajtott nyugdíjreform és a hosszabbodó várható élettartam miatt bekövetkező csökkenő halálozás milyen hatást gyakorol a – három pilléressé alakított – nyugdíjrendszer stabilitására. Az 1993-2003 közötti vizsgált periódusban jellemző az alacsony foglalkoztatási ráta. A magánpénztári hozamok csökkenő szintje az egyes években (200-2003) negatív reálhozamot eredményezett. Így a nyugdíjrendszerek befizetési oldalán jelentős hiány keletkezett. A másik hatás a hazánkban is jelentkező, bár a fejlett országokétól elmaradó mértékű várható élettartam emelkedés. A modell a fenti hatások eredőjeként növekedő nyugdíj-alap hiányt becsül a következő 50 évre.

Ebben a sorban a legújabbak azok a cikkek, amelyek a magánnyugdíjak közötti választásról [42], illetve a magyar öngondoskodás sajátosságairól szólnak [43], [44], részben elméleti modellezési, részben adatelemzési módszereket felhasználva

A sokváltozós statisztikai eszközök egy más területen történő alkalmazása látható a [18] cikkben, a készletberuházások makroökonómiai jellemzéséről írt cikkben, ahol azt vizsgálták, hogyan lehet klaszterezni az országokat, ha több különböző időpontra van adatunk, de közben számos strukturális változás történt, ezért a klasszikus idősoros modellek nem alkalmazhatóak.

Budapest, 2007. február 22.

Temesi József  
témavezető